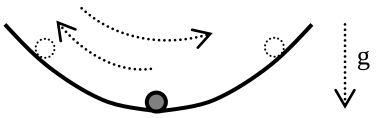
Oscilacije mehaničkih sustava

Osnovni pojmovi

Iz statike znamo da je neki mehanički sustav (u tekstu skraćeno ″mehanizam″) u položaju stabilne statičke ravnoteže, ako u tom položaju ima minimalnu potencijalnu energiju. Tom položaju odgovara i minimalna ukupna energija (zbroj kinetičke i potencijalne energije). Početna statička ravnoteža promatranog mehanizma, može se narušiti nekim vanjskim uzrokom koji će povećati ukupnu energiju mehanizma. Nakon uklanjanja tog uzroka doći će do učestalog gibanja mehaničkog sustava oko položaja stabilne ravnoteže. Gibanje će nastati zbog djelovanja elastičnih sila i sila gravitacije koje teže povratku mehaničkog sustava u ravnotežni položaj. Takvo gibanje nazivamo **slobodnim oscilacijama**. Ukupna mehanička energija sustava za vrijeme slobodnih oscilacija ostaje sačuvana (konstantna).

Jednostavan primjer slobodnih oscilacija prikazan je gibanjem kuglice koje nastaje po zakrivljenoj glatkoj podlozi, nakon početnog pomaka iz ravnotežnog položaja (slika 1).



Slika 1. Oscilacije kuglice

Ako u mehaničkom sustavu nakon uklanjanja početnog uzroka oscilacija, osim elastičnih i gravitacijskih sila djeluju i neke druge vanjske aktivne sile, ili ako je njihovo djelovanje jedini uzrok oscilacija, tada nastaju **prisilne oscilacije**.

Za vrijeme oscilacija mogu biti prisutni različiti neelastični otpori gibanju: (sile trenja, viskozni otpor sredine u kojoj se sustav giba, unutarnji otpori samog sustava i drugi). U tom slučaju kažemo da je mehanički sustav disipativan, a njegove oscilacije su **prigušene**.

Ovisno o uzroku oscilacija i postojanju otpora za vrijeme gibanja razlikujemo:

-Slobodne neprigušene oscilacije
-Slobodne prigušene oscilacije
-Prisilne neprigušene oscilacije
-Prisilne prigušene oscilacije

Prolaz mehaničkog sustava kroz ravnotežni položaj za vrijeme oscilacija može se ponavljati u jednakim intervalima vremena. U tom slučaju kažemo da su oscilacije **periodične**, a trajanje jednog vremenskog intervala u sekundama, naziva se **period** i označava slovom T.

Oscilacije o kojima se govori u okviru ovog kolegija ograničene su pretpostavkom, da u svakom trenutku udaljenost od ravnotežnog položaja možemo prikazati s dovoljno malom veličinom, tako da ih linearni pristup dovoljno točno opisuje.

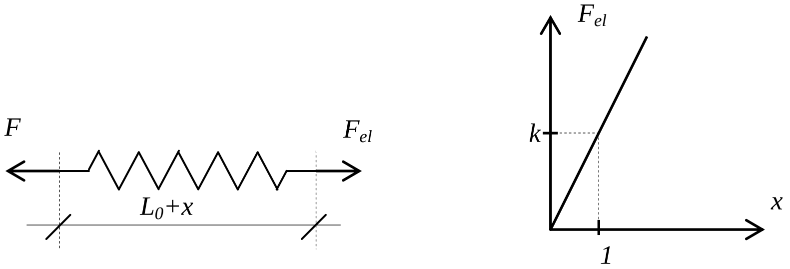
Stvarni mehanički sustavi sastavljeni su od više različitih elastičnih tijela. Stvarno tijelo deformira se pod djelovanjem vanjskih sila. Tijelo kojem deformacije u potpunosti nestaju nakon uklanjanja opterećenja, nazivamo **idealno elastično tijelo** (riječ idealno se često izostavlja).

Apsolutno kruta tijela u mehaničkom sustavu mogu biti spojena s elastičnim tijelom. Sila u takvom spoju naziva se **elastična sila**. Elastična sila, u idealno elastičnom tijelu posljedica je njegove deformacije, i linearno je proporcionalna s deformacijom (Hookeov zakon).

Idealno elastično tijelo možemo prikazati s elastičnom oprugom bez mase. Opruga duljine L_0, opterećena nekom silom F, deformira se za neku veličinu x. Elastična sila F_{el}, kojom opruga pruža otpor deformaciji, proporcionalna je toj deformaciji.

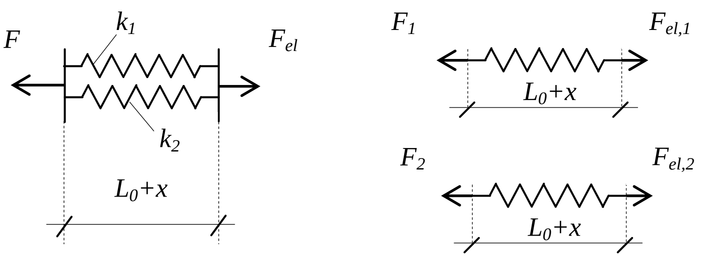
$$F_{el}=k\cdot x$$

Konstanta k je specifični otpor deformaciji, naziva se **krutost** opruge i definira se kao sila koja oprugu može deformirati (produžiti ili skratiti) za jediničnu duljinu. U skladu s tim jedinica za krutost je N/m, N/cm, kN/m,...



Slika 2. Idealno elastično tijelo

U nekom spoju može biti više elastičnih tijela. Ona međusobno mogu biti povezana u paralelnom ili serijskom spoju. U oba slučaja mogu se zamjeniti jednom oprugom ekvivalentne krutosti k_e. Ekvivalentna krutost određuje se doslovnom primjenom definicije krutosti. Na *sl. 3* prikazan je paralalan, a na *sl. 4* serijski spoj dviju elastičnih opruga različitih krutosti k_1 i k_2, i jednakih duljina L_0.

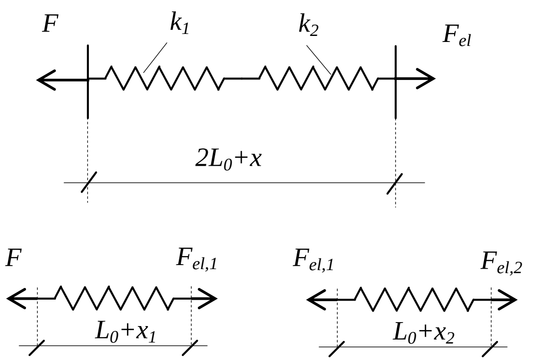


$F_{el}=k_e\,x$
$F_{el,1}=k_1\,x_1$
$F_{el,2}=k_2\,x_2$

$F_{el}=F_{el,1}+F_{el,2}$
$k_e\,x=k_1\,x+k_2\,x$

$k_e=k_1+k_2$

Slika 3. Paralelni spoj



Slika 4. Serijski spoj

$F=F_{el}=k_e\,x$

$F=F_{el,1}=F_{el,2}$

$F_{el,1}=k_1\,x_1$

$F_{el,2}=k_2\,x_2$

$x=x_1+x_2$

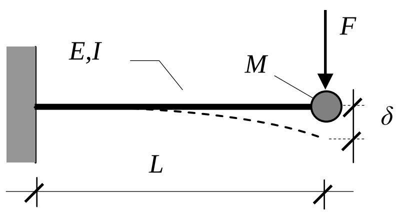
$$\frac{F}{k_e}=\frac{F}{k_1}+\frac{F}{k_2}$$

$$k_e=\frac{1}{\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}}$$

Spoj prikazan elastičnim tijelom bez mase, može se na isti način zamijeniti oprugom ekvivalentne krutosti.

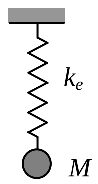
Na slici 5 prikazana je materijalna točka mase *M*, spojena elastičnim štapom zanemarive mase, upetim u podlogu.

Promatraju se oscilacije materijalne točke okomito na smjer osi štapa. Elastičnu konzolu treba zamjeniti oprugom ekvivalentne krutosti. U skladu s definicijom krutosti, tražimo silu kojom treba opteretiti konzolu na vrhu, da bi progib imao jediničnu veličinu (uzimamo samo utjecaj savijanja na pomak δ).



$$\delta=\frac{F\cdot L^3}{3\cdot E\cdot I}$$

$$k_e=\frac{3\cdot E\cdot I}{L^3}$$



Slika 5. Spoj elastičnim tijelom bez mase

Broj koordinata (skalarnih veličina) $x_i(t),\ i=1,...n$, potrebnih za potpuno opisivanje gibanja mehaničkog sustava u svakom trenutku, naziva se <u>broj stupnjeva</u> **<u>sloboda gibanja</u>**.

Sva tijela u stvarnim mehaničkim sustavima, deformabilna su i imaju neku raspodijeljenu masu. Za opisivanje gibanja takvog sustava potreban je veliki broj koordinata (teorijski beskonačan), što zbog nedovoljne točnosti ostalih utjecaja u praktičnoj primjeni nema smisla. Tijekom gibanja javljaju se otpori čiju veličinu, zakonitost promjene, i uzrok, nije uvjek moguće točno opisati. Često se i uzrok oscilacija ne može točno opisati.

Zbog toga se oscilacije stvarnih sustava, za praktične potrebe analiziraju na pojednostavljenim mehaničkim (uglavnom matematičkim) modelima. Najčešće se masa pridružuje apsolutno krutim tijelima, a spojevi su idealno elastična tijela bez mase.

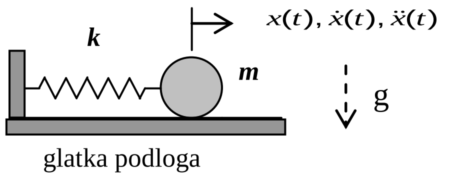
Ako je mehanički sustav sastavljen od više apsolutno krutih i idealno elastičnih tijela povezanih u kinematički lanac, i njegov je položaj u bilo kojem trenutku određen samo s jednom koordinatom (*n=1*), kažemo da je to sustav s jednim stupnjem slobode, ili jednostupanjski sustav.

Svaki mehanizam s jednim stupnjem slobode, u kojem su zanemareni otpori gibanju i nelinearni utjecaji, možemo prikazati modelom koji se naziva linearni harmonijski oscilator.

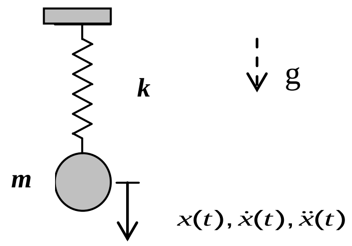
Linearni harmonijski oscilator

Linearni harmonijski oscilator prikazuje se s jednom elastičnom oprugom krutosti k čija se masa zanemaruje, i materijalnom točkom mase m. To je osnovni mehanički model konzervativnog sustava s jednim stupnjem slobode $x(t)$. Zakon gibanja $x(t)$, rješenje je diferencijalne jednadžbe kojom je opisano gibanje mase m.

a)



b)



Slika 6. Model linearnog oscilatora

Diferencijalna jednadžba slobodnih neprigušenih oscilacija

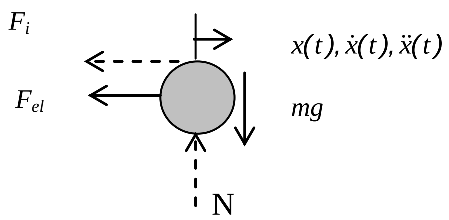
Diferencijalna jednadžba gibanja ovog sustava može se odrediti na više načina:

1. Primjenom jednadžbi dinamičke ravnoteže,
2. Primjenom zakona o očuvanju energije,
3. Primjenom metode virtualnog rada.

1.Primjena dinamičke ravnoteže (prema principu D´Alamberta)

Za vrijeme gibanja u horizontalnoj ravnini, na materijalnu točku djeluje promjenjiva elastična sila i inercijalna sila. Masa opruge se zanemaruje.

Da bi uvjet dinamičke ravnoteže primjenili na model prikazan na slici 6. a), potrebno je odrediti sve sile koje djeluju na materijalnu točku u trenutku $t \neq 0$.



Slika 7. Sile za vrijeme gibanja modela a)

Reakcija podloge i vlastita težina su konstantne i međusobno su u ravnoteži. Deformacija opruge određena je otklonom iz ravnotežnog položaja, tako da je elastična sila

$$F_{el} = k \cdot x(t) .$$

Inercijalna sila proporcionalna je masi i ubrzanju

$$F_i = m \cdot \ddot{x}(t)\,.$$

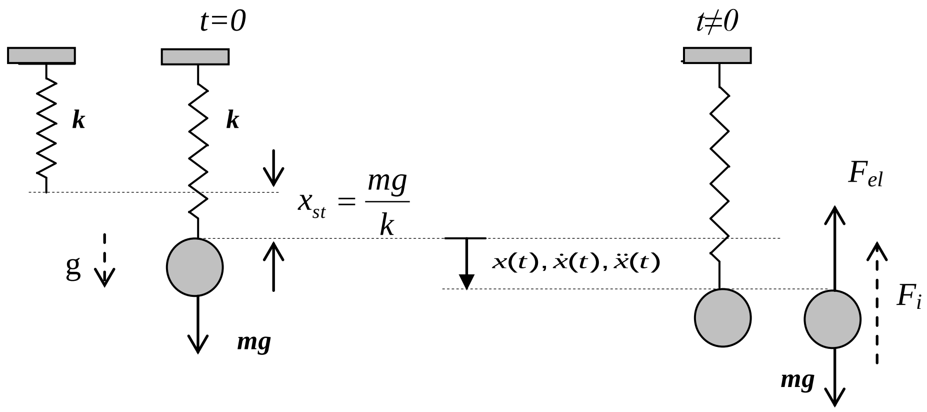
Uvjet dinamičke ravnoteže je

$$F_i + F_{el} = 0.$$

Nakon supstitucije dobije se diferencijalna jednadžba gibanja mehaničkog modela prikazanog na slici 6 a):

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0\ .$$

Ako uvjet dinamičke ravnoteže primjenimo na model prikazan na slici 6 b), potrebno je prvo odrediti deformaciju opruge u statičkom ravnotežnom položaju, oko kojeg materijalna točka oscilira (slika 8).



Slika 8. Sile za vrijeme gibanja modela b)

U nekom trenutku *t*, elastična sila je proporcionalna krutosti i deformaciji opruge u tom trenutku:

$$F_{el} = k \cdot (x_{st} + x(t))\,.$$

Inercijalna sila je kao i u modelu a), proporcionalna masi i ubrzanju u tom trenutku

$$F_i = m \cdot \ddot{x}(t)\,.$$

Uvjet dinamičke ravnoteže je

$$F_i + F_{el} - mg = 0.$$

U ovu jednadžbu uvrstimo vrijednost inercijalne i elastične sile i dobijemo

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x_{st} + k \cdot x(t) - mg = 0\,.$$

Konstantni dio elastične sile u ravnoteži je s težinom materijalne točke, tako da je diferencijalna jednadžba slobodnih oscilacija modela b) identična jednadžbi slobodnih oscilacija modela a)

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0\,.$$

Možemo zaključiti da kod određivanja diferencijalne jednadžbe oscilacija smijemo zanemariti postojanje gravitacijskih sila.

2. Primjena zakona o očuvanju energije

Za vrijeme slobodnih oscilacija početna energija uvedena u mehanizam ostaje sačuvana. Ona se izmjenjuje između elastične opruge i mase, odnosno prelazi iz energije deformacije u kinetičku energiju, i obratno.

Već je pokazano da diferencijalnu jednadžbu oscilacija možemo jednostavnije odrediti ako ne uzimamo u obzir utjecaj gravitacijskih sila (model prikazan na slici 2 a).

U nekom trenutku *t*, ukupna energija sustava sastoji se od zbroja kinetičke energije i potencijalne energije:

$$E_{uk} = E_k + E_p$$

$$E_{uk} = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2 = const.$$

Derivacija ukupne energije po vremenu mora isčezavati:

$$\frac{\partial E_{uk}}{\partial t} = m \cdot \ddot{x} \cdot \dot{x} + k \cdot x \cdot \dot{x} = 0\,,$$

ili

$$(m \cdot \ddot{x} + k \cdot x) \cdot \dot{x} = 0\,.$$

Jednadžba je zadovoljena u svakom trenutku *t*, samo ako izraz u zagradi isčezava, što određuje već poznatu diferencijalnu jednadžbu oscilacija

$$\underline{m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0}\,.$$

3. Virtualni rad, Hamiltonov princip, Lagrangeove jednadžbe gibanja

Ako diferencijalnu jednadžbu oscilacija pomnožimo s virtualnim pomakom δx, dobijemo jednadžbu virtualnog rada elastične i inercijalne sile izvršenog za vrijeme tog pomaka.

$$(m \cdot \ddot{x})\delta x + (k \cdot x)\delta x = 0$$

Pomak x se mjenja s vremenom, što znači da je varijacija pomaka δx određena između dva položaja, dakle za dva različita trenutka t_1 i t_2, pa gornju jednadžbu možemo integrirati po vremenu.

$$\int_{t_1}^{t_2} (m \cdot \ddot{x} \cdot \delta x)dt + \int_{t_1}^{t_2} (k \cdot x \cdot \delta x)dt = 0$$

Nakon parcijalne integracije prvog integrala uz $\left| \begin{array}{l} dv = \ddot{x}dt \\ v = \dot{x} \\ u = m\delta x \\ du = m\delta\dot{x}dt \end{array} \right.$, dobije se $\dot{x}m\delta x \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\dot{x}\delta\dot{x}dt$

uz $\delta\dot{x} = \frac{d}{dt}(\delta x)$ i zbog isčezavanja δx na granicama integracije, dobije se

$$-\int_{t_1}^{t_2}(m \cdot \dot{x} \cdot \delta\dot{x})dt + \int_{t_1}^{t_2}(k \cdot x \cdot \delta x)dt = 0 ,$$

što je uz $E_k = \dfrac{m\dot{x}^2}{2}$ i $E_p = \dfrac{kx^2}{2}$ jednako integralu varijacije:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(E_k - E_p)dt = 0 .$$

Ako se u ovaj izraz doda i virtualni rad nekonzervativnih sila (kojih u našem modelu nema) dobiva se jednadžba koja je u dinamici poznata kao Hamiltonov varijacijski princip.

Hamiltonov princip pokazuje da je razlika kinetičke i potencijalne energije nekog sustava nastala u određenom intervalu vremena zbog rada nekonzervativnih sila u tom sustavu

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\left[E_k(t) - E_p(t)\right]dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc}(t)dt = 0.$$

E_k i E_p predstavljaju ukupnu kinetičku i potencijalnu energiju a W_{nc} ukupni rad svih nekonzervativnih sila u promatranom sustavu. Prikazani uvjet se može primjeniti na bilo koji sustav (linearni ili nelinearni), uz odgovarajuće određenu energiju.

U statičkom slučaju gubi se ovisnost o vremenu, i kinetička energija isčezava. Dobiju se jednadžbe statičke ravnoteže opisane uvjetom minimuma potencijalne energije

$$\delta(E_p - W_{nc}) = 0.$$

Ako se pomaci prikažu pomoću generaliziranih koordinata, potencijalna energija $E_p(t)$ proizvoljnog sustava može se opisati odabranom grupom koordinata x_1 .....x_n, a kinetička energija $E_k(t)$ u općem slučaju može biti prikazana funkcijom položaja i brzine.

Virtualni rad svih nekonzervativnih sila na virtualnim pomacima nastalim zbog varijacije grupe generaliziranih koordinata, prikazuje se kao linearna funkcija varijacija generaliziranih koordinata:

$$\delta W_{nc} = Q_1\ \delta x_1 + Q_2\ \delta x_2 + \ .\ .\ .\ .\ . + Q_n\ \delta x_n$$

Koeficijenti Q_i nazivaju se funkcije generaliziranih sila za odgovarajuću koordinatu x_i.

Ako ovako određenu kinetičku i potencijalnu energiju, te varijaciju rada nekonzervativnih sila uvrstimo u Hamiltonove jednadžbe, primjenjujući varijaciju po svim koordinatama, dobiju se poznate Lagrangeove jednadžbe gibanja:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = Q_i \qquad i = 1,2,\ .\ .\ .\ .\ n$$

Za određivanje generaliziranih sila Q_i, potrebno je naći δW_{nc} , odnosno odrediti rad svih nekonzervativnih sila u sustavu (koje djeluju unutar ili izvan elastičnog tijela), za vrijeme dok se mehaničkom sustavu daju virtualni pomaci δx_i.

***Zakon gibanja** (slobodne neprigušene oscilacije)*

Zakon gibanja *x(t)*, određuje se iz rješenja diferencijalne jednadžbe kojom je opisano gibanje mase.

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

Uvodi se konstanta $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, da bi se jednadžba napisala u obliku

$$\underline{\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0}.$$

Postupak kojim dolazimo do rješenja diferencijalne jednadžbe poznat je iz matematike. Rješenje je harmonijska funkcija ovisna o vremenu i tri konstante ω, C_1, i C_2.

$$\underline{x(t) = C_1 \cdot Cos(\omega \cdot t) + C_2 \cdot Sin(\omega \cdot t)}$$

Konstante C_1 i C_2 određuju se iz početnih uvjeta koji su opisani kao uzrok oscilacija:

-početni pomak $x(t=0)=x_0$, $\longrightarrow$ $C_1=x_0$

-početna brzina $\dot{x}(t=0)=v_0$. $\longrightarrow$ $C_2 = \frac{v_0}{\omega}$

Uz uvjet da su početni pomak x_0 i početna brzina v_0 različiti od nule dobije se

$$x(t) = x_0 \cdot Cos(\omega \cdot t) + \frac{v_0}{\omega} \cdot Sin(\omega \cdot t).$$

Uvođenjem novih konstanti: $A = \sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}$, i $\alpha = ArcTan(\frac{C_1}{C_2})$, rješenje se može napisati i u obliku:

$$\underline{x(t) = A \cdot Sin(\omega \cdot t + \alpha)}.$$

Prema oznakama na sl. 8, zakon gibanja određuje otklon od ravnotežnog položaja u bilo kojem trenutku *t*.

Konstanta *A* određuje maksimalni otklon od ravnotežnog položaja, naziva se amplituda oscilacija i ovisi o uzroku oscilacija.

Konstanta $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (mjeri se radianima po jedinici vremena), ovisi samo o krutosti i masi promatranog mehaničkog sustava, i naziva se **vlastita frekvencija** sustava ili **kružna frekvencija**. Vlastita frekvencija ne ovisi o položaju mehaničkog sustava u prostoru, odnosno o ravnini u kojoj sustav oscilira.

Kao što se može vidjeti iz izvoda, vlastita frekvencija modela a) koji oscilira u horizontalnoj ravnini, jednaka je vlastitoj frekvenciji modela b) koji oscilira u vertikalnoj ravnini, ako oba modela imaju jednaku masu i krutost. Možemo zaključiti da sile gravitacije nemaju utjecaj na vlastitu frekvenciju linearnog harmonijskog oscilatora. Položaj mase u bilo kojem trenutku t_i određen je superpozicijom statičkog progiba i otklona $x(t_i)$.

Naziv kružna frekvencija dolazi od usporedbe s gibanjem točke po kružnici radiusa *A*, konstantnom kutnom brzinom ω. Kružno gibanje određeno je zakonom $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega \cdot t$.

Ako je središte kružnice u ishodištu, udaljenost točke od osi *y* za $\alpha = \varphi_0$, u svakom trenutku određena je veličinom

$$\underline{x(t) = A \cdot Sin(\omega \cdot t + \alpha)},$$

Takvo gibanje po kružnici prikazano je na slici 9, tako da su crtane uzastopne projekcije vektora položaja točke, na smjer osi x, u jednakim intervalima vremena $\Delta t = T/8(s)$.

Na taj način određen je položaj točke u trenutcima

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t, \quad i = 1,...12, \quad t_0 = 0$$

Prikazane točke leže na krivulji određenoj zakonom

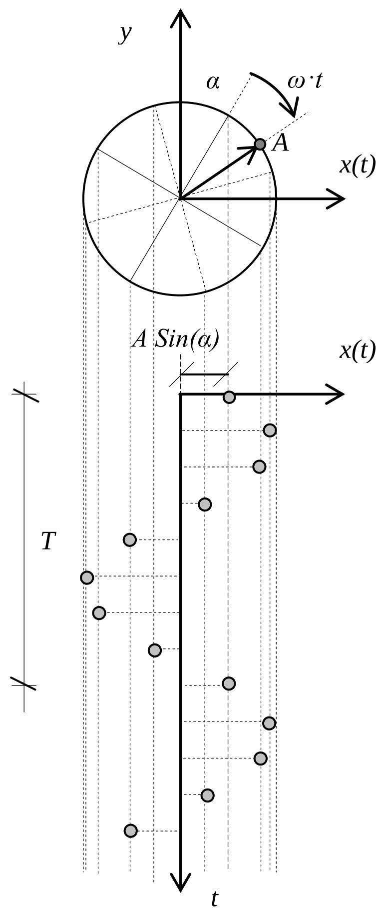
$$x(t) = A \cdot Sin(\omega \cdot t + \alpha) .$$

Period oscilacija *T* je vrijeme potrebno da točka dođe u početni položaj, (što znači da jednom obiđe kružnicu)

$$\varphi = \omega \cdot t = 2\pi .$$

Ova relacija određuje vezu između perioda i kružne frekvencije:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} .$$

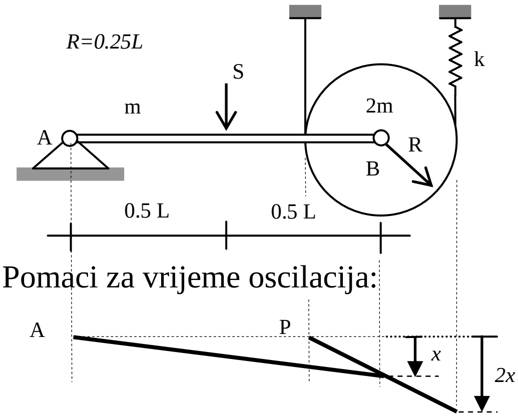


Slika 9. Harmonijsko gibanje

Primjer

Mehanički sustav sastoji se od štapa mase ***m***, kružnog diska mase ***2m*** i opruge krutosti ***k***. Štap je jednim krajem zglobno vezan na nepomičnu podlogu a na njegov drugi kraj zglobno je vezan kružni disk. Na rub diska namotano je uže. Jedan kraj užeta vezan je za nepomičnu podlogu, a drugi kraj užeta nastavlja se na oprugu koja je vezana za nepomičnu podlogu, kao što je prikazano na crtežu. Treba odrediti:

a) diferencijalnu jednadžbu slobodnih oscilacija točke B
b) vlastitu frekvenciju slobodnih oscilacija prikazanog mehaničkog sustava.
c) zakon malih oscilacija točke B, koje će nastati nakon djelovanja impulsa S, ako prije djelovanja impulsa mehanizam miruje u vertikalnoj ravnini.
d) Zakon malih oscilacija točke B koje će nastati nakon djelovanja impulsa S, ako se istovremeno s djelovanjem impulsa ukloni veza koja pridržava disk tako da težine tijela ne opterećuju oprugu te je opruga prije početka gibanja nedeformirana.



Slika 10 . Prikaz mehanizma

Pomaci za vrijeme oscilacija mehanizma, prikazani su na slici 10. Štap mase *m* rotira oko nepomične točke A, a disk mase *2m* oko svog trenutnog centra rotacije P.

Momenti tromosti mase štapa i diska na centre rotacija su

$$I_A = \tfrac{1}{3} m \cdot L^2$$

$$I_P = \tfrac{3}{2} 2m \cdot R^2 = 3m \cdot R^2 .$$

Rješenje:

a) Diferencijalna jednadžba oscilacija može se odrediti na bilo koji od opisanih načina.

1. način: Primjenit će se energetski pristup, odnosno svojstvo konzervativnih sustava, da ukupna mehanička energija za vrijeme slobodnih neprigušenih oscilacija ostaje nepromjenjena.

$$E = E_k + E_p = const.$$

Kinetička energija u bilo kojem trenutku gibanja mehanizma, posljedica je rotacije koja ovisi o veličini otklona *x*, odnosno o brzini $\dot{x}$.

$$E_k = \frac{1}{2} I_A \cdot \left(\frac{\dot{x}}{L}\right)^2 + \frac{1}{2} I_P \cdot \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 = \frac{5}{3} m \cdot \dot{x}^2$$

Potencijalna energija sastoji se od potencijala elastičnih sila $E_p^{\,o}$; (opruga), i potencijala gravitacijskih sila $E_p^{\,g}$; (težina štapa i težina diska), a mjerena je od nivoa c_1 koji odgovara stanju nedeformirane opruge.

$$E_p = E_p^{\,o} + E_p^{\,g}$$

$$E_p{}^o = \frac{1}{2} k \cdot (2x)^2 = 2k \cdot x^2$$

$$E_p{}^g = -m \cdot g \cdot \frac{x}{2} - 2m \cdot g \cdot x + c_1 = -\frac{5}{2} m \cdot g \cdot x + c_1$$

$$E_p = 2k \cdot x^2 - \frac{5}{2} m \cdot g \cdot x + c_1$$

Opruga je u početnom ravnotežnom položaju deformirana zbog djelovanja gravitacijskih sila. Pomak x u stanju ravnoteže naziva se x_{st}, i može se odrediti iz uvjeta minimuma potencijalne energije:

$$\frac{dE_p}{dt} = 0 = 4k \cdot x - \frac{5}{2} m \cdot g \qquad \Rightarrow \qquad x = x_{st} = \frac{5}{8} \frac{m \cdot g}{k} .$$

Otklon $x(t)$ za vrijeme oscilacija uobičajeno se mjeri od ravnotežnog položaja, što znači da se veličina ukupnog pomaka može prikazati pomoću superpozicije stalnog, statičkog udjela x_{st}, i promjenjivog $x(t)$.

Ako u izrazu za potencijalnu energiju ukupni pomak prikažemo na taj način, dakle umjesto x zamjenimo $x_{st}+x(t)$ i uvrstimo statički otklon x_{st}, nakon sređivanja dobijemo izraz koji odgovara potencijalnoj energiji mjerenoj od ravnotežnog nivoa c_2.

$$E_p = 2k \cdot (x_{st} + x)^2 - \frac{5}{2} m \cdot g \cdot (x_{st} + x) + c_1 = 2k \cdot x^2 - \frac{25m^2 g^2}{32k} + c_1 = 2k \cdot x^2 + c_2 .$$

Potvrđeno je da gravitacijske sile ne utječu na promjenjivi dio potencijalne energije za vrijeme oscilacija u vertikalnoj ravnini, nego mjenjaju vrijednost konstantnog dijela potencijala (iz c_1 u c_2). Izbor nivoa konstantnog potencijala, od kojeg se mjeri promjenjivi dio, je slobodan i nema utjecaja na diferencijalnu jednadžbu oscilacija jer se konstante gube nakon deriviranja ukupne energije po vremenu.

$$E = \frac{5}{3} m \cdot \dot{x}^2 + 2k \cdot x^2 + c_2 = const. / \ \frac{d}{dt}$$

$$\frac{5}{3} m \cdot 2 \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} + 2k \cdot 2 \cdot x \cdot \dot{x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (\frac{5}{3} m \cdot \ddot{x} + 2k \cdot x) \cdot 2\dot{x} = 0$$

Da bi jednakost bila zadovoljena u bilo kojem trenutku t, mora biti

$$\frac{5}{3} m \cdot \ddot{x} + 2k \cdot x = 0 ,$$

ili

$$\ddot{x} + \frac{6k}{5m} x = 0 .$$

2. Način: Umjesto prikazanog postupka, vlastita frekvencija, a time i diferencijalna jednadžba, može se jednostavnije odrediti redukcijom zadanog mehaničkog sustava na linearni harmonijski oscilator mase m_r i krutosti k_r. U tom slučaju mora biti zadovoljen uvjet

ekvivalencije energije reduciranog harmonijskog oscilatora i energije stvarnog sustava u bilo kojem trenutku.

Koristimo već određene izraze za kinetičku i potencijalnu energiju E_k i E_p, zadanog mehaničkog sustava:

-Ekvivalencija kinetičke energije

$$E_{k,r} = E_k$$

$$\frac{1}{2} m_r \cdot \dot{x}^2 = \frac{5}{3} m \cdot \dot{x}^2 \qquad \Rightarrow \qquad m_r = \frac{10}{3} m$$

-Ekvivalencija potencijalne energije (uzima se samo utjecaj elastičnih sila)

$$E_{p,r} = E_p$$

$$\frac{1}{2} k_r \cdot x^2 = \frac{1}{2} k \cdot (2 \cdot x)^2 \qquad \Rightarrow \qquad k_r = 4k$$

Vlastita frekvencija linearnog harmonijskog oscilatora određena je izrazom

$$\omega = \sqrt{\frac{k_r}{m_r}} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{6k}{5m}}\,.$$

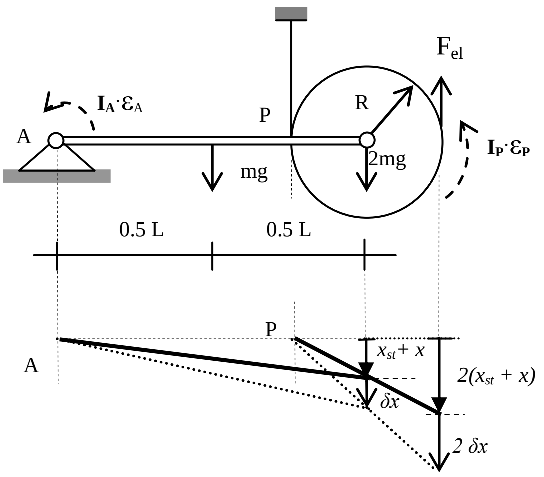
Sada se lako odredi diferencijalna jednadžba oscilacija:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} + \frac{6k}{5m} x = 0\,.$$

3. Način: Diferencijalnu jednadžbu oscilacija možemo odrediti i primjenom metode virtualnog rada. Poznato je da za mehanički sustav pod djelovanjem sila u ravnoteži vrijedi:

$$\sum \delta W = 0\,.$$

Zadanom mehanizmu, koji u nekom trenutku za vrijeme gibanja ima otklon x od ravnotežnog položaja, dajemo virtualni pomak δx, i postavljamo uvjet dinamičke ravnoteže.



Slika 11. Pomaci i sile (momenti)

U tom slučaju za vrijeme gibanja virtualni rad vrše sile inercije, gravitacijske sile i elastične sile. Gibanje tijela određeno je rotacijom oko poznatih centara rotacije, tako da umjesto rada sila inercije uzimamo rad njihovih momenata oko tih centara, i tako jednadžba virtualnog rada postaje jednostavnija. Moment sila inercije mase štapa na točku A, prikazan je s

$$I_A \varepsilon_A = I_A \frac{\ddot{x}}{L}\,,$$

a moment sila inercije diska na točku P, s

$$I_P \varepsilon_P = I_P \frac{\ddot{x}}{R}\,.$$

I_A i I_P, već su određeni momenti tromosti.

Elastična sila u promatranom trenutku ima veličinu $F_{el}=k\ 2(x_{st}+x)$, gdje je x_{st} već ranije određen statički progib: $x_{st}=\frac{5}{8}\frac{m\cdot g}{k}$.

U skladu s navedenim oznakama ukupni virtualni rad svih sila određen je sa

$$mg\cdot\frac{\delta x}{2}+2mg\cdot\delta x-I_A\cdot\varepsilon_A\cdot\frac{\delta x}{L}-I_P\cdot\varepsilon_P\cdot\frac{\delta x}{R}-F_{el}\cdot 2\delta x=0\,.$$

Nakon supstitucije poznatih veličina i sređivanja dobije se jednadžba

$$\left(-\frac{1}{3}m\cdot\ddot{x}-3m\cdot\ddot{x}-4k\cdot x\right)\cdot\delta x=0\,.$$

Uočavamo da se rad gravitacijskih sila opet poništava s virtualnim radom konstantnog dijela elastične sile. Za $\delta x\neq 0$, izraz u zagradi mora izčezavati, te se diferencijalna jednadžba slobodnih oscilacija zadanog mehanizma dobije sređivanjem tog izraza.

$$\ddot{x}+\frac{6}{5}\frac{k}{m}\cdot x=0$$

b) Tražena vlastita frekvencija ω dobije se iz faktora uz x, jer je diferencijalna jednadžba svedena na oblik:

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0\qquad\Rightarrow\qquad\omega=\sqrt{\frac{6k}{5m}}\,.$$

c) Zakon oscilacija određen je rješenjem diferencijalne jednadžbe u kojem početni uvjeti x_0 i v_0 ovise o početnom uzroku oscilacija, opisanom u tekstu zadatka.

$$x(t)=x_0\cdot Cos(\omega\cdot t)+\frac{v_0}{\omega}\cdot Sin(\omega\cdot t)$$

U trenutku t=0 sustav miruje u ravnotežnom položaju (od kojeg se mjeri x), što uvjetuje da je "izmjereni" početni pomak $x_0=0$.

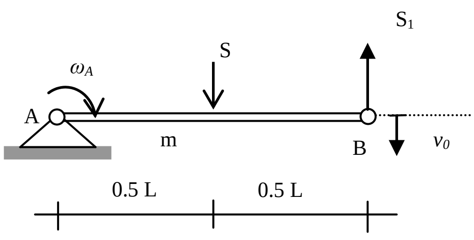
Početna brzina v_0 posljedica je djelovanja impulsa S, koji će u trenutku t=0 promijeniti količinu gibanja mehaničkog sustava.

Pokazano je na planu pomaka, da se masa štapa i masa diska rotiraju oko različitih centara rotacija. Da bi se mogao primjeniti stavak impulsa za tijelo u rotaciji, sustav se mora rastaviti, pa se uvodi unutarnji impuls S_1, koji vanjski impuls S prenosi sa štapa na disk.

Djelovanje impulsa na tijelo u rotaciji oko nepomične osi c objašnjeno je prije. Moment impulsa na os c, mijenja moment količine gibanja tijela što pišemo jednadžbom

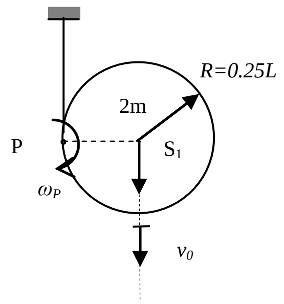
$$I_c\cdot\vec{\omega}_2-I_c\cdot\vec{\omega}_1=\vec{M}_{c(\vec{S})}.$$

Jednadžbe ovog oblika mogu se napisati za štap i za disk:



Štap rotira oko točke A (oko osi okomite na ravninu crteža):

$$\frac{1}{3}m\cdot L^2\cdot\omega_A=S\cdot\frac{L}{2}-S_1\cdot L\;......(1)$$



Disk rotira oko točke P (odnosno osi okomite na ravninu crteža kroz točku P)

$$\frac{3}{2}2m \cdot R^2 \cdot \omega_P = S_1 \cdot R \ldots\ldots(2)$$

Zbog razdvajanja mehanizma i zasebnog promatranja rotacije svakog tijela, potrebno je osigurati kompatibilnost gibanja.

$$\omega_A \cdot L = \omega_P \cdot R = v_0 \ldots\ldots (3).$$

Uvedena je oznaka v_0, za brzinu u zglobnom spoju štapa i diska (točka B). To je tražena početna brzina.

Veličina v_0 odredi se eliminacijom iz sustava jednadžbi *(1), (2), (3).*

$$v_0 = \frac{3}{20}\frac{S}{m}$$

Zakon oscilacija glasi:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \cdot Sin(\omega \cdot t) = \frac{3}{20}\frac{S}{m} \cdot \sqrt{\frac{5m}{6k}} \cdot Sin(\sqrt{\frac{6k}{5m}} \cdot t)$$

$$\underline{x(t) = 0.136931 \cdot S \cdot \sqrt{\frac{1}{m \cdot k}} \cdot Sin(\sqrt{\frac{6k}{5m}} \cdot t)}$$

d) U trenutku t=0, sustav miruje pridržan tako da opruga nije deformirana. To znači da prema slici 11, uz oznaku $x = x_{(t=0)} = x_0$, mora biti

$$x_{st} + x_0 = 0.$$

$$x_0 = -x_{st} = -\frac{5}{8}\frac{m \cdot g}{k}$$

Početna brzina nastaje od djelovanja impulsa pa ostaje ista kao u rješenju pod *c).* Zakon oscilacija određen je funkcijom:

$$\underline{x(t) = -\frac{5}{8}\frac{m \cdot g}{k} Cos(\sqrt{\frac{6k}{5m}} \cdot t) + 0.136931 \cdot S \cdot \sqrt{\frac{1}{m \cdot k}} \cdot Sin(\sqrt{\frac{6k}{5m}} \cdot t)}\,.$$