

MATEMATIKA III 18.2.2009.

1. Homogena žica duljine $l = 12$ na rubovima je pričvršćena i to tako da je $u(0, t) = \pi$ i $u(12, t) = 2\pi$. Napeta je s napetosti $p = 100$, ima linijsku gustoću $\rho = 4$, početna brzina je $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sin \pi x$ i početni položaj je $u(x, 0) = \frac{\pi}{12}x + \pi$. Pronađite zakon titranja ako nema vanjske sile.
2. a) Rješite problem stacionarnog provođenja topline kroz štap duljine $l = 1$ s koeficijentom provođenja 10. Temperatura lijevog kraja štapa je 2, a desnog 20. Vanjski prijenos topline je 150.
b) Odredite ravnotežni oblik homogene pravokutne membrane $[0, 2] \times [0, 3]$ napete s napetošću $p = 100$ i površinske gustoće $\rho = 4$ ako je $u(x, 3) = \sin \frac{\pi}{2}x$ i $u(0, y) = u(2, y) = u(x, 0) = 0$.
3. Metodom konačnih elemenata odredite numeričke vrijednosti ravnotežnog stanja žice:

$$(e^x u'(x))' - x - 2 = 0 \text{ na } [0, 4], h = 1 \text{ uz rubne uvjete } u(0) = u'(4) = 0.$$

4. Metodom konačnih diferencija odredite numeričke vrijednosti oscilacija žice za prva četiri vremenska koraka:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ na } [0, 4] \text{ ako je } h = \tau = 1 \text{ uz rubne uvjete } u(0, t) = u(4, t) = 0,$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1.5 \\ 1.5, & 1.5 < x < 2.5 \\ -x + 4, & 2.5 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$\text{i } u(x, 0) = \cos \frac{\pi}{2}x - 1.$$