

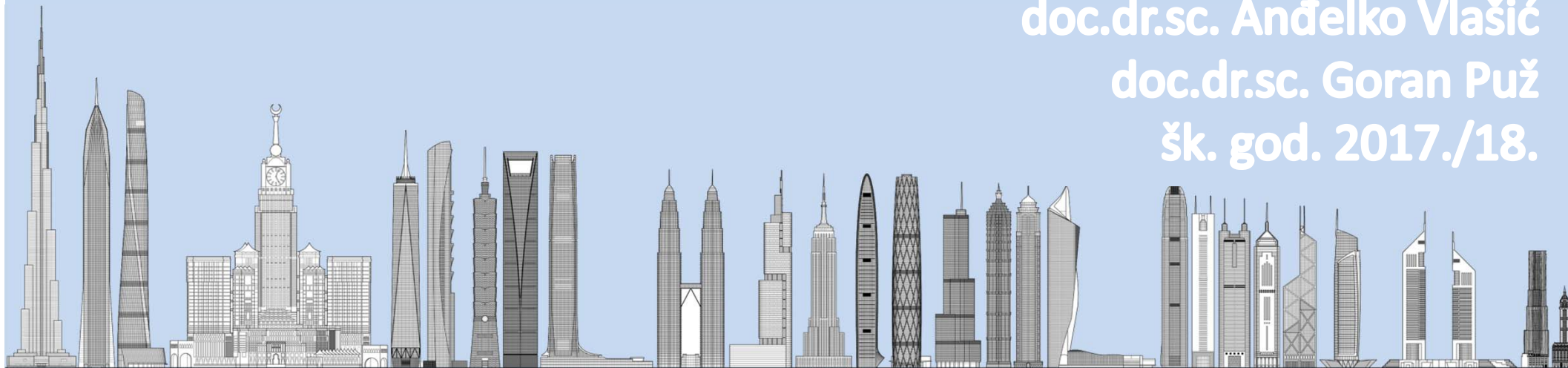
Građevinski Fakultet
Sveučilište u Zagrebu

VISOKE GRAĐEVINE

12. Predavanje

Numeričko modeliranje

doc.dr.sc. Anđelko Vlašić
doc.dr.sc. Goran Puž
šk. god. 2017./18.



1. Pristup proračunu
2. Ponašanje visokih zgrada
3. Modeliranje za približni preliminarni proračun
4. Modeliranje za "točni" konačni proračun
5. Postupci redukcije
6. Primjeri numeričkih modela

Pristup proračunu

- Za odgovor zgrade na vanjsko djelovanje mjerodavni su dijelovi (elementi), čije opterećenje uzrokuje deformaciju građevine.
- U idealnoj situaciji u proračunu se uključuju samo konstrukcijski dijelovi
- U stvarnosti i ne-konstrukcijski dijelovi (stepenice, pregrade i obloga) bivaju opterećeni i doprinose ponašanju zgrade
- Pretpostavlja se da je utjecaj ne-konstrukcijskih dijelova mali zbog pojednostavnjenja proračuna, a to je i na strani sigurnosti
- Zanemarivanjem ne-konstrukcijskih dijelova i manje važnih konstrukcijskih dijelova proračun visoke zgrade može se reducirati na prihvatljivu veličinu (opseg).
- Za vrlo velike ili složene konstrukcije može biti potrebno i dalje smanjiti proračunski model simulirajući neke konstrukcijske sklopove jednostavnijim analognim zamjenskim elementima.

Približni preliminarni proračun

- Proračuni za početne faze projekta koriste se za:
 - brzu usporedbu funkcioniranja alternativnih rješenja za nosivi sklop
 - ocjenu djelotvornosti pojedinog nosivog sustava
 - određivanje deformacija i unutarnjih sila u glavnim konstrukcijskim elementima odabranog nosivog sklopa za provedbu preliminarnog dimenzioniranja zbog aproksimacije troškova
- Formiranje modela mora biti brzo i takvo da se brzo mogu dobiti rezultati, koji su pouzdane aproksimacije konačnih vrijednosti.
- Pojednostavnjenja usvojena za preliminarni model uključuju:
 - Aproksimacije elemenata konstrukcije
 - Pojednostavnjenje opterećenja
- I sa grubim aproksimacijama za pojednostavnjenje konstrukcije i opterećenja, općenito se očekuje da preliminarni proračun iskaže rezultate za pomake i unutarnje sile glavnih konstrukcijskih elemenata, koje se razlikuju za manje od 15% od rezultata točnog proračuna!

- **Početni model u preliminarnom proračunu pojednostavnjuje se, kako slijedi:**
 - A. Uključenje samo glavnih konstrukcijskih elemenata i to:**
 - stropne ploče kao krute dijafragme
 - stupovi, zidovi i elementi jezgre kao štapni elementi
 - nosači i grede kao štapni elementi
 - B. Zanemaruje se doprinos sekundarnih konstrukcijskih elemenata ukupnoj krutosti:**
 - stepenice
 - pregrade
 - obloga i njen konstrukcijski sustav (ostakljene plohe i sl.)

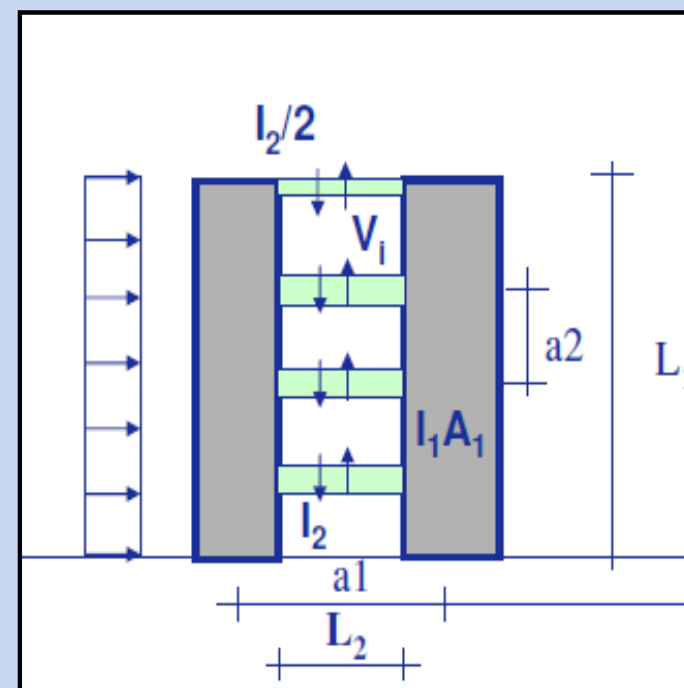
- **Kod vrlo visokih zgrada mogu biti potrebna dodatna pojednostavnjenja:**
 1. zamjena složenih konstrukcijskih sklopova jednostavnijim elementima
 2. umetanje brojnih zglobova u pretpostavljenim točkama infleksije greda i stupova, da bi se višestruko statički neodređeni okvir pretvorio u statički određeni sustav
 3. korištenje obične konzole za simuliranje složenog okvira
 4. pretpostavka da su svi katovi jednake visine
 5. razmazivanje greda po visini, za omogućavanje primjene rješenja mehanike kontinuuma
 6. horizontalna opterećenja zadana kao kontinuirana po visini zgrade umjesto na diskretnim spojevima i sl.

- **Važno je iskustvo temeljem koga se vrlo brzo mogu naći približne veličine pomaka i unutarnjih sila u bitnim konstrukcijskim elementima za njihovo dimenzioniranje.**

Ponašanje visokih zgrada

- **Visoka zgrada je zapravo vertikalna konzola, opterećena vertikalnim djelovanjima od gravitacije i poprečnim djelovanjima od vjetrova i potresa.**
- **Gravitacijsko opterećenje na stropne ploče prenosi se horizontalno do vertikalnih stupova i zidova i dalje do temelja.**
- **Horizontalna opterećenja zadaju se na razini svakog kata preko poprečne sile, momenta savijanja i momenta torzije (najveći su u podnožju zgrade).**
- **Otpornost konstrukcije na vanjske momente savijanja realizira se savijanjem vertikalnih elemenata i njihovim preuzimanjem aksijalnih sila u složenom djelovanju pojaseva „vertikalne rešetke“.**
- **Ispuna te rešetke su grede, ploče i spregovi, kojima se realiziraju posmične veze. Što je kruća ispuna veći su vanjski momenti savijanja koji se preuzimaju aksijalnim silama u vertikalnim elementima, i time se naravno ostvaruje kruća i učinkovitija konstrukcija.**

- Horizontalnom posmiku na svakoj razini odupire se posmik u vertikalnim elementima i horizontalna komponenta uzdužne sile u bilo kojem elementu dijagonalnog sprega na toj razini.
- Torziji se jednako tako odupiru vertikalni elementi sa posmikom i elementi sprega preko horizontalnih komponenti uzdužnih sila u bilo kojem elementu dijagonalnog sprega.
- Iako zanemareni u preliminarnoj fazi proračuna, stepenice i servisna okna doprinose otpornosti na posmične sile i sile od torzije krivljenja.
- Otpornost zgrade na savijanje i torziju ovisi o vertikalnoj posmičnoj akciji između povezanih zidova i/ili okvira.



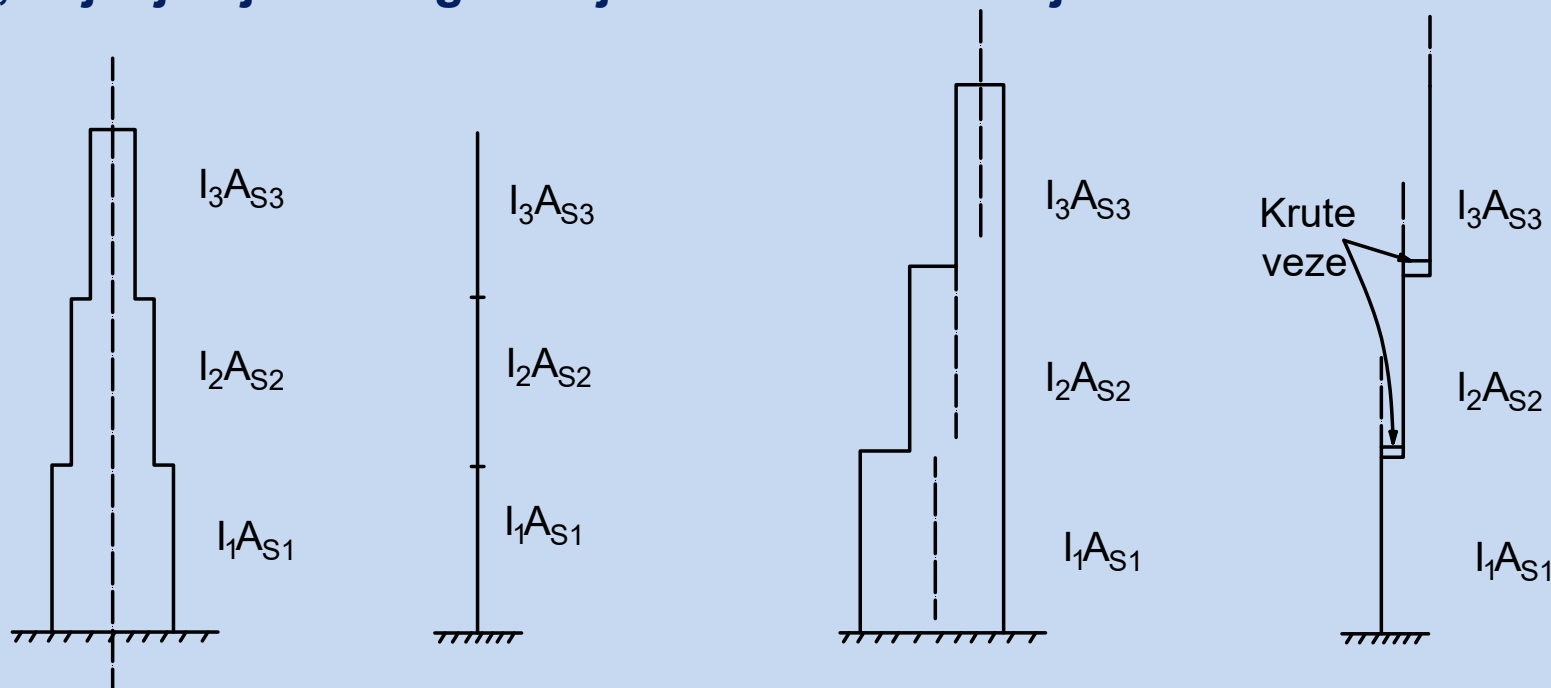
Modeliranje za približni preliminarni proračun

Pretpostavke za preliminarni proračun:

1. **Gradiva – pretpostavka:** linearno elastična – moguća superpozicija naprezanja i pomaka
2. **Sudjelujuće komponente – pretpostavka:** samo osnovne komponente sudjeluju u ponašanju zgrade
3. **Stropne ploče – pretpostavka:** krute u svojoj ravnini – horizontalni pomaci svih vertikalnih elemenata na razini stropa mogu se odrediti kao funkcija rotacija u horizontalnoj ravnini i pomaka stropne ploče kao krutog tijela
4. **Zanemarive krutosti – konstrukcijski elementi relativno male krutosti zanemaruju se** (često je to poprečna fleksijska krutost ploča, torzijska krutost stupova, greda i zidova, krutost zidova oko slabije osi)
5. **Zanemarivi pomaci (deformacije) – sve deformacije, male ili malog utjecaja se zanemaruju** (aksijalne deformacije greda, posmične deformacije i deformacije od savijanja u ravnini stropnih ploča, aksijalne deformacije stupova kod zgrada male i srednje visine, itd.)
6. **Raspucavanje – utjecaj raspucavanja betona uslijed vlačnih savojnih naprezanja pretpostavlja se uzeti u obzir reduciranjem momenta tromosti tog elementa; npr. moment tromosti greda smanjuje se na 50%, a stupova na 80% vrijednosti neraspucalog elementa**

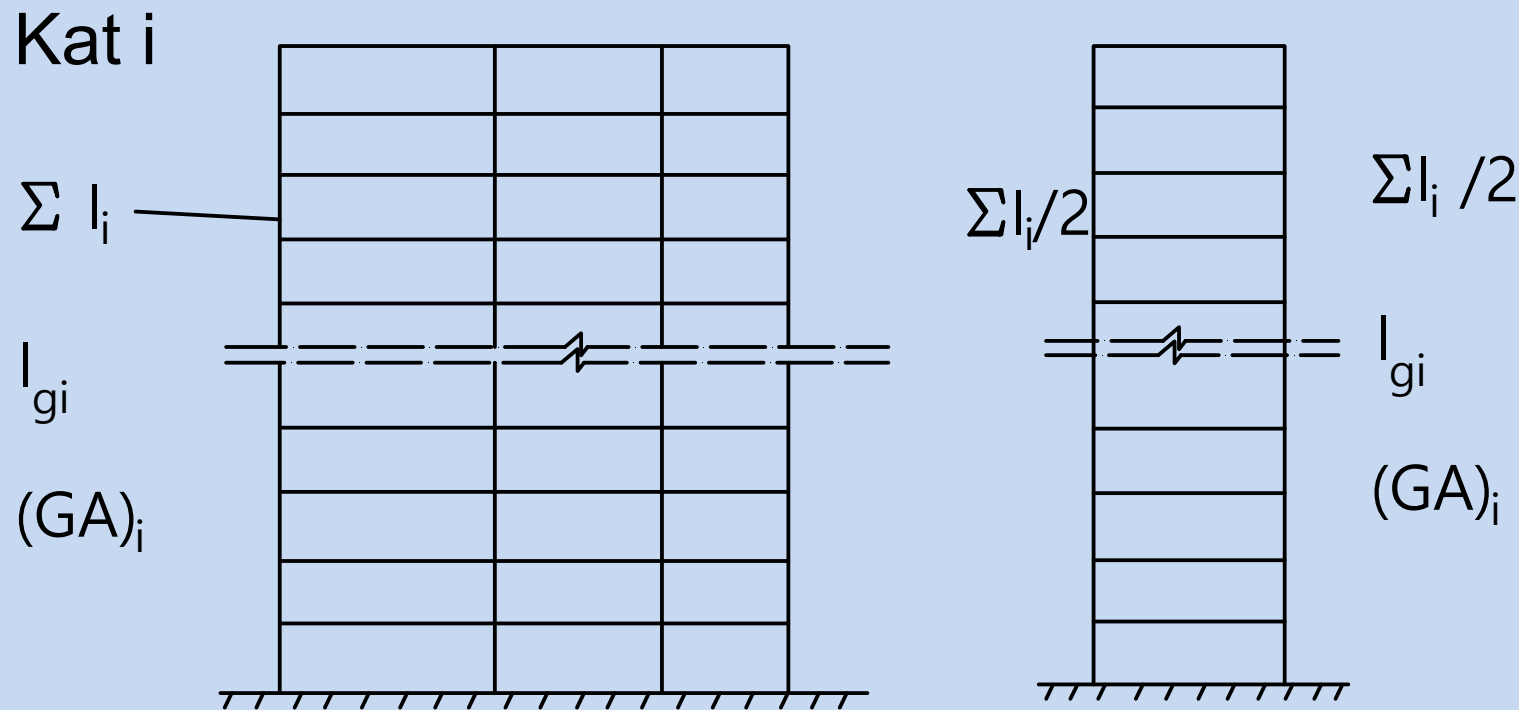
Aproksimativno modeliranje portala

- Portale u ovom kontekstu čine zidovi ili okviri otporni na savijanje ili njihova kombinacija.
- Aksijalno centrični zid (slika lijevo) može se modelirati kao ekvivalentni stup smješten u težištu zida. Dijelovima elemenata stupa pridaju se moment tromosti (I_i) i posmična površina (A_{si}) odgovarajućih dijelova zida. Svaki i predstavlja jedan ili više katova po visini.
- Ako težišna os zida nije centrična (slika desno) ekvivalentni stupovi na svojim osima spojeni su horizontalno krutim vezama.
- Naprezanja zida dobivaju se iz momenata savijanja i posmičnih sila zamjenskog stupa, koji djeluju na odgovarajuće statičke značajke zida.



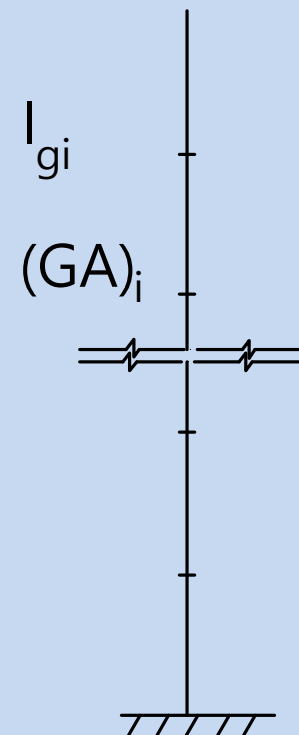
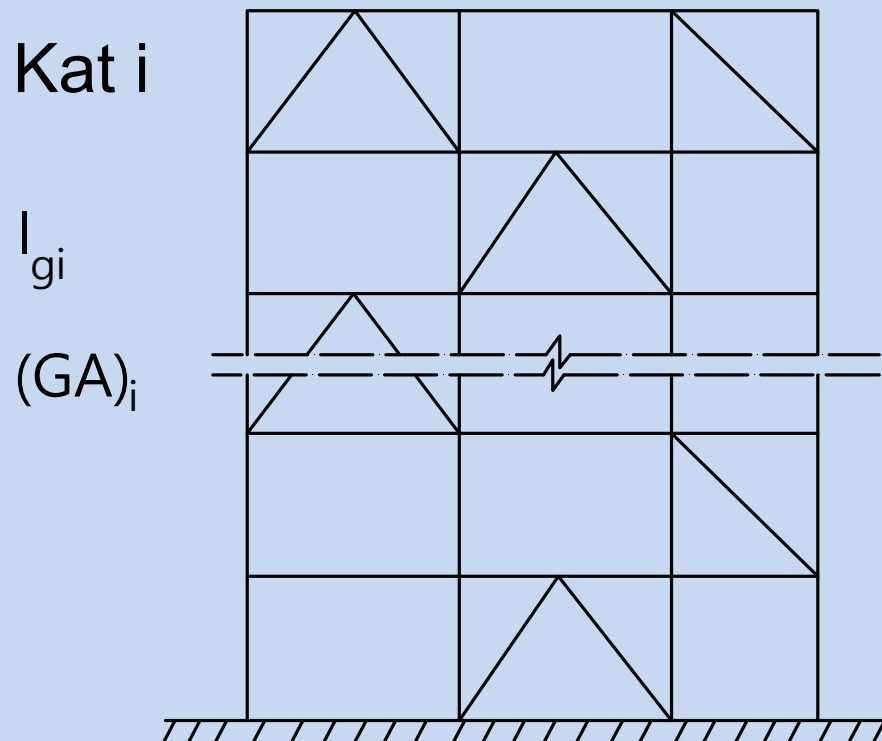
Numeričko modeliranje | Modeliranje za preliminarni pror.

- Kruti okvir preko više polja (slika lijevo) se može relativno točno modelirati s ekvivalentnim krutim okvirom preko jednog polja (slika desno).
- Kriteriji za ekvivalentnost su posmična krutost GA_i , zbroj momenata tromosti stupova i greda I_i i ukupna savojna krutost I_{gi} sustava (definirana geometrijskim odnosima i odnosima krutosti greda i stupova)
- Ti parametri na svakoj razini su jednaki za ekvivalentni okvir preko jednog polja kao i za okvir preko više polja.



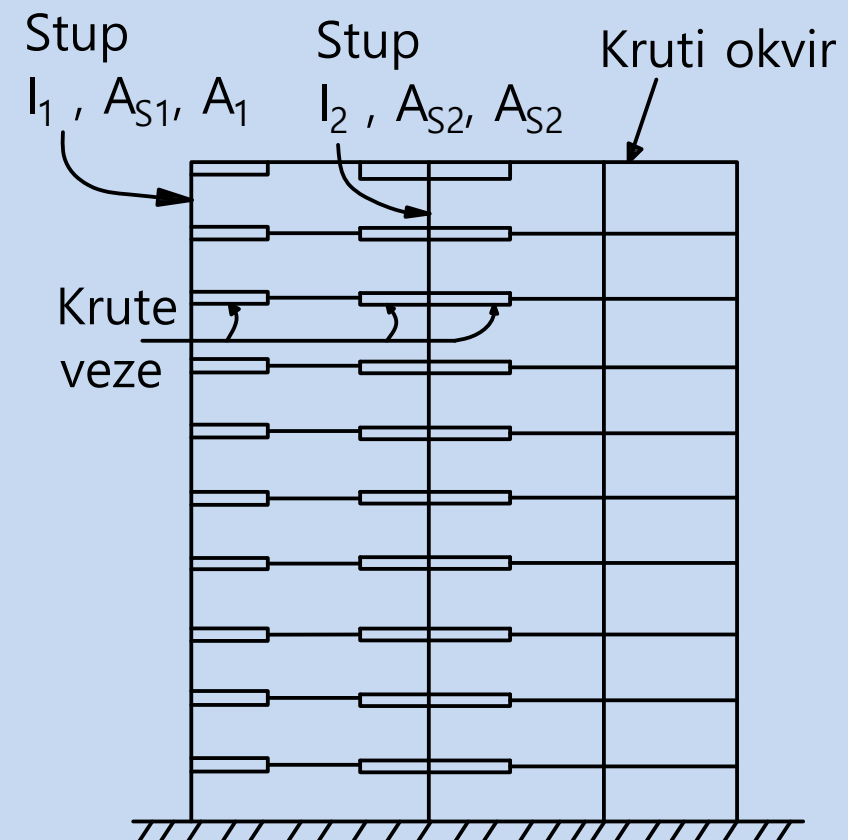
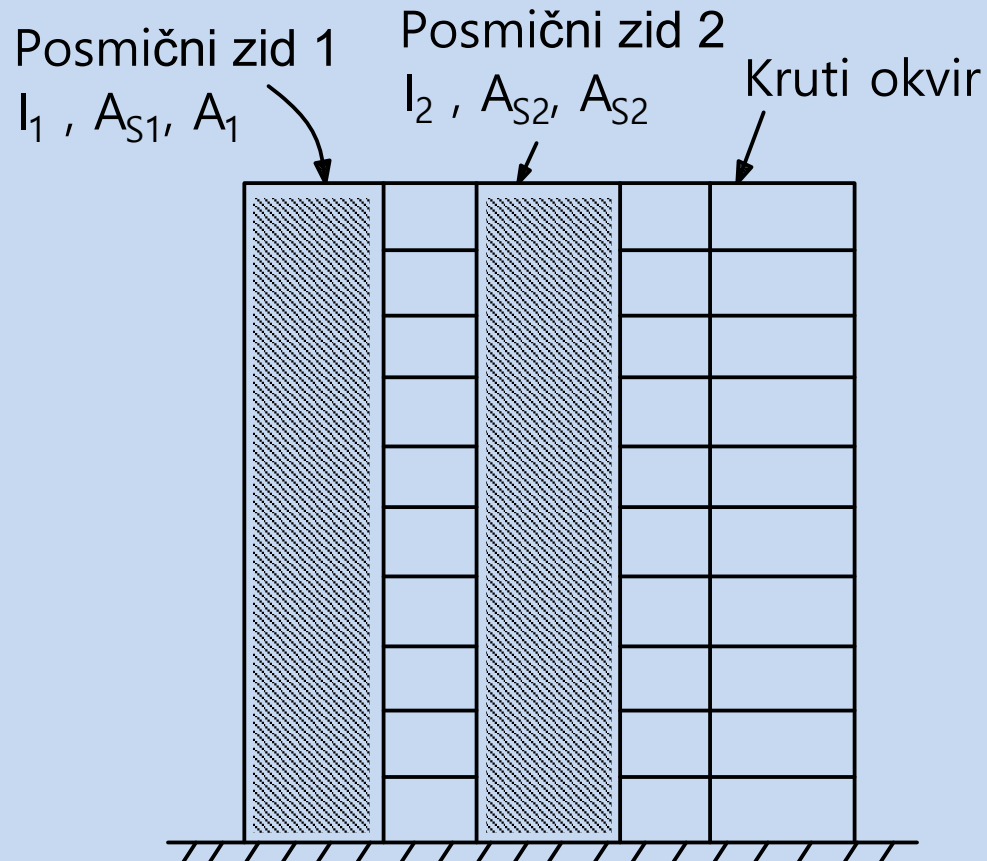
Numeričko modeliranje | Modeliranje za preliminarni pror.

- Kruti okviri i okviri sa spregovima mogu se također vrlo približno modelirati kao ekvivalentni pojedinačni stup.
- Ekvivalentnom stupu pridaje se takva posmična površina da je posmična krutost GA jednaka posmičnoj krutosti okvira. Moment tromosti ekvivalentnog stupa jednak je momentu tromosti površina stupova oko zajedničke težišne osi krutog okvira ili okvira sa spregovima.



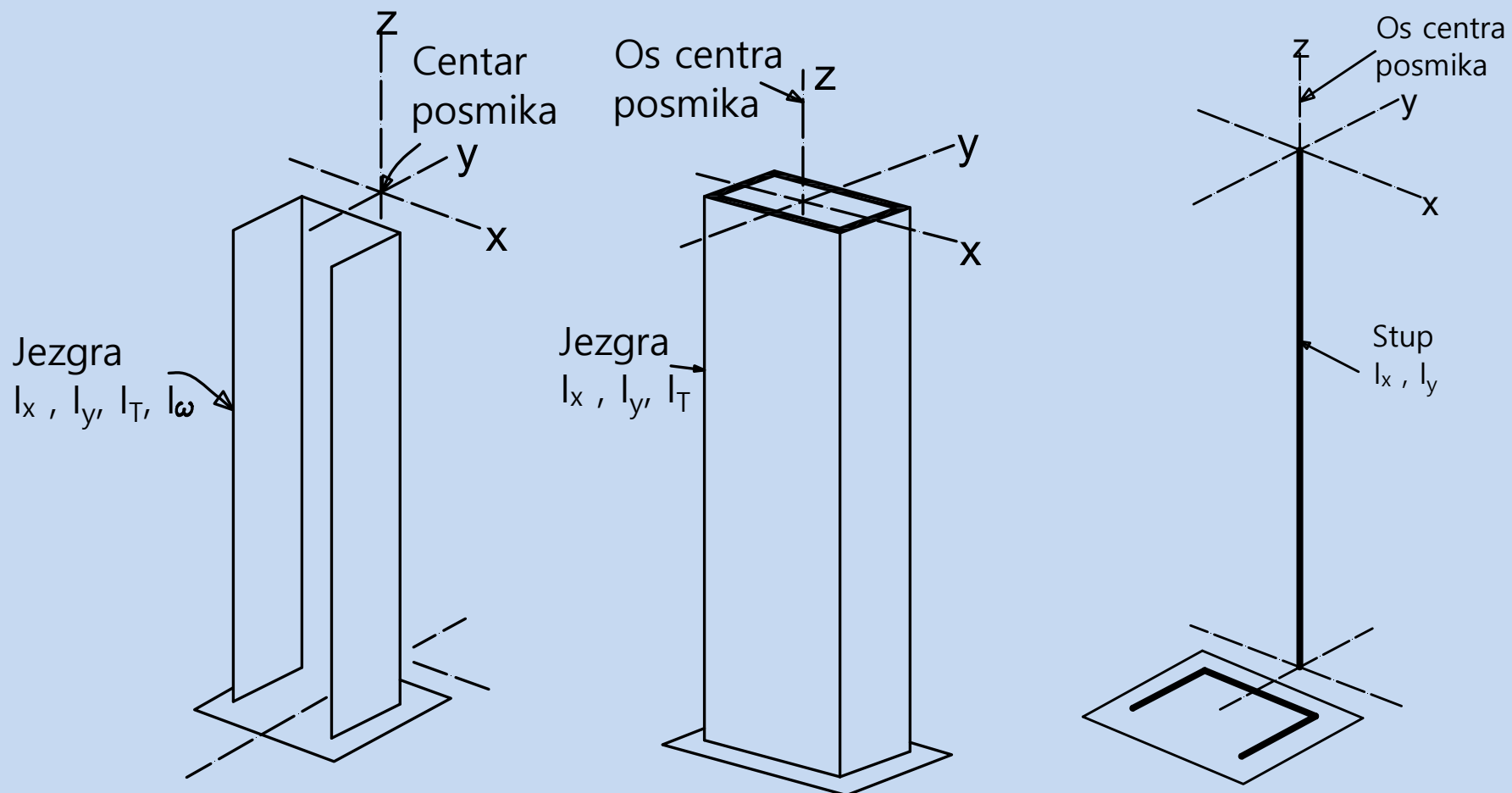
Numeričko modeliranje | Modeliranje za preliminarni pror.

- Kod nosivih sklopova sa povezanim zidovima i zidovima i okvirima, zid se može modelirati kao analogni „široki stup“.
- Taj ekvivalentni široki stup smješta se u težišnu os zida i pridaje mu se moment tromosti i površina zida. Krute konzole povezuju stup na vezne grede na svakoj stropnoj razini. Kod tog modela rotacije i vertikalni pomaci na rubovima zida prenose se na vezne grede.

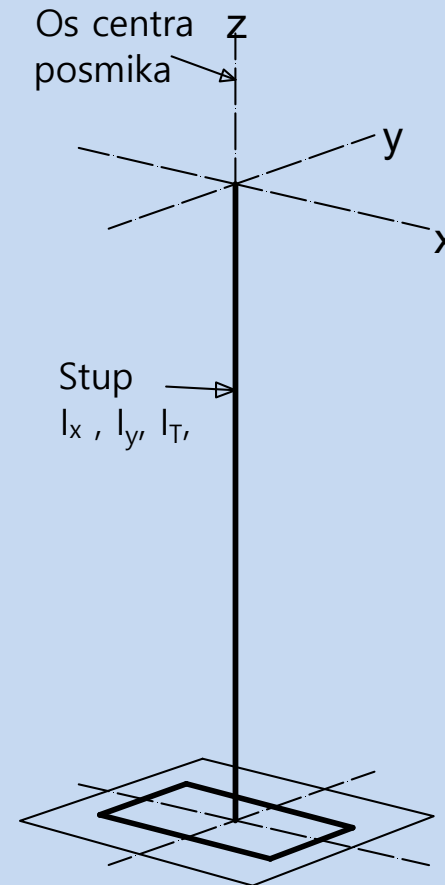
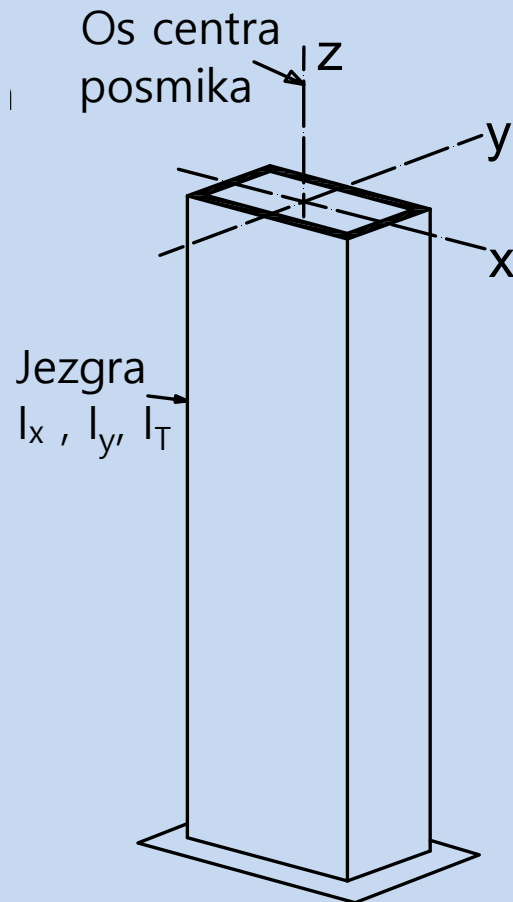


Numeričko modeliranje | Modeliranje za preliminarni pror.

- Složeni zidni sklopovi, primjerice jezgre liftova, koji se nalaze u zgradama koje imaju horizontalne pomake ali ne i rotacije (simetričan raspored), mogu se modelirati kao pojedinačni stup, smješten u središtu posmika složenog presjeka, s pridruženim glavnim momentima tromosti I_x i I_y presjeka jezgre.

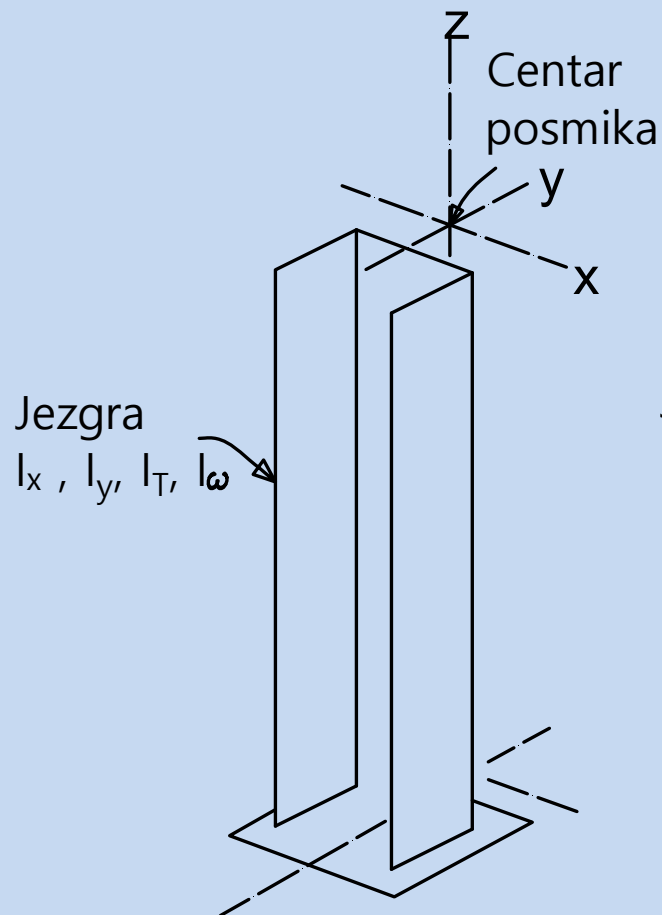


- Ako se jezgra nalazi u zgradama koje se mogu i zakretati (nesimetrični rasporedi), i kada jezgra ima zatvoreni presjek, onda se zamjenjujućem štapu treba pridodati i torzijski moment tromosti I_T



Numeričko modeliranje | Modeliranje za preliminarni pror.

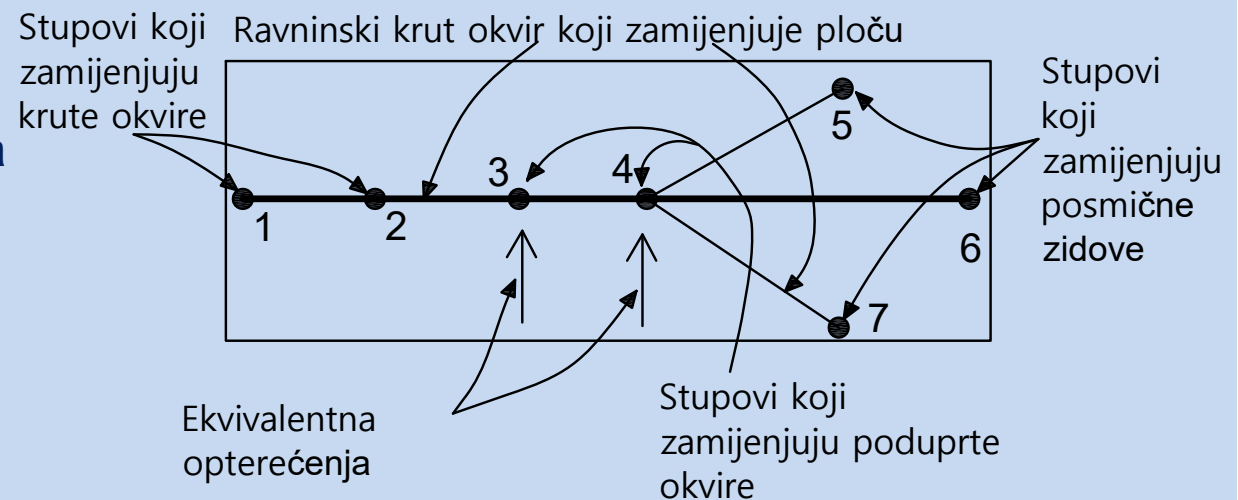
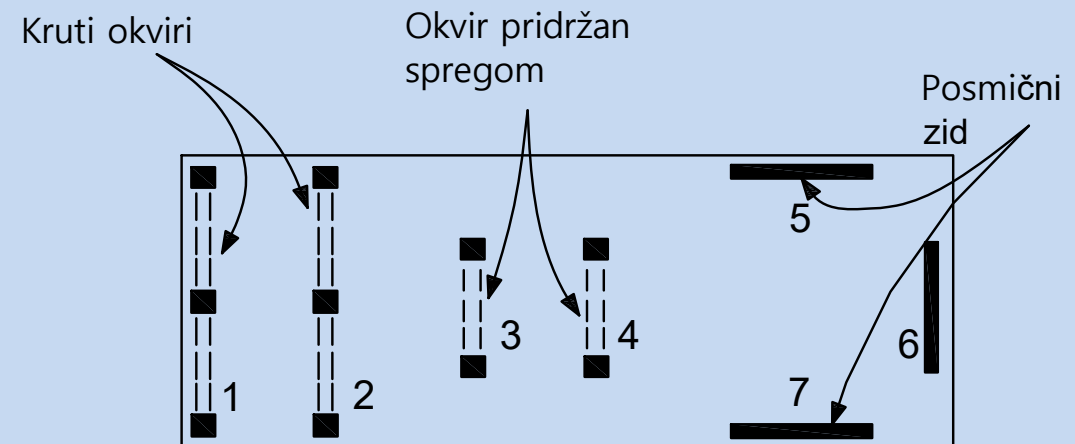
- Ako se jezgra nalazi u zgradama koje se mogu i zakretati (nesimetrični rasporedi), i kada jezgra ima otvoreni presjek, onda se efekti krivljenja takvog presjeka mogu modelirati sa dva međusobno povezana stupa
- Zajedničko djelovanje dvaju stupova daje približno ekvivalentno rješenje za sve savojne i torzijske značajke složenog sklopa otvorene jezgre (uključivo i torziju krivljenja)



Približno modeliranje ploča

1. Utjecaji u ravnini ploče

- Obično se uzima da stropne ploče djeluju kao krute dijafragme, koje raspodjeljuju horizontalna opterećenja na vertikalne elemente i održavaju tlocrtni oblik zgrade, tijekom pomicanja i rotacije konstrukcije.
- Ploča ograničuje horizontalne pomake vertikalnih komponenti svakog kata da budu funkcija dva horizontalna pomaka i zaokretanja ploče u ravnini.
- Krutost stropne ploče u ravnini na razini svakog kata može se simulirati horizontalnim okvirom od vrlo krutih greda, koje povezuju vertikalne elemente.

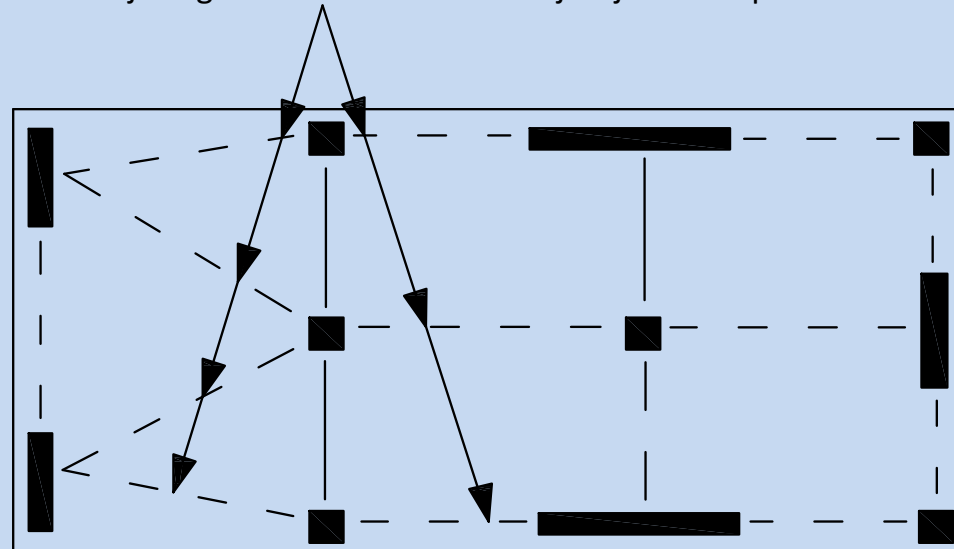


Približno modeliranje ploča

1. Utjecaji poprečnog savijanja

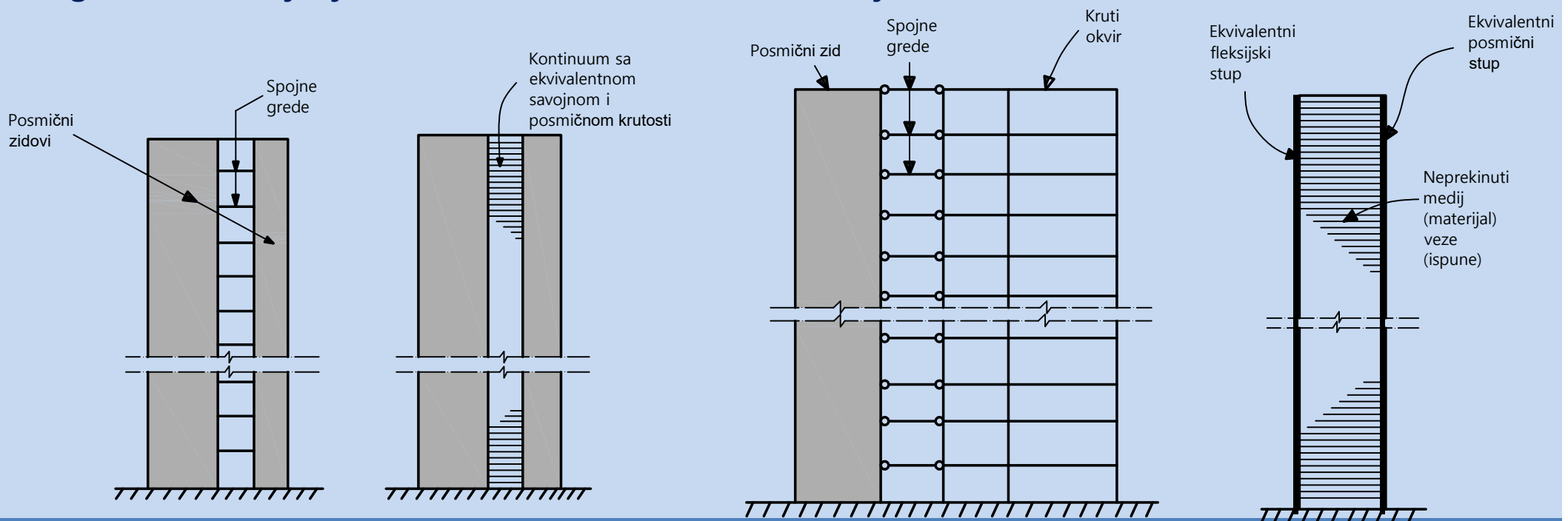
- Kod ravnih ploča (bez greda) i zidova povezanih pločama, poprečna savojna krutost ploča sudjeluje u otpornosti sustava na horizontalne sile. To je slično funkciji grede krutog okvira ili krutosti u ravnini ploča da održe tlocrtni oblik zgrade.
- Kod takvih konstrukcija modeliranje savijanja ploče između stupova ili zidova u pravcu može se simulirati sa veznom gredom ekvivalentne savojne krutosti okomite na plohu ploče. U ravnini ploče ti zamjenski elementi su kruti kako bi se ostvarilo djelovanje ploče kao dijafragme.
- Taj će model dati točne horizontalne pomake i unutarnje sile u vertikalnim elementima, ali samo koncentrirane momente savijanja i poprečne sile u ploči.

Povezujuće grede ekvivalentne fleksijskoj krutosti ploče



Modeliranje kontinuuma

- Svi prethodni modeli odnosili su se na diskretne elemente
- Neke konstrukcije imaju nepromjenjive značajke, primjerice uzduž visine. U tom slučaju rješenje se može tražiti u zatvorenom obliku za karakterističnu diferencijalnu jednačbu.
- Kod modela kontinuuma horizontalne ploče i grede koje povezuju vertikalne elemente, „**razmazane**“ su kao **kontinuirana vezna membrana, ili kontinuum** s ekvivalentnim raspodijeljenim svojstvima krutosti.
- Na slici lijevo prikazani su zidovi povezani gredama i ekvivalentni model kontinuuma sa ekvivalentnim značajkama za savijanje i posmik. Vezne grede su „razmazane“ u medij sa jednakim svojstvima posmične krutosti.
- Na slici desno prikazana je konstrukcija od zida i okvira povezanih spojnim gredama. Spojne grede su zamijenjene horizontalno nestlačivim medijem.



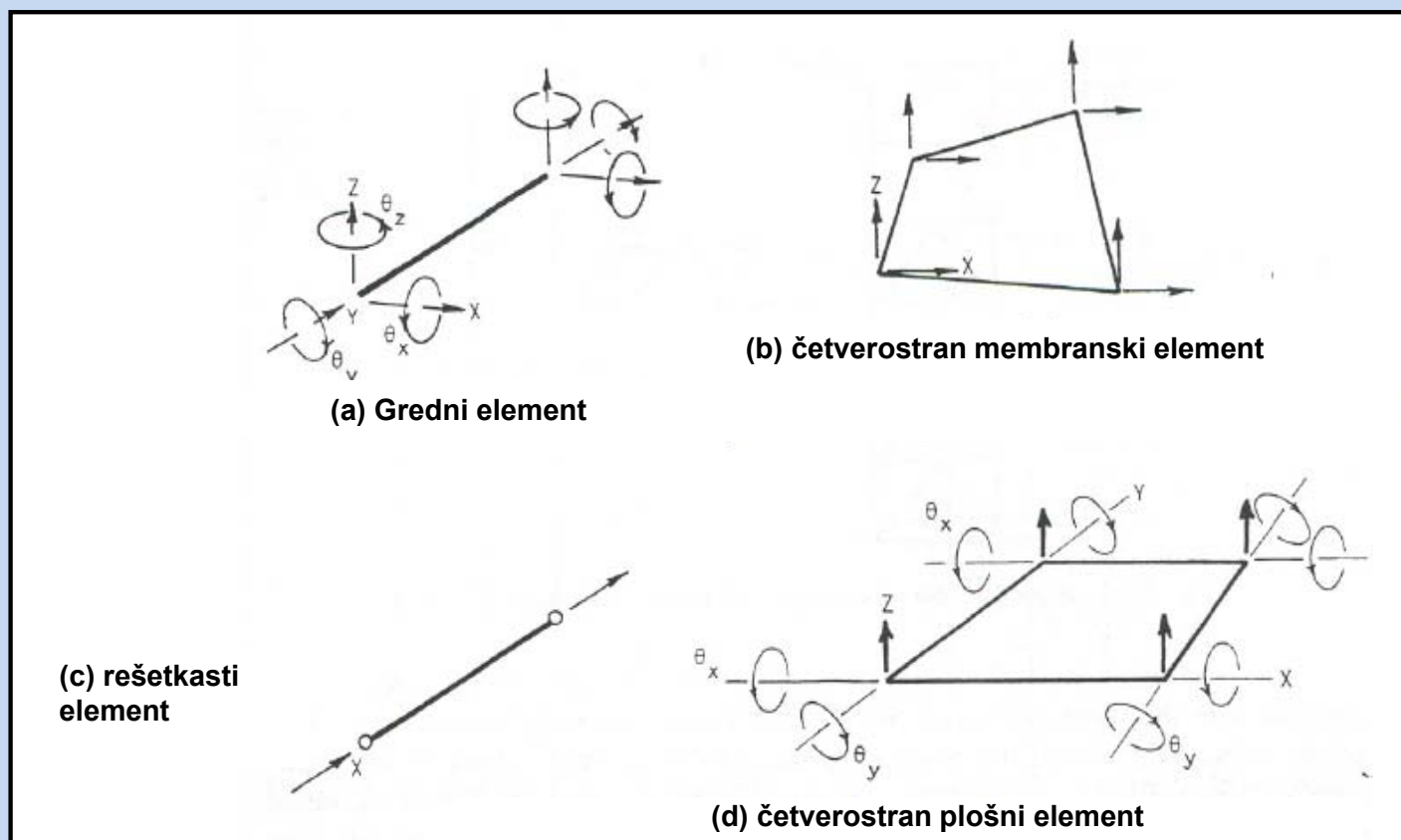
Modeliranje za "točni" konačni proračun

"Točni" konačni proračun

- Konačni proračun trebao bi dati što je moguće točnije rezultate za pomake i unutarnje sile.
- Model bi trebao biti toliko detaljan koliko programski paket i kapacitet računala to dopuštaju.
- Svi bitni slučajevi djelovanja i interakcija trebali bi biti uključeni i sadržavati sve zidove, stupove, jezgre, ploče i grede.
- Utjecaj torzije krivljenja mora se uzeti u obzir, osim za slučaj kad je konstrukcija simetrična u tlocrtu i kad je opterećenje simetrično.
- Određene redukcije u veličini i složenosti numeričkog modela mogu se prihvatiti:
 - ako su konstrukcija i opterećenje simetrični, 3D proračun numeričkog modela polovine konstrukcije ili čak 2D proračun su prihvatljivi
 - dijelovi konstrukcije koji se ponavljaju uzduž visine mogu se pojednostaviti korištenjem redukcijskog „lumping“ postupka

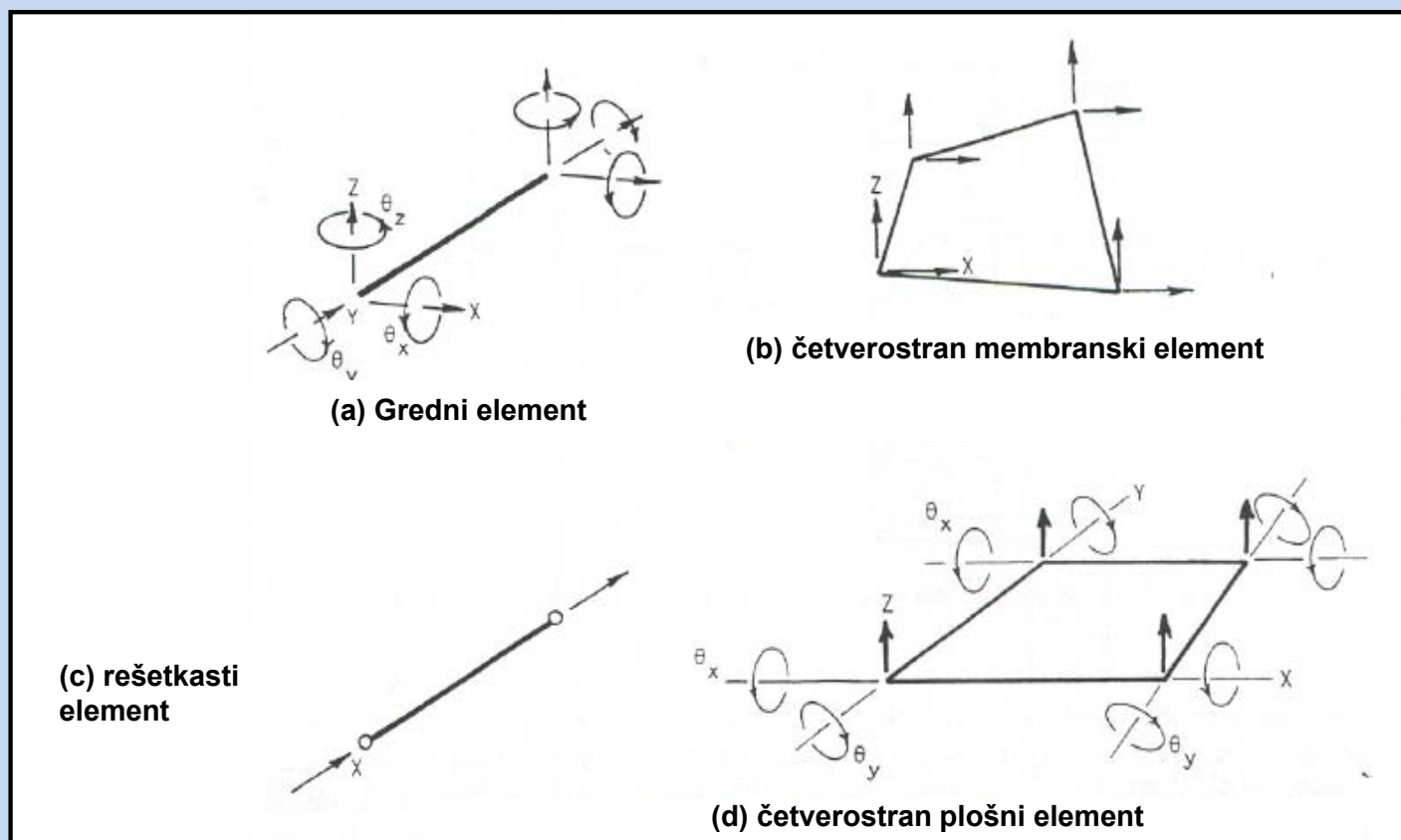
Numeričko modeliranje | Modeliranje za točni proračun

- Finalni modeli postaju sve točniji, zbog raspoloživosti jeftinih jakih računala i usavršenih programskih paketa (naročito metode konačnih elemenata), kojima se mogu proračunati vrlo veliki i složeni konstrukcijski modeli, za razliku od numeričkih modela korištenih u preliminarnom proračunu koji nisu pogodni za dimenzioniranje pojedinih elemenata, zbog njihovih pojednostavnjujućih pretpostavki.
- Konačni numerički model, pripremljen za 3D MKE, treba imati barem gredne „beam“ elemente (a) i membranske elemente (b).



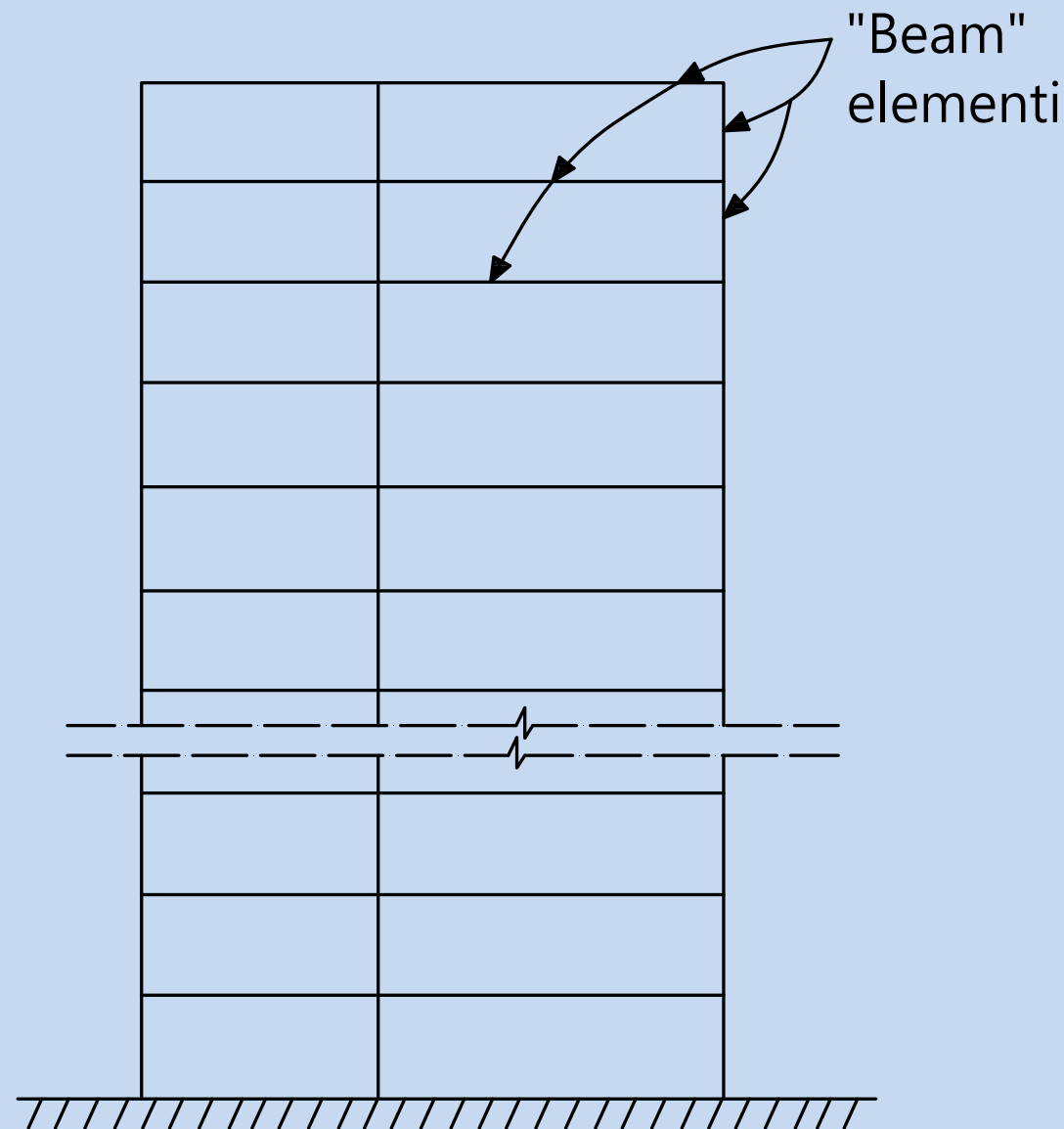
Numeričko modeliranje | Modeliranje za točni proračun

- „Beam“ element se koristi za grede i stupove. Može se prilagoditi za rešetkaste štapove otpuštanjem čvornih rotacija (umetanjem zglobova na krajeve) ili nekoj drugoj kombinaciji rubnih uvjeta (otpuštanje poprečne ili uzdužne sile)
- Membranski elementi mogu se koristiti za zidove i zidne sklopove (ali ne uobičajeno!)
- Zasebni „truss“ elementi (c) su također na raspolaganju
- Pod (d) je prikazan četverokutni pločasti „plate“ ili element, koji se uobičajeno rabi za savijane ploče i zidove, koji su opterećeni na savijanje van svoje ravnine.



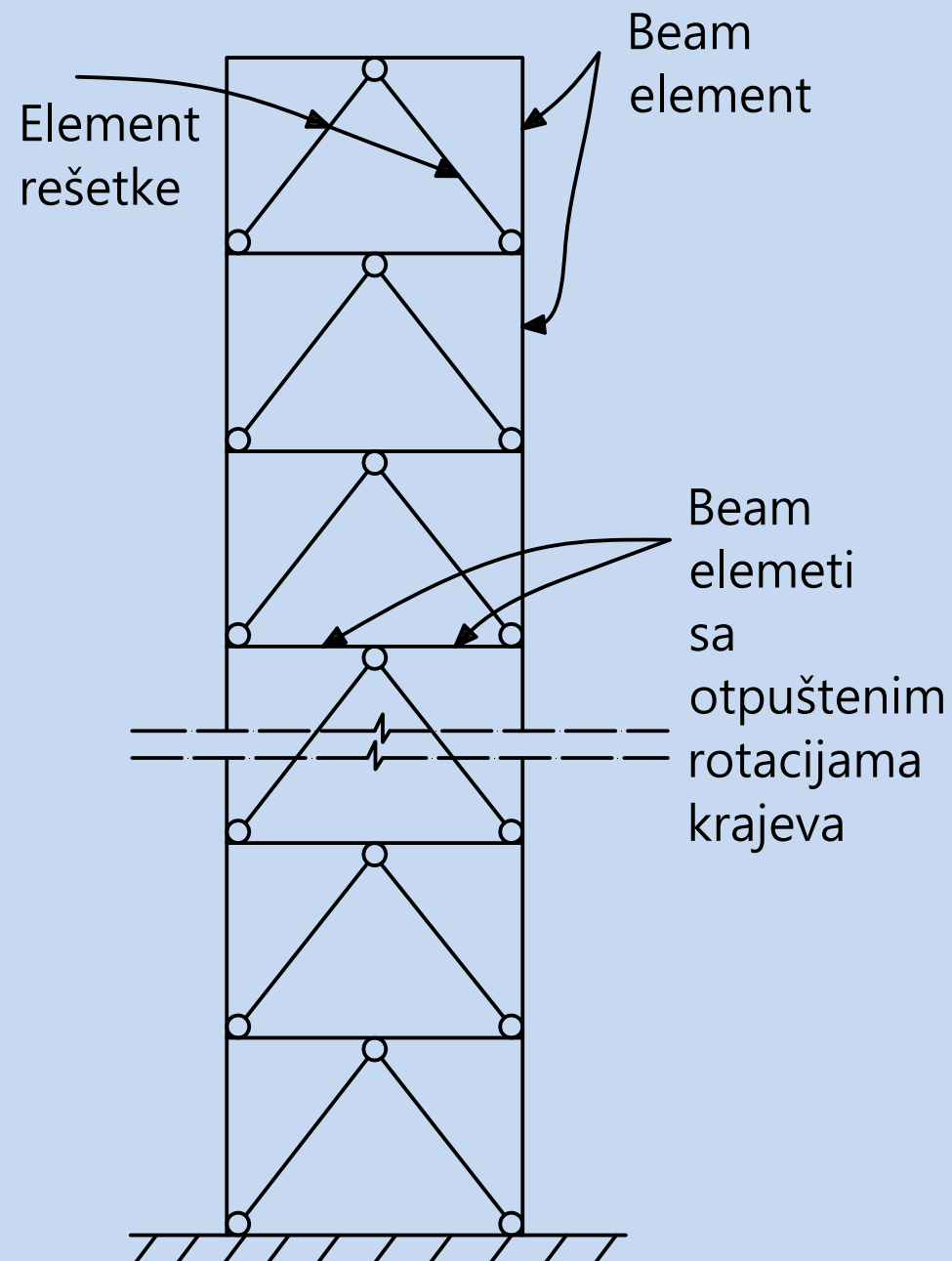
Ravninski okviri

- Kruti ravninski okvir prikazan na slici je najuobičajeniji model, kod kojeg se i za grede i za stupove koristi jednaki „beam“ konačni element.
- Posmične deformacije elemenata se uobičajeno zanemaruju, osim kod greda sa odnosom raspon/visina manje od 5.
- Proračunski izlaz („output“) sadrži vertikalne i horizontalne pomake i rotacije čvorova u ravnini, i naravno unutarnje sile svih elemenata – normalne sile, poprečne sile i momente savijanja.



Ravninski okviri

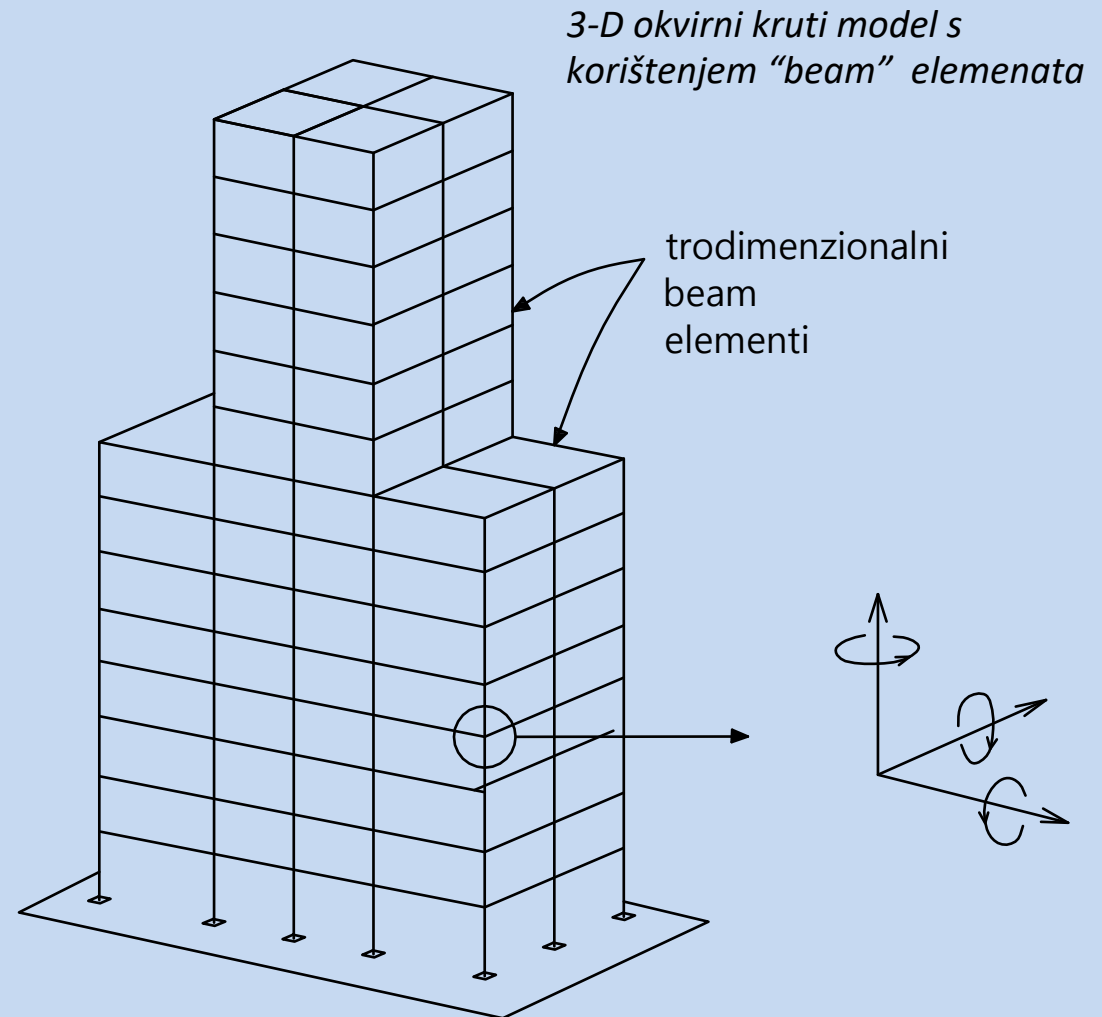
- Na slici je prikazan okvir sa spregovima, kod kojeg se koriste i „beam“ i „truss“ elementi.
- Spregovi su modelirani sa „truss“ elementima rešetke, stupovi sa „beam“ elementima, a grede jednako tako sa „beam“ elementima ali s otpuštenim rotacijama krajeva („end rotations”).
- Ispis unutarnjih sila za „truss“ elemente sadrži naravno samo normalne sile N .



Numeričko modeliranje | Modeliranje za točni proračun

Trodimenzijsalni kruti okviri

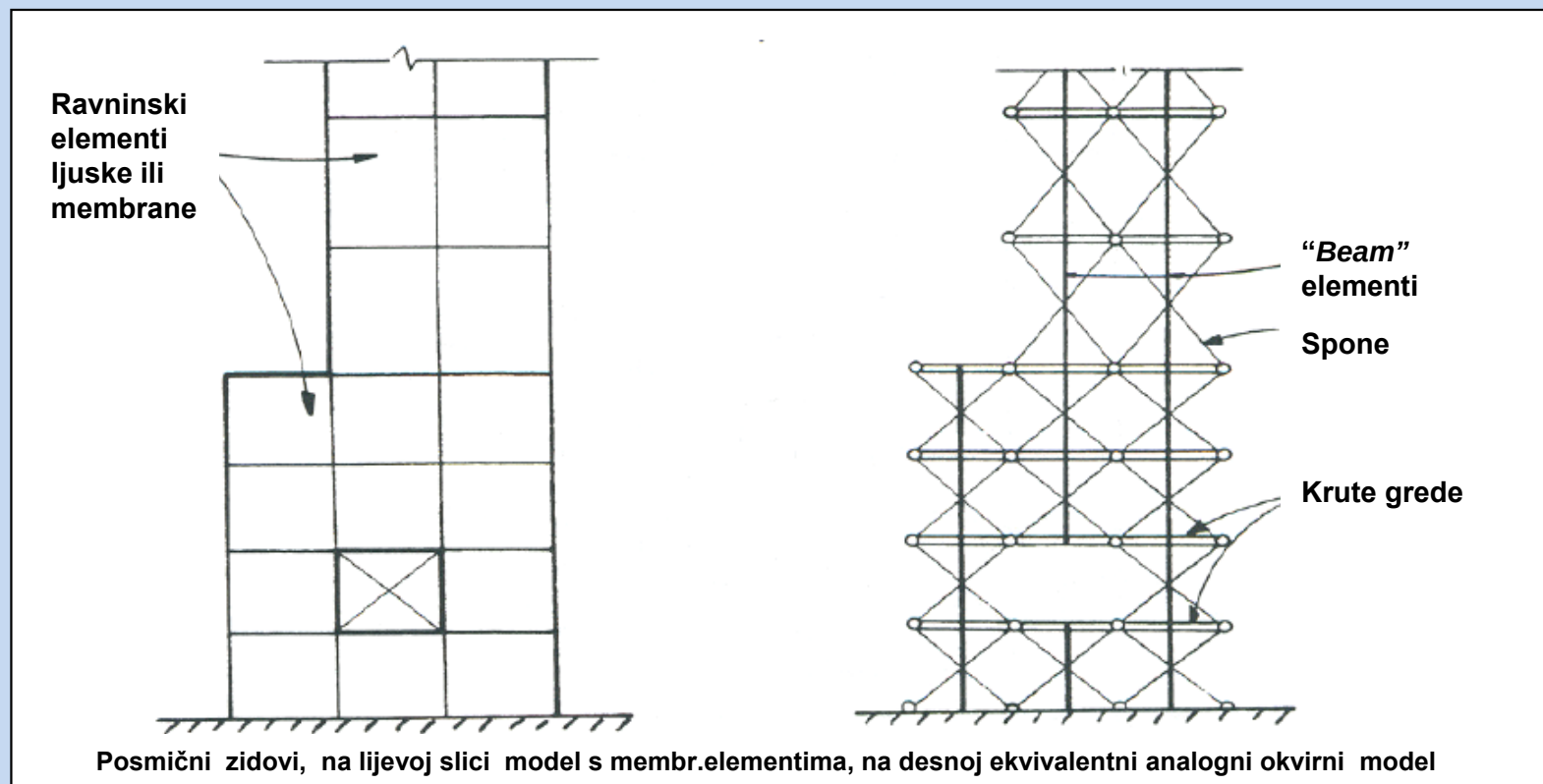
- Zgrada od krutih okvira, prikazana na slici, sa čvorovima koji preuzimaju momente savijanja, ima stupove i grede modelirane sa 3D „beam“ elementima.
- Ti elementi deformiraju se aksijalno, imaju posmik i savijanje u dvije poprečne osi i zakreću se.
- Zbog toga, njihove statičke značajke moraju sadržavati, normalnu površinu, dvije posmične površine, dvije savojne krutosti i torzijsku krutost.
- Kod nekih konstrukcija uputno je zanemariti posmičnu krutost stupova i greda i aksijalnu deformaciju greda.
- Proračunski izlaz će sadržavati pomake i zakretanja čvorova, poprečne sile, momente savijanja i uzdužne sile u stupovima, kao i poprečne sile i momente savijanja u gredama.



Numeričko modeliranje | Modeliranje za točni proračun

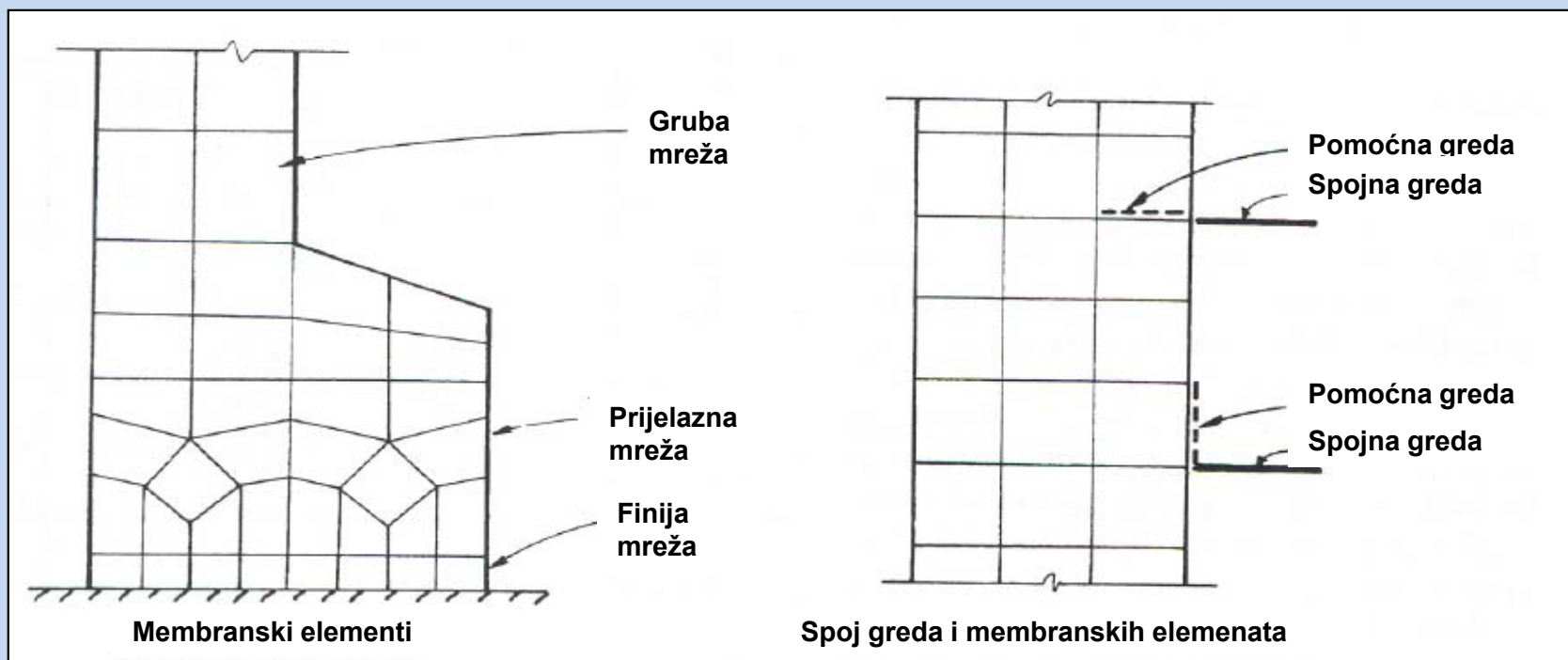
Posmični zidovi u ravnini

- Visoki i vitki posmični zidovi mogu se točno modelirati koristeći postupke preliminarnog proračuna.
- No posmične zidove s otvorima ili one, koji nisu vitki, najbolje je modelirati sa sklopom od „plane-stress“ membranskih elemenata, prikazanih na slici lijevo. Proračunski izlaz sadrži horizontalne i vertikalne pomake čvorova i vertikalna i horizontalna normalna naprezanja i posmična naprezanja ili u čvorovima ili u sjecištima polovina stranica elementa.
- Alternativno se može koristiti ekvivalentni okvir od „beam“ elemenata, prikazan na slici desno, koji daje jednaki rezultat sa greškom od oko 2% u odnosu na membranske elemente.



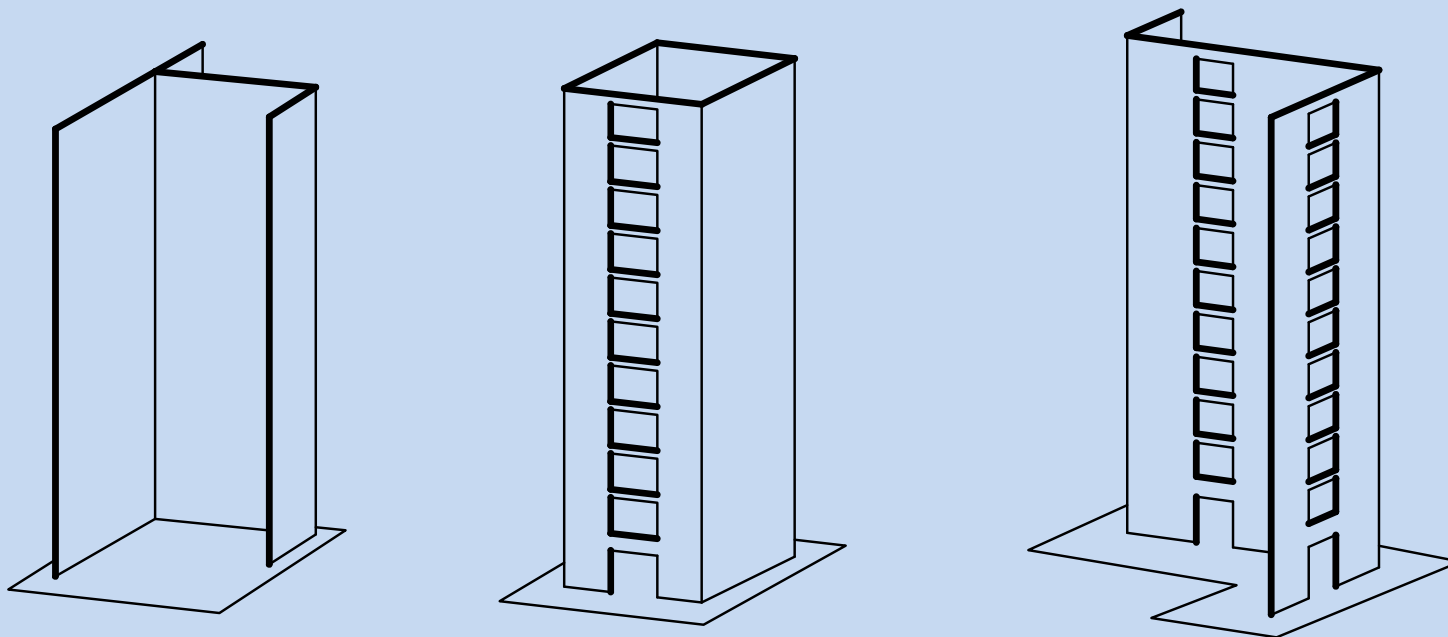
Numeričko modeliranje | Modeliranje za točni proračun

- Složeniji posmični zidovi, primjerice ne-pravokutni posmični zidovi, prikazani na slici lijevo, mogu se modelirati uporabom četverokutnih („quadrilateral“) elemenata.
- Mreža elemenata može se progustiti u područjima, gdje se očekuju promjene naprezanja.
- Uobičajeno pravilo u MKE je da elementi moraju imati približno jednake izmjere u svim smjerovima. Ako to nije slučaj, slaba konvergencija će rezultirati nestabilnim rješenjima.
- Posebni slučaj prikazan je na slici desno, gdje su posmični zidovi modelirani membranskim elementima i povezani s gredama u ravnini. Obzirom da membranski elementi nemaju stupanj slobode koji daje rotaciju u ravnini njihovih uglova, „beam“ element priključen na čvor membrane je zapravo samo zgloбно priključen u toj točki.
- Kako bi se rotacija točke zida gdje se spaja greda prenijela na gredu, uvodi se fiktivna greda koja spaja krajnju točku grede sa još jednom točkom na zidu.



Trodimenzijsalni sistemi posmičnih zidova

- Trodimenzionalni sklopovi od posmičnih zidova , prikazani na slici, su najvažnije bitne komponente otpornosti visokih zgrada na horizontalna opterećenja.
- Lijevi sklop je otvoreni oblik presjeka od više grana, srednji sklop je djelomično zatvoreni presjek, a desni sklop je oblik otvorenog presjeka povezan gredama.

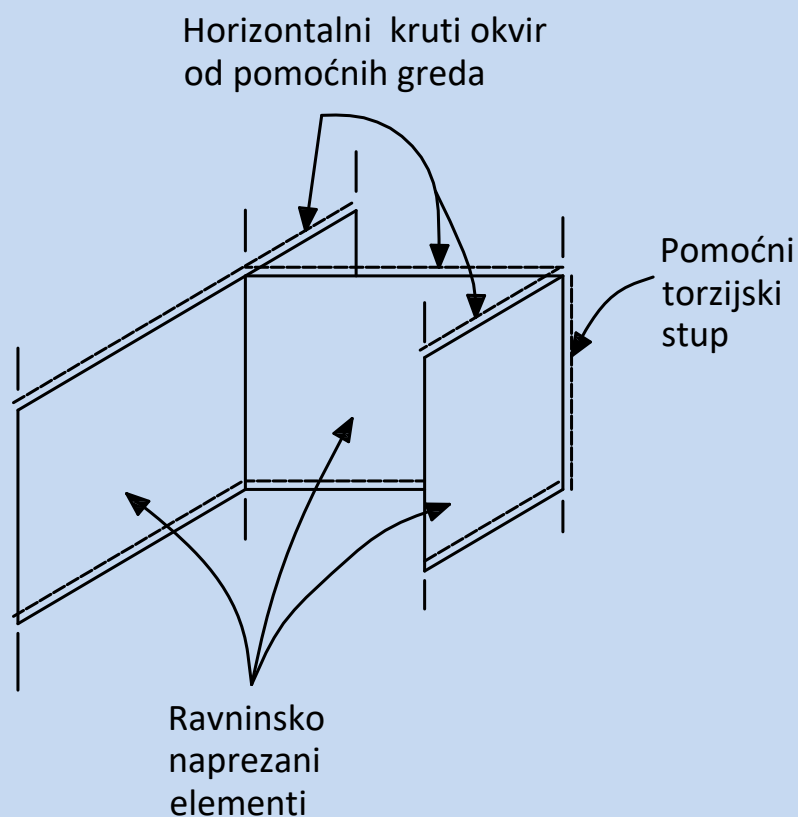


Numeričko modeliranje | Modeliranje za točni proračun

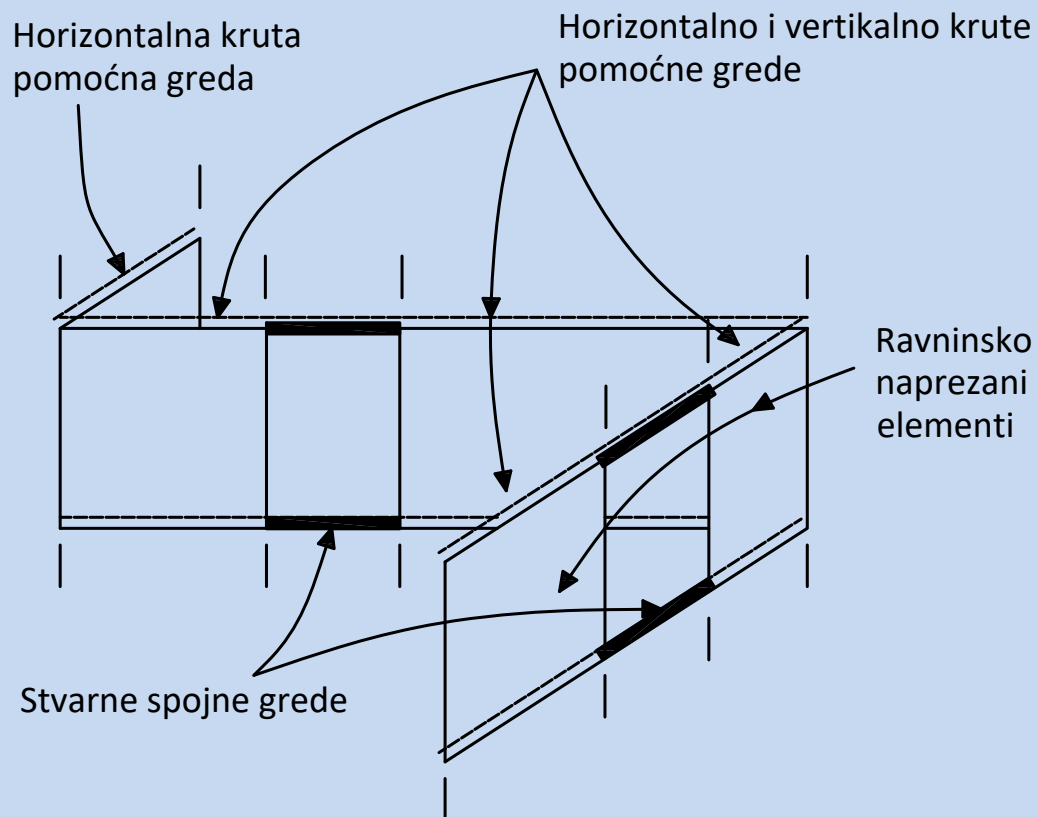
- Svi 3D oblici posmičnih zidova, prikazani na prethodnoj slici imaju zajedničko glavna djelovanja pojedinih zidova, savijanje i posmik u ravnini zida i vertikalni posmik uzduž spojeva zidova kao glavnu interakciju između zidova sklopa.
- Zato je plane-stress membranski element pogodan odabir za modeliranje 3D posmičnih zidova. Ti elementi mogu biti vrlo veliki – visina kata i debljina zida daju prihvatljivo točne rezultate.
- No, samo plane-stress elementi nisu dovoljni za modeliranje 3D konstrukcija zidova, jer im nedostaje poprečna krutost, neophodna u ortogonalnim spojevima zidova, da bi se omogućio proračun preko matrice krutosti.
- Zato se dodaje horizontalni okvir od fiktivnih krutih pomoćnih greda u svakoj ravnini čvorova kata (slijedeća dva slidea).
- Alternativno treba koristiti prave elemente ploče („plate“) koji osim krutosti u ravnini imaju i krutost van ravnine. Ovakav element ima više stupnjeva slobode (matrica je složenija), proračun je sporiji, ali se pojednostavljuje postupak modeliranja i dalje točnije rezultate. Danas gotovo svi programski paketi nude upotrebu ovakvih elemenata jer procesorska snaga više nije ograničavajući faktor.

Numeričko modeliranje | Modeliranje za točni proračun

- Membranski elementi mogu se koristiti u modeliranju posmičnih zidova u kombinaciji sa okvirom od horizontalno krutih greda kada postoje zidovi koji se međusobno okomito spajaju. Kako membranski elementi nemaju krutost van ravnine, dodani okvir osigurava prijenos sila u tom smjeru
- Ako je riječ o sistemu spojenih zidova (desno), ove grede moraju biti krute i u vertikalnom smjeru kako bi se prenio moment na spojne grede

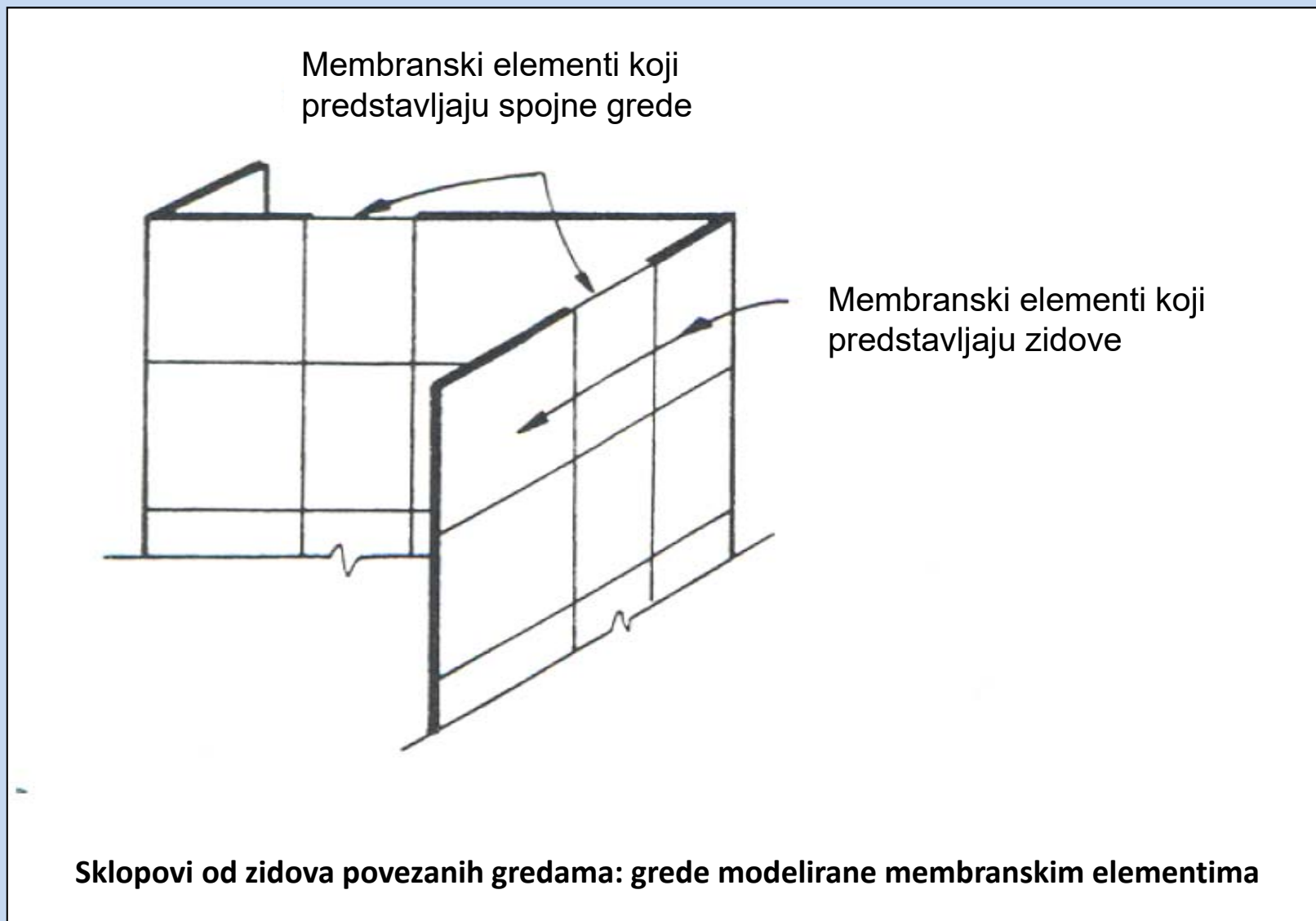


Membranski element i pomoćni gredni "beam" element



Model za posmične zidove povezane gredama

- **Alternativni model – u ravnini povezani posmični zidovi imaju vezne grede modelirane kao membranski elementi visine kata sa vertikalnom posmičnom krutosti jednakom krutosti vezne grede na vertikalne pomake.**



Sastavljeni konačni model (rekapitulacija):

- Konačni model može se formirati kombinacijom nekih ili svih prije pojašnjenih postupaka.
- Ako otpornost na savijanje stropnih ploča doprinosi ukupnoj otpornosti na bočna djelovanja (ploča sudjeluje u okvirnom djelovanju), ploče se modeliraju gredama ekvivalentne savojne krutosti, koje povezuju vertikalne elemente. Točnije rješenje dobiva se modeliranjem svake ploče kao skupa pločastih elemenata, iako to rezultira mnogo većom matricom krutosti.
- U konačnom modelu „beam“ elementi se rabe za grede i stupove.
- Veliki „plane stress“ membranski elementi, veličine kata, koriste se za posmične zidove i jezgre. Na razinama svih katova na vrhu membranskih elemenata dodaju se fiktivne grede sa krutostima samo u horizontalnoj ravnini.
- Tim pomoćnim gredama pridaju se vrlo velike aksijalne krutosti i horizontalne krutosti na savijanje da se simulira djelovanje ploče kao krute dijafragme.
- Pomoćne grede se također koriste na razini svakog kata za međusobno povezivanje okvira, posmičnih zidova i svih izoliranih stupova.

Postupci redukcije

Numeričko modeliranje | Postupci redukcije

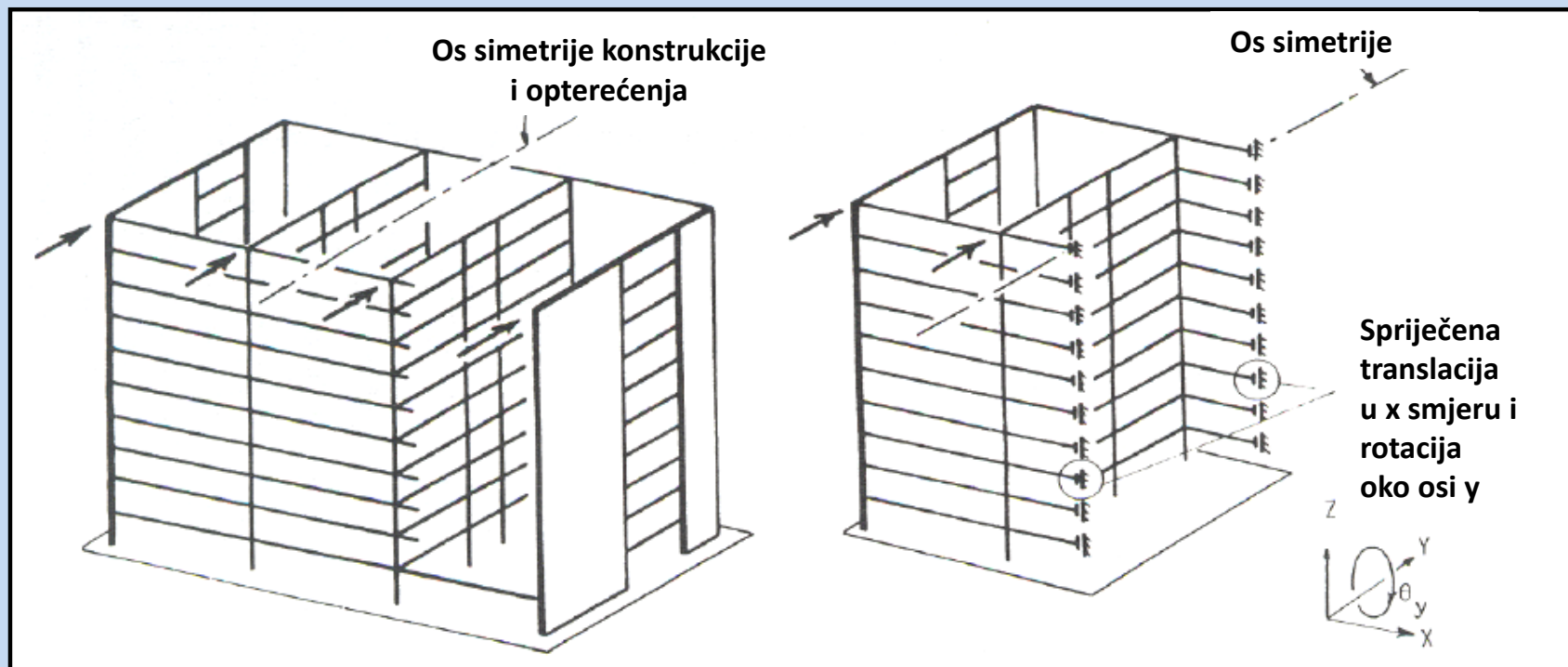
- Vrlo složene konstrukcije mogu biti tako velike pa procesiranje postaje neizvedivo.
- Postoje postupci pojednostavnjenja, tzv. postupci redukcije, koje statičari koriste za pojednostavnjenje modela bez znatnijeg gubitka točnosti. Neke od tih metoda biti će pojašnjene u nastavku.

Postupci redukcije mogu se provesti za:

- Simetriju i antimetriju
 - 3D → 2D bez torzije krivljenja i sa torzijom krivljenja
 - Koncentriranje dijelova konstrukcije („lumping“)
 - Analogije širokih stupova i visokih greda
- Sa sve većom procesorskom i memorijskom snagom, broj pojednostavljenja (redukcija) postaje sve manji, pa se i za vrlo složene građevine može provesti nereducirani proračun
 - Nereducirani proračuni mogu ponekad donijeti vidljive uštede uslijed proračuna koji je „manje na strani sigurnosti“.
 - No, za brze proračune ili vrlo velik broj elemenata (također i kod lokalnih proračuna), redukcije su još uvijek korisne.

Simetrija i antimetrija

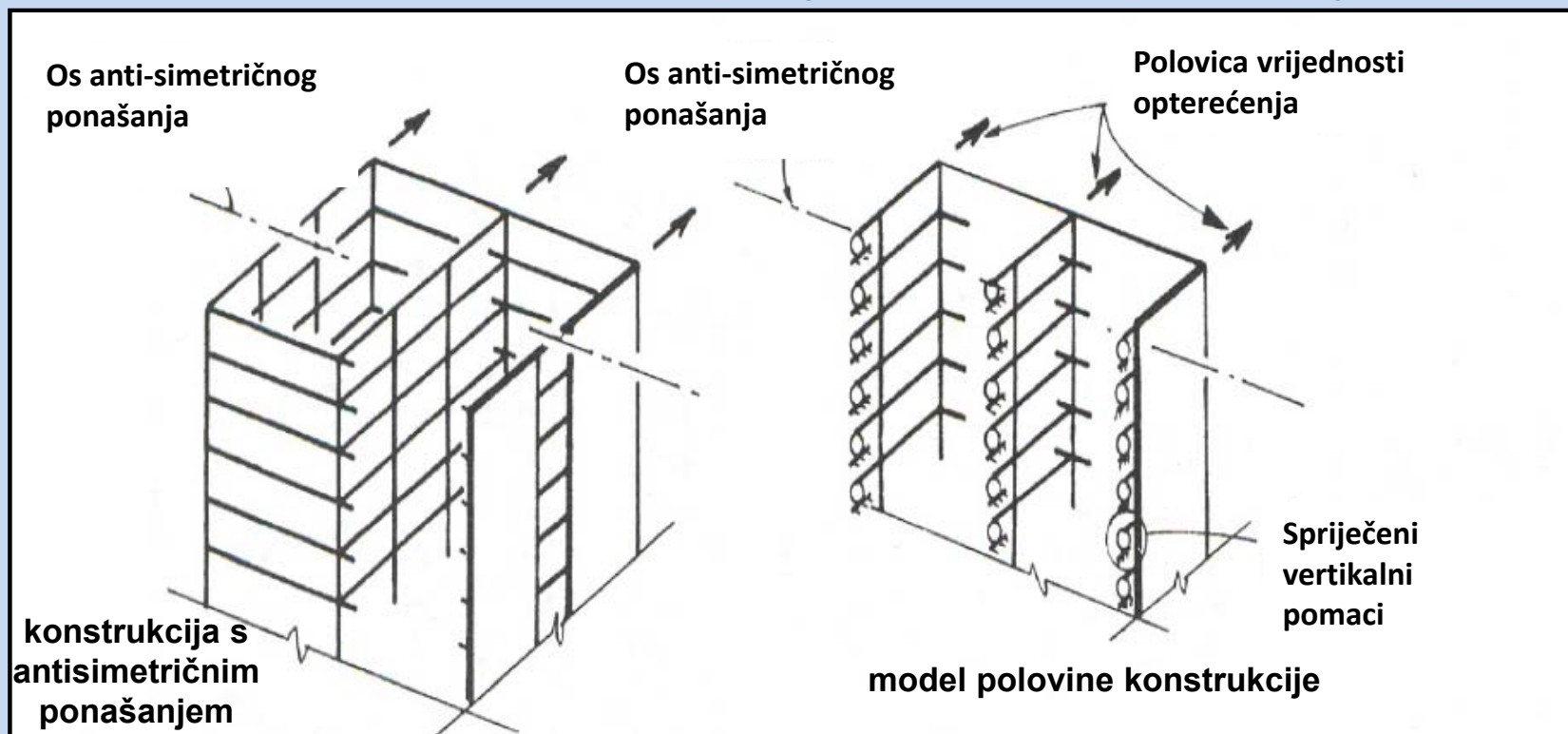
- Konstrukcija koja je **tlocrtno simetrična oko osi u smjeru horizontalnog opterećenja** (slika lijevo) može se pojednostaviti i proračunati kao polovina konstrukcije, s jedne strane osi simetrije podvrgnuta polovini opterećenja (slika desno). Opterećenje također mora biti simetrično oko navedene osi.
- Odrezani krajevi moraju biti pridržani, da simuliraju izostavljenu polovinu konstrukcije. Pridržanje mora biti za rotaciju i horizontalni pomak u ravnini okomitoj na smjer opterećenja i za rotaciju oko vertikalne osi, dok istovremeno moraju biti slobodni pomaci i rotacije u vertikalnoj ravnini djelovanja opterećenja (reznjoj ravnini). Rezultirajući pomaci i unutarnje sile staviti će se simetrično i na izostavljenu polovinu zgrade.



Tlocrtno simetrična konstrukcija sa simetričnim opterećenjem - model polovine konstrukcije

Simetrija i antimetrija

- Konstrukcija **tlocrtno simetrična oko horizontalne osi okomite na os horizontalnog opterećenja** ponaša se antimetrično oko osi simetrije. U tom slučaju treba proračunati samo polovinu konstrukcije, s jedne strane osi simetrije, podvrgnutu polovini opterećenja.
- Krajevi prerezanih elemenata pridržani su na pravcu simetrije, da se uzme u obzir veza s izostavljenom drugom polovinom konstrukcije koja se ponaša antimetrično. Pridržani su vertikalni pomaci, ali su slobodne rotacije u vertikalnoj ravnini usporednoj sa smjerom djelovanja opterećenja. Dobivene vrijednosti pomaka i unutarnjih sila vrijede antimetrično (suprotan predznak) za izostavljenu polovinu konstrukcije.

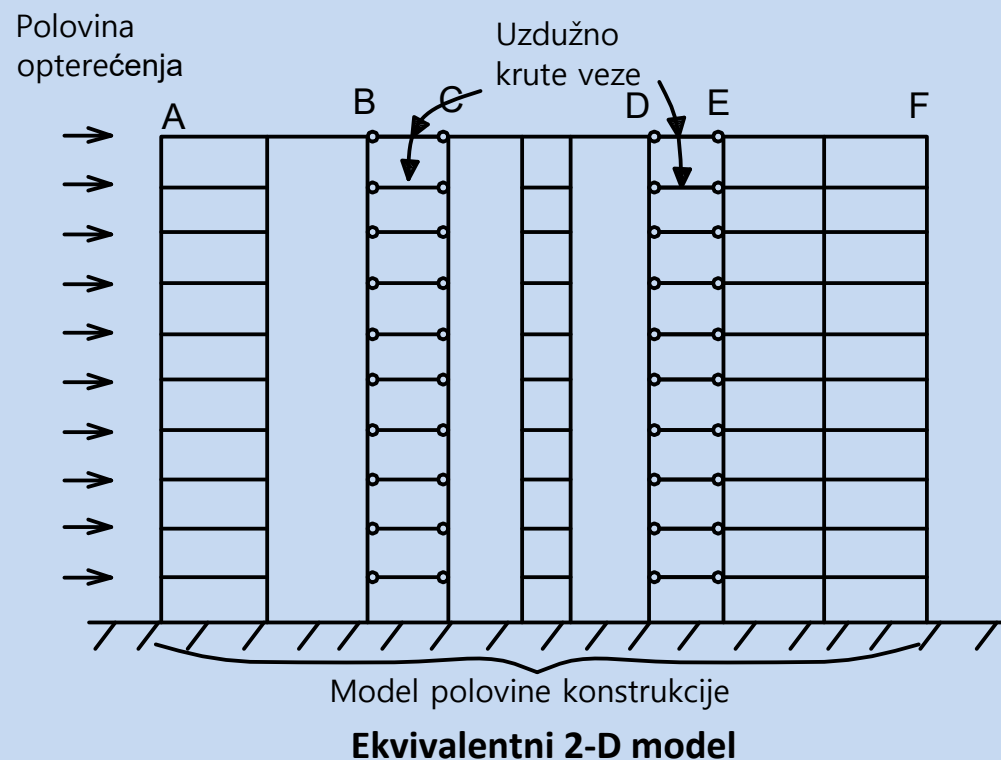
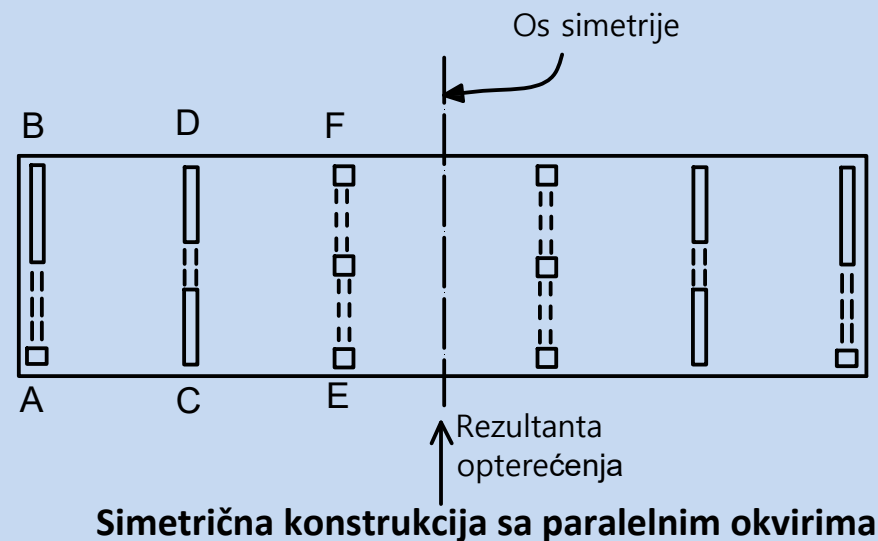


Simetrija i antimetrija

- Iz prethodna dva slidea slijedi da ako je konstrukcija simetrična oko dvije osi okomite u tlocrtu, i ako je izložena simetričnom opterećenju, dovoljno je analizirati samo četvrtinu konstrukcije, uz pravilno postavljanje rubnih uvjeta na odrezanim dijelovima

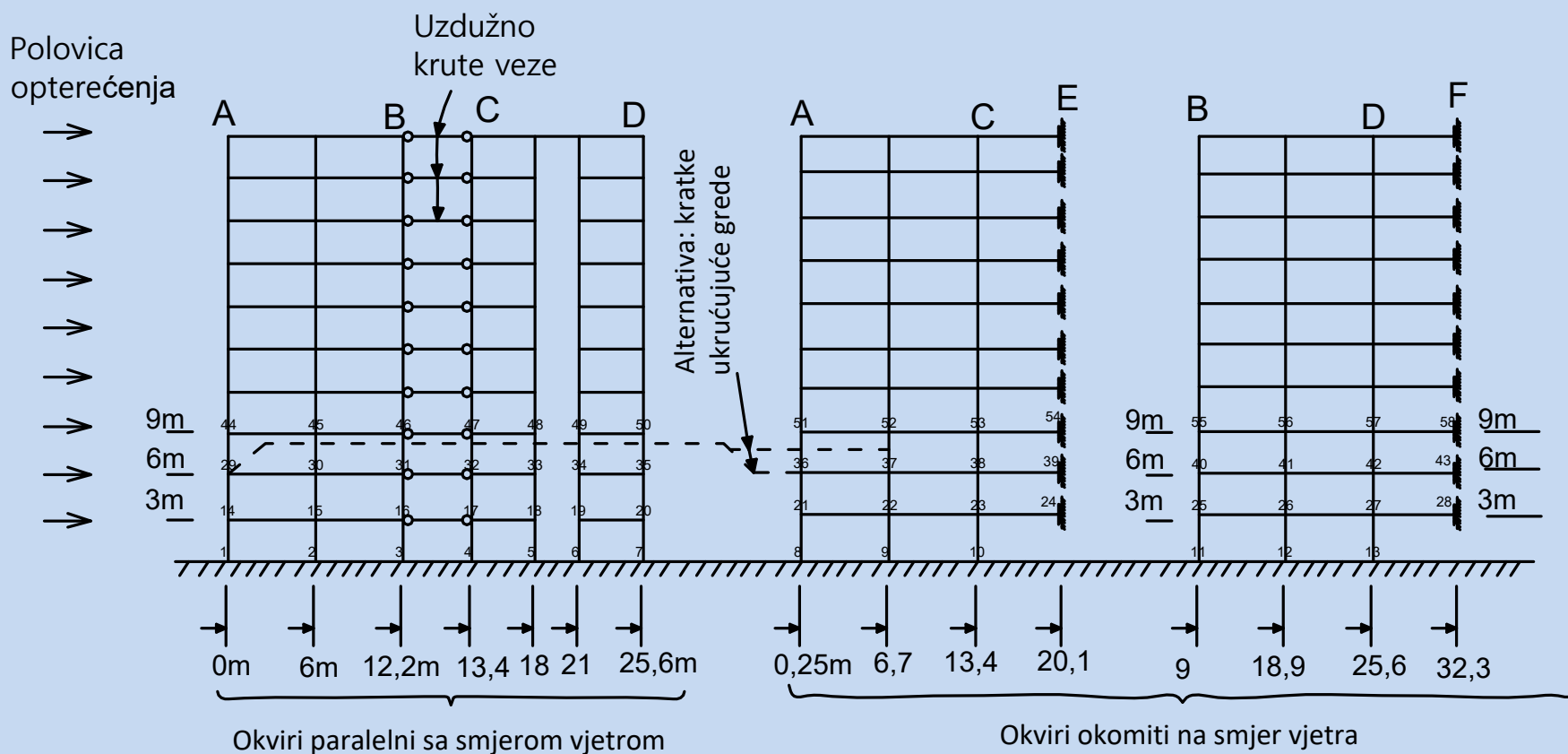
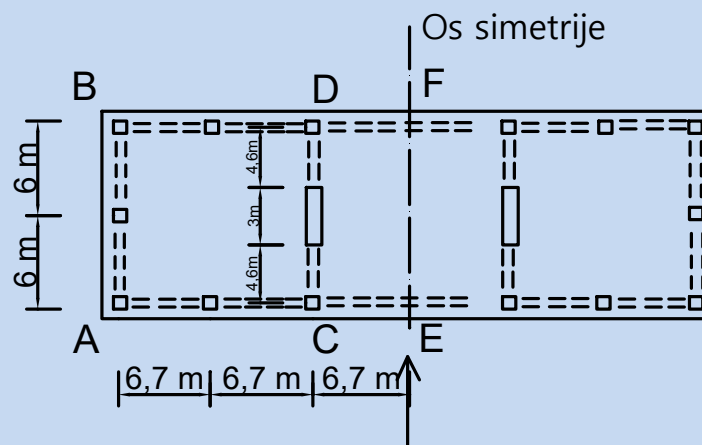
2D modeli konstrukcija bez torzije krivljenja

- Stropne ploče su pretpostavljene krute u svojoj ravnini, tako da su horizontalni pomaci i rotacije jednaki za sve vertikalne elemente.
- Tada se 3D konstrukcije mogu simulirati 2D modelom.
- Konstrukcija na gornjoj slici je tlocrtno simetrična i pod simetričnim opterećenjem se ne krivi. Svi okviri su međusobno usporedni. Obzirom da su stropne ploče krute u svojoj ravnini, horizontalni pomaci svih vertikalnih elemenata su identični.
- Treba proračunati samo polovinu konstrukcije širenjem okvira u 2D kao na donjoj slici.
- Na svakoj razini kata predviđena su horizontalna pridržanja uporabom skupa čvorova, po jedan u svakom okviru, sa jednakim horizontalnim pomacima.



Numeričko modeliranje | Postupci redukcije

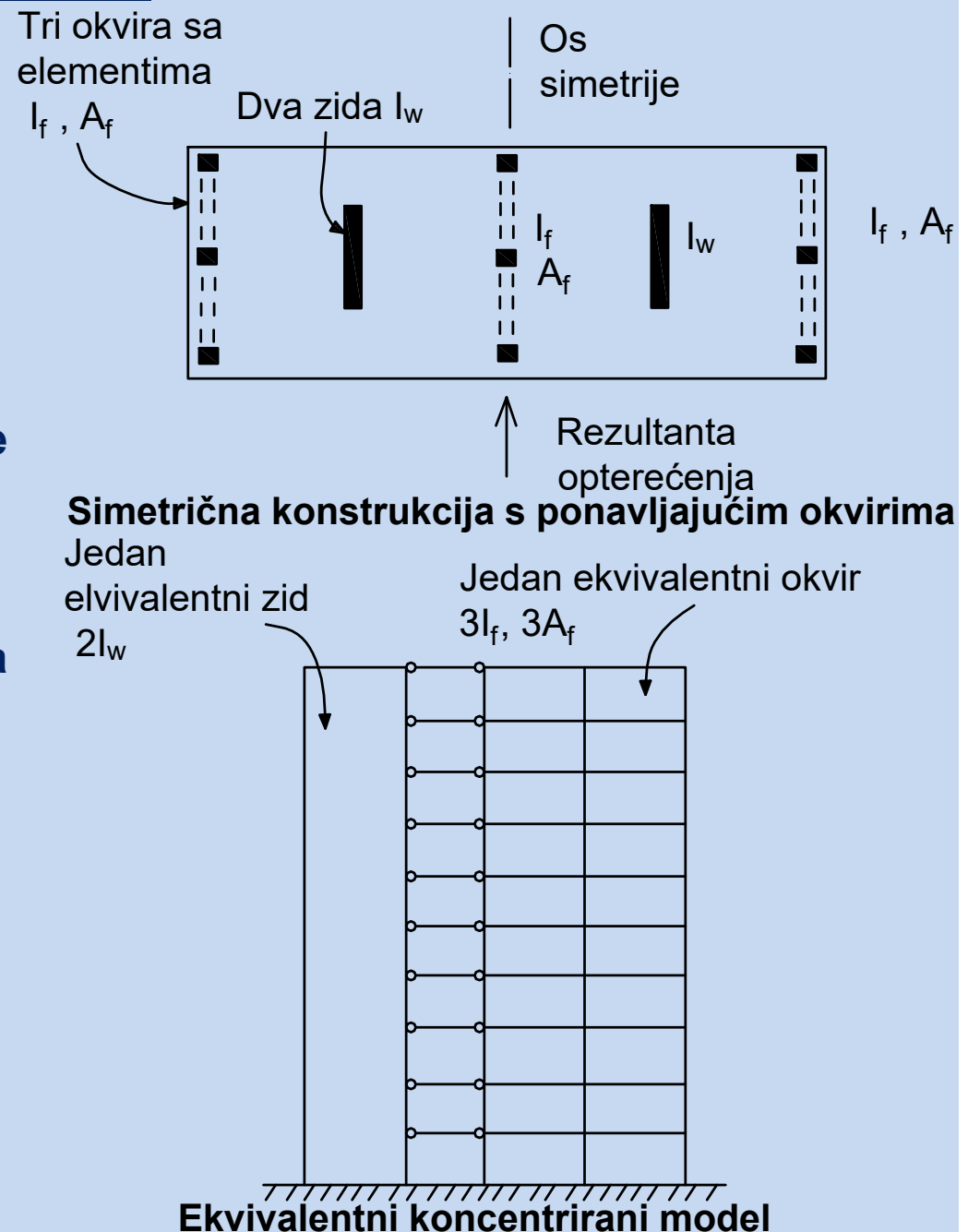
Konstrukcije koje se sastoje od ortogonalnog sustava povezanih okvira, koji su smješteni simetrično oko osi horizontalnog opterećenja mogu se modelirati proširenjem prethodno pokazanog postupka.



- Ponovno se promatra polovina konstrukcije i zapažajući da okviri imaju zanemarivu krutost okomito na svoju ravninu, posmičnu krutost konstrukcije u smjeru opterećenja daju okviri AB i CD, koji se horizontalno pomiču u svojoj ravnini usporednoj sa smjerom opterećenja. Okviri AE i BF su okomiti na smjer opterećenja i ne pomiču se horizontalno u svojim ravninama, ali se sijeku vertikalno s okvirima AB i CD uzduž pravaca međusobnih veza A, B, C i D.
- Ta vertikalna interakcija uzrokuje da okomiti okviri djeluju kao „pojasevi“, a paralelni okviri kao „hrptovi“ za cjelokupno savijanje konstrukcije.
- Elementi okvira AB i CD u reduciranom modelu tada dobivaju dodatne površine za aksijalnu krutost od elemenata „pojaseva“ (okvira AE i BF), a moment tromosti im ostaje isti.

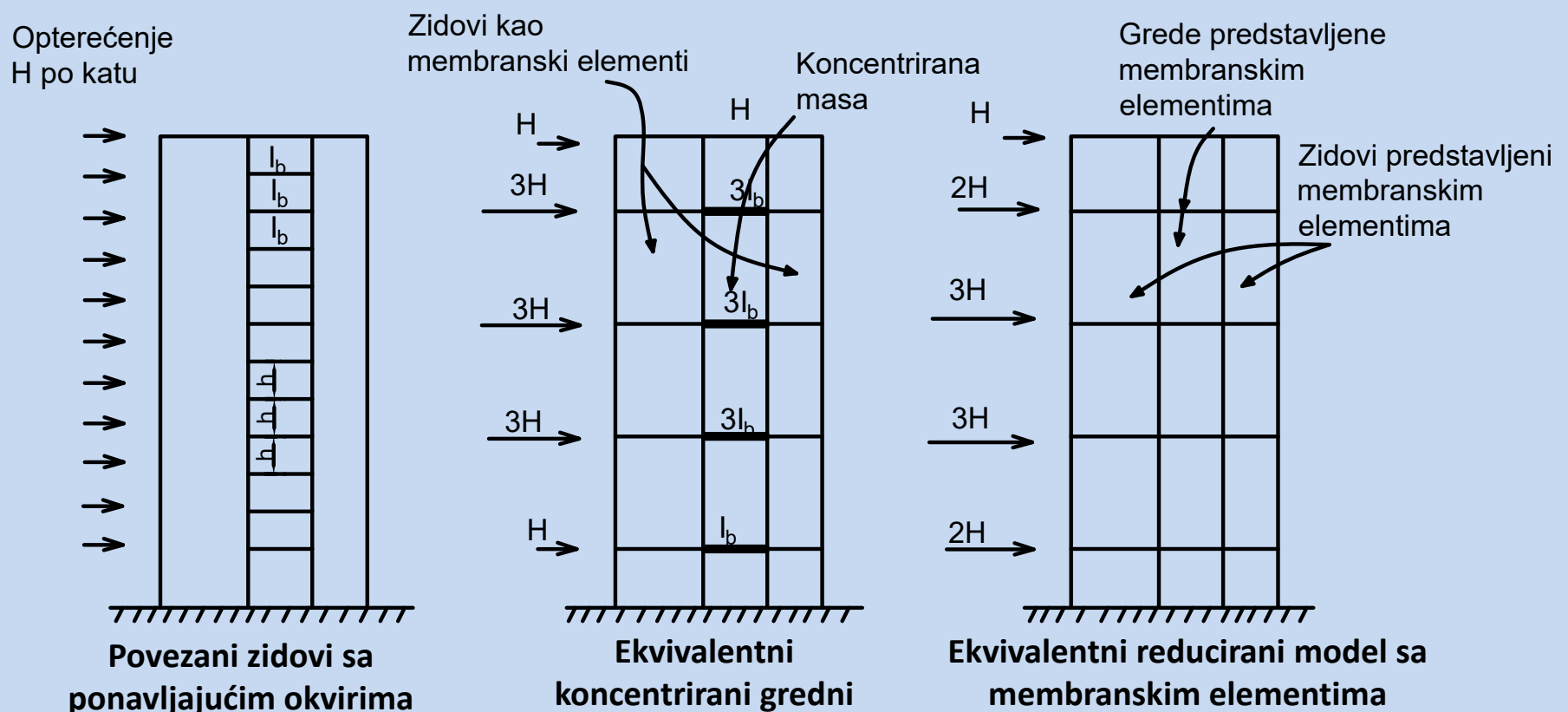
Koncentriranje dijelova konstrukcije („lumping“)

- „Lumping“ znači zamjenu nekoliko sličnih komponenata konstrukcije (ili sklopova komponenata) ekvivalentnom jednom komponentom, u cilju redukcije proračunskog modela.
- Rezultirajuće sile u ekvivalentnoj komponenti (ili sklopu) se naknadno preraspodjeljuju, da se dobiju unutarnje sile u originalnim komponentama.
- Primjer **bočnog koncentriranja („lateral lumping“)** na skici je za simetričnu konstrukciju bez krivljenja od dva posmična zida i tri identična kruta okvira.
- Zidovi se mogu bočno koncentrirati u jedan zid s dvostrukim momentom inercije pojedinačnog zida, a okviri zamijeniti sa ekvivalentnim okvirom, čije su statičke značajke naravno 3 x statičke značajke jednog pojedinačnog okvira. Koncentrirani zid i okvir se onda mogu vezati kao ravninska konstrukcija i vrlo lako proračunati.



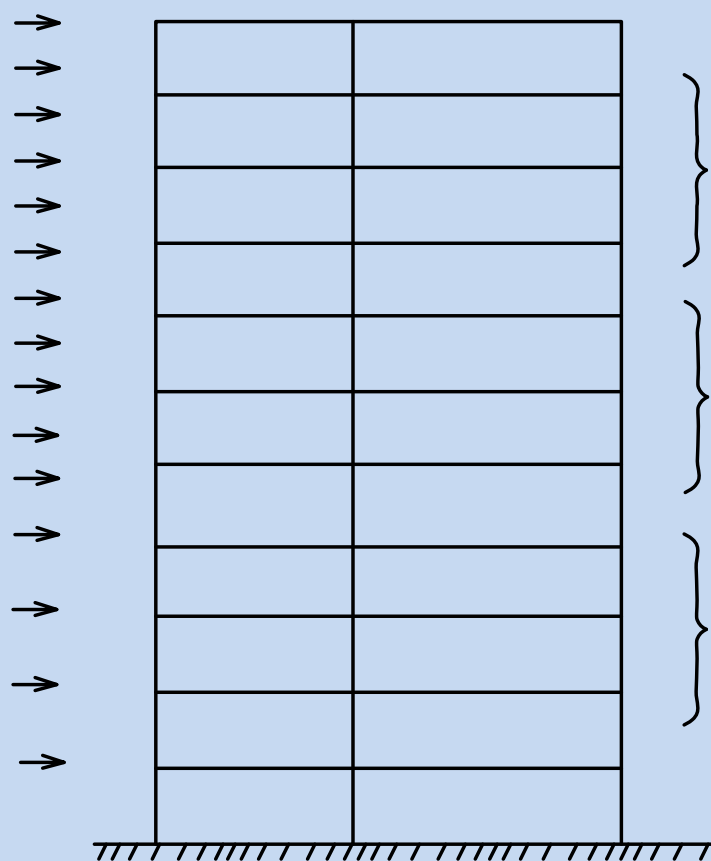
Numeričko modeliranje | Postupci redukcije

- Koncentriranje („lumping“) se uobičajeno koristi za **vertikalno koncentriranje („vertical lumping“)** visokih višekatnih zgrada od međusobno povezanih zidova, naravno ako se visine katova i izmjere veznih greda ponavljaju.
- Te se konstrukcije onda mogu pojednostaviti kombinirajući grupe od 3 ili 5 greda vertikalno u pojedinačne grede smještene u položaju srednje grede kojima se pridaju koncentrirane vrijednosti momenta tromosti i posmične površine. Jedna ili dvije grede pri podnožju i pri vrhu se ne diraju zbog njihove veće važnosti.
- Statičke veličine membranskih elemenata ili analognih širokih stupova kojima se modeliraju zidovi su za koncentrirani model jednake kao i za originalni model, jer se zidovi primarno deformiraju u jednostrukoj zakrivljenosti.

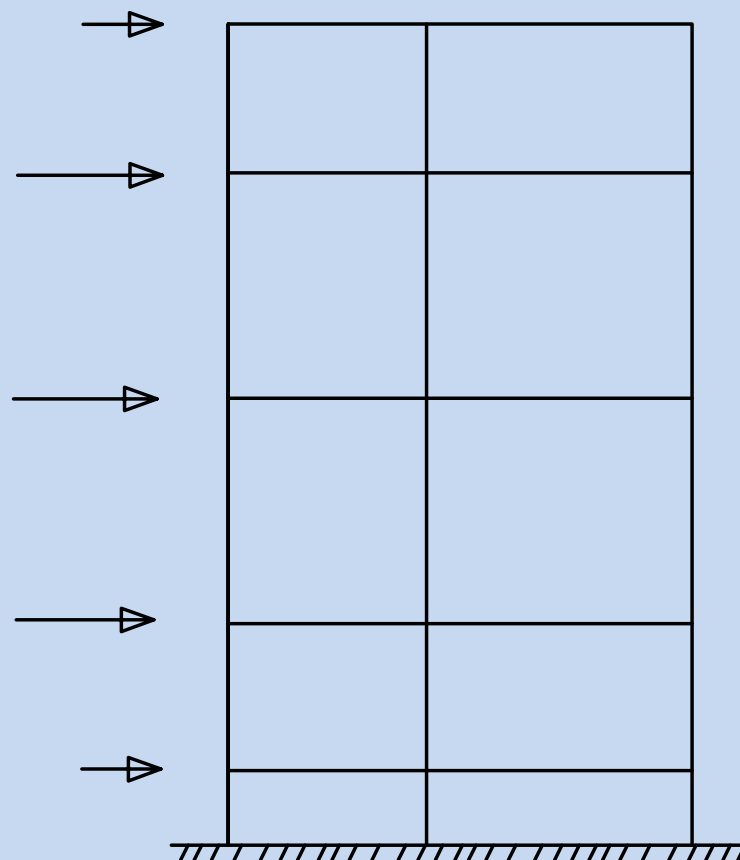


Numeričko modeliranje | Postupci redukcije

- Još jedan primjer vertikalnog koncentriranja
- Kod ovog modela za koncentrirani kruti okvir, zbog primarnog savijanja dvostruke zakrivljenosti visine kata, momenti tromosti stupova rastu sa visinom kata, da bočna krutost oba modela bude identična.
- Bočna djelovanja se također koncentriraju i djeluju na razinama koncentriranih greda.



Kruti okvir sa gredama koje se ponavljaju

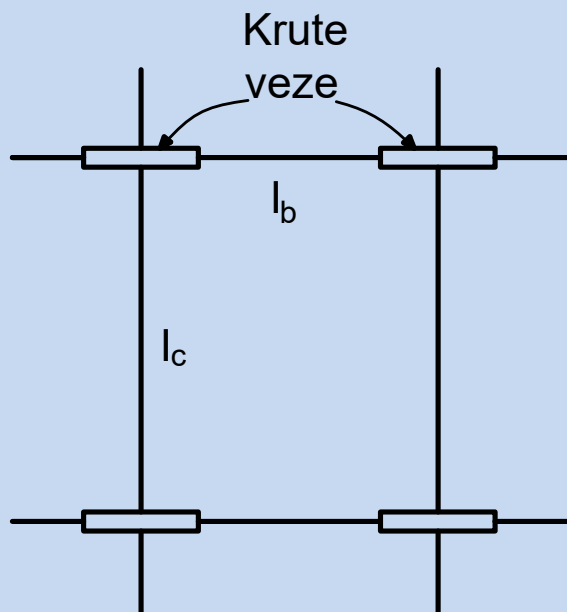
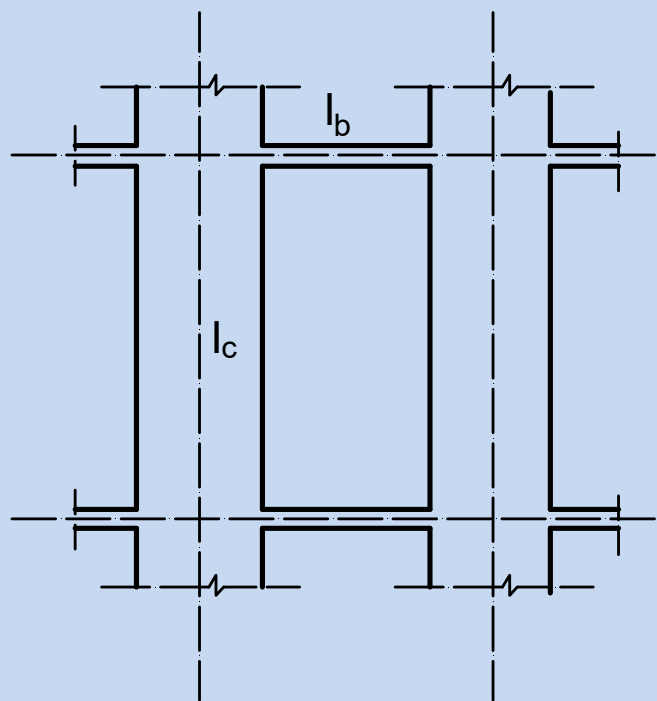


Ekvivalentni koncentrirani gredni model

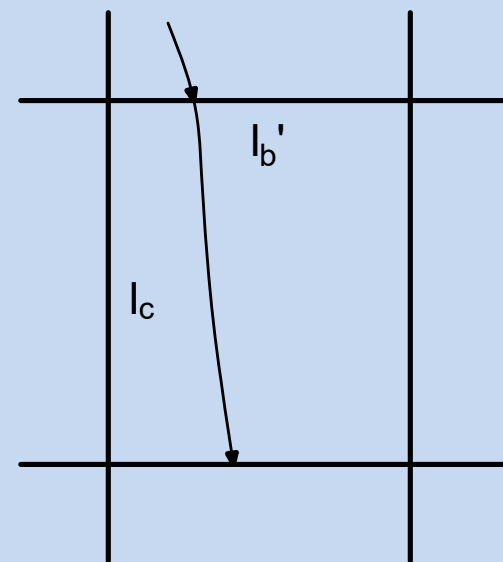
Numeričko modeliranje | Postupci redukcije

Analogija širokih stupova i visokih greda

- Horizontalno opterećeni posmični zidovi povezani gredama (slika lijevo) mogu se modelirati pomoću ekvivalentnih **širokih stupova**, koji čine stupovi smješteni na težišnoj osi zidova s krutim konzolama na razinama greda, koje predstavljaju utjecaj širine zida (slika sredina).
- Neki programski paketi za okvirne konstrukcije imaju uključenu i opciju krute veze na krajevima, koja sadrži i utjecaj širokih stupova i tako dopušta da se greda promatra kao jedan element između osi stupova. Alternativno se umjesto rješenja s krutim konzolama može koristiti i greda punog raspona (slika desno) sa povećanim momentom tromosti, kojim se uzima u obzir utjecaj širokih stupova.



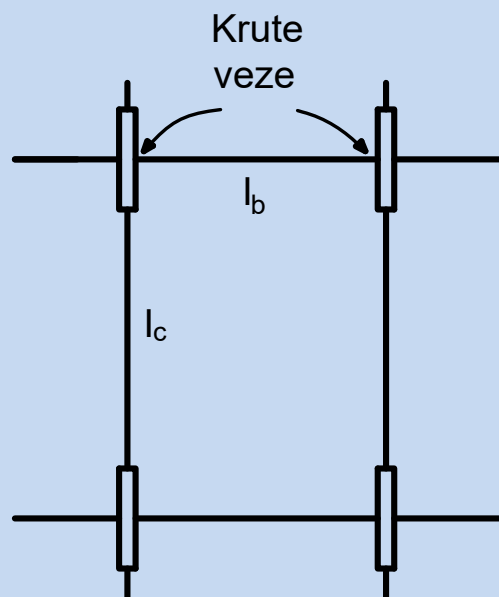
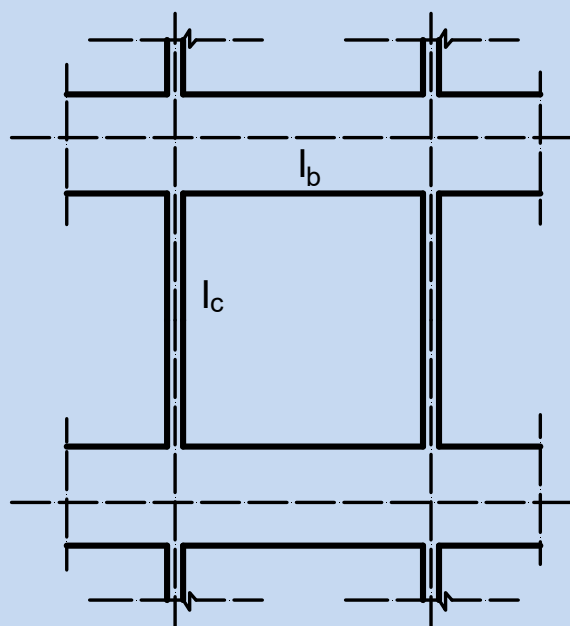
Ekvivalentne grede konstantnih svojstava



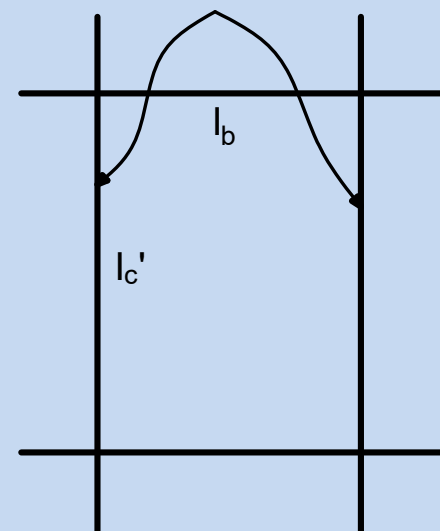
Numeričko modeliranje | Postupci redukcije

Analogija širokih stupova i visokih greda

- Kod zgrada od krutih okvira sa **visokim gredama** (slika lijevo, npr. World Trade Center tornjevi) ukružujući utjecaj visine visoke grede na stupove može se modelirati sa krutim vertikalnim rukama – konzolama (slika sredina) i primijeniti u modelu koristeći opciju krutih krajeva („rigid-end“) elementa.
- Alternativno se stup sa krutim konzolama može zamijeniti u modelu sa stupom pune visine između osi greda (slika desno), naravno opet sa modificiranom krutošću za uzimanje u obzir utjecaja visoke grede.



Ekvivalentni stupovi
konstantnih svojstava



Numeričko modeliranje | Postupci redukcije

Analogija širokih stupova i visokih greda

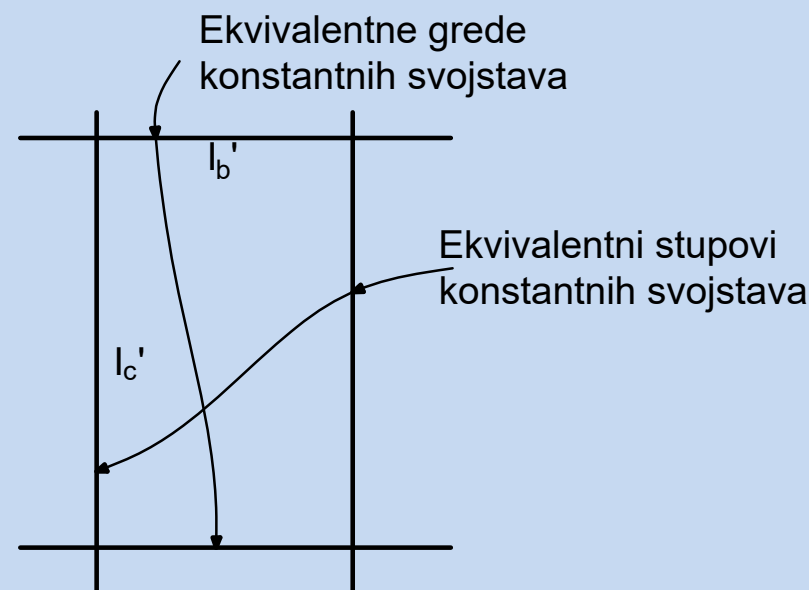
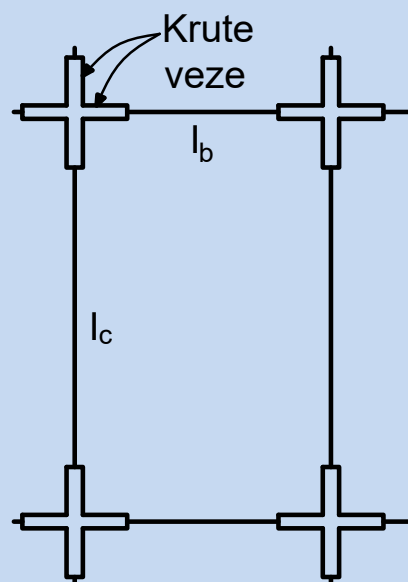
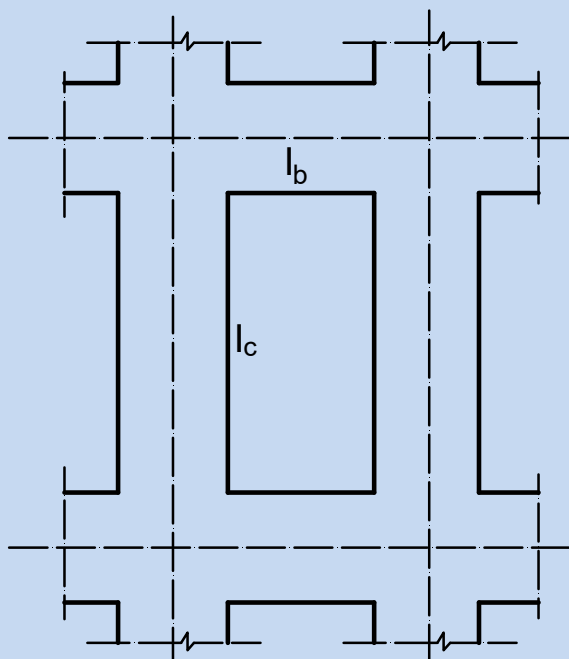


- Kod predgotovljenih trokatnih Vierendeel elemenata na WTC-u vidljive su visoke okvirne grede.

Numeričko modeliranje | Postupci redukcije

Analogija širokih stupova i visokih greda

- Okvir kod kojeg se kombiniraju i široki stupovi i visoke grede (slika lijevo), kao primjerice zatvoreni okvir („tube“) od armiranog betona (npr. Petronas Towers Kuala Lumpur) ili od čelika (npr. Taipei 101 Taiwan) mogu se modelirati ili sa analognim okvirom od širokih stupova i visokih greda ili jednostavnije kao okvir od ekvivalentnih greda i stupova pune duljine sa odgovarajuće povećanom krutošću (slika desno).

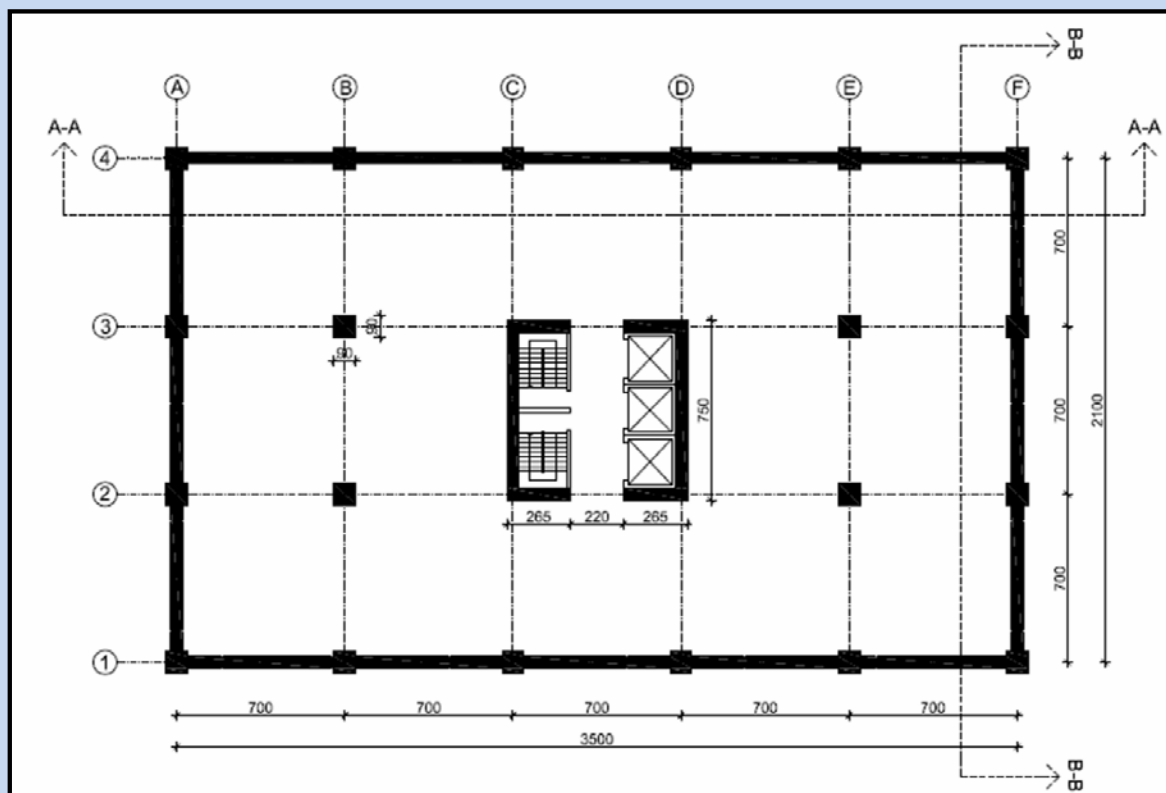


Primjeri numeričkih modela

Numeričko modeliranje | Primjeri numeričkih modela

Primjer 1

- Visoka poslovna zgrade tlocrtne dimenzije 35 m × 21 m, površine 735 m².
- Građevina ima ukupno 31 etažu (prizemlje + 30 katova) s visinom svake etaže od 3 m, što čini zgradu visokom $H_{uk} = 93$ m.
- Tlocrtno gledano građevina se sastoji od ukupno 21 elementa, a to su stubišna jezgra i 20 AB stupova.
- Vertikalni nosivi sustav građevine koji preuzima sva poprečna bočna opterećenja čine međusobno povezani posmični AB zidovi koji tvore središnju jezgru tlocrtnih dimenzija 7 m × 7 m. Međukatna konstrukcija su AB ploče debljine 20 cm.

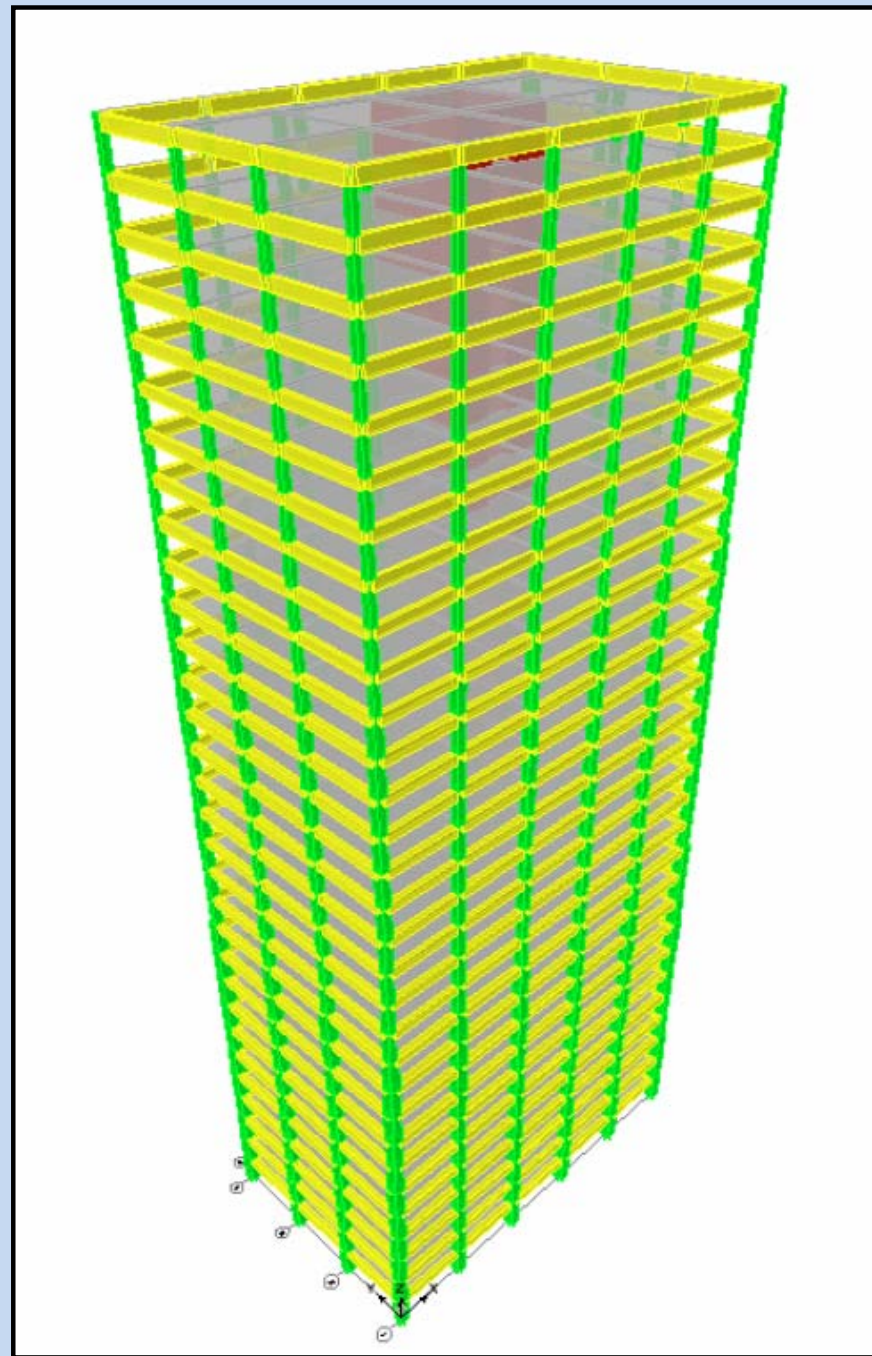
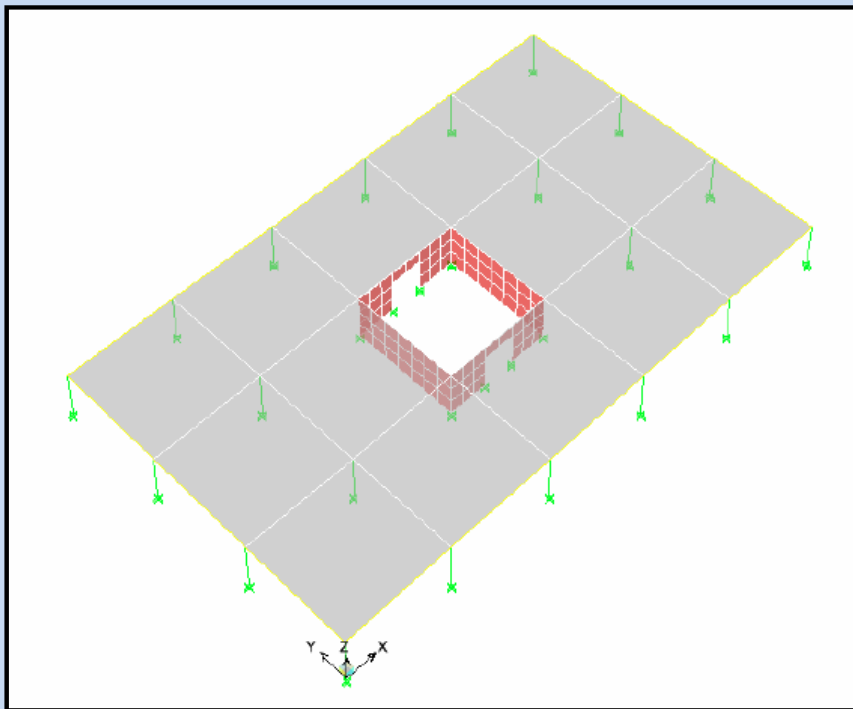
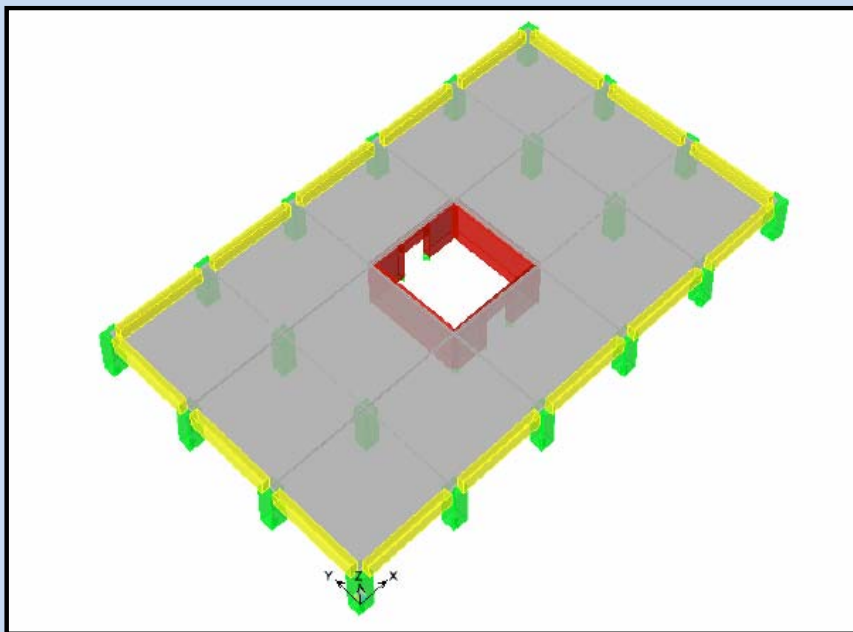


Primjer 1

- Za potrebe proračuna i dimenzioniranja karakterističnih nosivih elemenata (zidovi, grede i stupovi) napravljen je 3D model konstrukcije
- Prednosti koje pruža ovaj model je dobra vizualizacija ponašanja konstrukcije na zadanu pobudu te približavanje stvarnom ponašanju.
- Za modeliranje greda i stupova korišteni su štapni beam elementi.
- Plošni elementi, ploče i zidovi, definirani su kao konačni elementi ploče koji posjeduju krutost i van svoje ravnine (plate elements)
- Ploče su definirane kao krute dijafragme kojima je jedan čvor vodeći, a ostali su vođeni čvorovi. Pretpostavljanje potpuno krutih dijafragmi se može obrazložiti velikom krutosti ploča u svojoj ravnini. Ovime se ne dopuštaju međusobni relativni pomaci točaka ploča u njenoj ravnini.
- Veličina konačnih elemenata ploča je ograničena s pozicijama drugih elemenata koji se s njom spajaju i veličinom i položajem raznih otvora.
- Maksimalna veličina konačnih elemenata zidova je ograničena na 1 metar.
- Kao rubni uvjet pretpostavlja se kruta podloga, dakle u obliku apsolutno krutih upetih ležajeva (spriječeni pomaci u x, y i z smjeru, te spriječene rotacije oko x i y osi).

Numeričko modeliranje | Primjeri numeričkih modela

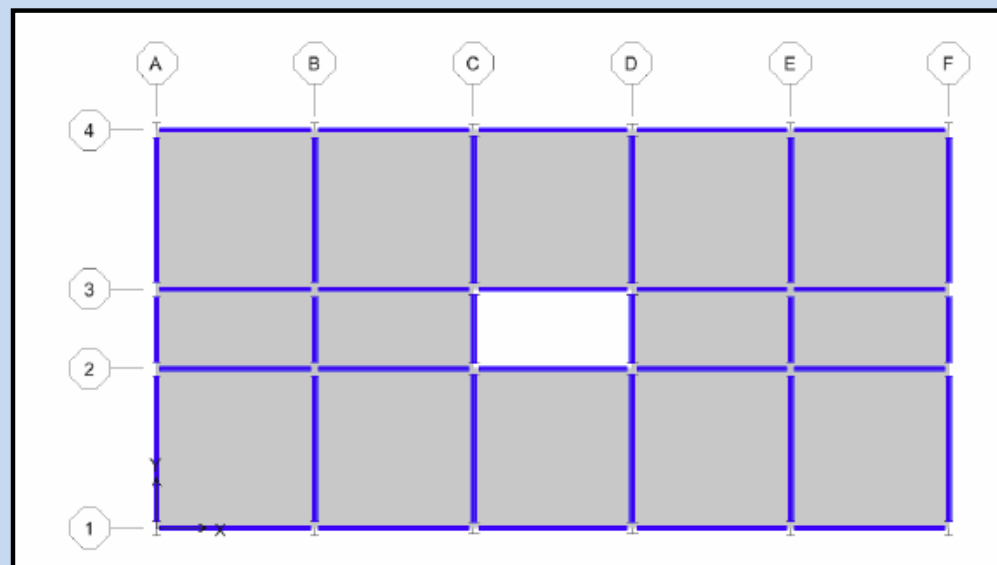
Primjer 1



Numeričko modeliranje | Primjeri numeričkih modela

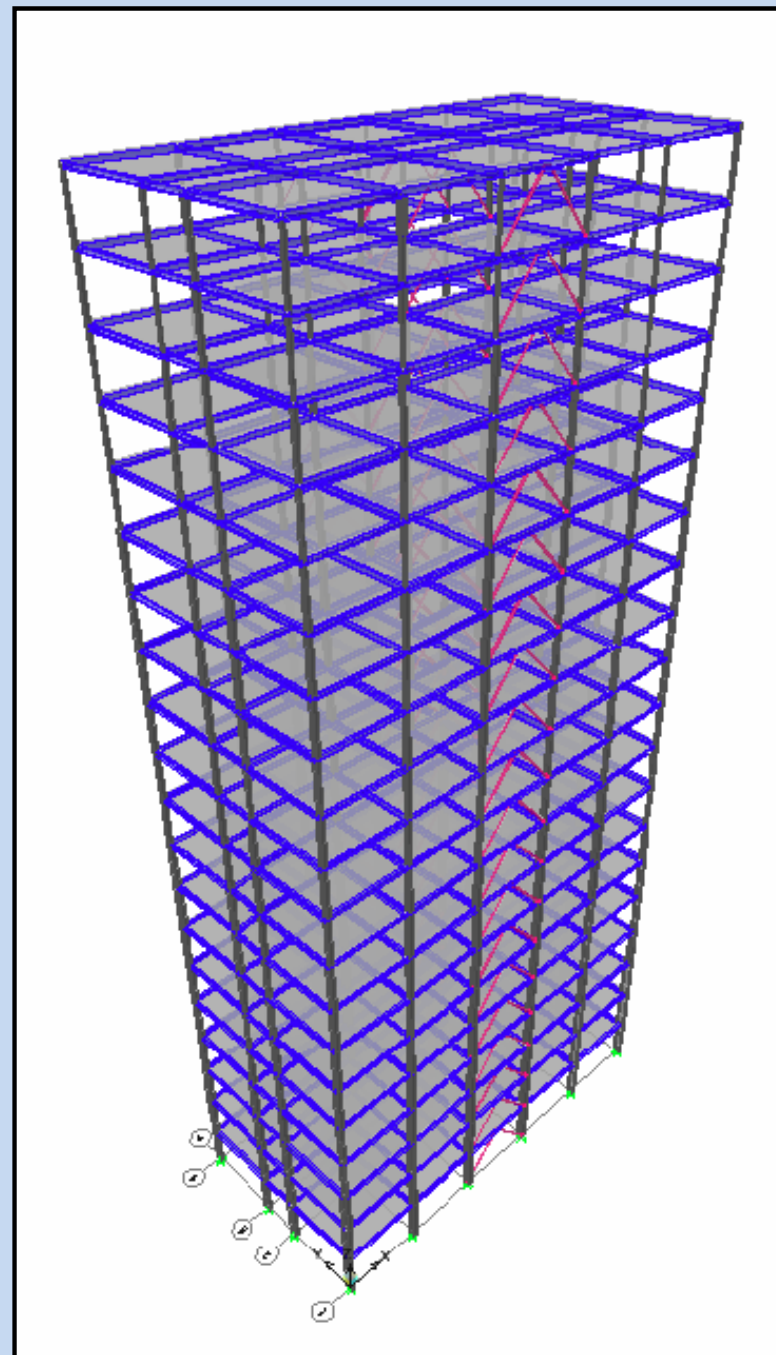
Primjer 2

- visoka poslovna zgrada čeličnog nosivog sustava, tlocrtne dimenzije 30 m x 15 m, površine 450 m².
- Građevina ima ukupno 20 etaža (prizemlje + 19), s visinom svake etaže od 3,5 m. Ukupna visina zgrade je $h_{uk} = 70$ m.
- Tlocrtno gledano građevina je razdijeljena u 15 segmenata s uzdužnim i poprečnim rasterom od 6 m.
- Međukatnu konstrukciju čini spregnuta ploča nosiva u jednom smjeru s profiliranim limom Multideck 80-V2 i betonom, spojena moždanicima na spregnuti nosač profila IPE 300. Ukupna visina spregnute ploče je 17 cm. Spregnuti nosači su ujedno i sekundarni nosači konstrukcije koji se zgloбно spajaju na glavne okvire na razmaku od 6 m.
- Vertikalni nosivi sustav čine čelični momentni okviri s rasterom od 6 m u poprečnom smjeru, a u uzdužnom smjeru nalaze se spregovi obrnutih V-dijagonala koji su stupnjevani po visini.

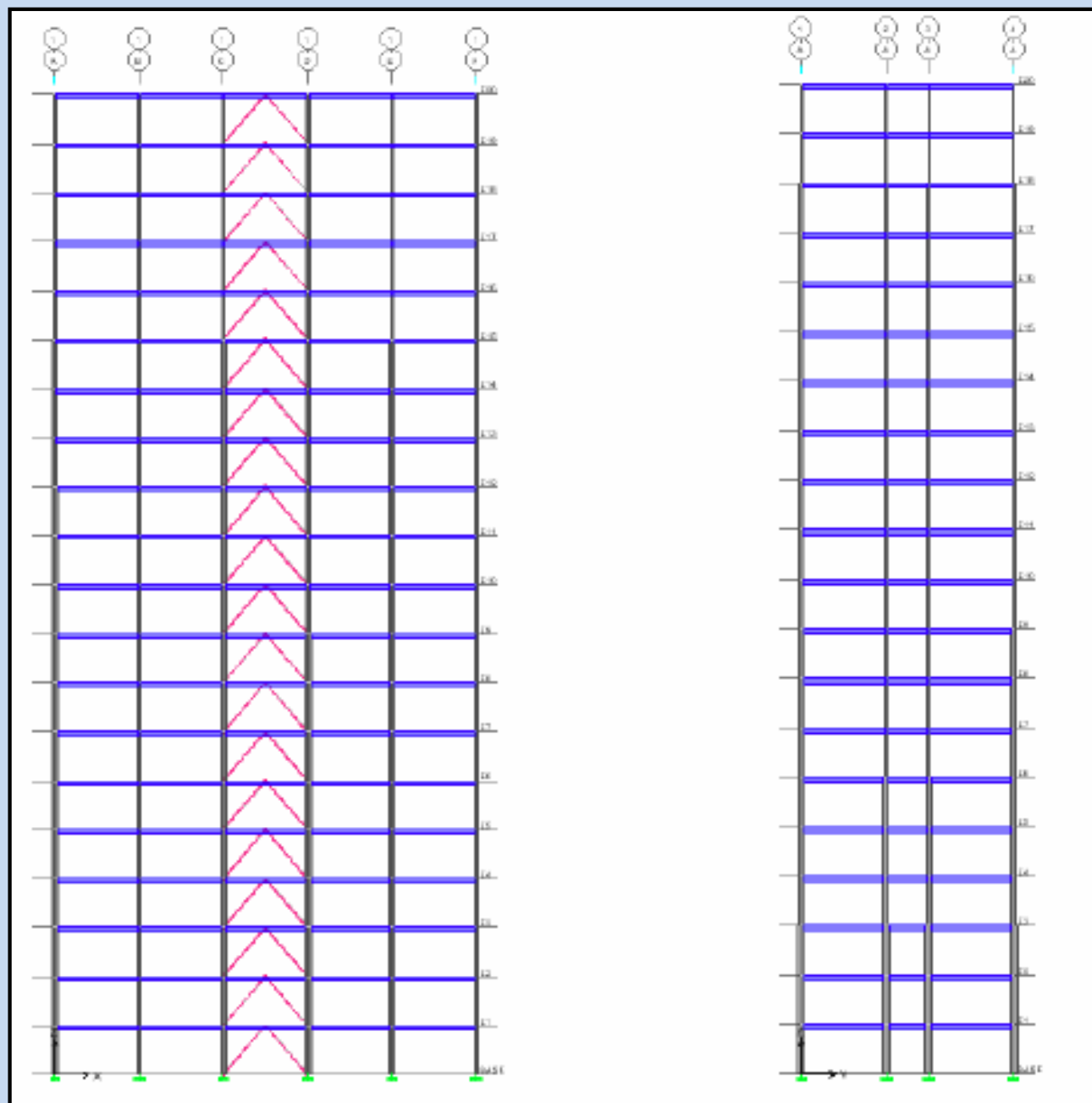
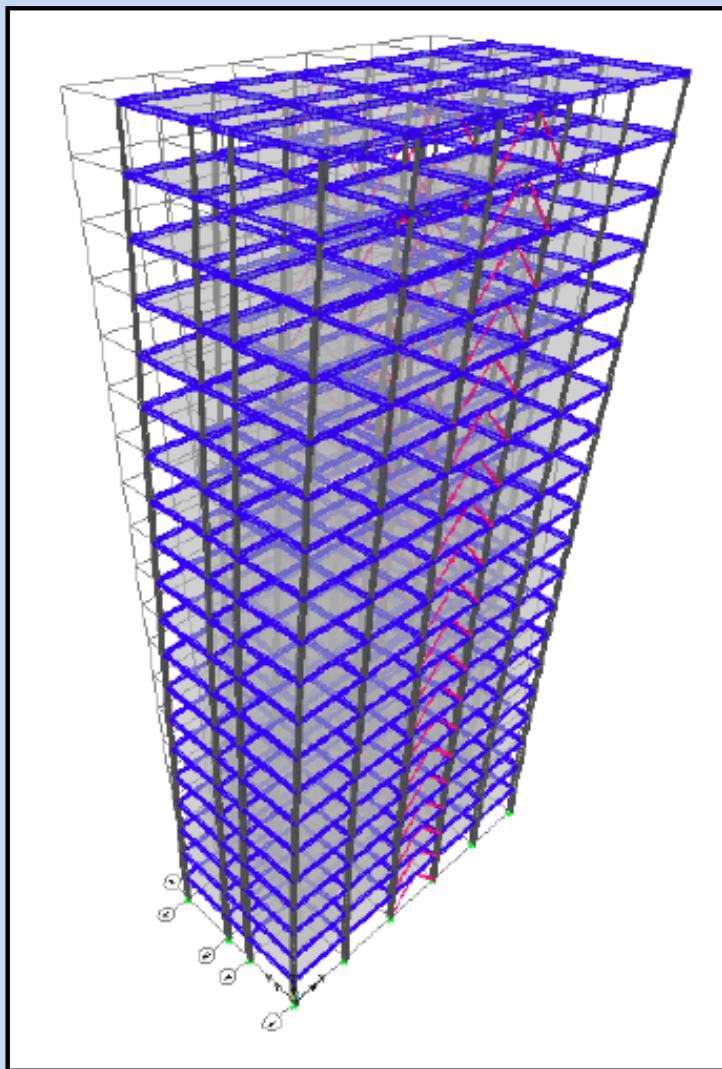


Primjer 2

- Napravljen je 3D model konstrukcije za potrebe proračuna i dimenzioniranja karakterističnih nosivih elemenata (okvira i spregova).
- Plošni elementi u 3D modelu definirani su kao krute dijafragme kojima je jedan čvor vodeći, a ostali su vođeni čvorovi. Ploča je debljine 20 cm.
- Nosivi sustav čini momentni okvir čiji se profili stupova i prečke mijenjaju po visini. Prečke okvira ostvaruju krutu momentnu vezu sa stupovima okvira.
- Spregovi su zadani kao obrnute V-dijagonale rešetkastih truss elemenata i spajaju se na profile međukatne konstrukcije.
- Pretpostavljena je kruta podloga, u obliku apsolutno krutih ležajeva (spriječeni su pomaci u x, y i z smjeru te rotacije oko x, y osi).

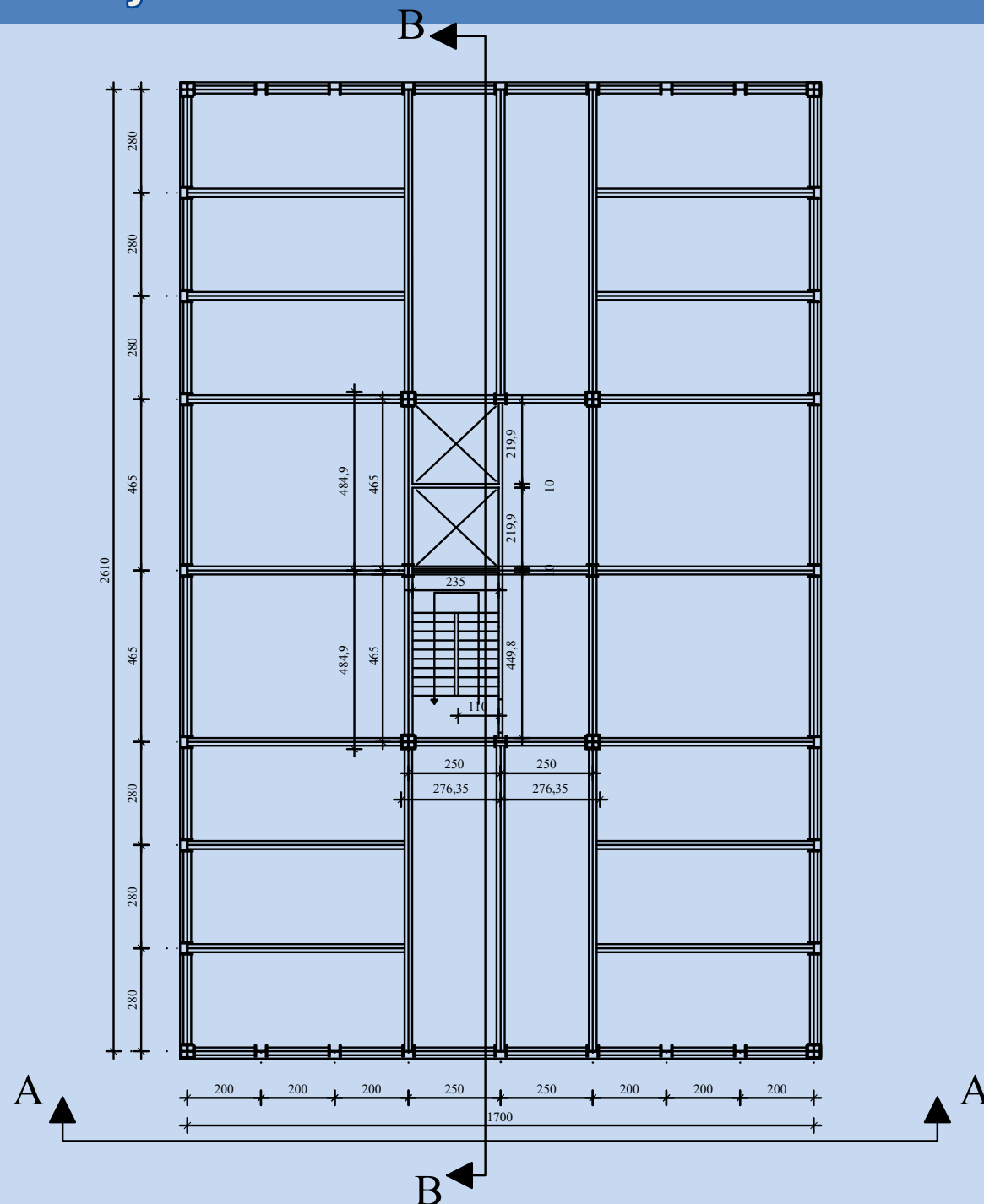


Primjer 2



Primjer 3

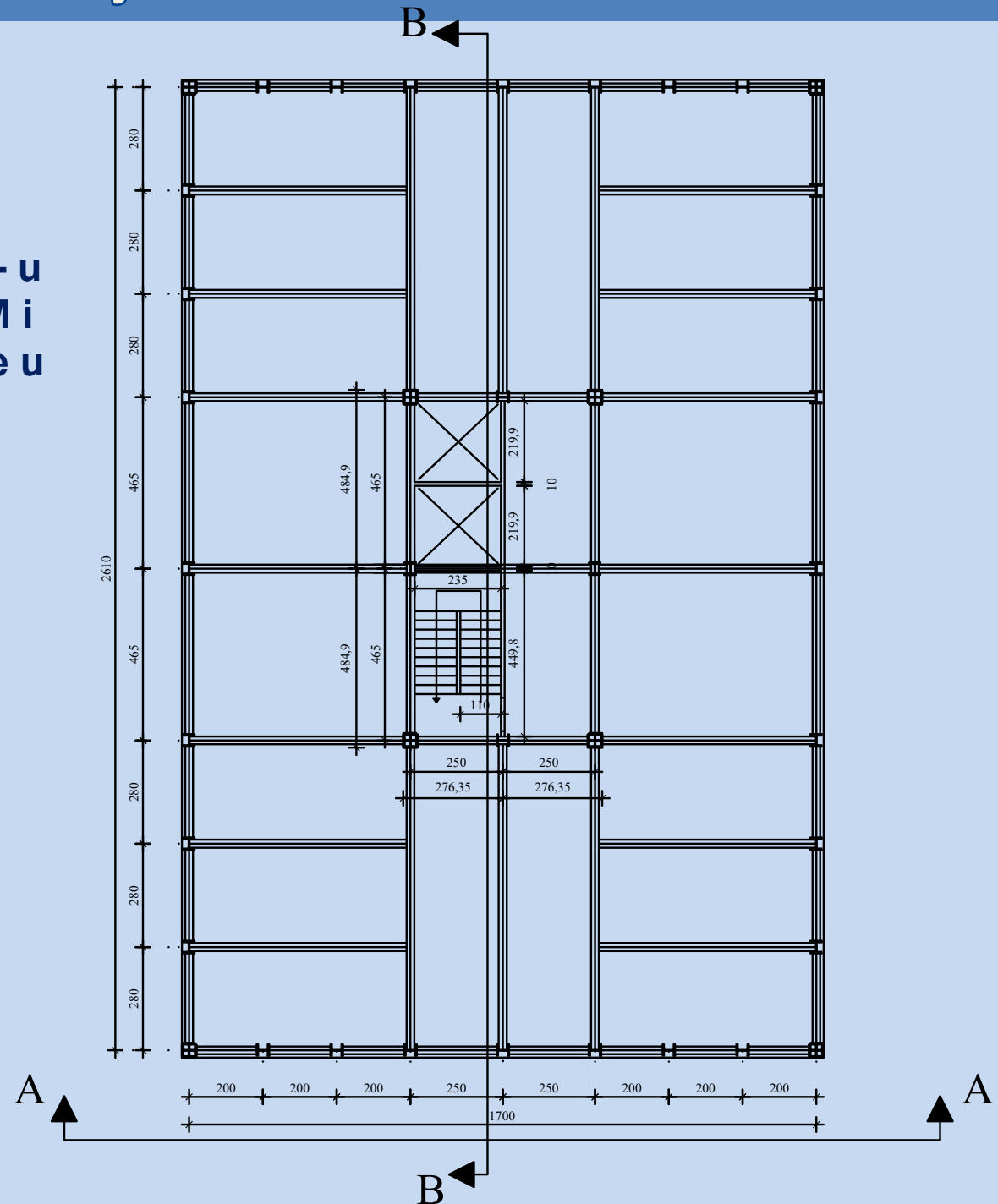
- Poslovna zgrada kvadratnog presjeka dimenzija 26,1 m x 17 m i ukupne iskoristive površine od 397,2 m² po etaži, sastoji se od 21 etaže visine 3,6 m što čini ukupnu visinu zgrade od 75,6 m.
- Nosivi sustav zgrade je okvir koji se sastoji od 4 okvira postavljena po obodu, te četiri manja okvira unutar zgrade.
- Okvire čine čelični stupovi postavljeni na osnom razmaku od 2 m i 2,5 m po kraćem obodu i 2,8 m i 4,65 m po dužem obodu zgrade, te 2,5 m i 4,65 m u središtu zgrade.



Numeričko modeliranje | Primjeri numeričkih modela

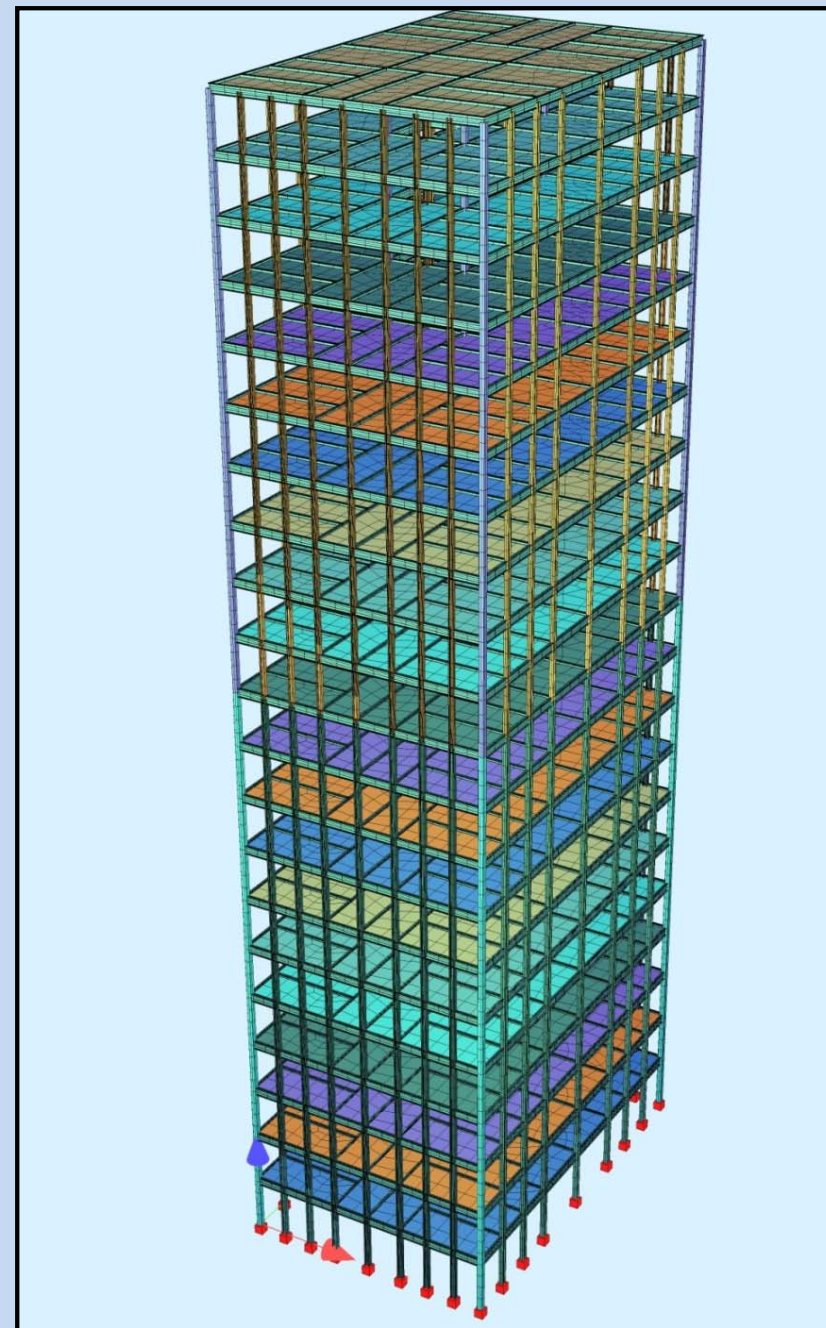
Primjer 3

- Stupovi su povezani u okvir visokim gredama profila IPE 550, dok se sam presjek stupova mijenja na 12. katu – u prizemlju su stupovi profila HE 300 M i HE 360 MX, a na 12. katu mijenjaju se u profile HE 260 M i HE 360 BX.
- U kutovima zgrade su postavljeni posebni profili sastavljeni od dva obična H profila.
- Stropna konstrukcija se sastoji od spregnute armirano betonske ploče debljine 20 cm postavljene na spregnute nosače profila IPE 600.

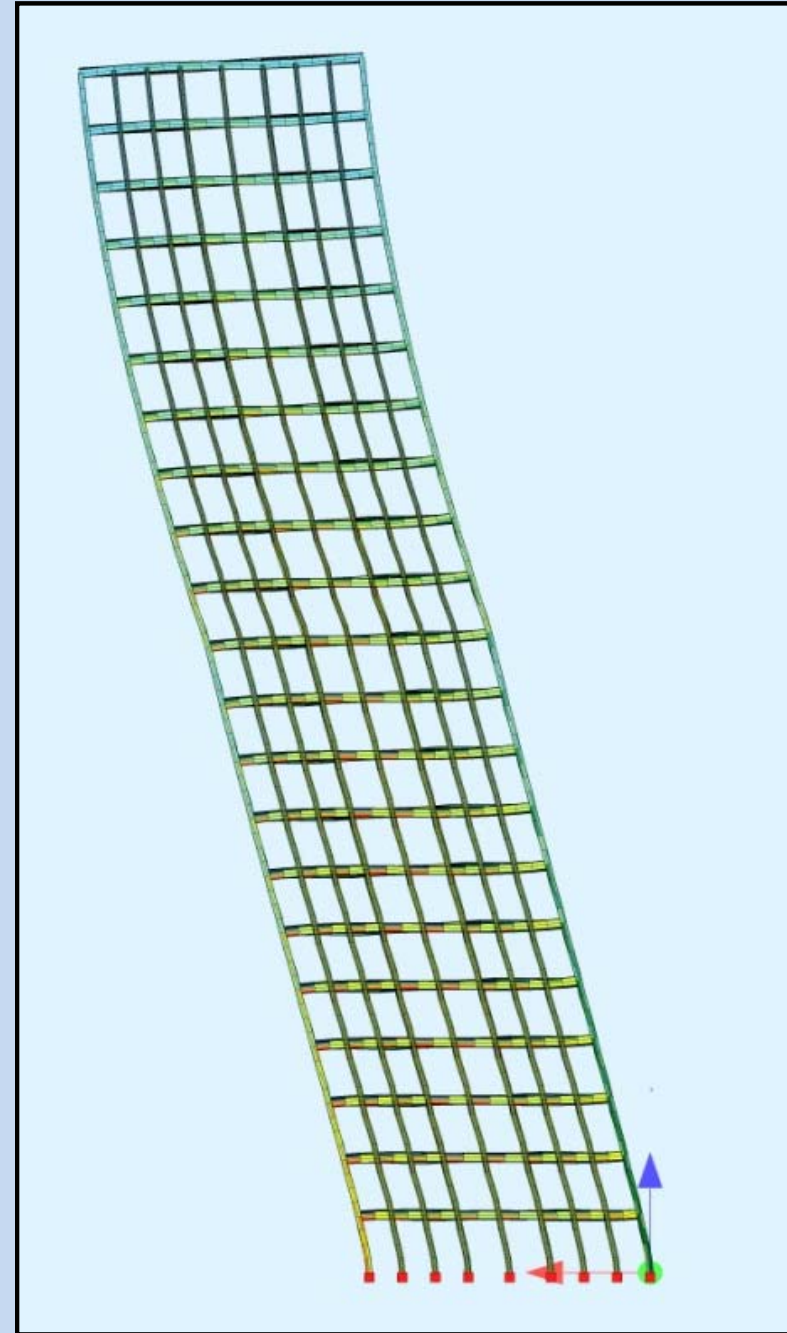
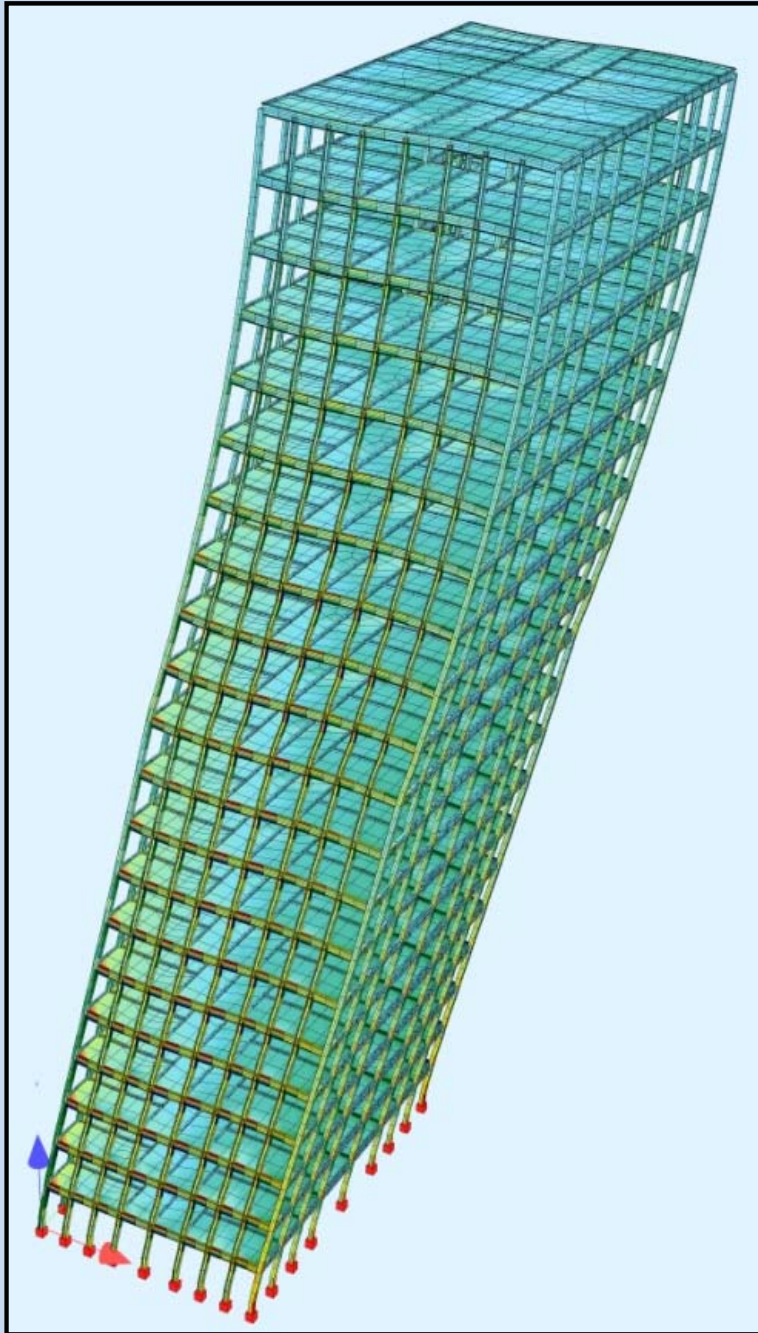


Primjer 3

- Za potrebe proračuna i dimenzioniranja karakterističnih vertikalnih nosivih elemenata napravljen je 3D model konstrukcije.
- Ploče su u modelu definirane kao plošni elementi dok su stupovi i grede štapni elementi.
- Kao rubni uvjeti pretpostavlja se kruta podloga, dakle u obliku apsolutno krutih upetih ležajeva (spriječeni pomaci i rotacije u x, y i z smjeru).

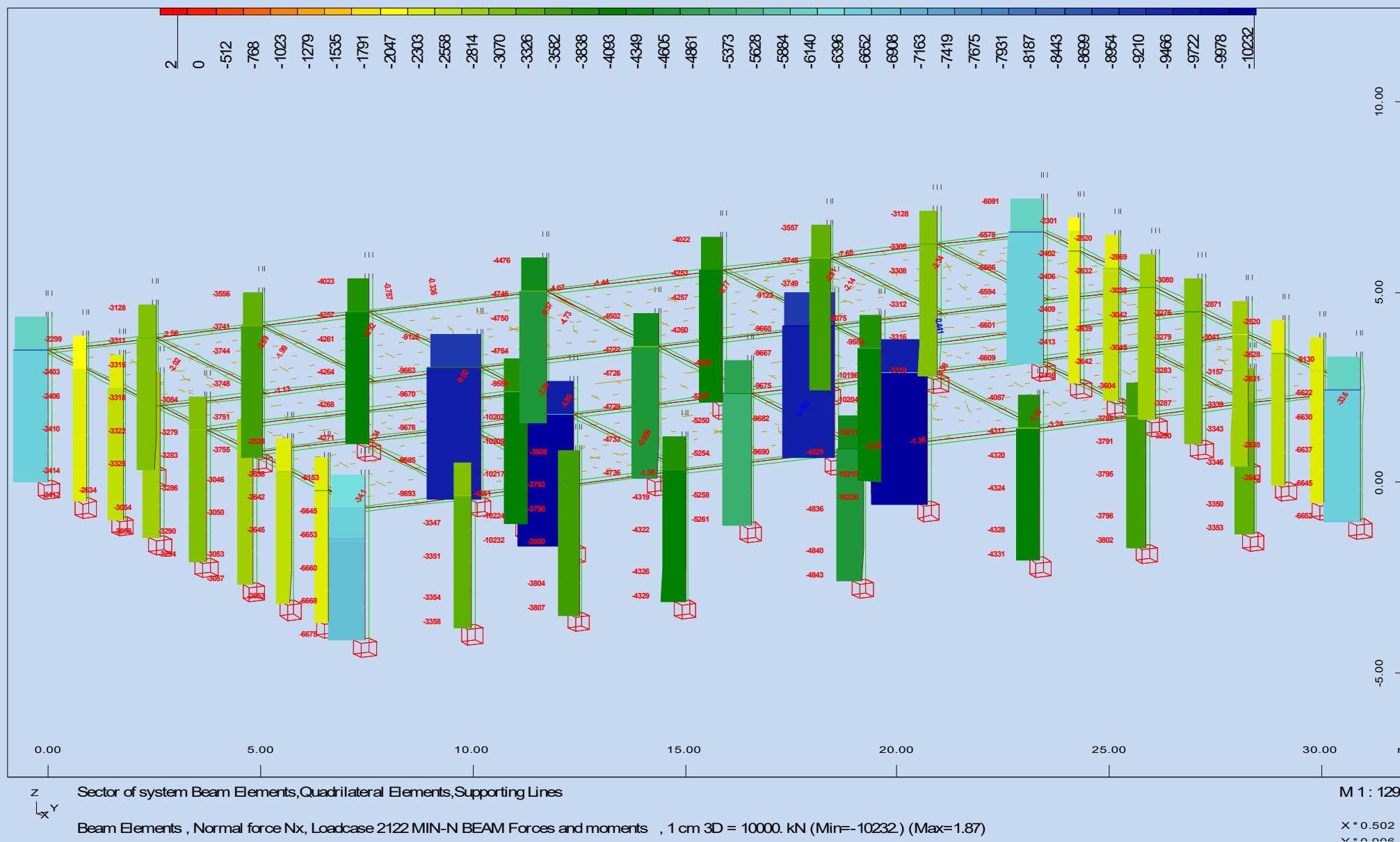


Primjer 3



Numeričko modeliranje | Primjeri numeričkih modela

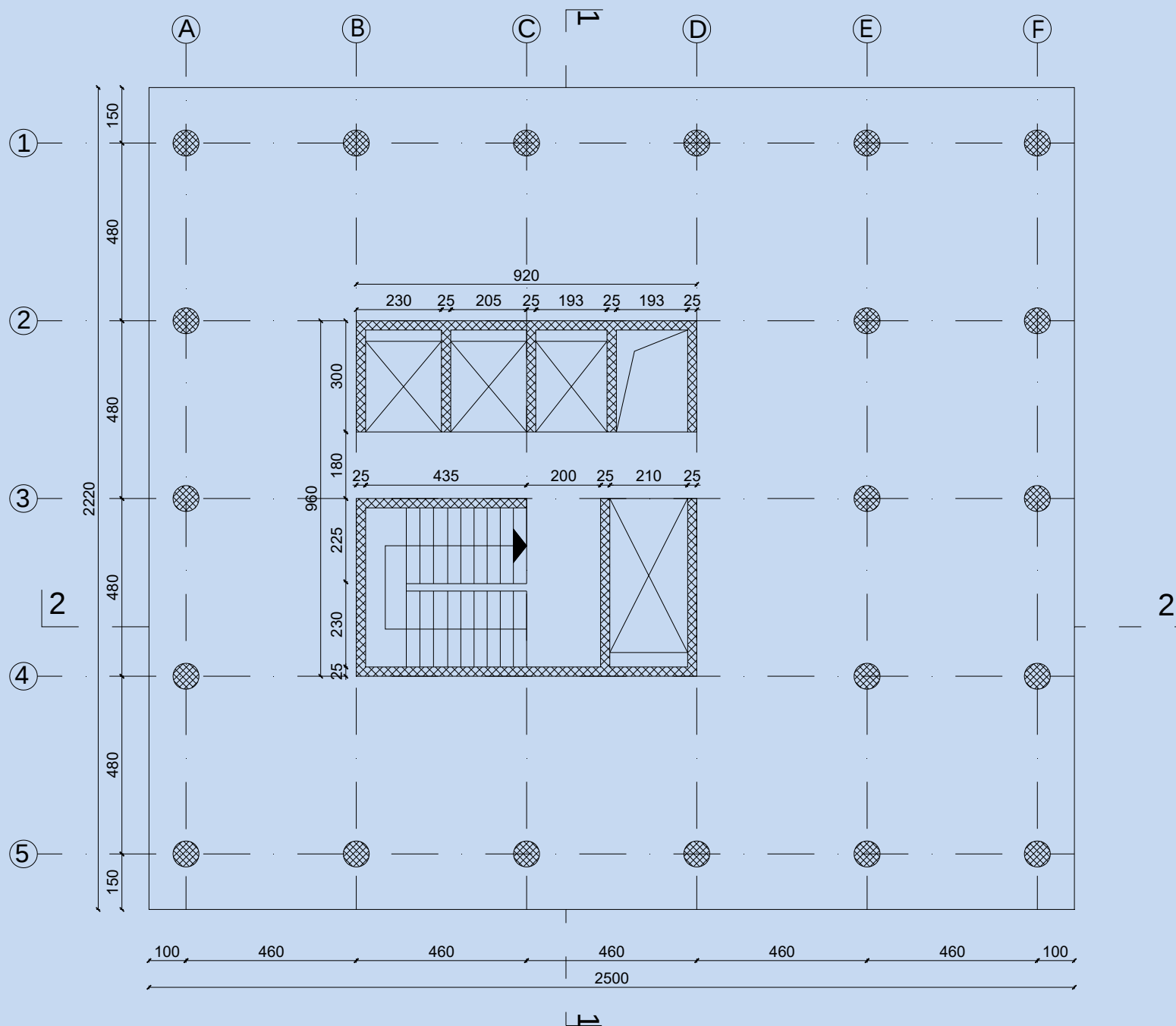
Primjer 3



Najveća uzdužna sila stupova 1. kata

Numeričko modeliranje | Primjeri numeričkih modela

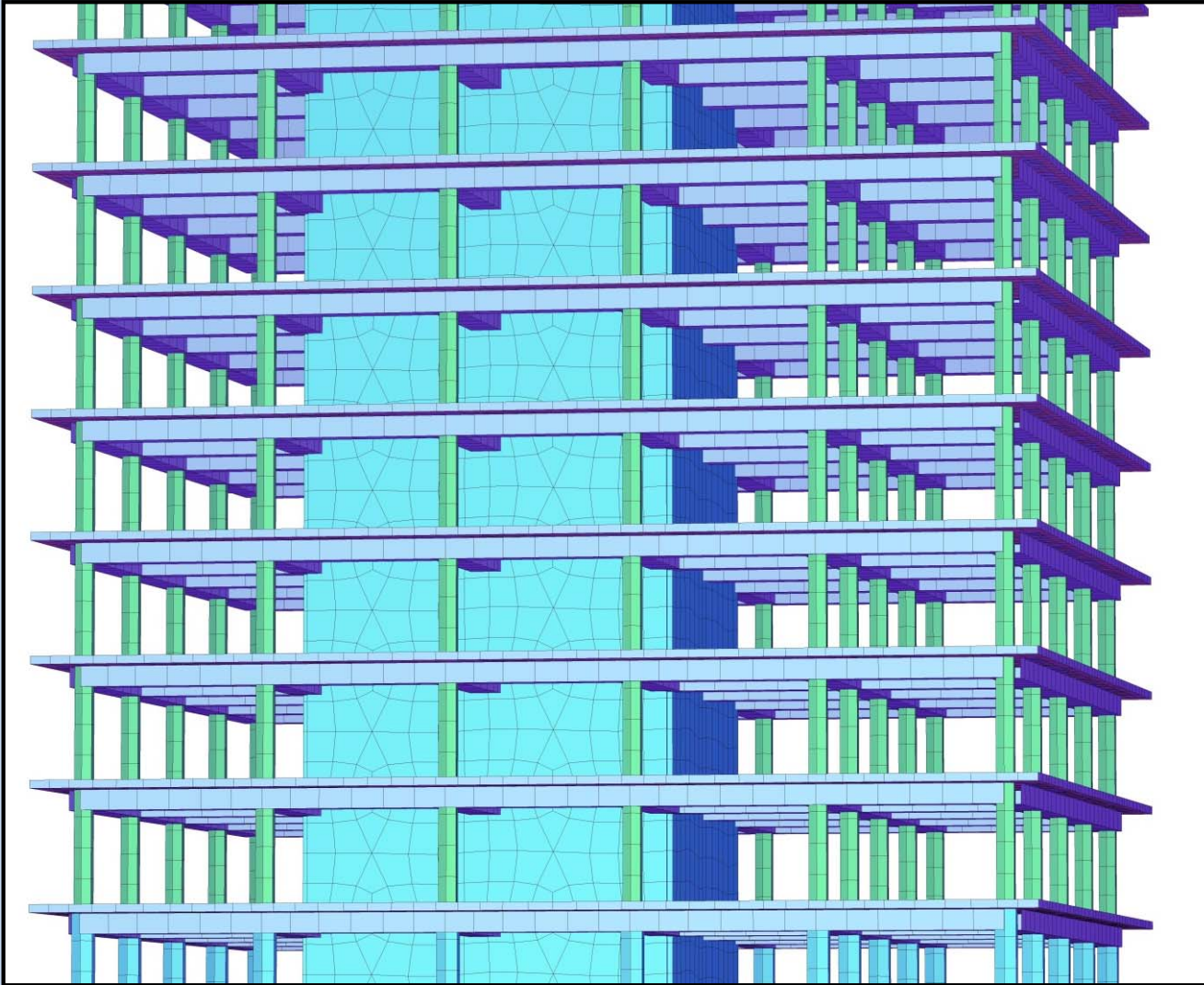
Primjer 4



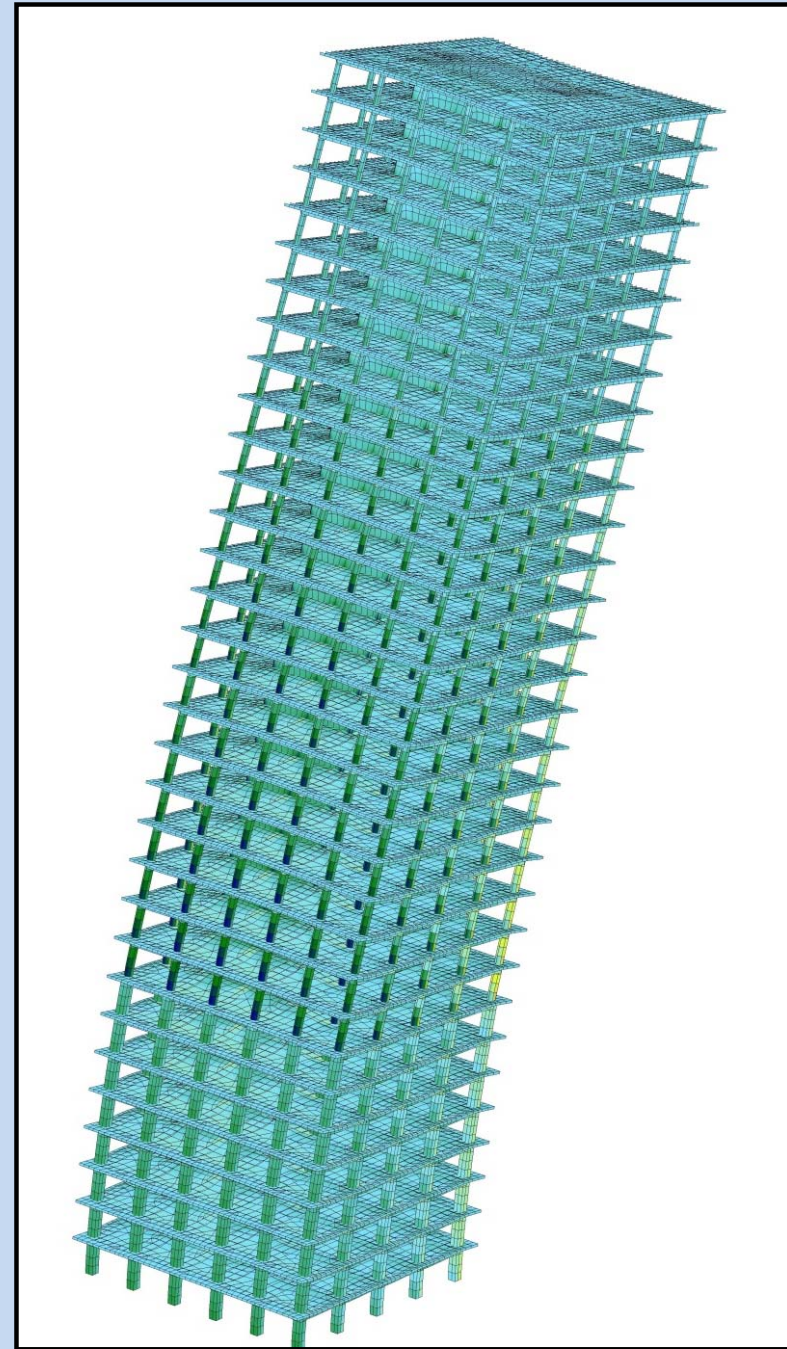
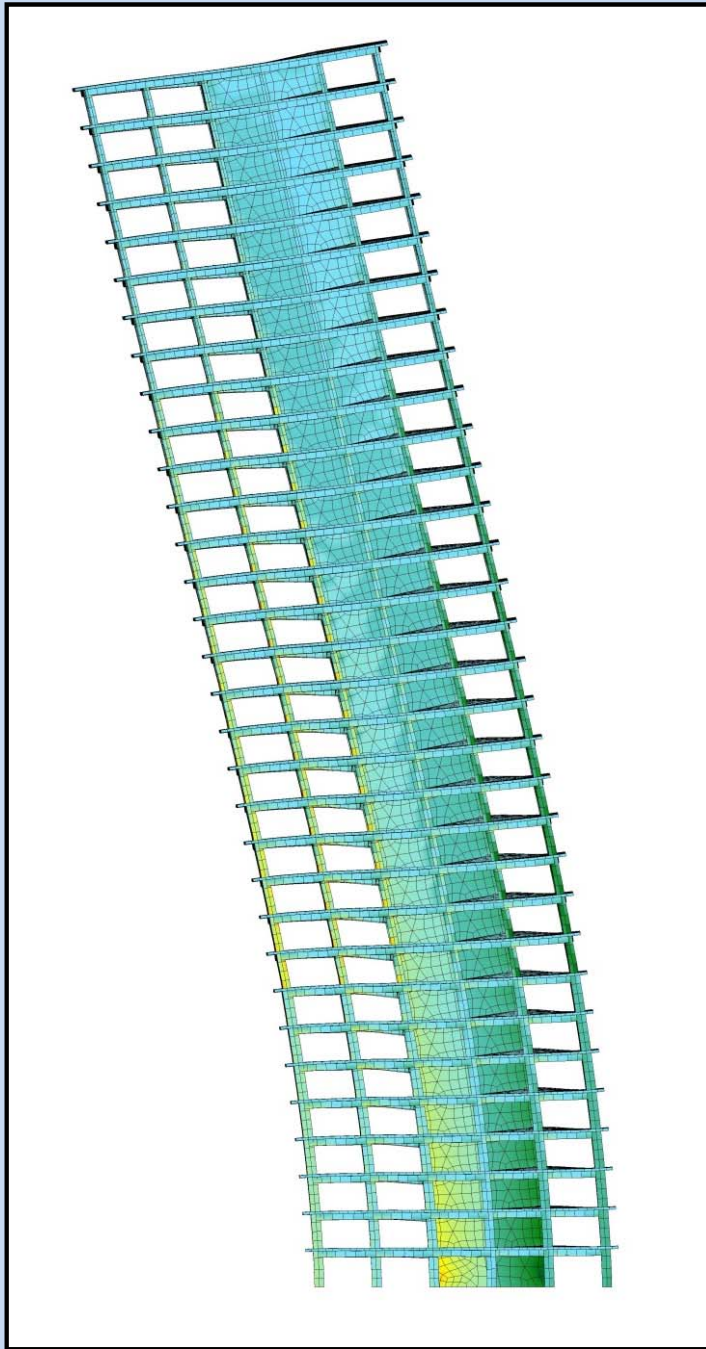
Primjer 4

- Visoka građevina tlocrtne dimenzije $25\text{ m} \times 22,2\text{ m}$, površine 555 m^2 .
- Građevina ima ukupno 36 etaža (4 podzemne etaže, prizemlje + 31). Visina svake etaže iznosi $3,05\text{ m}$, dok je svijetla visina unutar etaža $2,85\text{ m}$.
- Otpornost konstrukcije je ostvarena zajedničkim djelovanjem zidova i okvira.
- Tlocrtni raspored čini 12 posmičnih zidova (AB jezgra) te 21 AB stup okruglog poprečnog presjeka promjera $\Phi 70$ i $\Phi 60\text{ cm}$. Stupovi su povezani gredama i zajednički tvore okvir.
- Stropna ploča je debljine 20 cm .
- AB stubišna jezgra je tlocrtnih dimenzija $9,2 \times 9,6\text{ m}$ i ona većinu horizontalnih sila od vjetra i provodi ih do temelja.

Primjer 4

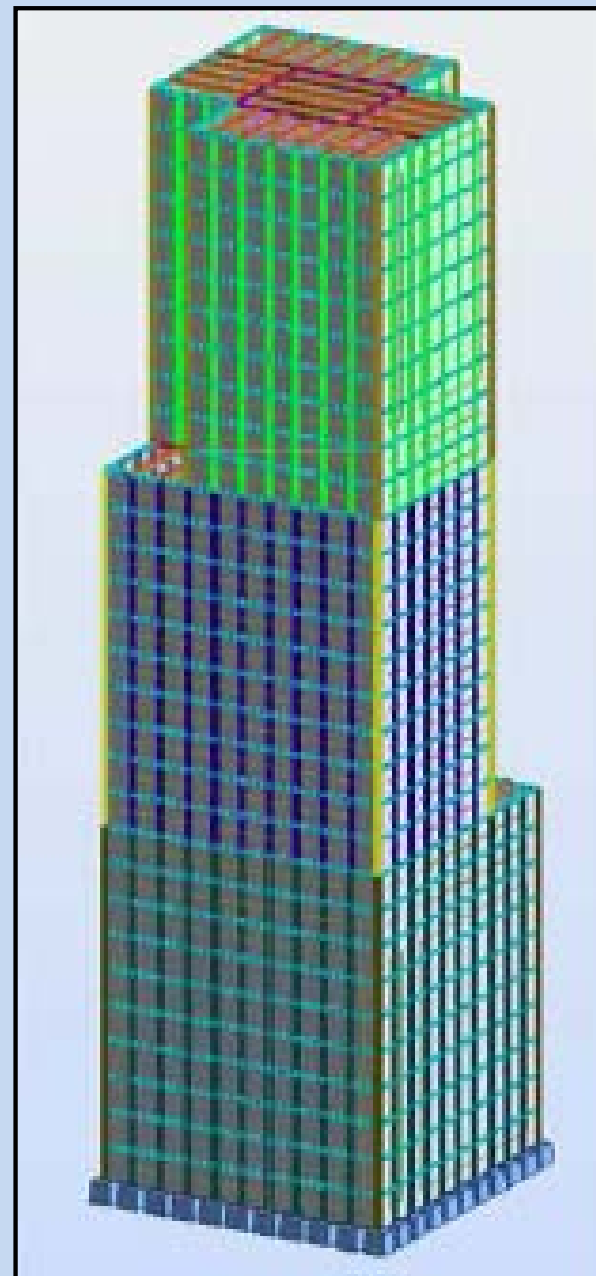


Primjer 4



Primjer 5

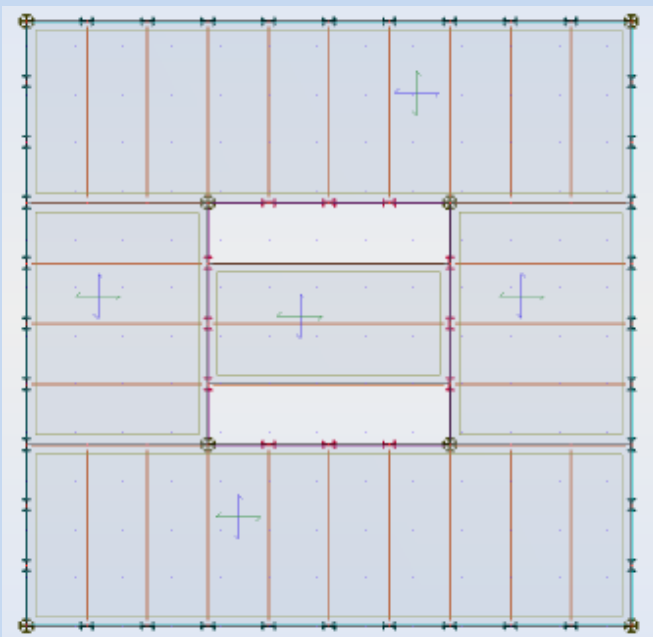
- Napravljen je prostorni proračunski model koji se sastoji od štapnih elemenata (beam) za stupove i grede, fasadnih elemenata (cladding) te pločastih elemenata (plate) za ploče.
- Fasadni elementi služe isključivo za prijenos opterećenja.
- 3D prostorni model je definiran kako slijedi:
 - stupovi su zadani kao beam čelični profili HEM 500, HEM 450, HEM 400, HEM 500X, HEM 450X, HEM 400X
 - grede su definirane kao beam čelični profili HEM 280 i HEM 800 na dijelu etaža 10 i 20
 - stropne ploče definirane su u obliku plate elementa
 - spregnuti nosači definirani su kao beam čelični profili IPE600



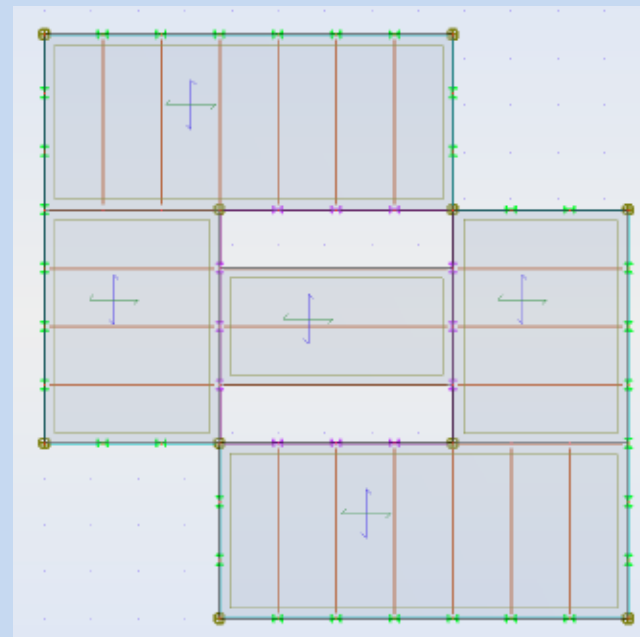
Numeričko modeliranje | Primjeri numeričkih modela

Primjer 5

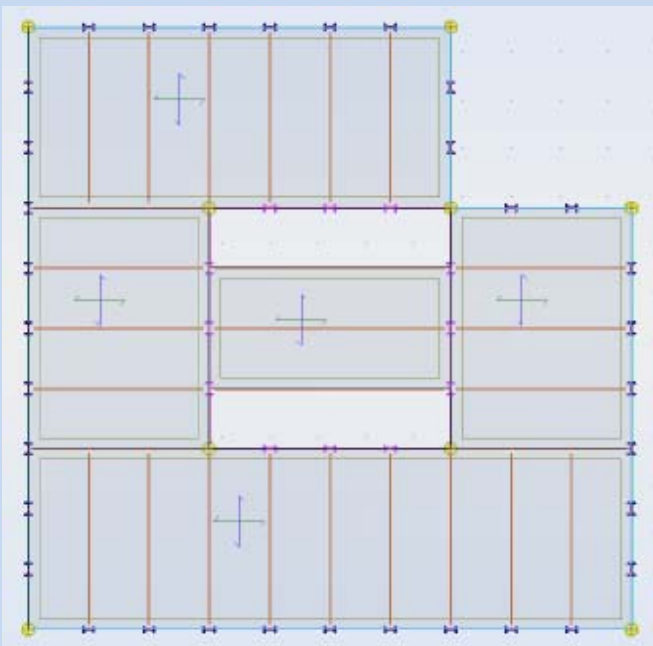
ETAŽE 1-10



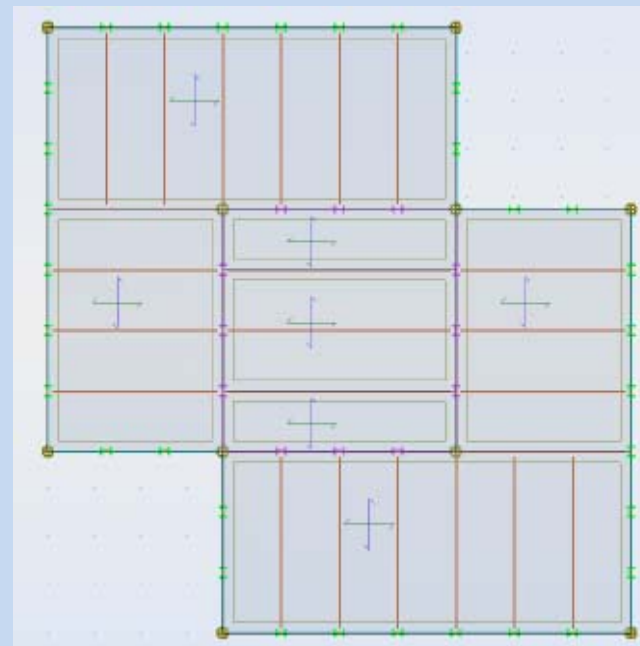
ETAŽE 21-29



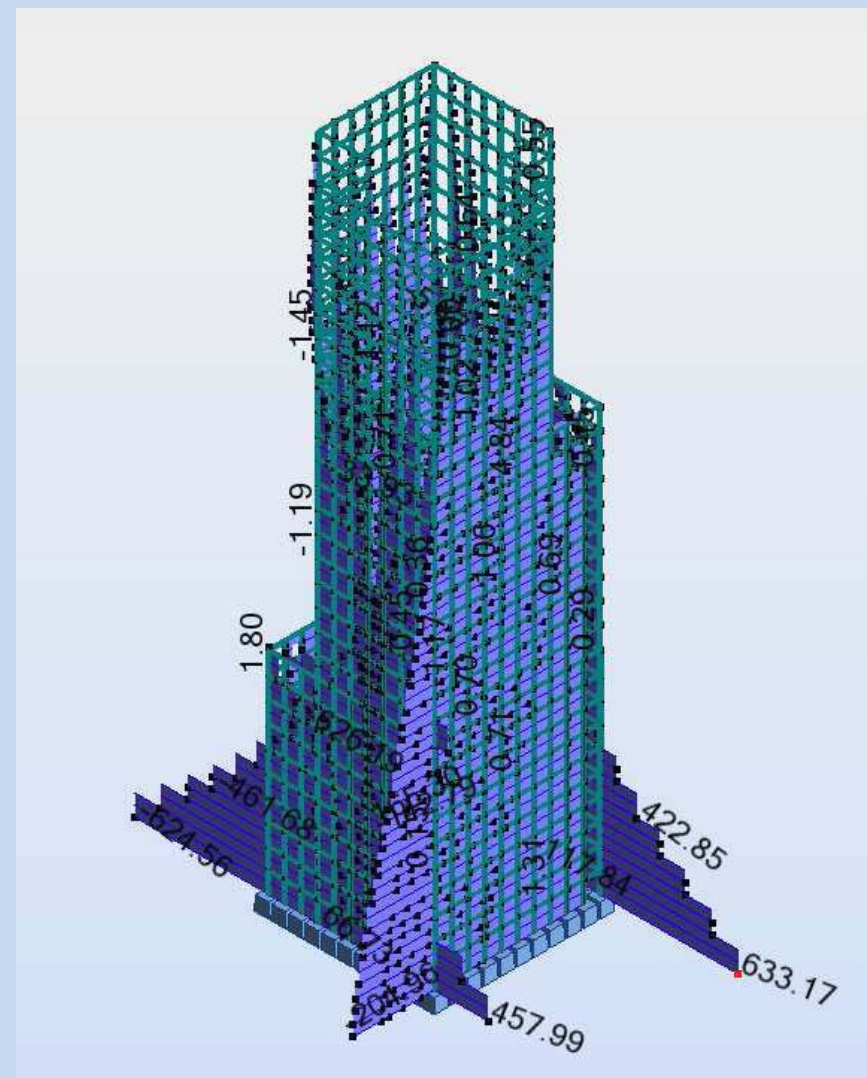
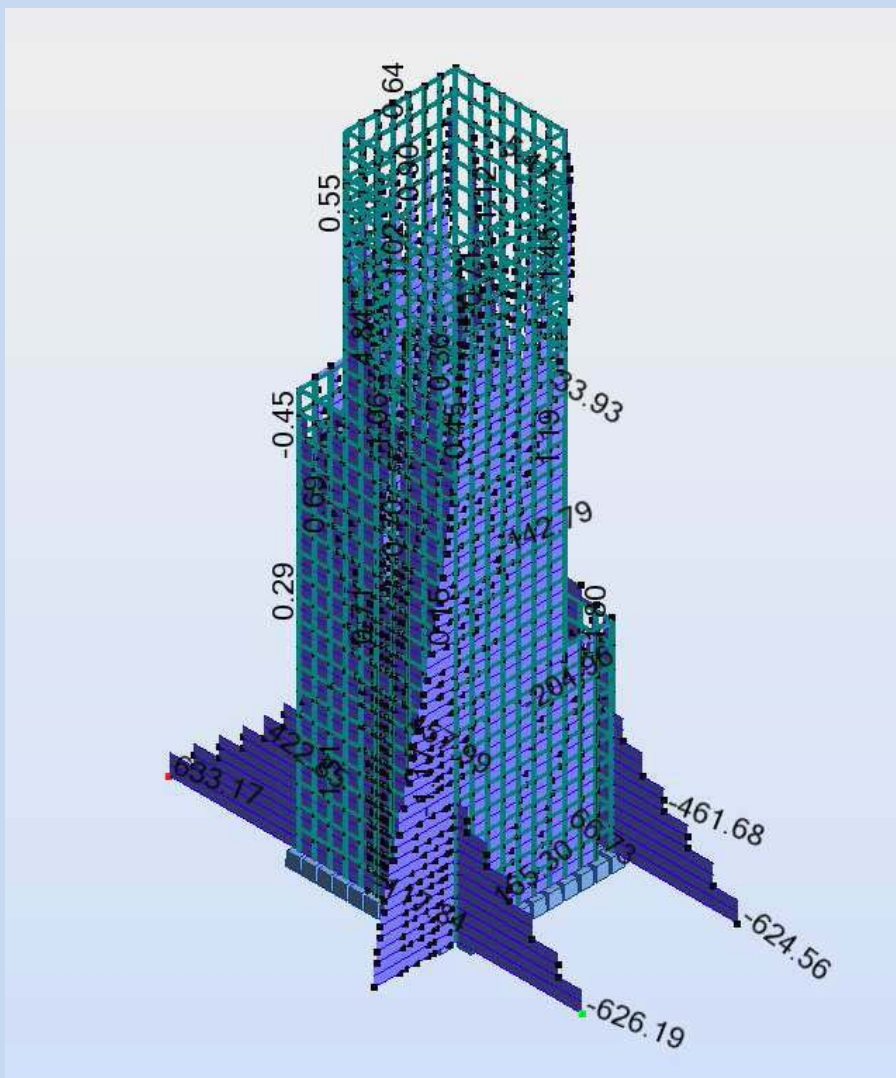
ETAŽE 11-20



ETAŽA 30



Primjer 5



Dijagrami uzdužnih sila za opterećenje od vjetra u smjeru x - prednja i stražnja strana vanjske cijevi