Vježbe 2
Fourierovi redovi

Fourierovi redovi

Neka je f beskonačno puta derivabilna funkcija, to jest, funkcija klace C^∞. Tada je dobro definiran red $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. Ako taj red još i konvergira prema funkciji f na nekoj okolini točke x_0, onda kažemo da je njegova suma $\sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ **Taylorov red** funkcije f u točki $x_0 \in \mathbb{R}$. Dakle, $f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ na nekoj okolini oko x_0, to jest, $f(x) \approx \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ na nekoj okolini oko x_0.

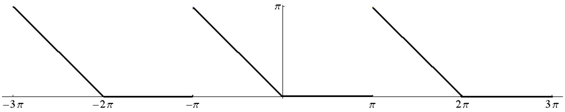
Proširenja funkcija

- (i) PERIODIČKO PROŠIRENJE
  Neka je $f : [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}) \to \mathbb{R}$ funkcija koju želimo periodički proširiti na cijeli $\mathbb{R}$.

  To činimo tako da definiramo funkciju $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

  $$\tilde{f}(x) = f(t)$$

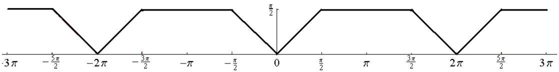
  za $t \in [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2})$ i $m \in \mathbb{Z}$ takve da je $x = m\tau + t$.



- (ii) PARNO PROŠIRENJE
  Neka je $f : [0, \frac{\tau}{2}) \to \mathbb{R}$ funkcija koju želimo parno proširiti na cijeli $\mathbb{R}$.
  To činimo tako da definiramo funkciju $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \frac{\tau}{2}), \\ f(-x), & x \in (-\frac{\tau}{2}, 0], \end{cases}$$

  i sada $\tilde{f}$ periodički proširimo na $\mathbb{R}$ kao u (i).



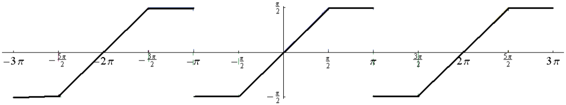
- (iii) NEPARNO PROŠIRENJE

  Neka je $f : [0, \frac{\tau}{2}) \to \mathbb{R}$ funkcija koju želimo neparno proširiti na cijeli $\mathbb{R}$.

  To činimo tako da definiramo funkciju $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), \ x \in [0, \frac{\tau}{2}), \\ -f(-x), \ x \in (-\frac{\tau}{2}, 0], \end{cases}$$

  i sada $\tilde{f}$ periodički proširimo na $\mathbb{R}$ kao u (i).



Dakle, svaku periodičku funkciju na $\mathbb{R}$ s periodom τ je dovoljno promatrati na $[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2})$, a svaku funkciju definiranu na $[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2})$ možemo po periodičnosti proširiti na $\mathbb{R}$.

Teorem (Dirichlet)

Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *periodička funkcija s periodom* $2L$*, neprekidna osim u konačno mnogo točaka na* $[-L, L]$ *i u svakoj točki ima lijevu i desnu derivaciju. Tada se* f *može razviti u Fourierov red oblika*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right),$$

za svaku točku neprekidnosti od f*. Fourierovi koeficijenti se računaju na sljedeći način:*

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) dx,$$

Teorem (Dirichlet)

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x dx \quad i$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x dx \quad za \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ukoliko je x_0 točka prekida funkcije f, vrijedi:

$$\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x_0 + b_n\sin\frac{n\pi}{L}x_0\right).$$

Zadatak

Odredite Fourierov red funkcije $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ x, & 0 < x \le \pi, \end{cases}$

to jest, njenog periodičkog proširenja $\tilde{f}$.

Rj. Očito je $\tau = 2L = 2\pi$. Računamo

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_0^{\pi} xdx\Big) = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{1}{n^2\pi}(\cos(n\pi) - 1),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx = -\frac{1}{n}\cos(n\pi).$$

Dakle,

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n^2\pi} (\cos(n\pi) - 1) \cos(nx) - \frac{1}{n} \cos(n\pi) \sin(nx) \Big),$$

za $x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

U točkama oblika $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ Fourierov red poprima vrijednost:

$$\frac{f((2k+1)\pi^+) + f((2k+1)\pi^-)}{2} = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Zadatak

Odredite Fourierov red funkcije $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$

to jest, njenog periodičkog proširenja $\tilde{f}$.

Rj. Očito je $\tau = 2L = 2\pi$.
Nadalje, očito je da je funkcija f neparna, to jest, $\tilde{f}$ je neparna. U tom slučaju su uvijek $a_0 = 0$ i $a_n = 0$ jer u računu za navedene koeficijente imamo integral neparne funkcije na simetričnoj domeni.
Dovoljno je izračunati samo b_n. Imamo:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\Big(- \int_{-\pi}^{0} \sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi} \sin(nx)dx\Big)$$
$$= \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(n\pi)).$$

Dakle,

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{2}{n\pi}(1 - \cos(n\pi) \sin(nx) \Big),$$

za $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

U točkama oblika $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ Fourierov red poprima vrijednost:

$$\frac{f(k\pi^+) + f(k\pi^-)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0.$$

Zadatak

Odredite Fourierov red funkcije $f(x) = x^2$, za $x \in [-\pi, \pi]$, to jest, njenog periodičkog proširenja $\tilde{f}$.

Rj. Očito je $\tau = 2L = 2\pi$.
Nadalje, uočimo da je funkcija f parna, to jest, $\tilde{f}$ je parna. U tom slučaju je uvijek $b_n = 0$ jer u računu za te koeficijente imamo integral neparne funkcije na simetričnoj domeni. Dovoljno je izračunati samo a_0 i a_n.
Imamo:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \Big(\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \Big) = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

Pogledajmo račun zadnjeg integrala.

$$\frac{2}{\pi}\Big(\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx\Big) = \begin{pmatrix} u = x^2 & dv = \cos(nx)dx \\ du = 2xdx & v = \frac{1}{n}\sin(nx)dx \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big(\frac{x^2\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx\Big) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi^2\sin(n\pi)}{n} - \frac{0^2\sin(n\cdot 0)}{n} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx\Big) =$$

$$= \begin{pmatrix} u = x & dv = \sin(nx)dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{n}\cos(nx)dx \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{-2}{n}\Big(-\frac{x\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx\Big) =$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{\pi\cos(n\pi)}{n} + \frac{0\cdot\cos(n\cdot 0)}{n} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin(nx)\right)\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{4\cos(n\pi)}{n^2} - \frac{4}{\pi n^3}\left(\sin(n\pi) - \sin(n\cdot 0)\right) = \frac{4\cos(n\pi)}{n^2} = (-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

Dakle,

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx),$$

za sve $x \in \mathbb{R}$ (nema točaka prekida).

Fourierov red po sinusima i kosinusima

Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodička funkcija s periodom L (dakle, možemo je razviti u klasičan Fourierov red).

Pretpostavimo da nas zanima njen Fourierov red samo po

a) sinusima
b) kosinusima.

To činimo na sljedeći način:

a) proširimo funkciju f po neparnosti do funkcije $\tilde{f}$ s periodom $2L$ i onda $\tilde{f}$ razvijemo u Fourierov red
b) proširimo funkciju f po parnosti do funkcije $\tilde{f}$ s periodom $2L$ i onda $\tilde{f}$ razvijemo u Fourierov red

Zadatak

Odredite Fourierov red funkcije $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \end{cases}$

po

a) *sinusima,*

b) *kosinusima.*

Rj. a) Proširimo funkciju f po neparnosti do funkcije $\tilde{f}$.
Očito je $L = \pi$ pa imamo

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx)dx + 0\Big) = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(\frac{n\pi}{2})).$$

Dakle,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(\frac{n\pi}{2}))\sin(nx).$$

b) Proširimo funkciju f po parnosti do funkcije $\tilde{f}$.
Očito je $L = \pi$ pa imamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + 0\Big) = \frac{1}{2},$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)dx = \frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2}).$$

Dakle,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2})\cos(nx).$$