Poglavlje 3
Geometrijska definicija vjerojatnosti

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ izmjeriv i ograničen skup. Za $A \in \mathcal{F}$ označimo s $\mu(A)$ površinu skupa A, a s $\mu(\Omega)$ površinu skupa Ω. Tada je

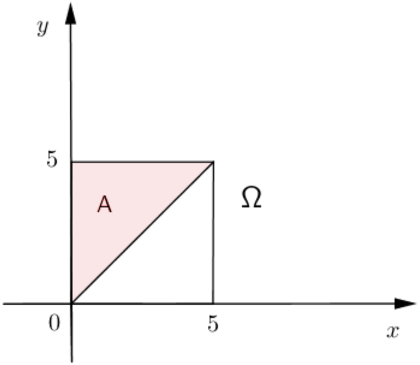
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

vjerojatnost da smo slučajnim odabirom točke iz prostora Ω odabrali upravo točku iz izmjerivog skupa A.

Zadatak (3.1.)

Nasumce biramo točku iz kvadrata $\Omega = [0,5] \times [0,5]$. Kolika je vjerojatnost da ćemo odabrati točku iz skupa
$A = \{(x,y) \in \Omega : 0 \leq x, y \leq 5 \text{ i } x \leq y\}$?

Rješenje:



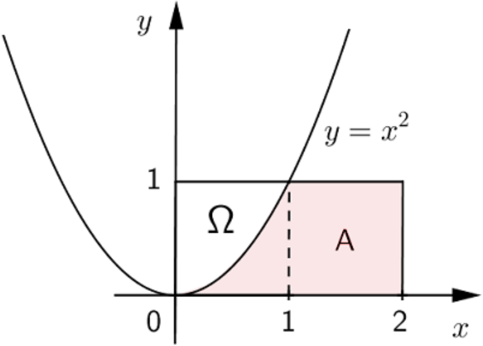
Budući da je $\Omega = [0,5] \times [0,5]$, njegova površina iznosi $\mu(\Omega) = 5^2 = 25$.

Površina skupa A sa slike je jednaka $\mu(A) = \frac{5^2}{2} = \frac{25}{2}$.
Vjerojatnost da smo odabrali točku iz skupa A iznosi
$\mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\frac{25}{2}}{25} = \frac{1}{2}$.

Zadatak (3.2.)

Iglom gađamo pravokutnik $\Omega = [0,2] \times [0,1]$ cm^2. Kolika je vjerojatnost da pogodimo točku $T(x,y)$ unutar zadanog pravokutnika takvu da je $y \leq x^2$?

Rješenje:

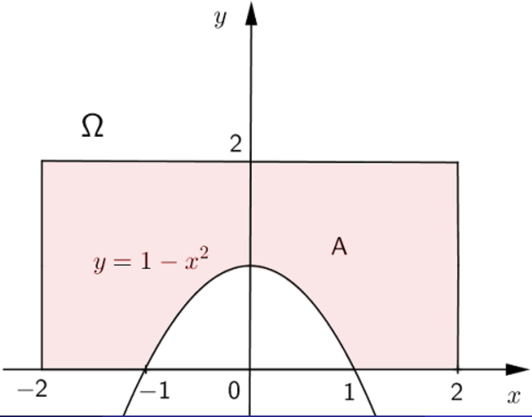


Površina pravokutnika $\Omega = [0,2] \times [0,1]$ iznosi $\mu(\Omega) = 2$.
Površina skupa A na slici je jednaka
$\mu(A) = \int_0^1 x^2\,dx + 1 = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.
Prema tome, vjerojatnost da smo pogodili točku iz skupa A iznosi
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}.$$

Zadatak (3.4.)

Nasumce biramo točku iz pravokutnika $\Omega = [-2, 2] \times [0, 2]$. Kolika je vjerojatnost da ćemo odabrati točku iz skupa $A = \{(x, y) \in \Omega : y \geq 1 - x^2\}$?

Rješenje:



Pravokutnik $\Omega = [-2, 2] \times [0, 2]$ ima površinu $\mu(\Omega) = 4 \cdot 2 = 8$.

Površina skupa A iznosi

$$\mu(A) = 8 - \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = 8 - (x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^{1} = 8 - \frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{20}{3}.$$

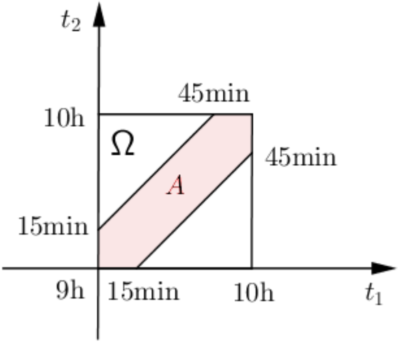
Dakle, vjerojatnost da ćemo odabrati točku iz skupa A je jednaka

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\frac{20}{3}}{8} = \frac{5}{6}.$$

Zadatak (3.5.)

Dvije osobe dogovore se da će na određeno mjesto doći između 9 i 10 sati i da će se svaka tamo zadržati 15 minuta ali ne nakon 10 sati. Kolika je vjerojatnost da će se te dvije osobe susresti ako pretpostavimo da su momenti njihovih dolazaka nasumce odabrani momenti vremena između 9 i 10 sati?

Rješenje: Uvedimo sljedeće oznake:
$A \ldots$ osobe će se susresti,
$t_1 \ldots$ trenutak kada je došla osoba 1,
$t_2 \ldots$ trenutak kada je došla osoba 2,
$\Omega = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : 9\text{h} \leq t_1, t_2 \leq 10\text{h}\}$ i
$A = \{(t_1, t_2) \in \Omega : |t_1 - t_2| \leq 15 min\}$.

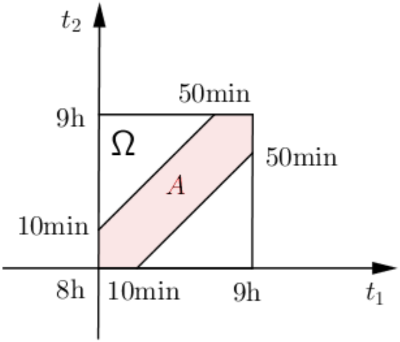


Površine skupova Ω i A iznose redom
$\mu(\Omega) = 60^2 = 3600$ i $\mu(A) = 60^2 - 45^2 = 1575$.
Vjerojatnost da će se osobe susresti je jednaka
$\mathbb{P}(A) = \dfrac{1575}{3600} = \dfrac{7}{16}$.

Zadatak (3.6.)

Dva vlaka stižu na stanicu između 8 i 9 sati. Svaki se zadrži na stanici 10 minuta ali ne poslije 9 sati. Kolika je vjerojatnost da će se vlakovi susresti?

Rješenje: Uvedimo sljedeće oznake:
$A \ldots$ vlakovi će se susresti,
$t_1 \ldots$ trenutak kada je došao vlak 1,
$t_2 \ldots$ trenutak kada je došao vlak 2,
$\Omega = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : 8\text{h} \leq t_1, t_2 \leq 9\text{h}\}$ i
$A = \{(t_1, t_2) \in \Omega : |t_1 - t_2| \leq 10 min\}$.



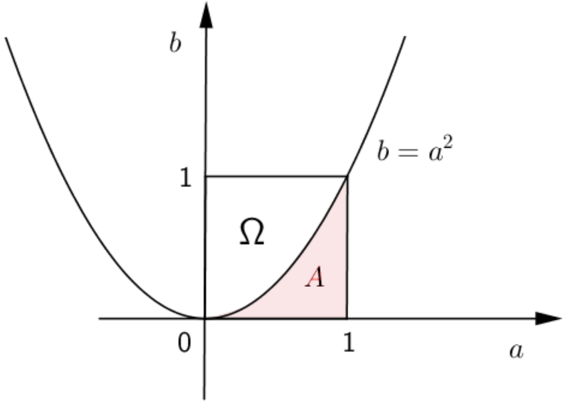
Površine skupova Ω i A su jednake
$\mu(\Omega) = 60^2 = 3600$ i $\mu(A) = 60^2 - 50^2 = 1100$.
Vjerojatnost da će se vlakovi susresti iznosi

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1100}{3600} = \frac{11}{36}.$$

Zadatak (3.9.)

Koeficijenti a i b jednadžbe $x^2 + 2ax + b = 0$ biraju se slučajno i nezavisno iz segmenta $[0, 1]$. Kolika je vjerojatnost da će navedena jednadžba imati realna rješenja?

Rješenje:



Jednadžba $x^2 + 2ax + b = 0$ ima realna rješenja ako je $D = (2a)^2 - 4b \geq 0$, tj. ako vrijedi $a^2 - b \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq b$.

Prostor elementarnih događaja $\Omega = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a, b \leq 1\}$ ima površinu $\mu(\Omega) = 1^2 = 1$.

Događaj $A \ldots$ "jednadžba ima realna rješenja" možemo zapisati u obliku $A = \{(a, b) \in \Omega : a^2 \geq b\}$.

Površina skupa A iznosi

$$\mu(A) = \int_0^1 a^2 da = \frac{a^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

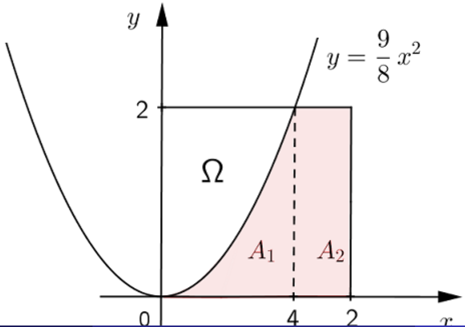
Prema tome, vjerojatnost da promatrana jednadžbe ima realna rješenja je jednaka $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$.

Domaća zadaća

Zadatak (3.3.)

Biramo nasumce točke iz kvadrata $\Omega = [0,2] \times [0,2]$. Kolika je vjerojatnost da ćemo odabrati točku iz skupa
$A = \{(x,y) \in \Omega : 0 \leq x, y \leq 2 \text{ i } y \leq \frac{9}{8}x^2\}$?

Rješenje:



Površina kvadrata $\Omega = [0,2] \times [0,2]$ je jednaka $\mu(\Omega) = 2^2 = 4$.
Površina skupa A iznosi

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = \int_0^{\frac{4}{3}} \frac{9}{8}x^2\,dx + (2 - \frac{4}{3}) \cdot 2 = \frac{9}{8} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{3} =$$

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{4^3}{3^3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{9} + \frac{4}{3} = \frac{20}{9}.$$

Vjerojatnost da ćemo odabrati točku iz skupa A je jednaka

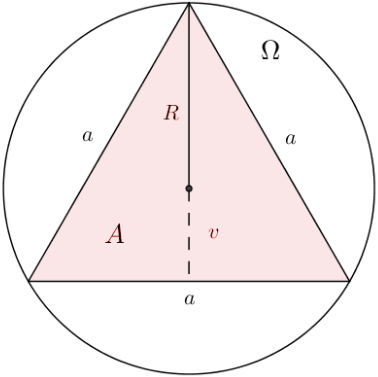
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\frac{20}{9}}{4} = \frac{5}{9}.$$

Domaća zadaća

Zadatak (3.7.)

Unutar kruga radijusa R slučajno je odabrana točka. Nađite vjerojatnost da ta točka bude u jednakostraničnom trokutu stranice a upisanom u navedeni krug.

Rješenje:



Domaća zadaća

Za jednakostranični trokut upisan u krug vrijedi sljedeća relacija
$R = \frac{2}{3}v = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$. Prema tome, $\sqrt{3}R = a$.
Uvedimo oznake

$\Omega \ldots$ skup svih točaka kruga radijusa R i

$A \ldots$ sve točke upisanog jednakostraničnog trokuta.

Njihove površine su redom $\mu(\Omega) = R^2\pi$ i

$$\mu(A) = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{a \cdot \frac{3}{2}R}{2} = \frac{\sqrt{3}R \cdot 3R}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

Vjerojatnost da ćemo odabrati točku iz jednakostraničnog trokuta iznosi

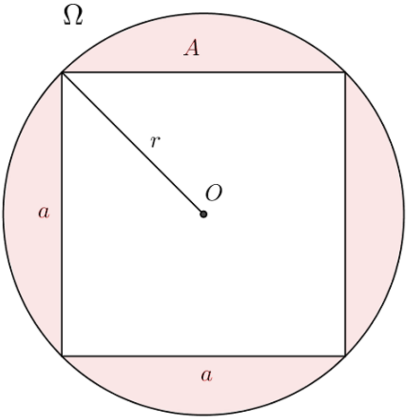
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}}{R^2\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} = 0.4135.$$

Domaća zadaća

Zadatak (3.8.)

U krug radijusa $r = 2$ upisan je kvadrat. Kolika je vjerojatnost da ćemo birajući nasumce točke iz kruga odabrati točku izvan kvadrata?

Rješenje:



Domaća zadaća

Označimo sa
$\Omega \ldots$ krug radijusa $r = 2$ i sa
$A \ldots$ točke unutar kruga, a izvan upisanog kvadrata.
Ako sa a označimo stranicu upisanog kvadrata, tada po Pitagorinom poučku znamo da vrijedi

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = r^2,$$

iz čega dolazimo do $a^2 = 8$.
Površine kruga i skupa A su jednake
$\mu(\Omega) = 4\pi$ i
$\mu(A) = 4\pi - 8$.
Vjerojatnost da smo odabrali točke izvan kvadrata iznosi
$\mathbb{P}(A) = \frac{4\pi - 8}{4\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}$.