MATEMATIKA 3 10.7.2023.

Ime i prezime: ____

1. (15 bodova) Teška homogena žica mase $m = 8$ i duljine $l = 4$ napeta je horizontalno utegom mase $M = 5$ na kraju $x = 0$. Na dio $(2, 4]$ djeluje sila s koeficijentom elastičnosti $q(x) = 2$. Odredite progib ako je drugi kraj žice pričvršćen.

2. (15 bodova) Izračunajte temperaturu izoliranog štapa duljine $l = 3$ koji ima koeficijent toplinskog kapaciteta $\gamma = 3$ i koeficijent provođenja $\delta = 12$, ako su rubovi štapa također izolirani, a inicijalna distribucija temperature je dana s
$$u(x, 0) = \cos(\pi x) \quad \text{na} \quad [0, 3].$$

3. (15 bodova) Riješite problem slobodnih oscilacija štapa čiji su krajevi nehomogeni zglobovi:
$$u(0, t) = 10, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = 6, \quad u(10, t) = 10, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(10, t) = 12.$$
Početna brzina je $\psi(x) = 0$, a početni položaj je
$$\varphi(x) = \sin(3\pi x) + \frac{x^3}{10} + 3x^2 - 40x + 10.$$

4. (15 bodova) Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R_2 = e^4$ s kružnom rupom polumjera $R_1 = e$ u sredini, ako je napetost membrane $p = 3$ i na membranu djeluje vanjska sila gustoće $f(r) = 3r^3$ (progib ne ovisi o kutu), uz rubne uvjete $u(R_1, \varphi) = u(R_2, \varphi) = 0$.

Tablica derivacija

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	ctg	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Tablica integrala

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
1	$x + C$	$\cos x$	$\sin x + C$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$	$\ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right\rvert + C$

Ortogonalnost trigonometrijskih funkcija: za svaki $l > 0$ vrijedi:

$$\int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \begin{cases} l, \ m = n \neq 0 \text{ i } m, n \in \mathbb{Z}, \\ 0, \ m = n = 0, \\ 0, \ m \neq n \text{ i } m, n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \begin{cases} l, \ m = n \neq 0 \text{ i } m, n \in \mathbb{Z}, \\ 2l, \ m = n = 0, \\ 0, \ m \neq n \text{ i } m, n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = 0, \ \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Trigonometrijski identiteti

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2} \left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right] \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2} \left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right] \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2} \left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right] \end{aligned}$$