Zadatak 1 Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe

(a) (7 bodova) $\cos^2 x y' = y$, uz uvjet $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$,

(b) (8 bodova) $y'' - 3y' + 2y = 6x - 9$.

Rješenje. (a) Separiranjem varijabli dobivamo

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Sada integriramo obje strane

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$
$$\ln|y| = \tan x + C$$

Eksponenciranjem obiju strana dobivamo

$$|y| = e^{\tan x + C} = e^C \cdot e^{\tan x}$$

odakle slijedi da je rješenje oblika

$$y = Ce^{\tan x},$$

za neki $C \in \mathbb{R}$ koji određujemo pomoću početnog uvjeta $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Uvrštavanjem i sređivanjem dobivamo

$$1 = Ae^{\tan\frac{\pi}{4}} = Ae^1 = Ae \implies A = \frac{1}{e},$$

pa je konačno rješenje

$$\boxed{y(x) = e^{\tan x - 1}}$$

(b) Najprije riješimo homogenu jednadžbu $y'' - 3y' + 2y = 0$. Karakteristična jednadžba je

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0,$$

pa su rješenja $\lambda_{1,2} = 1, 2$. Slijedi da je opće rješenje homogene

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Sada tražimo partikulrano rješenje y_p. Budući da je desna strana dane jednadžbe polinom prvog stupnja, znamo da je partikularno rješenje oblika $y_p = Ax + B$ za neke $A, B \in \mathbb{R}$. Derivacije su

$$y_p' = A, \quad y_p'' = 0,$$

pa uvrštavanjem u polaznu jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned} 0 - 3A + 2(Ax + B) &= 6x - 9 \\ 2Ax + 2B - 3A &= 6x - 9 \end{aligned}$$

Uspoređujući koeficijente dobivamo

$$\begin{cases} 2A = 6 \implies A = 3 \\ 2B - 3A = -9 \implies 2B - 9 = -9 \implies 2B = 0 \implies B = 0, \end{cases}$$

Dakle je $y_p = 3x$. Slijedi da je opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$\boxed{y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}.$$

♣

Zadatak 2 (a) (10 bodova) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije

$$f(x,y) = \ln xy + \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

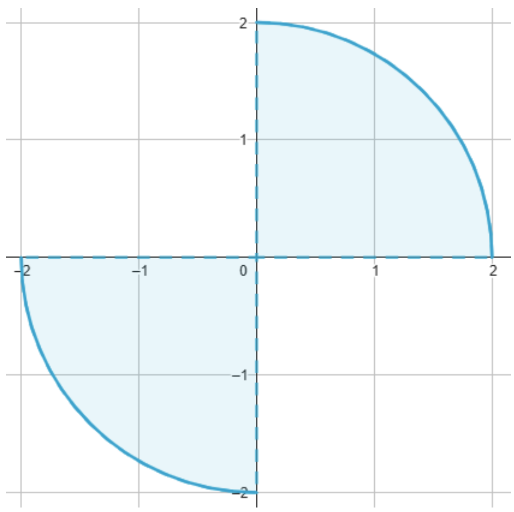
(b) (15 bodova) Odredite lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy - 6x + \frac{1}{2}y^2.$$

Rješenje. (a) Budući da je domena prirodnog logaritma $\langle 0, \infty\rangle$ te domena funkcije drugi korijen $[0, +\infty]$ dobivamo sustav nejednadžbi

$$\begin{cases} xy > 0, \\ 4 - x^2 - y^2 \geq 0. \end{cases}$$

Druga jednadžba opisuje krug $x^2 + y^2 \leq 2^2$, dok iz prve nejednadžbe slijedi da je domena strogo u prvom ili trećem kvadrantu (gdje su predznaci isti). Stoga je domena funkcije f skup



(b) Najprije tražimo stacionarne točke. Računamo parcijalne derivacije:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y - 6, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x + y.$$

Stacionarne točke su rješenja sustava:

$$\begin{cases} x^2 + y - 6 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y - 6 = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

Uvrštavanjem $y = -x$ u prvu jednadžbu i sređivanjem dobivamo

$$x^2 - x - 6 = 0 \iff (x-3)(x+2) = 0.$$

Rješenja su $x = 3$ i $x = -2$, pa su stacionarne točke $(3, -3)$ i $(-2, 2)$.

Sada računamo druge parcijalne derivacije:

$$f_{xx} = 2x, \quad f_{yy} = 1, \quad f_{xy} = 1.$$

Hessian u točki (x, y) jednak je

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 2x \cdot 1 - 1^2 = 2x - 1.$$

Za točku $(3, -3)$ imamo:

$$f_{xx} = 6 > 0, \quad D = 2 \cdot 3 - 1 = 5 > 0,$$

pa je $(3, -3)$ lokalni minimum. Za točku $(-2, 2)$ pak imamo

$$f_{xx} = -4 < 0, \quad D = 2 \cdot (-2) - 1 = -5 < 0,$$

pa je $(-2, 2)$ sedlasta točka. **Zaključak**: funkcija f ima lokalni minimum u točki $(3, -3)$ i sedlastu točku u $(-2, 2)$. ♣

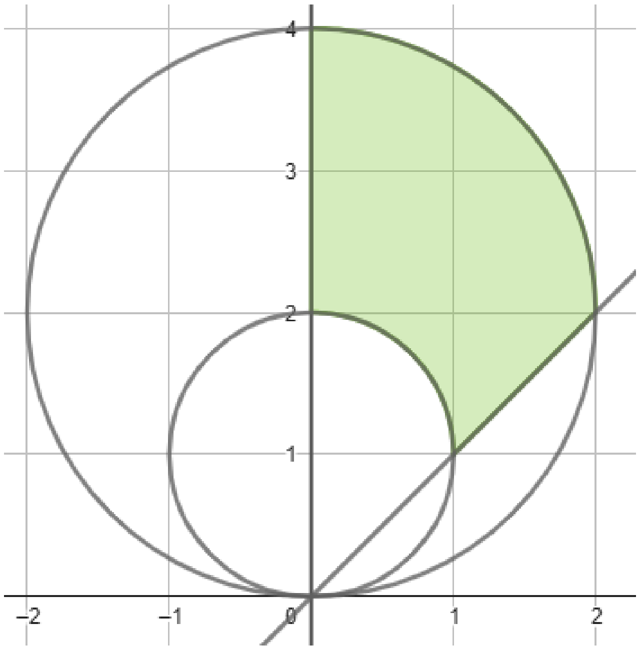
Zadatak 3 (20 bodova) Skicirajte područje omeđeno krivuljama $x^2 + y^2 = 4y$, $x^2 + y^2 = 2y$, $y = x$ i $x = 0$ i odredite površinu tog područja.

Rješenje. Imamo

$$x^2 + y^2 = 4y \iff x^2 + (y-2)^2 = 4,$$

$$x^2 + y^2 = 2y \iff x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Dakle, riječ je o kružnicama sa središtima u $(0, 2)$ i $(0, 1)$, s radijusima 2 i 1 pa trebamo izračunati površinu između njih omeđenu još pravcima $x = 0$ i $y = x$:



Prelazimo na polarne koordinate $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Jednadžbe kružnica postaju

$$x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow r^2 = 2r\sin\varphi \Rightarrow r = 2\sin\varphi,$$

$$x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow r^2 = 4r\sin\varphi \Rightarrow r = 4\sin\varphi.$$

Računamo površinu

$$\begin{aligned}
P &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} r\,dr\,d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}r^2\right]_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} d\varphi \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 6\sin^2\varphi\,d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 6\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi \\
&= 3\left[\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Dakle, površina zadanog lika iznosi $\boxed{\frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}}$. ♣

Zadatak 4 Zadano je vektorsko polje

$$\vec{a}(x,y,z) = \left(y\cos(xy) + yz, x\cos(xy) + xz, \frac{1}{z} + xy \right).$$

(a) (12 bodova) Pokažite da je polje $\vec{a}$ potencijalno i odredite njegov potencijal φ.

(b) (8 bodova) Izračunajte

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r},$$

pri čemu je $\vec{\Gamma}$ dužina od točke $A(1,1,1)$ prema točki $B(\pi,1,\pi)$.

Rješenje. (a) Računamo rotaciju vektorskog polja $\vec{a}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y\cos(xy) + yz & x\cos(xy) + xz & \frac{1}{z} + xy \end{vmatrix} \\
&= (x - x, -y + y, \cos(xy) - xy\sin(xy) + z - \cos(xy) + xy\sin(xy) - z) \\
&= (0,0,0).
\end{aligned}$$

Kako je $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$ slijedi da je vektorsko polje $\vec{a}$ potencijalno.

Sada tražimo funkciju φ takvu da vrijedi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y\cos(xy) + yz, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x\cos(xy) + xz, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{z} + xy. \tag{3}$$

Integriramo (1) po x:

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y,z) &= \int (y\cos(xy) + yz)\, dx = \int y\cos(xy)\, dx + \int yz\, dx \\
&= \sin(xy) + xyz + C(y,z).
\end{aligned}$$

Dobivenu jednadžbu deriviramo po y i uspoređujemo s (2):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x\cos(xy) + xz + \frac{\partial C}{\partial y} \implies \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \implies C = C(z).$$

Konačno, deriviramo po z i uspoređujemo s (3):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = xy + \frac{dC}{dz} \implies \frac{dC}{dz} = \frac{1}{z} \implies C(z) = \ln z + C.$$

Stoga je potencijal φ od $\vec{a}$ jednak

$$\varphi(x, y, z) = \sin(xy) + xyz + \ln z + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Za (b) dio imamo dva moguća pristupa:

(b1) Krivulju $\vec{\Gamma}$ parametriziramo sa $\vec{r}(t) = (t, 1, t)$, $t \in [1, \pi]$, čija je derivacija jednaka $\vec{r}'(t) = (1, 0, 1)$. Sada računamo integral

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r} &= \int_I \vec{a}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt \\
&= \int_1^\pi \vec{a}(t, 1, t) \cdot (1, 0, 1)\, dt \\
&= \int_1^\pi \left(\cos(t) + t, t\cos(t) + t^2, \frac{1}{t} + t\right) \cdot (1, 0, 1)\, dt \\
&= \int_1^\pi \cos t + 2t + \frac{1}{t}\, dt \\
&= \pi^2 + \ln\pi - 1 - \sin(1).
\end{aligned}$$

(b2) Računamo pomoću potencijala φ izračunatog u (a):

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r} &= \varphi(B) - \varphi(A) \\
&= \pi^2 + \ln\pi - \sin(1) - 1.
\end{aligned}$$

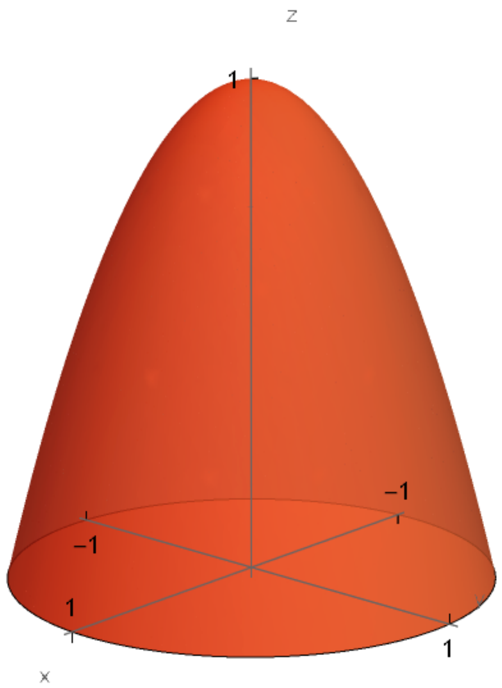
♣

Zadatak 5 (20 bodova) Odredite tok Φ vektorskog polja

$$\vec{a}(x,y,z) = xy^2\vec{i} + ze^x\vec{j} + zx^2\vec{k}$$

kroz zatvorenu plohu omeđenu paraboloidom $x^2+y^2+z=1$ i ravninom $z=0$. Skicirajte zadanu plohu.

Rješenje. Najprije skiciramo plohu



Volumen omeđen zadanom plohom najjednostavnije je opisati u cilindričnim koordinatama (ρ, φ, z). U cilindričnom koordinatnom sustavu imamo $\rho = x^2 + y^2$ pa jednadžba paraboloida $x^2+y^2+z=1$ prelazi u $z = 1-\rho^2$. Slijedi da je zatvoreni volumen opisan sa

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le z \le 1-\rho^2.$$

Računamo divergenciju polja $\vec{a}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{a} &= \frac{\partial\left(xy^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial(ze^x)}{\partial y} + \frac{\partial\left(zx^2\right)}{\partial z} \\
&= y^2 + 0 + x^2 \\
&= \rho^2.
\end{aligned}$$

Sada računamo tok Φ

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \iint_{\vec{\Sigma}} \vec{a}\, d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{a}\, dx\, dy\, dz \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\rho^2} \rho^2 \cdot \rho\, dz\, d\rho\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} dz \int_0^1 \rho^3 \int_0^{1-\rho^2} dz\, d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \rho^3 (1-\rho^2)\, d\rho \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}
$$

♣