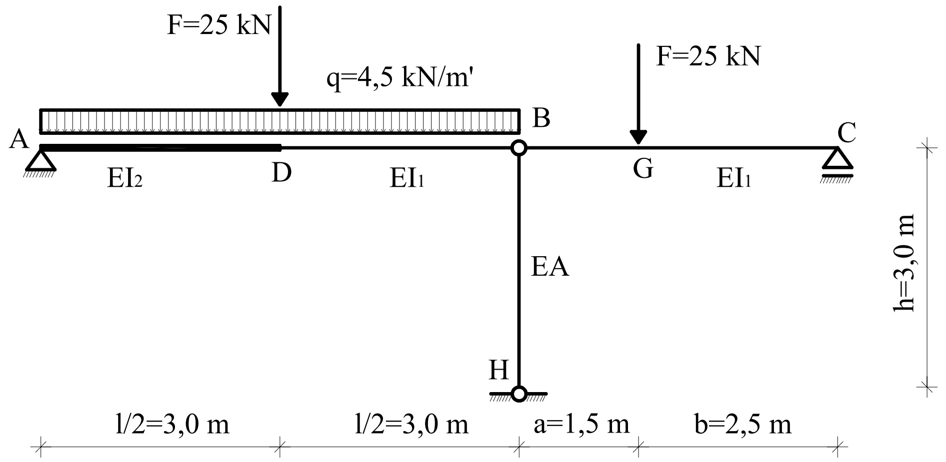
ZADATAK:

Za nosač sastavljen od dviju greda promjenjive krutosti i jednog štapa treba grafoanalitičkim postupkom odrediti vertikalni pomak točke D i kut zaokreta točke A, ako je zadano:
$E = 2 \cdot 10^5\ MPa;\quad I_1 = 9 \cdot 10^7\ mm^4;\quad I_2 = 1{,}6 \cdot I_1;\quad A = 260\ mm^2$



RJEŠENJE:

Postupak određivanja progiba i kuta zaokreta u nekoj točki je sljedeći:
1) konstruiramo dijagram momenata savijanja na stvarnom nosaču
2) određujemo odgovarajući fiktivni nosač
3) fiktivni nosač opterećujemo fiktivnim opterećenjem. Fiktivno opterećenje ima oblik dijagrama momenta savijanja na stvarnom nosaču
4) progib w i kut zaokreta φ određenog presjeka određujemo po izrazima:

$$w = \frac{\overline{M}}{EI}; \qquad \varphi = \frac{\overline{T}}{EI}$$

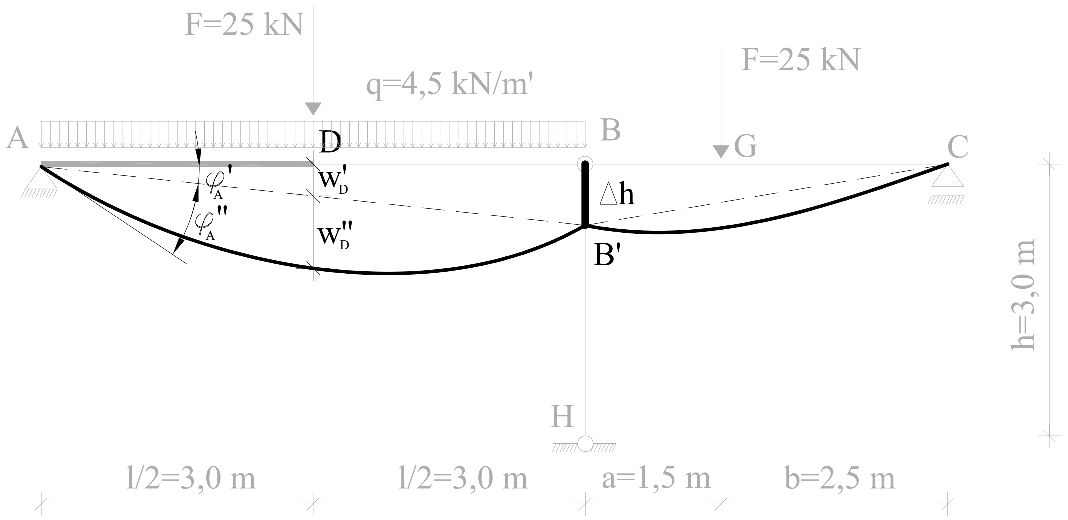
gdje su: $\overline{M}$ - fiktivni moment savijanja u dotičnom presjeku
$\overline{T}$ - fiktivna poprečna sila u dotičnom presjeku

Napomena: w i φ su stvarni progib i kut zaokreta određenog presjeka nosača, a $\overline{M}$ i $\overline{T}$ su fiktivni moment i fiktivna poprečna sila (dobiveni od fiktivnog opterećenja na fiktivnom nosaču).

Fiktivni i stvarni nosač imaju jednaku duljinu i fleksijsku krutost a razlikuju se samo u načinu oslanjanja kojim se zadovoljavaju rubni uvjeti elastične linije nosača. Budući da se grafoanalitička metoda zasniva na matematičkoj analogiji između diferencijalne jednadžbe elastične linije nosača i diferencijalne jednadžbe koja povezuje moment savijanja i intenzitet opterećenja, možemo vezu između progiba i kutova zaokreta s jedne strane, te fiktivnih momenata i fiktivnih kuteva zaokreta s druge strane prikazati ovako:

STVARNI NOSAČ	FIKTIVNI NOSAČ
$w = 0$	$\overline{M} = 0$
$w \neq 0$	$\overline{M} \neq 0$
$\varphi = 0$	$\overline{T} = 0$
$\varphi \neq 0$	$\overline{T} \neq 0$

Gore spomenuti izrazi vrijede za nosače na vertikalno nepomičnim osloncima i za nosač konstantne fleksijske krutosti. U ovom slučaju, dio nosača AD ima veću fleksijsku krutost nego ostali dio nosača. Također, točka B, koja je oslonac grede AB kao i grede BC, nije vertikalno nepomična jer se u štapu BH javlja tlačna sila koja uzrokuje skraćenje štapa BH a time i pomak točke B. To znači da pomaci i kutevi zaokreta u gredi AB nastaju zbog savijanja grede AB kao i zbog skraćenja štapa BH.



Dakle, pomak točke D iznosi:

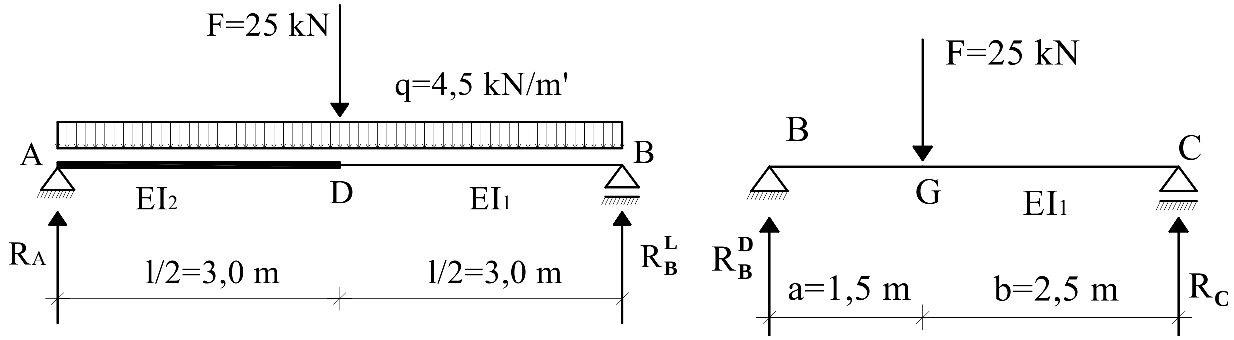
$$w_D = w_D^I + w_D^{II}$$

A kut zaokreta točke A:

$$\varphi_A = \varphi_A^I + \varphi_A^{II}$$

gdje su: w_D^I - pomak točke D zbog spuštanja oslonca B
w_D^{II} - progib točke D zbog savijanja nosača AB
φ_A^I - kut zaokreta točke A zbog spuštanja oslonca B
φ_A^{II} - kut zaokreta točke A zbog savijanja nosača AB

Vrijednosti pomaka w_D^I i kuta zaokreta φ_A^I ćemo lako dobiti ako odredimo skraćenje Δh štapa BH. Vrijednosti progib w_D^{II} i kuta zaokreta φ_A^{II} ćemo dobiti promatranjem deformacije grede AB oslonje na vertikalno nepomične oslonce, kako je prikazano na slici:



Za određivanje progiba na gredi AB potreban nam je dijagram momenata savijanja na gredi AB, a za određivanje skraćenja Δh potrebna nam je tlačna sila u štapu BH koja iznosi $R_B = R_B^L + R_B^D$. Odredimo stoga potrebne reakcije i momentni dijagram.

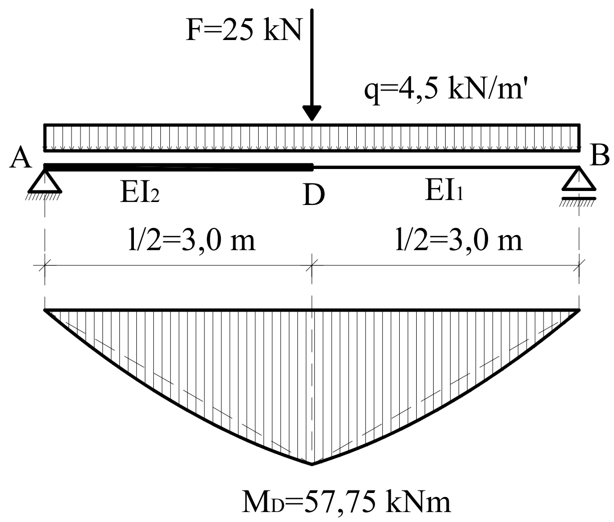
$$\sum M_C^{BC} = 0 \;\rightarrow\; F \cdot b - R_B^D \cdot (a+b) = 0 \;\rightarrow\; R_B^D = 25 \cdot \frac{2{,}5}{4{,}0} = 15{,}63 \;\; kN$$

$$R_B^L = q \cdot \frac{l}{2} + \frac{F}{2} = 4{,}5 \cdot 3{,}0 + 12{,}5 = 26 \;\; kN$$

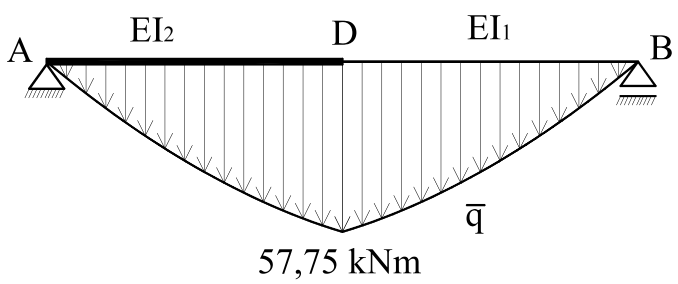
$$R_B = R_B^L + R_B^D = 26 + 15{,}63 = 41{,}63 \;\; kN$$

$$M_D = \frac{q \cdot l^2}{8} + F \cdot \frac{l}{4} = \frac{4{,}5 \cdot 6{,}0^2}{8} + 25 \cdot \frac{6{,}0}{4} = 57{,}75 \;\; kNm$$

Crtamo sada momentni dijagram:



Momentni dijagram predstavlja fiktivno opterećenje na fiktivnom nosaču. Da bi odredili fiktivni nosač, pogledajmo progibe i kutove zaokreta na stvarnom nosaču: $w_A = 0,\; \varphi_A \neq 0,\; w_B = 0,\; \varphi_B \neq 0$. To znači da su na fiktivnom nosaču fiktivni momenti i fiktivne poprečne sile: $\overline{M}_A = 0,\; \overline{T}_A \neq 0,\; \overline{M}_B = 0,\; \overline{T}_B \neq 0$. Ležaj u kojem je moment jednak nuli a poprečna sila različita od nule odgovara zglobu. To znači da je fiktivni nosač isto tako prosta greda, pa imamo fiktivni nosač opterećen fiktivnim opterećenjem:



Budući da izrazi za progib i kut zaokreta vrijede za nosač konstantne fleksijske krutost, a to ovdje nije slučaj, svodimo početni fiktivni nosač na fiktivni nosač s konstantnom krutošću. Istovremeno, moramo reducirati fiktivno opterećenje. Ako s I_0 označimo jedan od aksijalnih momenata tromosti, onda reducirano fiktivno opterećenje M^* možemo izraziti kao:

$$M^* = \frac{M}{I_i} I_0$$

gdje je I_i aksijalni moment tromosti pojedinog dijela štapa. Sada izrazi za progib i kut zaokreta glase:

$$w = \frac{\overline{M}}{EI_0}; \qquad \varphi = \frac{\overline{T}}{EI_0}$$

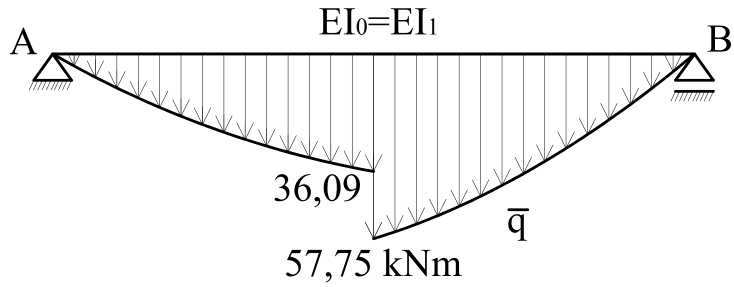
Uzmimo da je $I_0 = I_1$. To znači da se fiktivno opterećenje na dijelu DB ne mijenja a na dijelu AB se reducira za iznos:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{1,6}$$

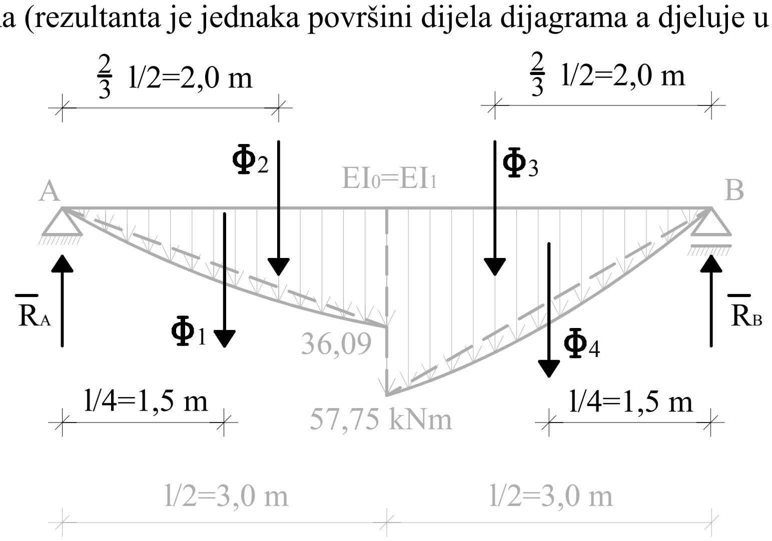
Što znači da se vrijednost u točki D s lijeve strane reducira na vrijednost:

$$M_D^* = \frac{M_D}{I_2} I_0 = 57,75 \cdot \frac{1}{1,6} = 36,09 \ kNm$$

pa reducirano fiktivno opterećenje izgleda:



To opterećenje možemo radi jednostavnosti zamijeniti rezultantnim silama za pojedine dijelove dijagrama (rezultanta je jednaka površini dijela dijagrama a djeluje u težištu te površine):



Rezultantne sile iznose:

$$\Phi_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{q\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2}{8}\cdot\frac{1}{1{,}6} = \frac{2}{3}\cdot 3{,}0\cdot\frac{4{,}5\cdot 3{,}0^2}{8}\cdot\frac{1}{1{,}6} = 6{,}33\ kNm^2$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot M^*_{D,L} = \frac{1}{2}\cdot 3{,}0\cdot 36{,}09 = 54{,}14\ kNm^2$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot M^*_{D,D} = \frac{1}{2}\cdot 3{,}0\cdot 57{,}75 = 86{,}63\ kNm^2$$

$$\Phi_4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{q\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2}{8} = \frac{2}{3}\cdot 3{,}0\cdot\frac{4{,}5\cdot 3{,}0^2}{8} = 10{,}13\ kNm^2$$

Da bi odredili progib u točki D i kut zaokreta u točki A, potrebni su nam fiktivni moment u točki D i fiktivna poprečna sila u točki A. Odredimo prvo reakciju $\overline{R}_A$ na fiktivnom nosaču iz uvjeta ravnoteže:

$$\overline{R}_A\cdot 6 = \Phi_1\cdot 4{,}5 + \Phi_2\cdot 4 + \Phi_3\cdot 2 + \Phi_4\cdot 1{,}5$$

$$\overline{R}_A = \frac{1}{6}\cdot(6{,}33\cdot 4{,}5 + 54{,}14\cdot 4 + 86{,}63\cdot 2 + 10{,}13\cdot 1{,}5) = 72{,}25\ \ kNm^2$$

To znači da je fiktivna poprečna sila u ležaju A:

$$\overline{T}_A = \overline{R}_A = +72{,}25\ \ kNm^2$$

a fiktivni moment u točki D:

$$\overline{M}_D = \overline{R}_A\cdot 3{,}0 - \Phi_1\cdot 1{,}5 - \Phi_2\cdot 1{,}0 = 72{,}25\cdot 3{,}0 - 6{,}33\cdot 1{,}5 - 54{,}14\cdot 1{,}0 = +153{,}12\ \ kNm^3$$

Progib točke D uslijed savijanja nosača AB iznosi:

$$w_D^{II} = \frac{\overline{M}_D}{EI_0} = \frac{153{,}12\cdot 10^{12}}{2\cdot 10^5\cdot 9\cdot 10^7} = 8{,}51\ \ mm$$

Kut zaokreta točke A uslijed savijanja nosača AB iznosi:

$$\varphi_D^{II} = \frac{\overline{T}_A}{EI_0} = \frac{72{,}25\cdot 10^9}{2\cdot 10^5\cdot 9\cdot 10^7} = 0{,}00401\ rad = 0{,}230°$$

Skraćenje Δh štapa BH uslijed tlačne sile R_B iznosi:

$$\Delta h = \frac{R_B \cdot h}{EA} = \frac{41{,}63 \cdot 10^3 \cdot 3000}{2 \cdot 10^5 \cdot 260} = 2{,}40 \ \ mm$$

što znači da pomak točke D zbog skraćenja štapa BH iznosi:

$$\frac{w_D^I}{\frac{l}{2}} = \frac{\Delta h}{l} \Rightarrow w_D^I = \frac{1}{2} \cdot \Delta h = 1{,}20 \ \ mm$$

a kut zaokreta točke A zbog skraćenja štapa BH iznosi:

$$\varphi_A^I = \frac{\Delta h}{l} = \frac{2{,}40}{6000} = 0{,}0004 \ \ rad = 0{,}0229°$$

Konačno, ukupni pomak točke D iznosi:

$$w_D = w_D^I + w_D^{II} = 1{,}20 + 8{,}51 = 9{,}71 \ \ mm$$

a ukupni kut zaokreta točke A:

$$\varphi_A = \varphi_A^I + \varphi_A^{II} = 0{,}0229 + 0{,}230 = 0{,}2529°$$