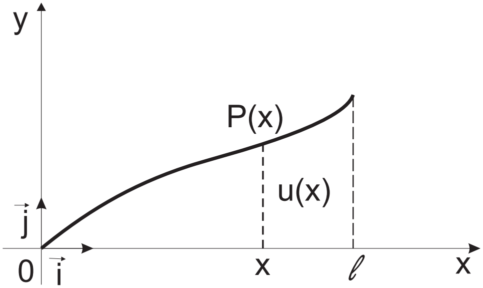
Ravnoteža žice

Neka je $[0, l]$ nedeformirani položaj žice na osi x.
Pod utjecajem vanjske sile žica se deformira.



Mi želimo izračunati veličinu $u(x)$ koja mjeri poprečni pomak žice (progib).
Pretpostavljamo da su deformacije male, tj. da je $|u'(x)| << 1$ ($u'(x)$ je mjera deformacije žice u točki x).
Uz pomoć zakona ravnoteže, Newtonovih zakona i fizičkih karakteristika žice izvodimo jednadžbu ravnoteže žice.

Jednadžba ravnoteže žice

Ravnotežni položaj žice $[0, l]$ opisan je običnom diferencijalnom jednadžbom 2. reda:

$$-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0, l].$$

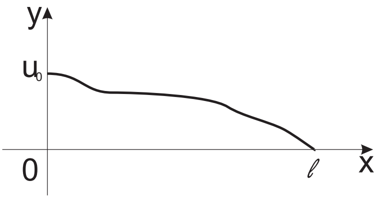
- $u(x) =$ progib žice u točki x
- $p(x) =$ napetost žice u točki x
- $f(x) =$ linijska gustoća vanjske sile koja djeluje na žicu u točki x (pritom mislimo na y komponentu sile)
- $q(x) =$koeficijent elastičnosti sredstva u kojem se nalazi žica (ukoliko koeficijent elastičnosti nije zadan, smatra se da žica nije uronjena u elastično sredstvo, tj. da je $q(x) = 0$)

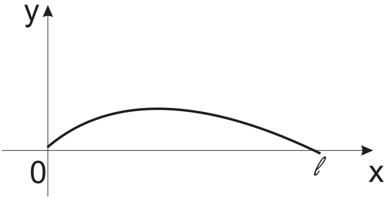
Rubni uvjeti

Za jedinstvenost rješenja jednadžbe ravnoteže žice trebaju nam rubni uvjeti.
Postoje:

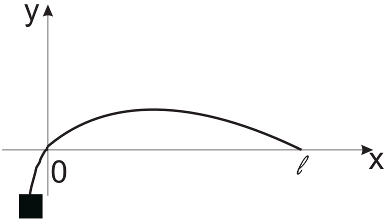
(1) **Dirichletovi** rubni uvjeti (ili **geometrijski**)
- na kraju $x = 0$ (ili $x = l$) zadan je progib, tj. $u(0) = u_0$ (ili $u(l) = u_l$)
- poprečna sila je zadana neizravno, kao reakcija fiksiranog položaja

(2) **Neumannovi** rubni uvjeti (ili **prirodni**)
- izravno je zadana poprečna sila
- na kraju $x = 0$ (ili $x = l$) zadajemo mjeru deformacije, tj. $u'(0) = u_0$ (ili $u'(l) = u_l$)

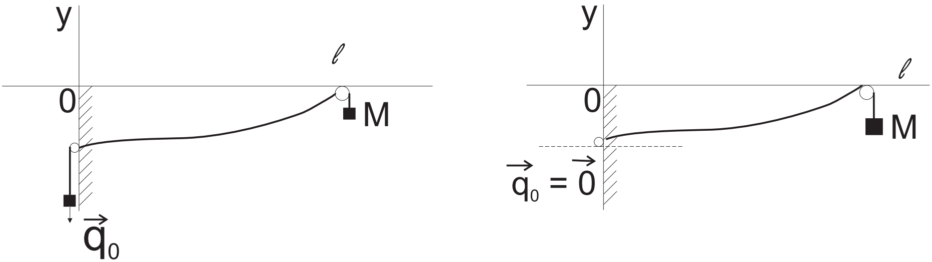




Za $u(0) = 0$ (ili $u(l){=}0$) imamo **učvršćen/pričvršćen** kraj.
To se praktično realizira vješanjem utega.



Neumannovi rubni uvjeti

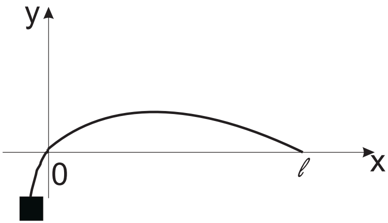


Na slici je lijevi rubni uvjet Neumannov, a desni Dirichletov.

Ako je $u'(0) = 0$ ($u'(l) = 0$) kažemo da je kraj **slobodan**.
U tom slučaju je poprečna sila jednaka nuli (desna slika).

Žica napeta utegom

Promotrimo homogenu žicu $[0, l]$ za koju je pričvršćen uteg mase M na lijevom kraju. Neka je m masa žice ($m << M$).



- napetost žice je $p(x) = Mg$
- vanjska sila je $f(x) = -\rho g$, pri čemu je g konstanta gravitacije, a $\rho = \frac{m}{l}$ je linijska gustoća žice
- u lijevom kraju žice imamo $u(0) = 0$, tj. lijevi kraj žice je pričvršćen
- desni kraj može biti pričvršćen, $u(l) = 0$, ili slobodan, $u'(l) = 0$

Zadatak (1.)

Homogena teška žica mase $m = 2$ i duljine $l = 1$ napeta je horizontalno utegom mase $M = 15$ na kraju $x = 0$. Odredite ravnotežni oblik žice ako je njezin:

(a) desni kraj pričvršćen,

(b) desni kraj slobodan.

Za konstantu gravitacije uzmite $g = 10$.

Rješenje: Nemamo otpor elastičnog sredstva, tj. $q(x) = 0$.
Rješavamo diferencijalnu jednadžbu:

$$-(p(x)u'(x))' = f(x).$$

Vanjska sila koja djeluje na žicu je sila gravitacije

$$f(x) = -\frac{m}{l}g = -\rho g, \quad \rho = \frac{m}{l} \quad \text{je linijska gustoća žice,}$$

a napetost žice je dana s $p(x) = Mg$.

Dakle, rješavamo jednadžbu

$$-Mgu''(x) = -\rho g \quad \Longrightarrow \quad u''(x) = \frac{\rho}{M}.$$

Za konkretne podatke imamo

$$u''(x) = \frac{2}{15}.$$

Nakon što integriramo lijevu i desnu stranu po x, dobijemo

$$u'(x) = \frac{2}{15}x + C_1.$$

Još jedna integracija po x daje funkciju progiba žice,

$$u(x) = \frac{1}{15}x^2 + C_1 x + C_2.$$

Konstante C_1 i C_2 određujemo iz rubnih uvjeta na sljedeći način:

(a) $u(0) = 0$ (lijevi kraj žice je pričvršćen) $\implies C_2 = 0$
$u(1) = 0$ (desni kraj žice je pričvršćen) $\implies C_1 = -\frac{1}{15}$.
U slučaju kada su oba kraja žice pričvršćena, ravnotežni oblik žice je

$$u(x) = \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{15}x, \quad x \in [0, 1].$$

(a) $u(0) = 0 \implies C_2 = 0$
$u'(1) = 0$ (desni kraj žice je slobodan) $\implies C_1 = -\frac{2}{15}$
Dakle, progib žice u ravnotežnom položaju opisan je funkcijom

$$u(x) = \frac{1}{15}x^2 - \frac{2}{15}x, \quad x \in [0, 1].$$

Zadatak (3.)

Teška homogena žica duljine $l = 2$ i mase $m = 4$ napeta je horizontalno utegom mase $M = 12$ na lijevom kraju i nalazi se u homogenom sredstvu s koeficijentom elastičnosti $q(x) = b = 4$. Odredite ravnotežni oblik žice ako je njezin drugi kraj slobodan.

Rješenje: Budući da je opet $p(x) = Mg$ i $f(x) = -\frac{mg}{l}$, rješavamo jednadžbu ravnoteže žice

$$-Mgu''(x) + bu(x) = -\frac{m}{l}g.$$

Konkretno, uz $g = 10$, jednadžba ravnoteže ima oblik

$$-120u''(x) + 4u(x) = -20, \text{ tj.}$$

$$u''(x) - \frac{1}{30}u(x) = \frac{1}{6}.$$

Gornja jednadžba je linearna obična diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima, pa je

$$u(x) = u_H(x) + u_P(x).$$

- Homogeno rješenje, $u_H(x)$:
  Tražimo rješenja pripadne karakteristične jednadžbe

  $$\lambda^2 - \frac{1}{30} = 0.$$

  Rješenja su $\lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{30}}$ i $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}$, tako da je

  $$u_H(x) = C_1 e^{-\frac{1}{\sqrt{30}}x} + C_2 e^{\frac{1}{\sqrt{30}}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- Partikularno rješenje, $u_P(x)$:
  Desna strana diferencijalne jednadžbe je jednaka konstanti, pa možemo pretpostaviti da je $u_P(x) = A$.
  Uvrštavanjem partikularnog rješenja u_P u diferencijalnu jednadžbu

  $$u_P''(x) - \frac{1}{30} u_P(x) = \frac{1}{6}$$

  dobijemo $A = -5$ jer je $u_P'(x) = u_P''(x) = 0$.

Prema tome, opće rješenje jednadžbe ravnoteže jest

$$u(x) = u_H(x) + u_P(x) = C_1 e^{-\frac{1}{\sqrt{30}}x} + C_2 e^{\frac{1}{\sqrt{30}}x} - 5, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Konstante C_1 i C_2 određujemo iz rubnih uvjeta.

Iz $u(0) = 0$ (lijevi kraj žice je pričvršćen) i $u'(2) = 0$ (desni kraj žice je slobodan) dobijemo sustav jednadžbi s nepoznanicama C_1 i C_2:

$$C_1 + C_2 = 5,$$

$$-\frac{1}{\sqrt{30}} e^{-\frac{2}{\sqrt{30}}} C_1 + \frac{1}{\sqrt{30}} e^{\frac{2}{\sqrt{30}}} C_2 = 0,$$

budući da je

$$u'(x) = -\frac{1}{\sqrt{30}} C_1 e^{-\frac{1}{\sqrt{30}}x} + \frac{1}{\sqrt{30}} C_2 e^{\frac{1}{\sqrt{30}}x}.$$

Uvrštavanjem izraza $C_2 = 5 - C_1$ dobivenog iz prve jednadžbe u drugu jednadžbu, dobijemo rješenje sustava

$$C_1 = \frac{5}{e^{-\frac{4}{\sqrt{30}}} + 1},$$

$$C_2 = 5 - \frac{5}{e^{-\frac{4}{\sqrt{30}}} + 1}.$$

Zadatak (5.)

Teška žica sastavljena je od dva homogena materijala na $[0,2]$ i $(2,5]$ s linijskim gustoćama $\rho_1 = 2$ i $\rho_2 = 3$ redom. Odredite ravnotežni položaj žice napete horizontalno utegom mase $M = 20$ na desnom kraju, dok je drugi kraj žice slobodan.

Rješenje: Otpor sredstva nije zadan pa ga smatramo zanemarivim, tj. $q(x) = 0$.
Budući da se žica sastoji od dva različita materijala rješavamo dvije jednadžbe:

$$-Mgu''(x) = -\rho_1 g, \quad x \in [0,2] \text{ i}$$
$$-Mgu''(x) = -\rho_2 g, \quad x \in (2,5].$$

Prema tome, rješavamo jednadžbe

$$-200u''(x) = -20 \quad \Longrightarrow \quad u''(x) = \frac{1}{10}, \quad x \in [0,2] \quad \text{i}$$

$$-200u''(x) = -30 \quad \Longrightarrow \quad u''(x) = \frac{3}{20}, \quad x \in (2,5].$$

Iz prve jednadžbe na $[0,2]$ dobivamo $u'(x) = \frac{1}{10}x + C_1$ i odatle

$$u(x) = \frac{1}{20}x^2 + C_1 x + C_2, \quad x \in [0,2].$$

Jednadžba na $(2,5]$ daje $u'(x) = \frac{3}{20}x + D_1$ i odatle

$$u(x) = \frac{3}{40}x^2 + D_1 x + D_2, \quad x \in (2,5].$$

Iz $u'(0) = 0$ (lijevi kraj žice je slobodan) slijedi $C_1 = 0$.
Rubni uvjet $u(5) = 0$ (desni kraj pričvršćen) nam daje
$D_2 = -5D_1 - \frac{15}{8}$.
Prema tome,

$$u(x) = \frac{1}{20}x^2 + C_2, \quad x \in [0,2] \text{ i}$$

$$u(x) = \frac{3}{40}x^2 + D_1 x - 5D_1 - \frac{15}{8}, \quad \in (2,5].$$

Konstante C_2 i D_1 odredimo tako da iskoristimo dva prirodna uvjeta

- neprekidnost žice na spoju dva materijala, tj.

$$u(2-) = u(2+),$$

- neprekidnost kontaktne sile (glatkoća žice) na spoju dva materijala, tj.

$$u'(2-) = u'(2+).$$

Imamo:

$$u(2-) = \frac{1}{5} + C_2 = \frac{3}{10} - 3D_1 - \frac{15}{8} = u(2+) \text{ i}$$

$$u'(2-) = \frac{1}{5} = \frac{3}{10} + D_1 = u'(2+),$$

odakle slijedi da je $D_1 = -\frac{1}{10}$ i $C_2 = -\frac{59}{40}$.

Dakle, ravnotežni položaj žice određen je funkcijom

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}x^2 - \frac{59}{40}, & x \in [0, 2] \\ \frac{3}{40}x^2 - \frac{1}{10}x - \frac{11}{8}, & x \in (2, 5]. \end{cases}$$

Zadatak (6.)

Teška homogena žica mase $m = 4$ i duljine $l = 2$ napeta je horizontalno utegom mase $M = 25$ na kraju $x = 0$. Na dio $(1, 2]$ djeluje sila s koeficijentom elastičnosti $q(x) = b = 3$. Odredite progib ako je drugi kraj žice pričvršćen.

Rješenje: Budući da se lijevi dio žice, $[0, 1]$, nalazi u sredstvu sa $q(x) = 0$, a desni komad žice, $(1, 2]$, u drugom sredstvu sa $q(x) = b = 3$, rješavamo dva problema

$$-250u''(x) = -\frac{4}{2} \cdot 10 = -20, \quad x \in [0, 1] \quad \text{i}$$

$$-250u''(x) + 3u(x) = -20, \quad x \in (1, 2], \quad \text{tj.}$$

$$u''(x) = \frac{2}{25}, \quad x \in [0, 1] \quad \text{i}$$

$$u''(x) - \frac{3}{250}u(x) = \frac{2}{25}, \quad x \in (1, 2].$$

Rješenje prve jednadžbe je

$$u(x) = \frac{1}{25}x^2 + C_1 x + C_2, \quad x \in [0, 1].$$

Druga jednadžba je linearna diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima, pa ima rješenje oblika

$$u(x) = u_H(x) + u_P(x).$$

Za homogeno rješenje moramo riješiti karakterističnu jednadžbu

$$\lambda^2 - \frac{3}{250} = 0.$$

Dobijemo rješenja $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}$ i $\lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}$, pa je

$$u_H(x) = D_1 e^{-\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}x} + D_2 e^{\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}x}, \quad D_1, D_2 \in \mathbb{R}.$$

Partikularno rješenje tražimo u obliku $u_P(x) = A$ (jer je funkcija smetnje konstanta).
Uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu dobivamo $A = -\frac{20}{3}$, pa je

$$u(x) = D_1 e^{-\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}x} + D_2 e^{\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}x} - \frac{20}{3}, \quad x \in \langle 1, 2].$$

Rubni uvjet $u(0) = 0$ daje $C_2 = 0$.
Iz rubnog uvjeta $u(2) = 0$ dobivamo

$$D_1 e^{-\frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}} + D_2 e^{\frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}} - \frac{20}{3} = 0,$$

tako da je

$$D_2 = \frac{20}{3} e^{-\frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}} - D_1 e^{-\frac{4\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}}.$$

Konstante C_1 i D_1 opet određujemo iz prirodnih uvjeta:

- neprekidnost žice u točki $x = 1$, tj. $u(1-) = u(1+)$,
- neprekidnost kontaktne sile (glatkoća žice) u točki $x = 1$, tj. $u'(1-) = u'(1+)$.

Neprekidnost nam daje sljedeću jednadžbu s nepoznanicama C_1 i D_1

$$u(1-) = \frac{1}{25} + C_1$$

$$= D_1\left(e^{-\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}} - e^{-\frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}}\right) + \frac{20}{3}\left(e^{-\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}} - 1\right) = u(1+),$$

a glatkoća drugu jednadžbu

$$u'(1-) = \frac{2}{25} + C_1$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}\left(e^{-\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}} + e^{-\frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}}\right)D_1 + \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{10}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}} = u'(1+).$$

Oduzimanjem prve jednadžbe od druge lako se može izračunati konstanta D_1, a zatim uvrštavanjem u bilo koju od jednadžbi i konstanta C_1.

Domaća zadaća

Zadatak (4.)

Teška homogena žica linijske gustoće $\rho = 1$ napeta je horizontalno utegom mase $M = 14$ na kraju $x = 3$ i nalazi se u homogenom sredstvu s koeficijentom elastičnosti $q(x) = b = 5$. Odredite ravnotežni oblik žice ako je drugi kraj pričvršćen.

Rješenje: Rješavamo jednadžbu ravnoteže žice

$$-Mgu''(x) + bu(x) = -\rho g, \quad x \in [0, 3].$$

Konkretno, uz $g = 10$, jednadžba ravnoteže ima oblik

$$-140u''(x) + 5u(x) = -10, \quad \text{tj.} \quad u''(x) - \frac{1}{28}u(x) = \frac{1}{14},$$

i opet je rješenje oblika

$$u(x) = u_H(x) + u_P(x).$$

- Homogeno rješenje, $u_H(x)$:
  Tražimo rješenja pripadne karakteristične jednadžbe

$$\lambda^2 - \frac{1}{28} = 0.$$

  Rješenja su $\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$ i $\lambda_2 = \frac{1}{2\sqrt{7}}$, tako da je

$$u_H(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2\sqrt{7}}x} + C_2 e^{\frac{1}{2\sqrt{7}}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- Partikularno rješenje, $u_P(x)$:
  Desna strana diferencijalne jednadžbe je jednaka konstanti, pa možemo pretpostaviti da je $u_P(x) = A$.
  Uvrštavanjem partikularnog rješenja u_P u diferencijalnu jednadžbu

$$u_P''(x) - \frac{1}{28} u_P(x) = \frac{1}{14},$$

  dobijemo $A = -2$ jer je $u_P'(x) = u_P''(x) = 0$.

Prema tome, rješenje jednadžbe ravnoteže je

$$u(x) = u_H(x) + u_P(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2\sqrt{7}}x} + C_2 e^{\frac{1}{2\sqrt{7}}x} - 2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Konstante C_1 i C_2 odredimo iz rubnih uvjeta. Iz $u(0) = 0$ (lijevi kraj žice je pričvršćen) i $u(3) = 0$ (desni kraj žice je pričvršćen) dobijemo sustav jednadžbi s nepoznanicama C_1 i C_2:

$$C_1 + C_2 = 2,$$

$$e^{-\frac{3}{2\sqrt{7}}} C_1 + e^{\frac{3}{2\sqrt{7}}} C_2 = 2.$$

Uvrštavanjem izraza $C_2 = 2 - C_1$ dobivenog iz prve jednadžbe u drugu jednadžbu dobijemo rješenje sustava

$$C_1 = \frac{2 - 2e^{\frac{3}{2\sqrt{7}}}}{e^{-\frac{3}{2\sqrt{7}}} - e^{\frac{3}{2\sqrt{7}}}},$$

$$C_2 = 2 - \frac{2 - 2e^{\frac{3}{2\sqrt{7}}}}{e^{-\frac{3}{2\sqrt{7}}} - e^{\frac{3}{2\sqrt{7}}}}.$$

Zadatak (7.)

Teška žica $[0,3]$ sastavljena je od dva homogena materijala na $[0,1]$ i $(1,3]$, s linijskim gustoćama $\rho_1 = 1$ i $\rho_2 = 3$. Odredite ravnotežni položaj žice napete horizontalno utegom mase $M = 18$ na desnom kraju žice, dok je drugi kraj žice pričvršćen.

Zadatak (8.)

Teška homogena žica mase $m = 2$ i duljine $L = 2$ napeta je horizontalno utegom mase $M = 22$ na kraju $x = 0$. Na dio $[0,1]$ djeluje sila s koeficijentom elastičnosti $q(x) = b = 1$. Odredite progib žice ako je njezin drugi kraj slobodan.

Domaća zadaća

Zadatak

Odredite ravnotežni položaj žice duljine $l = 5$ i napetosti $p = 2$ koja se nalazi u homogenom sredstvu s koeficijentom elastičnosti 32 ako je lijevi kraj žice slobodan, a desni pričvršćen i gustoća vanjske sile je dana s

$$f(x) = 2\cos(5x) + 6\sin(5x).$$

Zadatak

Teška homogena žica duljine $l = 6$ napeta je horizontalno utegom mase $M = 5$ na lijevom kraju. Dio žice $[0, 4]$ nalazi se u homogenom sredstvu s koeficijentom elastičnosti 50, a na ostatak žice ne djeluje elastična sila. Žica ima linijsku gustoću $\rho = 10$. Pronađite ravnotežni položaj žice ako je desni kraj slobodan.