Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost događaja

Uvjetna vjerojatnost - motivacija

Bacamo simetričnu kocku. Dakle, vjerojatnosni prostor je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
- $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/6$ za $\omega \in \Omega$.

Pretpostavimo sad da imamo dodatnu informaciju vezanu za ishode ovog pokusa. Primjerice, netko nam je iz budućnosti javio da će prilikom sljedećeg bacanja kocke pasti paran broj.

Sad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ više ne opisuje dobro naš pokus i moramo pronaći odgovarajuću zamjenu.

Uvjetna vjerojatnost - motivacija

- Stavimo $A = \{2, 4, 6\}$ i $\mathcal{F}_A = \mathcal{P}(A)$.
  $\implies (A, \mathcal{F}_A)$ opisuje prostor elementarnih događaja i događaja
- Kako odabrati $\mathbb{P}_A$ na $\mathcal{F}_A$?
  Logičan izbor je

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}, \qquad B \in \mathcal{F}_A.$$

$\implies (A, \mathcal{F}_A, \mathbb{P}_A)$ opisuje slučajni pokus bacanja simetrične igraće kocke uz dodatnu informaciju da će pri bacanju pasti paran broj

$\mathbb{P}_A(B)$ (označava se i kao $\mathbb{P}(B|A)$) $=$ vjerojatnost događaja B uz uvjet da se dogodio događaj A

Uvjetna vjerojatnost

- $(A, \mathcal{F}_A, \mathbb{P}(\cdot|A))$ možemo zamijeniti s $(A, \mathcal{F}, \mathbb{P}(\cdot|A))$, gdje $\mathbb{P}(\cdot|A)$ zovemo **uvjetna vjerojatnost**.

Definicija 1

Uvjetnu vjerojatnost događaja B uz uvjet A definiramo kao

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}, \qquad B \in \mathcal{F}.$$

Primjer

Na grupi od 60 muškaraca i 40 žena provedeno je istraživanje o sklonosti određenom proizvodu i dobiveni su sljedeći podaci (V = voli, N = ne voli), prikazani u Tablici 1:

	V	N	Σ
M	15	45	60
Ž	4	36	40
Σ	19	81	100

Tablica: Podaci o sklonosti proizvodu ovisno o spolu

Na slučajan način biramo osobu iz grupe. Vjerojatnost odabira bilo koje osobe jednaka je i iznosi

$$\frac{1}{100}.$$

Primjer (nastavak)

- Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana osoba voli taj proizvod?
  V = skup svih osoba koje vole taj proizvod

$$\mathbb{P}(V) = \frac{19}{100}$$

- Kolika je vjerojatnost da osoba voli taj proizvod ako znamo da je osoba muškarac? A kolika ako je žena?
  M = skup svih muškaraca, $\check{Z}$ = skup svih žena

$$\mathbb{P}(V|M) = \frac{\mathbb{P}(V \cap M)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{60}{100}} = \frac{15}{60}$$

$$\mathbb{P}(V|\check{Z}) = \frac{\mathbb{P}(V \cap \check{Z})}{\mathbb{P}(\check{Z})} = \frac{\frac{4}{100}}{\frac{40}{100}} = \frac{4}{40}$$

Primjer (nastavak)

- Kolika je vjerojatnost da je osoba koja voli taj proizvod žena, a kolika da je osoba koja ne voli taj proizvod muškarac?
  $N =$ skup svih osoba koje ne vole taj proizvod

$$\mathbb{P}(\check{Z}|V) = \frac{\mathbb{P}(V \cap \check{Z})}{\mathbb{P}(V)} = \frac{\frac{4}{100}}{\frac{19}{100}} = \frac{4}{19}$$

$$\mathbb{P}(M|N) = \frac{\mathbb{P}(N \cap M)}{\mathbb{P}(N)} = \frac{\frac{45}{100}}{\frac{81}{100}} = \frac{45}{81}$$

Nezavisnost događaja

Definicija 2

Za događaje A i B kažemo da su **nezavisni** ako je

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Uočimo, ako je $\mathbb{P}(A) > 0$ (ili $\mathbb{P}(B) > 0$), onda nezavisnost od A i B povlači

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

(ili $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$).

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B).$$

Primjer

Jesu li sklonosti proizvodu iz Primjera 5 neovisne o spolu? Imamo

$$\mathbb{P}(V) = \frac{19}{100}, \quad \mathbb{P}(\check{Z}) = \frac{40}{100}, \quad \mathbb{P}(M) = \frac{60}{100},$$
$$\mathbb{P}(V \cap \check{Z}) = \frac{4}{100} \qquad \text{i} \qquad \mathbb{P}(V \cap M) = \frac{15}{100},$$

iz čega slijedi

$$\mathbb{P}(V \cap \check{Z}) = \frac{4}{100} \neq \mathbb{P}(V)\mathbb{P}(\check{Z}) = \frac{38}{500}$$
$$\mathbb{P}(V \cap M) = \frac{15}{100} \neq \mathbb{P}(V)\mathbb{P}(M) = \frac{57}{500}.$$

Dakle, sklonosti (događaji) nisu nezavisne.

Nezavisnost događaja

Iz nezavisnosti događaja A i B lagano se može zaključiti nezavisnost događaja:

- A^c i B
- A i B^c
- A^c i B^c.

Pokažimo da nezavisnost od A i B povlači nezavisnost od A^c i B, tj.

$$\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B).$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A^c \cap B) &= \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B)) \\ &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B).\end{aligned}$$

Neka su A i B neki događaji. Mogući su sljedeći slučajevi:

(i) barem jedan od događaja ima vjerojatnost 0, tj. $\mathbb{P}(A) = 0$ ili $\mathbb{P}(B) = 0$, i onda su A i B uvijek nezavisni.

(ii) oba imaju pozitivnu vjerojatnost, tj. $\mathbb{P}(A) > 0$ i $\mathbb{P}(B) > 0$. Tada A i B mogu biti:

- disjunktni (onda su nužno zavisni)
- nezavisni (onda nisu disjunktni)
- zavisni (onda mogu, ali ne moraju biti disjunktni).

Definicija 3

Za događaje A_i, $i \in \mathbb{N}$, kažemo da su **nezavisni** ako za svaki izbor indeksa $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n$, $n \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_n}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_n}).$$

Koristeći definiciju uvjetne vjerojatnosti lagano možemo izvesti često puta vrlo korisnu tzv. **formulu produkta vjerojatnosti**. Neka su A_i, $i = 1, \ldots, n$, događaji. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Potpun sustav događaja

Definicija 4

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka su H_i, $i = 1\ldots, n$, **disjunktni događaji** takvi da vrijedi:

- $\cup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$
- $\mathbb{P}(H_i) > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Takvu familiju događaja nazivamo **potpun sustav događaja**.

Uočimo da za svaki $A \in \mathcal{F}$ vrijedi

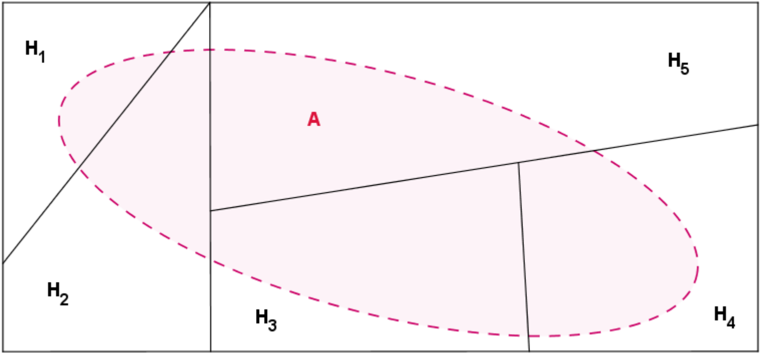
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}((A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \cdots \cup (A \cap H_n)) \\
&= \mathbb{P}(A \cap H_1) + \cdots + \mathbb{P}(A \cap H_n) \\
&= \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \cdots + \mathbb{P}(A|H_n)\mathbb{P}(H_n).
\end{aligned}$$

Formula potpune vjerojatnosti

Formulu

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \cdots + \mathbb{P}(A|H_n)\mathbb{P}(H_n)$$

zovemo **formula potpune vjerojatnosti**.



Dakle, formula potpune vjerojatnosti daje vjerojatnost događaja A ako znamo njegovu vjerojatnost uvjetovanu događajima $H_i, \ i = 1, \ldots, n$.

Bayesova formula

Iz definicije uvjetne vjerojatnosti izravno slijedi i tzv. **Bayesova formula**:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Bayesova formula daje vjerojatnost uzroka B uz danu posljedicu A.

Primjer

Neki proizvod izrađuje se na tri stroja. Na prvom se izrađuje 40% ukupne proizvodnje i od toga je 0.1% neispravnih proizvoda, na drugom stroju izrađuje se 35% ukupne proizvodnje i od toga je 0.2% neispravnih proizvoda, a na trećem stroju se izrađuje 25% ukupne proizvodnje i od toga je 0.25% neispravnih proizvoda.

(1) Kolika je vjerojatnost da nasumično odabrani proizvod bude neispravan?
(2) Kolika je vjerojatnost da uzrok neispravnosti bude drugi stroj?

Označimo

$$H_1 \ldots \text{“proizvod je izrađen na prvom stroju”}$$
$$H_2 \ldots \text{“proizvod je izrađen na drugom stroju”}$$
$$H_3 \ldots \text{“proizvod je izrađen na trećem stroju”}$$
$$A \ldots \text{“proizvod je neispravan”}.$$

Primjer (nastavak)

Očito je

$$\mathbb{P}(H_1) = 0.4, \quad \mathbb{P}(H_2) = 0.35, \quad \mathbb{P}(H_3) = 0.25,$$
$$\mathbb{P}(A|H_1) = 0.001, \quad \mathbb{P}(A|H_2) = 0.002, \quad \text{i} \quad \mathbb{P}(A|H_3) = 0.0025.$$

(1) iz formule potpune vjerojatnosti slijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A|H_3)\mathbb{P}(H_3) \\ &= 0.001725\end{aligned}$$

(2) iz Bayesove formule

$$\mathbb{P}(H_2|A) = \frac{\mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2)}{\mathbb{P}(A)} = 0.4058.$$