

## MATEMATIKA III

25.2.2009.

1. Izračunajte temperaturu izoliranog štapa duljine  $l = 20$ , toplinskog kapaciteta  $\gamma = 12$  i koeficijenta provođenja  $\delta = 192$  ako je inicijalna distribucija topline dana s  $g(x) = \cos \pi x + \frac{3}{5}x + 3$ . Rubni uvjeti su:  $u(0, t) = 4$  i  $u(20, t) = 16$ .
2. a) Teška žica duljine  $l = 12$  napeta je horizontalno utegom mase  $M = 50$  na lijevom kraju i ima linjsku gustoću  $\rho = 50$ . Drugi kraj je slobodan. Pronađite ravnotežni položaj žice ako je koeficijent elastičnosti sredstva  $q = 0$ .  
b) Odredite ravnotežni oblik homogene kružne membrane radiusa  $R = 5$  napete s napetošću  $p = 5$  i površinske gustoće  $\rho = 10$  ako na membranu djeluje vanjska sila gustoće  $f(r) = r^2$  uz rubni uvjet  $u|_{r=5} = 2$ .
3. Metodom konačnih elemenata odredite numeričke vrijednosti ravnotežnog stanja žice:  
$$(\cos xu'(x))' + x - 1 = 0 \text{ na } [0, 4\pi], \quad h = \pi \text{ uz rubne uvjete } u(0) = u'(4\pi) = 0.$$
4. Metodom konačnih diferencija odredite numeričke vrijednosti oscilacija žice za prva četiri vremenska koraka:  
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ na } [0, 8] \text{ ako je } h = \tau = 2 \text{ uz rubne uvjete } u(0, t) = u(8, t) = 0,$$
$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 6 \\ -6x + 48, & 6 \leq x \leq 8. \end{cases}$$

i  $u(x, 0) = \sin \pi x$ .