Diskretne slučajne varijable

Slučajne varijable

- Slučajne varijable su funkcije definirane na vjerojatnosnom prostoru.

Definicija 1

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor.* Slučajna varijabla *je funkcija*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

- Za razliku od "klasičnih" funkcija, slučajnim varijablama ne možemo odrediti (izračunati) vrijednost.
- Jedino što možemo izračunati je vjerojatnost da slučajna varijabla poprima neku određenu vrijednost ili da je njena vrijednost u nekom skupu.

Slučajne varijable - podjela

Slučajne varijable obzirom na njihovu sliku $R(X)$ dijelimo na:

(i) **diskretne** - slika $R(X)$ je konačan ili prebrojiv skup (npr. broj automobila, broj ljudi, $\ldots$)

(ii) **neprekidne** - slika $R(X)$ je neprebrojiv skup (npr. količina vode, vrijeme, $\ldots$).

Slika $R(X)$ je skup svih vrijednosti koje slučajna varijabla X može poprimiti.

Diskretne slučajne varijable

Diskretne slučajne varijable - primjeri

Primjer (3.1)

Promatramo pokus bacanja simetrične kocke.

Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definirana s $X =$ “broj koji je pao na kocki”.
Imamo

$$R(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{i} \quad X(i) = i, \quad i = 1, \ldots, 6.$$

Uočimo da je npr. $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{6}$.

Diskretne slučajne varijable - primjeri

Primjer (3.2)

Promatramo pokus bacanja simetrične kocke. Zanima nas vjerojatnost događaja "pao je paran broj".
Neka je $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ definirana s

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{pao je paran broj} \\ 0, & \text{pao je neparan broj.} \end{cases}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} R(Y) &= \{0, 1\} \\ Y(2) &= Y(4) = Y(6) = 1 \\ Y(1) &= Y(3) = Y(5) = 0 \end{aligned}$$

$$\implies \mathbb{P}(\text{"pao je paran broj"}) = \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}$$

Primjer (3.3)

Promatramo pokus bacanja dvije simetrične kocke.

Neka je $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ definirana s $Z =$ "veći od brojeva koji je pao".
Dakle,

$$\begin{aligned} R(Z) &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ Z(i,j) &= \max\{i,j\}, \quad i,j = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

Uočimo da je npr.

$$\mathbb{P}(Z = 2) = \mathbb{P}(\{(1,2),(2,1),(2,2)\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Raspodjela od X

Svaka diskretna slučajna varijabla u potpunosti određena:

- svojom slikom $R(X) = \{x_1, x_2, \dots\}$
- brojevima $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ za $x_i \in R(X)$.

Diskretnu slučajnu varijablu najčešće zapisujemo tablično kao

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Tu tablicu nazivamo **raspodjela** (ili distribucija) od X.
Jasno je da je

$$\sum_{x_i \in R(x)} p_i = \sum_{x_i \in R(x)} \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(X \in R(X)) = 1.$$

Raspodjela od X

Iz prethodnih primjera imamo

- Primjer 3.1:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

- Primjer 3.2:

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Primjer 3.3:

$$Z \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}$$

Primjeri

Pomoću slučajnih varijabli možemo opisati sve događaje vezane za određeni slučajni pokus.

- Kolika je vjerojatnost da je prilikom bacanja jedne kocke pao broj manji od 3?

$$\mathbb{P}(X < 3) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = p_1 + p_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

- Kolika je vjerojatnost da je prilikom bacanja jedne kocke pao neparan broj?

$$\mathbb{P}(Y = 0) = p_1 = \frac{1}{2}.$$

Primjeri - nastavak

- Kolika je vjerojatnost da je prilikom bacanja dvije kocke veći od brojeva koji je pao je veći ili jednak 4?

$$\mathbb{P}(Z \geqslant 4) = \mathbb{P}(Z = 4) + \mathbb{P}(Z = 5) + \mathbb{P}(Z = 6) = p_4 + p_5 + p_6 = \frac{27}{36}.$$

Funkcija vjerojatnosti

Diskretnu slučajnu varijablu možemo zadati i pomoću funkcija vjerojatnosti i raspodjele.
Neka je

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Definicija 2

Funkcija vjerojatnosti *od* X *je funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dana s*

$$f(x) = \begin{cases} p_i, & x = x_i \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Funkcija raspodjele

Definicija 3

Funkcija raspodjele *od* X *je funkcija* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dana s*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x).$$

Svojstva funkcije raspodjele:

(i) $F(-\infty) = 0$ i $F(\infty) = 1$

(ii) F je neopadajuća funkcija

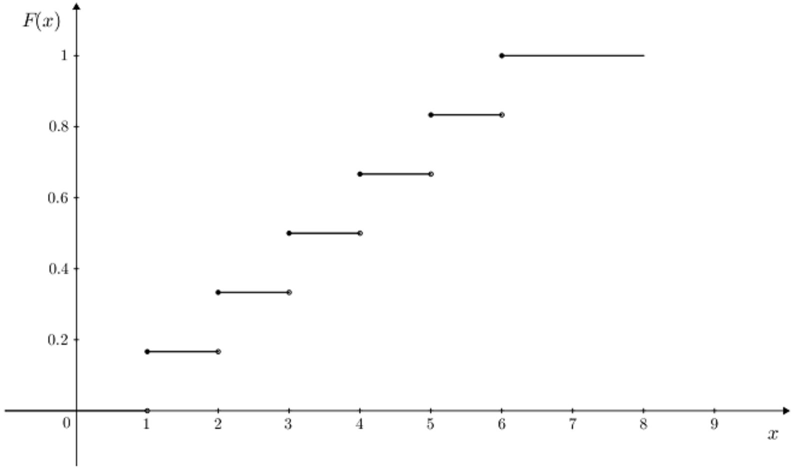
(iii) $F(x) = \sum_{x_i \in R(X), x_i \leqslant x} f(x) = \sum_{x_i \in R(X), x_i \leqslant x} p_i$

(iv) $f(x_i) = p_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$.

Iz funkcije raspodjele izravno možemo iščitati $R(X)$ i p_i.

Graf funkcije raspodjele

Funkcija $F(x)$ ima skokove u točkama x_i za visinu p_i.
U Primjeru 3.1 bacanja simetrične kocke imamo



Karakteristike slučajne varijable

Svakoj slučajnoj varijabli možemo pridružiti neke determinističke karakteristike koje ju opisuju.
Najvažnije su:

(i) očekivanje (srednja vrijednost)

(ii) standardna devijacija i

(iii) varijanca (raspršenje slučajne varijable oko njenog očekivanja).

Očekivanje

Neka je

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Očekivanje od X, u oznaci $\mathbb{E}(X)$, je broj definiran s

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x_i \in R(X)} x_i \cdot p_i.$$

$\mathbb{E}(X)$ možemo interpretirati kao srednju vrijednost slučajne varijable X!

Svojstva očekivanja

Svojstva očekivanja:

(i) $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

(ii) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

Svojstvo (i) i (ii) zajedno nazivamo **linearnost očekivanja**.

Varijanca

Varijanca od X, u oznaci $\mathrm{Var}(X)$, broj je definiran s

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \sum_{x_i \in R(X)} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \cdot p_i.$$

Uočimo da vrijedi

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{x_i \in R(X)} x_i^2 \cdot p_i - \mathbb{E}(X)^2.$$

$\mathrm{Var}(X)$ mjeri kvadratnu prosječnu udaljenost (raspršenje) slučajne varijble X od $\mathbb{E}(X)$!

Svojstva varijance

Svojstva varijance:

(i) $\mathrm{Var}(\lambda X) = \lambda^2 \mathrm{Var}(X), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

(ii) $\mathrm{Var}(X + \lambda) = \mathrm{Var}(X), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

Npr.

$$\mathrm{Var}(3X + 2) = \mathrm{Var}(3X) = 9 \, \mathrm{Var}(X).$$

Standardna devijacija

Standardna devijacija od X, u oznaci $\sigma(X)$, broj je dan formulom

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

- Standardna devijacija mjeri linearnu prosječnu udaljenost (raspršenje) od prosjeka ($\mathbb{E}(X)$).
- Mali $\sigma(X)$ znači da je većina vrijednosti od X grupirana oko $\mathbb{E}(X)$, a veliki $\sigma(X)$ znači da su vrijednosti od X razvučene preko većeg raspona.

Primjer (3.5)

U Primjeru 3.1 imamo

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= (1-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (4-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &\quad + (5-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (6-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &= 2.91 \\ \sigma(X) &= 1.7. \end{aligned}$$

Interpretacija broja $\mathbb{E}(X) = 3.5$ je da će u npr. 10 bacanja suma brojeva koji su pali u prosjeku biti 35.

Primjer (2.8)

Bacamo simetričan novčić. Dakle,

$$\Omega = \{P, G\}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) \quad \text{i} \quad \mathbb{P}(\{P\}) = \mathbb{P}(\{G\}) = \frac{1}{2}.$$

Definirajmo slučajnu varijablu $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ s $X(P) = -1$ i $X(G) = 1$, pa imamo

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

X možemo interpretirati kao igru u kojoj gubimo kunu ako padne pismo i dobivamo kunu ako padne glava. Očito je

$$\mathbb{E}(X) = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Dakle, nakon npr. 100 bacanja u prosjeku imamo 50 pobjeda i 50 poraza. Stoga možemo reći da je igra “poštena”.

Diskretne slučajne varijable imaju i sljedeća svojstva:

(1) ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka funkcija i

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix},$$

onda je $f(X)$ diskretna slučajna varijabla definirana na istom vjerojatnosnom prostoru kao i X te vrijedi

$$f(X) \sim \begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Iz svojstva (1) slijedi:

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x_i \in R(X)} f(x_i)p_i$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(f(X)) &= \sum_{x_i \in R(X)} (f(x_i) - \mathbb{E}(f(X)))^2 p_i \\ &= \sum_{x_i \in R(X)} f(x_i)^2 p_i - \mathbb{E}(f(X))^2.\end{aligned}$$

(2) ako su X i Y dvije diskretne slučajne varijable definirane na istom vjerojatnosnom prostoru, sa slikama

$$R(X) = \{x_1, x_2, \dots\} \quad \text{i} \quad R(Y) = \{y_1, y_2, \dots\},$$

onda je $X + Y$ diskretna slučajna varijabla definirana na istom vjerojatnosnom prostoru kao X i Y te vrijedi

$$R(X+Y) \subseteq \{x_i + y_j : x_i \in R(X),\ y_j \in R(Y)\}$$
$$\mathbb{P}(X+Y = z_k) = \sum_{\substack{x_i \in R(X),\, y_j \in R(Y) \\ x_i + y_j = z_k}} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

Primjer (3.10)

Neka je

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Odredimo funkciju vjerojatnosti slučajnih varijabli $2X + 1$ i X^2.
Imamo

$$2X + 1 \sim \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 1 & 2 \cdot 0 + 1 & 2 \cdot 1 + 1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$