

Ime i prezime: _____

1. (15 bodova) Riješite problem slobodne oscilacije žice duljine 2, napetosti 1 i gustoće 1, ako za progib vrijedi:

$$u(0, t) = 2, \quad u(2, t) = 4, \quad u(x, 0) = 2 + x + \sin(2\pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)|_{t=0} = 0.$$

2. (15 bodova) Odredite temperaturu grede duljine $l = 4$, toplinskog kapaciteta $\gamma = 1$, koeficijenta provođenja $\delta = 1$, bez vanjskog prijenosa topline, ukoliko su rubovi na konstantnoj temperaturi 0, a početna distribucija topline je

$$u(x, 0) = x(8 - 2x).$$

3. (15 bodova) Odredite ravnotežni oblik homogene kružne membrane radijusa 4 s rupom radijusa 2 i napetosti $p = 3$ ako na membranu djeluje vanjska sila gustoće $f(r) = 3r^2 - r$. Rubni uvjeti su dani s $u|_{r=4} = 3$ i $u|_{r=2} = 1$.

4. (15 bodova) Odredite ravnotežni oblik kružne membrane radijusa 2, uz rubni uvjet

$$\tilde{u}|_{r=2} = 3 + 2\sin(3\varphi).$$

Tablica derivacija

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Tablica integrala

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
1	$x + C$	$\cos x$	$\sin x + C$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$	$\ln x + \sqrt{x^2 \pm 1} + C$

Ortogonalnost trigonometrijskih funkcija: za svaki $l > 0$ vrijedi:

$$\int_{-l}^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \begin{cases} l, & m = n \neq 0 \text{ i } m, n \in \mathbb{Z}, \\ 0, & m = n = 0, \\ 0, & m \neq n \text{ i } m, n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$\int_{-l}^l \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \begin{cases} l, & m = n \neq 0 \text{ i } m, n \in \mathbb{Z}, \\ 2l, & m = n = 0, \\ 0, & m \neq n \text{ i } m, n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$\int_{-l}^l \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Trigonometrijski identiteti

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2} [\sin(x-y) + \sin(x+y)] \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)] \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)] \end{aligned}$$