

MATEMATIKA III 2.9.2009.

1. Izračunajte temperaturu izoliranog štapa duljine $l = 10$, toplinskog kapaciteta $\gamma = 1$ i koeficijenta provođenja $\delta = 100$ ako je inicijalna distribucija topline dana s $g(x) = \cos 2\pi x + x + 9$. Rubni uvjeti su: $u(0, t) = 10$ i $u(10, t) = 20$.

2. a) Teška žica duljine $l = 10$ napeta je horizontalno utegom mase $M = 50$ na lijevom kraju i ima linijsku gustoću $\rho = 10$. Drugi kraj je slobodan. Pronađite ravnotežni položaj žice ako je koeficijent elastičnosti sredstva $q = 0$.

b) Odredite ravnotežni oblik homogene kružne membrane radijusa $R = 7$ napete s napetošću $p = 15$ i površinske gustoće $\rho = 20$ ako na membranu djeluje vanjska sila gustoće $f(r) = 2r^2$ uz rubni uvjet $u|_{r=7} = 3$.

3. Metodom konačnih elemenata odredite numeričke vrijednosti ravnotežnog stanja žice:
 $(xu'(x))' + x - 1 = 0$ na $[0, 4]$, $h = 1$ uz rubne uvjete $u(0) = u'(4) = 0$.

4. Metodom konačnih diferencija odredite numeričke vrijednosti oscilacija žice za prva četiri vremenska koraka:
 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ na $[0, 4]$ ako je $h = \tau = 1$ uz rubne uvjete $u(0, t) = u(4, t) = 0$,
$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}, & 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

i $u(x, 0) = \sin \pi x$.