Primjeri diskretnih slučajnih varijabli

Diskretna uniformna slučajna varijabla

Diskretna uniformna slučajna varijabla

- Diskretna slučajna varijabla X je **uniformna** na diskretnom n-članom skupu $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ ako je njena raspodjela oblika

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

- Koristi se kod pokusa s konačno mnogo jednako vjerojatnih ishoda.
- Očito je

$$\mathbb{E}(X) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n} - \mathbb{E}(X)^2.$$

Primjer (3.11)

Bacamo simetričnu kocku. Neka je

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{1,2\} \\ 2, & \omega \in \{3,4\} \\ 3, & \omega \in \{5,6\}. \end{cases}$$

Tada imamo

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Bernoullijeva slučajna varijabla

Bernoullijeva slučajna varijabla

- Diskretna slučajna varijabla X je **Bernoullijeva** s parametrom $0 \leqslant p \leqslant 1$ ako je njena raspodjela oblika

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

- X možemo interpretirati kao ishod pokusa koji može rezultirati samo uspjehom ili neuspjehom (vjerojatnost uspjeha je p!).
- Očito je

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}(X) = p - p^2 = p(1-p).$$

Primjer (3.12)

Bacamo par simetričnih kocki. Neka je

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & i + j > 6 \\ 1, & i + j \leqslant 6, \end{cases} \qquad \omega = (i, j) \in \Omega.$$

Tada imamo

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}.$$

Dakle, X je Bernoullijeva slučajna varijabla s parametrom $p = 5/12$.

Binomna slučajna varijabla

Binomna slučajna varijabla

- Diskretna slučajna varijabla X je **binomna** s parametrima $0 \leqslant p \leqslant 1$ i $n \in \mathbb{N}$, u oznaci $X \sim B(n, p)$, ako je njena raspodjela oblika

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

  gdje je

$$p_i = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

- X predstavlja broj uspjeha u n nezavisnih ponavljanja pokusa. Vjerojatnost uspjeha je p, dok je vjerojatnost neuspjeha $1 - p$.

$$p_i = \mathbb{P}(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

- p^i - vjerojatnost da se i puta dogodio uspjeh
- $(1-p)^{n-i}$ - vjerojatnost da se $n-i$ puta dogodio neuspjeh
- $\binom{n}{i}$ - na koliko načina možemo izabrati mjesta na kojima se dogodio uspjeh

Nije teško izračunati da je

$$\mathbb{E}(X) = np \qquad \text{i} \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p).$$

Uočimo da je $X \sim B(1, p)$ u biti Bernoullijeva slučajna varijabla s parametrom p!

Primjer (3.13)

Marko i Ivan igraju sljedeću igru. Ivan izabere broj između $\{1, \ldots, 6\}$ te nakon toga baca igraću kocku tri puta. Ako prilikom bacanja ne dobije prethodno izabran broj, onda Marku isplaćuje 100 kn. Međutim, ako se prethodno izabrani broj pojavi jednom na kocki, onda Marko isplaćuje Ivanu 100 kn, ali ako se pojavi dva puta 200 kn i ako se pojavi tri puta 300 kn. Koga ova igra favorizira?

$X =$ broj pojavljivanja izabranog broja na kocki
X je očito binomna slučajna varijabla

$$X \sim B\left(3, \frac{1}{6}\right).$$

Očekivani dobitak za Marka je

$$100 \cdot \mathbb{P}(X=0) - 100 \cdot \mathbb{P}(X=1) - 200 \cdot \mathbb{P}(X=2) - 300 \cdot \mathbb{P}(X=3) = 7.37 \,\mathrm{kn}.$$

Dakle, igra favorizira Marka.

Geometrijska slučajna varijabla

Geometrijska slučajna varijabla

- Neka je u jednom pokusu vjerojatnost uspjeha p. Pokus se ponavlja nezavisno dok se ne dogodi uspjeh. Geometrijska slučajna varijabla je broj ponavljanja pokusa do prvog uspjeha.
- Preciznije, diskretna slučajna varijabla X je **geometrijska** s parametrom $0 < p \leqslant 1$, u oznaci $X \sim G(p)$, ako je njena raspodjela oblika

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}, \quad p_i = (1-p)^{i-1}p, \quad i \in \mathbb{N}.$$

- $(1-p)^{i-1}p$ znači da u prvih $i-1$ ponavljanja pokusa imamo neuspjehe, a u i-tom ponavljanju dogodi se uspjeh.
- Može se pokazati da je

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{i} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Primjer (3.14)

Bacamo simetričnu kocku sve dok ne padne broj 6. Kolika je vjerojatnost da će se to dogoditi u petom bacanju?

Označimo $X =$ "redni broj bacanja u kojem je pao broj 6".

Očito je

$$X \sim G\left(\frac{1}{6}\right).$$

Dakle, tražena vjerojatnost je

$$p_5 = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^4 \frac{1}{6} = \frac{5^4}{6^5}.$$

Poissonova slučajna varijabla

Poissonova slučajna varijabla

- Diskretna slučajna varijabla X je **Poissonova** s parametrom $\lambda > 0$, u oznaci $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, ako je njena raspodjela oblika

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix},$$

  gdje je

$$p_i = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, \qquad i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

- Ova slučajna varijabla broji pojavljivanje određenog događaja (uspjeha) u vremenu (ili prostoru).
  Npr. broj poziva u telefonsku centralu, broj ljudi koji dođe u banku u nekom vremenskom intervalu itd.

- Parametar λ predstavlja prosječan broj slučajnih događaja u jedinici vremena (ili prostora) i vrijedi

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \lambda, \quad \mathrm{Var}(X) = \lambda.}$$

- Poissonovu slučajnu varijablu možemo interpretirati i kao aproksimaciju binomne u slučaju kada $n \to \infty$ (kao da smo beskonačno puta ponovili određeni pokus).

Primjer (3.15.)

U nekoj telefonskoj centrali stižu pozivi po Poissonovoj raspodjeli s očekivanjem od 10 poziva po minuti. Kolika je vjerojatnost da će u sljedeću minutu stići točno 5 poziva? Kolika je vjerojatnost da će sljedeću minutu stići više od 20 poziva?

Označimo $X =$ "broj poziva u minuti".

X je Poissonova slučajna varijabla $X \sim \mathrm{Poi}(10)$.

Vjerojatnost da u minuti stigne točno 5 poziva:

$$\mathbb{P}(X = 5) = p_5 = e^{-10}\frac{10^5}{5!}.$$

Vjerojatnost da u minuti stigne više od 20 poziva:

$$\mathbb{P}(X > 20) = \sum_{i=21}^{\infty} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=21}^{\infty} p_i = 1 - \sum_{i=0}^{20} p_i.$$