Poglavlje 2
Vjerojatnost a priori

Zadatak (2.3.)

Eksperiment se sastoji u bacanju tri simetrična novčića.

a) Ispišite elemente skupa Ω svih mogućih ishoda.

b) Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:

A - pojavio se barem jedan grb

(DZ) B - pojavilo se barem jedno pismo

C - pojavilo se više grbova nego pisama

D - nije se pojavio grb

E - pojavili su se i grb i pismo

(DZ) F - pojavilo se više pisama nego grbova

(DZ) G - pojavili su se samo grbovi ili samo pisma

Rješenje:

a) $\Omega = \{(P,P,P),(P,P,G),(P,G,P),(P,G,G),(G,P,P),(G,P,G),$
$(G,G,P),(G,G,G)\}$

b) $\mathbb{P}(A) = \frac{7}{8}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{7}{8}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(D) = \frac{1}{8}$, $\mathbb{P}(E) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{P}(F) = \frac{1}{2}$,

$\mathbb{P}(G) = \frac{1}{4}$.

Zadatak (2.4.)

Eksperiment se sastoji u bacanju tri igraće kocke.

a) Opišite skup Ω svih mogućih ishoda.

b) Izračunajte vjerojatnosti događaja:
(DZ) $A \ldots$ na sve tri kocke je pao isti broj,
$B \ldots$ suma brojeva na sve tri kocke je 6.

Rješenje:

a) $\Omega = \{(x, y, z) \in S^3 : S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

b) $A = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6)\}$
$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$
$B = \{(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1),$
$(3, 1, 2), (3, 2, 1), (2, 2, 2)\} \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{10}{6^3} = \frac{5}{108}.$

Zadatak (2.13.)

U kutiji se nalazi 20 kuglica (12 bijelih i 8 crnih). Izvlačimo 4 kuglice jednu za drugom bez vraćanja u kutiju. Kolika je vjerojatnost da će barem jedna od njih biti bijela?

Rješenje: Uvedimo oznake za događaje $A =$ "izvučena je barem jedna bijela kuglica" i $A^C =$ "izvučene su sve crne kuglice". Tada je

$$\mathbb{P}(A^C) = \frac{\binom{8}{4}\binom{12}{0}}{\binom{20}{4}} = \frac{14}{969} \quad \text{i} \quad \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^C) = 1 - \tfrac{14}{969} = \tfrac{955}{969}.$$

Zadatak (2.11.)

U kutiji imamo 5 kuglica različitih boja (plava, crvena, žuta, zelena, ljubičasta). Izvlačimo 3 kuglice bez vraćanja u kutiju. Kolika je vjerojatnost da ćemo odabrati uzorak u kojem se nalaze plava, crvena i zelena kuglica, ako je:

a) poredak boja bitan?
b) poredak boja nije bitan?

Rješenje: Definiramo događaj $A =$ "izabrali smo plavu, crvenu i zelenu kuglicu".

a) Ukoliko je poredak boja bitan broj ishoda povoljnih za događaj A je jednak 3!, tako da je $\mathbb{P}(A) = \frac{3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3} = 0.1$.

b) U slučaju kada poredak boja nije bitan samo jedan ishod je povoljan za događaj A i stoga je $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{\binom{5}{3}} = 0.1$.

Zadatak (2.8.)

U uzorak uzimamo 3 proizvoda od ukupno 10 proizvoda (od kojih je 6 ispravnih i 4 neispravna). Kolika je vjerojatnost da u uzorku

a) nema neispravnih proizvoda?
b) ima jedan neispravan proizvod?
c) ima barem dva ispravna proizvoda?

Rješenje: Tri proizvoda koja uzimamo u uzorak možemo izabrati na $\binom{10}{3} = 120$ načina.

a) Broj uzoraka koji nemaju neispravnih proizvoda je jednak $\binom{6}{3}\binom{4}{0} = 20$. Označimo sa A događaj "u uzorku nema neispravnih proizvoda". Tada je $\mathbb{P}(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.

b) Broj uzoraka u kojem se nalazi točno jedan neispravan proizvod je jednak $\binom{6}{2}\binom{4}{1} = 60$.
Ukoliko sa B označimo događaj "u uzorku je točno jedan neispravan proizvod" imamo $\mathbb{P}(B) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$.

c) Broj uzoraka s barem dva ispravna proizvoda je jednak $\binom{6}{2}\binom{4}{1} + \binom{6}{3}\binom{4}{0} = 60 + 20 = 80$.
Označimo sa C događaj "u uzorku se nalaze barem dva ispravna proizvoda". Tada je $\mathbb{P}(C) = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$.

Zadatak (2.10.)

Bacamo dvije igraće kocke. Kolika je vjerojatnost da će pasti

a) barem jedna četvorka,

b) broj djeljiv s 2 ili s 3?

Rješenje: Znamo da je $n_\Omega = 6^2 = 36$.

a) Ishodi povoljni za događaj $A =$"pala je barem jedna četvorka" su $(4,4)$ i $(4,i),(i,4), i = 1,2,3,5,6$. Dakle $\mathbb{P}(A) = \frac{11}{36}$.

b) Brojevi djeljivi s dva su 2, 4 i 6, a brojevi djeljivi s tri su 3 i 6. Označimo s B događaj "pao je broj djeljiv s 2 ili 3". Tada je $B^c = \{(5,1),(1,5),(1,1),(5,5)\}$ i

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \frac{4}{36} = \frac{8}{9}.$$

Zadatak (2.9.)

U skupu od 50 žarulja 3 su štedne.

a) Na koliko načina možemo odabrati dvije žarulje iz navedenog skupa? Na koliko načina možemo odabrati dvije štedne žarulje?

b) Kolika je vjerojatnost da će dvije odabrane žarulje biti štedne?

c) Kolika je vjerojatnost da ćemo odabrati jednu štednu i jednu običnu žarulju?

Rješenje:

a) Dvije žarulje iz skupa od 50 žarulja možemo odabrati na $\binom{50}{2} = 1225$ načina, a dvije štedne žarulje možemo izabrati na $\binom{3}{2} = 3$ načina.

b) Definiramo događaj $A =$ "odabrali smo dvije štedne žarulje". Tada je prema a) i definiciji vjerojatnosti a priori $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{1225} = 0,0024$.

c) Za događaj $B =$ "odabrali smo jednu štednu i jednu običnu žarulju" vrijedi $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\binom{47}{1}\binom{3}{1}}{1225} = \dfrac{141}{1225} \approx 0.1151.$

Domaća zadaća

Zadatak (2.5.)

U kutiji su dvije bijele, tri zelene i četiri crvene kuglice. Izvlačimo jednu po jednu kuglicu i stavljamo ih u niz.

a) Koliko postoji različitih uzoraka sastavljanih od dvije bijele, tri zelene i četiri crvene kuglice?

b) Kolika je vjerojatnost da se izabere niz u kojem su baš prve dvije kuglice bijele, zatim tri zelene i na kraju četiri crvene?

Rješenje:

a) Navedenih uzoraka ima $\frac{9!}{2!3!4!} = 1260$.

b) Tražimo vjerojatnost pojavljivanja skupa $A = (b, b, z, z, z, c, c, c, c)$. Od ukupno 1260 mogućnosti, nama odgovara samo jedna, dakle tražena vjerojatnost je jednaka $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{1260}$.

Domaća zadaća

Zadatak (2.6.)

U kutiji imamo 5 kuglica različitih boja (plava, crvena, žuta, zelena, ljubičasta). Izvlačimo 3 kuglice s vraćanjem u kutiju. Kolika je vjerojatnost

a) da u drugom izvlačenju izvadimo žutu kuglicu?
b) da u uzorku imamo barem jednu žutu kuglicu?

a) Definiramo događaj $A =$ "u drugom izvlačenju dobivena je žuta kuglica". Budući da u prvom i trećem izvlačenju kuglice možemo izabrati na 5^2 načina, vrijedi da je $\mathbb{P}(A) = \dfrac{5^2}{5^3} = 0.2$.

b) Neka je B događaj "izvučena je barem jedna žuta kuglica". Tada je $B^C =$ "nije izvučena nijedna žuta kuglica". Stoga je $\mathbb{P}(B^C) = \dfrac{4^3}{5^3}$, jer kuglice biramo iz skupa od preostale 4 različite kuglice, pa slijedi da je $\mathbb{P}(B) = 1 - \dfrac{4^3}{5^3}$.

Domaća zadaća

Zadatak (2.7.)

Imamo tri loptice koje raspoređujemo u pet kutija tako da u svaku kutiju možemo staviti najviše jednu lopticu. Kolika je vjerojatnost da prva kutija bude puna ako

a) pretpostavimo da su sve loptice različitih boja?

b) su sve loptice iste boje?

Rješenje: Definiramo događaj $A =$ "prva kutija je puna".

a) Budući da su sve loptice različite, prvu kutiju možemo napuniti na 3 načina, a preostale dvije loptice možemo razdijeliti na $4 \cdot 3$ načina i stoga je $\mathbb{P}(A) = \frac{3 \cdot (4 \cdot 3)}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 0.6$

b) Nakon što napunimo prvu kutiju preostale loptice možemo razdijeliti na $\binom{4}{2}$ načina, pa je $\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{3}} = 0.6$.

Zadatak (2.12.)

Imamo 7 loptica koje raspoređujemo u 10 kutija tako da u svaku kutiju možemo staviti proizvoljan broj loptica. Kolika je vjerojatnost da u četvrtoj kutiji imamo tri loptice?

Rješenje:

Označimo sa A događaj "u četvrtoj kutiji imamo tri jednake loptice". Budući da smo potrošili jednu kutiju i tri loptice, preostale loptice raspoređujemo na $\binom{9+4-1}{4}$ načina i stoga je

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{9+4-1}{4}}{\binom{10+7-1}{7}} = \frac{9}{208} \approx 0.0433$$