MATEMATIKA 2, 8. 6. 2016.

1. (14 bodova) Odredite ravnotežni položaj teške žice mase 2, duljine 4, koja je horizontalno napeta silom iznosa 50, a nalazi se u homogenom sredstvu elastičnosti 200. Žica je pričvršćena na oba kraja. (Za gravitacijsku konstantu uzmite $g = 10$.)

2. Neka je dana funkcija $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \ln x$.

   (a) (8 bodova) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije f.

   (b) (4 boda) Izračunajte $\frac{\partial f}{\partial x}(1, \sqrt{2})$.

3. Neka je dana funkcija $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 3y^2 - 6y - 5$.

   (a) (7 bodova) Odredite lokalne ekstreme funkcije f.

   (b) (4 boda) Odredite tangencijalnu ravninu na graf dane funkcije u točki $(2, 1, f(2, 1))$.

4. (12 bodova) Izračunajte površinu jednog od dva manja lika omeđena krivuljama $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 4y$ i $y = \sqrt{3}|x|$. Skicirajte likove.

5. (11 bodova) Odredite volumen tijela omeđenog plohama $z = 2 - x^2 - y^2$ i $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Skicirajte tijelo.

6. Zadano je polje
$$\vec{v} = -e^z \sin x\vec{i} + y\vec{j} + e^z \cos x\vec{k}.$$

   (a) (9 bodova) Pokažite da je polje potencijalno te mu izračunajte potencijal.

   (b) (7 bodova) Izračunajte tok polja $\vec{v}$ kroz plohu Σ danu jednadžbom $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

7. (12 bodova) Izračunajte $\int_\Gamma x\,ds$ ako je Γ dio presječne krivulje ploha $z = 5 - x^2 - y^2$ i $z = 1$ koji se nalazi u 1. oktantu.

8. (12 bodova) Izračunajte površinu dijela polusfere $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geqslant 0$, koju isijeca ploha $x^2 + y^2 = 1$. Skicirajte plohu.