2. KOLOKVIJ PRIMIJENJENA MATEMATIKA
FOURIEROVE TRANSFORMACIJE

1. Za periodičnu funkciju f(x) s periodom p=2L Fourierov red je
gdje su a_0,a_n, b_n Fourierovi koeficijenti od f(x)

----

gdje su

$a_0 =$, $a_n =$, $b_n =$.

2. Ako je funkcija f(x) parna onda se Fourierov red funkcije f(x) reducira na Fourierov kosinusni red

----

gdje su

, $a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx,$ $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx.$

3. Ako je funkcija f(x) neparna onda se Fourierov red funkcije f(x) reducira na Fourierov sinusni red

----

gdje su,

, $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx.$

4. Ako je zadana funkcija f(x) na segmentu $0 \leq x \leq L$ proširena po parnosti na $-L \leq x \leq L$ s periodom 2L onda proširenu funkciju možemo razviti u
Fourierov -------------- red.

5. Ako je zadana funkcija f(x) na segmentu $0 \leq x \leq L$ proširena po neparnosti na $-L \leq x \leq L$ s periodom 2L onda proširenu funkciju možemo razviti u
Fourierov ----------------- red.

6. Skup funkcija $\{\cos nx, \sin mx\}$ zove se trigonometrijski sustav. Osnovno svojstvo tih funkcija je ortogonalnost na intervalu duljine 2π:

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos m\pi\cos n\pi xdx = 0$, za $m \neq n, m, n \in N$;

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos m\pi\cos n\pi xdx =$ za $m = n \in N$.

7. Razvij funkciju f(x), s periodom $p = 2L = 4$ u Fourierov red:

$$f(x) = \{ \begin{array}{ll} 0 & , -2 < x < 0 \\ 2 & , 0 < x < 1. \end{array}$$

8. Razvij funkciju f(x), s periodom $p = 2L = 2$ u Fourierov red:

$$f(x) = \{ \begin{array}{ll} -1 & , -1 < x < 0 \\ 1 & , 0 < x < 1. \end{array}$$

9. Razvij funkciju f(x), s periodom $p = 2L = 2$ u Fourierov red:

$$f(x) = \{ \begin{array}{ll} 0 & , -1 < x < 0 \\ x & , 0 < x < 1. \end{array}$$

10. Razvij funkciju $f(x) = 1 - x^2$, za $-1 < x < 1$ u Fourierov red

11. Razvij funkciju $f(x) = x$, za $-\pi < x < \pi$ u Fourierov red

12. Razvij funkciju f(x), $0 \leq x \leq L$ u Fourierov kosinusni red:

$f(x) = \ x \quad , 0 < x < L$

13. Razvij funkciju f(x), $0 \leq x \leq L$ u Fourierov sinusni red:

$f(x) = \quad c \quad ,0 < x < L$

14. Razvij funkciju f(x), u Fourierov red:

$f(x) = \{ \begin{array}{ll} c & ,0 < x < \pi \\ -c & ,-\pi < x < 0. \end{array}$

15. Za parnu funkciju $f(x)$ kažemo da ima reprezentaciju pomoću Fourierovog kosinusnog integrala ako

$\boxed{f(x) = \int_0^\infty A(w) \cos wxdw}$,

gdje je $A(w) =$.

16. Neka je f(x) parna funkcija. Funkcija $\widehat{f_c}(w)$ definirana sa

$\widehat{f_c}(w) =$

zove se Fourierova kosinusna transformacija.

Proces dobivanja transformacije $\widehat{f_c}$ iz zadane funkcije f također se zove Fourierova kosinusna transformacija i označava $\mathcal{F}_c$, $\mathcal{F}_c\{f(x)\} = \widehat{f_c}(w)$.

17. Neka je $\widehat{f_c}(w)$ Fourierova kosinusna transormacija funkcije f(x).

Funkcija f(x) definirana sa

$f(x) =$

zove se inverzna Fourierova kosinusna transformacija.

18. Fourierova kosinusna transformacija definira se pomoću Fourirovog kosinusnog integrala:

U Fourierovom integralu $f(x) = \int_0^\infty A(w) \cos wxdw$ označimo

$A(w) =$

19. Nađite Fourierovu kosinusnu transformaciju $\widehat{f_c}(w)$ funkcije zadane funkcije f(x):

$f(x) = \{ \begin{array}{ll} c, & 0 < x < a \\ 0, & x > a. \end{array}$

20. Nađite Fourierovu kosinusnu transformaciju $\widehat{f_c}(w)$ funkcije zadane funkcije f(x):

$f(x) = exp(-x), 0 < x < \infty.$

21. Za neparnu funkciju$f(x)$ kažemo da ima reprezentaciju pomoću Fourierovog sinusnog integrala ako

$\boxed{f(x) = \int_0^\infty B(w) \sin wxdw}$,

gdje je $B(w) =$.

22. Neka je f(x) neparna funkcija. Funkcija $\widehat{f_s}(w)$ definirana sa

$\widehat{f_s}(w) =$

zove se Fourierova sinusna transformacija.

23. Neka je $\widehat{f_s}(w)$ Fourierova sinusna transormacija funkcije f(x).

Funkcija f(x) definirana sa

$f(x) =$

zove se inverzna Fourierova sinusna transformacija.

24. Fourierova sinusna transformacija definira se pomoću Fourirovog sinusnog integrala:

U Fourierovom sinusnom integralu $f(x) = \int_0^\infty B(w) \cos wxdw$ označimo $B(w) =$,

25. Nađite Fourierovu sinusnu transformaciju $\widehat{f}_s(w)$ funkcije zadane funkcije f(x):

$$f(x) = \{ \begin{array}{ll} c, & 0 < x < a \\ 0, & x > a. \end{array}$$

26. Nađite Fourierovu sinusnu transformaciju $\widehat{f}_s(w)$ funkcije zadane funkcije f(x):

$f(x) = exp(-x), 0 < x < \infty.$

27. Ako je f(x) ______________ integrabilna na $[0, \infty)$ i po dijelovima ________________ na svakom konačnom intervalu onda Fourierova kosinusna $\widehat{f}_c(w)$ i sinusna transformacija $\widehat{f}_s(w)$ funkcije f(x) postoje.

28. vrijedi svojsvo linearnosti

$\mathcal{F}_c\{af(x) + bg(x)\} =$

29. Neka je f(x) neprekidna i apsolutno integrabilna na [0,∞) i $lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Neka je$f\prime(x)$ po dijelovima neprekidna na svakom konačnom intervalu. Tada vrijedi

$\mathcal{F}_s\{f'(x)\} =$ __________ $\cdot\, \mathcal{F}_c\{f(x)\}.$

30. Pokažite da vrijedi

$\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0);$

31. Nađite Fourierovu kosinusnu transfomaciju funkcije $f(x) = exp(-ax), a > 0.$

32. Za funkciju f(x) kažemo da se može prikazati pomoću Fourierovog integrala u realnom obliku ako

$\boxed{f(x) = \int_0^\infty [A(w)\cos wx + B(w)\sin wx]dw}$,

gdje su $A(w) =$;

$B(w) =$.

33. Ako je f(x) neprekidna na svakom konačnom intervalu koja ima desnu i lijevu derivaciju u svakoj točki i ako postoji integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x|dx$ onda se f(x) može prikazati pomoću Fourirovog integrala (u realnom obliku).

U točkama prekida funkcije f(x) vrijednost Fourirovog integrala jednaka je

____

34. Za funkciju f(x) kažemo da se može prikazati pomoću Fourierovog integrala u kompleksnom obliku ako je

$f(x) =$

.Izvod kompleksnog oblika dobiva se iz _____________ oblika Fourirovog integrala.

35. Za zadanu funciju f(x), funkcija $\widehat{f}(w)$ definirana sa

$\widehat{f}(w) =$

zove se Fourierova transformacija. Proces dobivanja transformacije $\widehat{f}$ iz zadane funkcije f također se zove Fourierova transformacija i označava

$\mathcal{F}, \qquad f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(w), \qquad \mathcal{F}\{f(x)\} = \widehat{f}(w).$

36. Neka je $\widehat{f}(w)$ Fourierova transormacija funkcije f(x).

Funkcija f(x) definirana sa

$f(x) =$

zove se inverzna Fourierova transformacija.
37. Fourierova transformacija definira se pomoću
Fourierovog ________________________.
38. Nađite Fourierovu transformaciju $\widehat{f}(w)$ funkcije zadane funkcije f(x):

$f(x) = \{ \begin{matrix} c, & 0 < x < a \\ 0, & x > a. \end{matrix}$

39. Nađite Fourierovu transformaciju $\widehat{f}(w)$ funkcije zadane funkcije f(x):

$f(x) = exp(-ax^2)$, $a > 0$.
40. Ako je f(x) apsolutno integrabilna na $(-\infty, \infty)$ i
po dijelovima ________________ na svakom konačnom intervalu onda Fourierova transformacija $\widehat{f}(w)$ funkcije f(x) postoji.
41. svojstvo linearnosti
$\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} = a\mathcal{F}\{f(x)\} + b\mathcal{F}\{g(x)\} = a\widehat{f}(w) + b\widehat{g}(w)$.
42. Neka f(x) ima Fourierovu transformaciju.Tada vrijedi
$\boxed{\mathcal{F}\{f(x-a)\} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \cdot \mathcal{F}\{f(x)\}}$.
43. Neka je f(x) neprekidna na R i $lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Neka je f'(x) po dijelovima apsolutno integrabilna na R. Tada vrijedi
$\boxed{\mathcal{F}\{f'(x)\} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \cdot \mathcal{F}\{f(x)\}}$.
44. Pokažite da vrijedi
$\boxed{\mathcal{F}\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(x)\}}$.

45. Nađite Fourierovu transfomaciju funkcije $f(x) = x\exp(-x^2)$.
46. Nađite Fourierovu transfomaciju funkcije $f(x) = (x + a)\exp(-x^2)$.
47. Transformacija konvolucije funkcija
Neka su f(x) i g(x) po dijelovima neprekidne funkcije, ograničene i apsolutno integrabilne na R.
Tada knovolucija funkcija
$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)g(p)dp$
ima Fourierovu transformaciju
$\widehat{(f * g)}(x) = \sqrt{2\pi} \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad .$
i vrijedi
$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \exp(iwx)dw.$
48.Ako je početni ili rubni problem zadan na R_+ onda se mogu koristiti Fourierova kosinus ili sinus transformacija, a ako je problem zadan na cijelom R onda koristimo

________________________________.
49.Naći temperaturu u(x,t) u štapu konstantnog presjeka uz početne i rubne uvjete:
$u(x, 0) = f(x), -\infty < x < \infty$
Za svaki $t \geq 0, u(x,t) \to 0, \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \to 0, |x| \to \infty$.
Ideja: 1. korak: Primijeniti Fourierovu transformaciju u odnosu na varijablu x,
$\mathcal{F}\{u(x,t)\} = \widehat{u}(w,t)$,

2. korak: naći rješenje ODJ za $\widehat{u}(w,t)$ po varijabli t, koristeći Fourierovu transformaciju funkcije ____________________,

3. korak: naći _____________________________________ .

50.Ako je zadana

$\boxed{\text{PDJ } \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \text{ za funkciju } u(x,t)}$

onda običnu diferencijalnu jed. za $\widehat{u}(w,t)$ zapisujemo

$\boxed{\text{ODJ} \quad \frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(w,t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \cdot \widehat{u}(w,t)}$

Rješenje ODJ za funkciju $\widehat{u}(w,t)$ po varijabli t je (separacija varijabli) je

$\boxed{\widehat{u}(w,t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \cdot \exp(-c^2w^2t)}$.

Inverzna Fourierova transformacija od $\widehat{u}(w,t)$ je $u(x,t)$:

$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{u}(w,t)\cdot\exp(iwx)dw}$.

$\boxed{\text{Rješenje PDJ } u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \cdot \exp[-\frac{(x-p)^2}{4c^2t}]dp}$.

51. Naći progib $u(x,t)$ beskonačne žice, $-\infty < x < \infty$, koja poprečno oscilira uz početne i rubne uvjete:

$u(x,0) = f(x)$,početni progib,

$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0$, početna brzina

Za svaki $t \geq 0, u(x,t) \to 0, \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \to 0, |x| \to \infty$.

Ideja:

1. korak: Primijeniti Fourierovu transformaciju u odnosu na varijablu x,

$\mathcal{F}\{u(x,t)\} = \widehat{u}(w,t)$,

2. korak: naći rješenje ODJ za $\widehat{u}(w,t)$ po varijabli t, koristeći Fourierovu transformaciju funkcije ___________,

3. korak: naći _____________________________ .

52. Ako je zadana

$\boxed{\text{PDJ } \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \text{ za funkciju } u(x,t)}$

onda običnu diferencijalnu jednadžbu za $\widehat{u}(w,t)$ zapisujemo

$\boxed{\text{ODJ} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\widehat{u}(w,t) + c^2w^2\widehat{u}(w,t) = 0 \text{ za Fouierovu transformaciju } \widehat{u}(w,t).}$

Rješenje obične diferncijalne jed. za $\widehat{u}(w,t)$ je

$\boxed{\widehat{u}(w,t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \cdot \cos(cwt)}$,

gdje je $\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \cdot \exp(-iwx)dx$.

Inverzna Fourierova transformacija od $\widehat{u}(w,t)$ je $u(x,t)$:

Rješenje PDJ $u(x,t) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2}$.