Poglavlje 4
Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost

Definicija

Za događaje A i B vjerojatnosnog prostora $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kažemo da su **nezavisni** ako je

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B). \tag{1}$$

Napomenimo da ako su A i B nezavisni, onda su to i A^C i B, A i B^C i A^C i B^C.

Definicija

Uvjetna vjerojatnost ili vjerojatnost od A uz uvjet B je jednaka

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Posebno, ako su A i B nezavisni, informacija o B nam ne donosi ništa važno prilikom zaključivanja o neizvjesnosti A, pa vrijedi $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, kao i obratno, $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.

Zadatak (4.1.)

Dva strijelca gađaju određenu metu nezavisno jedan o drugome. Vjerojatnost da će prvi strijelac pogoditi metu iznosi 0.7, a vjerojatnost da drugi strijelac pogodi je 0.8. Kolika je vjerojatnost da metu pogode:

a) oba strijelca?
b) točno jedan strijelac?
c) barem jedan strijelac?
d) niti jedan strijelac?

Rješenje: Uvedimo oznake za događaje:
$A \dots$ prvi strijelac je pogodio metu i
$B \dots$ drugi strijelac je pogodio metu.

Tada vrijedi
$\mathbb{P}(A) = 0.7$ i $\mathbb{P}(A^c) = 1 - 0.7 = 0.3$, te
$\mathbb{P}(B) = 0.8$ i $\mathbb{P}(B^c) = 1 - 0.8 = 0.2$.

a) Vjerojatnost da oba strijelca pogode metu je jednaka

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0.7 \cdot 0.8 = 0.56.$$

b) Vjerojatnost da točno jedan strijelac pogodi metu iznosi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) &= \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B)\\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)\\ &= 0.7 \cdot 0.2 + 0.8 \cdot 0.3 = 0.14 + 0.24 = 0.38.\end{aligned}$$

c) Vjerojatnost da barem jedan strijelac pogodi metu je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\\ &= 0.7 + 0.8 - 0.7 \cdot 0.8 = 0.94\end{aligned}$$

d) Vjerojatnost da niti jedan strijelac ne pogodi metu iznosi

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06.$$

Zadatak (4.2.)

Bacamo simetričnu igraću kocku. Kolika je vjerojatnost da će pasti neparan broj pod uvjetom da je pao broj ne veći od 3?

Rješenje: Za prostor elementarnih događaja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}, \quad \omega_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Uvedimo oznake:

$A \ldots$ pao je broj ne veći od 3 i

$B \ldots$ pao je neparan broj.

Tada je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{1, 3, 5\}$. Prema tome, vjerojatnost da će pasti neparan broj pod uvjetom da je pao broj ne veći od 3 iznosi

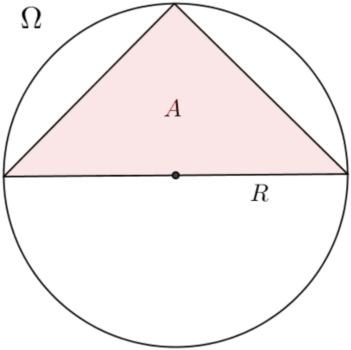
$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Zadatak (4.4.)

U krugu radijusa R slučajno je odabrana jedna točka. Kolika je vjerojatnost da se točka nalazi

a) u najvećem jednakokračnom trokutu upisanom u krug s bazom u središtu kruga,

b) u trokutu pod uvjetom da se ne nalazi u polukrugu ispod trokuta?



Rješenje:

a) Definiramo događaj
$A \ldots$ točka se nalazi u trokutu.
Tada je $\mathbb{P}(A) = \frac{\frac{2R \cdot R}{2}}{R^2\pi} = \frac{1}{\pi}$.

b) Definiramo događaj
$B \ldots$ točka se ne nalazi u polukrugu ispod trokuta (nalazi se u gornjem polukrugu).
Tada je događaj
$A \cap B \ldots$ "točka se ne nalazi u polukrugu ispod trokuta i nalazi se u trokutu"
jednak događaju A ("točka se nalazi u trokutu").
Stoga je vjerojatnost da je odabrana točka u trokutu pod uvjetom da se ne nalazi u polukrugu ispod trokuta jednaka

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{\frac{R^2\pi}{2}}{R^2\pi}} = \frac{2}{\pi}.$$

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka su $H_1, H_2, \ldots, H_n$ disjunktni događaji takvi da vrijedi $H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n = \Omega$. Tada $H_1, \ldots, H_n$ nazivamo **potpun sustav događaja** i za svaki $A \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \cdots + \mathbb{P}(A|H_n)\mathbb{P}(H_n).$$

Dakle, gornja formula daje vjerojatnost događaja A ako znamo vjerojatnost po dijelovima $(H_i), i = 1, \ldots, n$. Formulu zovemo **formula potpune vjerojatnosti**.

Iz formule potpune vjerojatnosti direktno slijedi i takozvana **Bayesova formula**:

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A|H_j)}, \quad \text{za } i = 1, \ldots, n. \qquad (2)$$

Gornja formula daje vjerojatnost uzroka H_i uz danu posljedicu A.

Zadatak (4.5.)

Neki proizvod izrađuje se na tri stroja.
Na prvom stroju se izrađuje 40% ukupne proizvodnje i od toga je 0.1% neispravnih proizvoda,
na drugom stroju se izrađuje 35% ukupne proizvodnje i od toga je 0.2% neispravnih proizvoda, a
na trećem stroju se izrađuje 25% ukupne proizvodnje i od toga je 0.25% neispravnih proizvoda.
Kolika je vjerojatnost

a) da nasumično odabran proizvod bude neispravan,
b) da je odabrani proizvod načinjen na prvom stroju ako znamo da je neispravan?

Rješenje:
a) Uvedimo oznake:
$H_1 \ldots$ proizvod je izrađen na prvom stroju,
$H_2 \ldots$ proizvod je izrađen na drugom stroju,
$H_3 \ldots$ proizvod je izrađen na trećem stroju i
$A \ldots$ proizvod je neispravan.
Tada je
$\mathbb{P}(H_1) = 0.4, \quad \mathbb{P}(H_2) = 0.35, \quad \mathbb{P}(H_3) = 0.25$ i
$\mathbb{P}(A|H_1) = 0.001$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 0.002$, $\mathbb{P}(A|H_3) = 0.0025$.

Prema formuli potpune vjerojatnosti, vjerojatnost da nasumično odabran proizvod bude neispravan iznosi

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A|H_3)\mathbb{P}(H_3) = 0.001725.$$

b) Vjerojatnost da je odabrani proizvod načinjen na prvom stroju ako znamo da je neispravan, prema Bayesovoj formuli iznosi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_1|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A|H_3)\mathbb{P}(H_3)} \\ &= \frac{0.001 \cdot 0.4}{0.001 \cdot 0.4 + 0.002 \cdot 0.35 + 0.0025 \cdot 0.25} = 0.2319.\end{aligned}$$

Zadatak (4.7.)

Promatrani stroj može raditi normalno i pod opterećenjem. Stroj radi normalno 60% vremena, a ostalo pod opterećenjem. Vjerojatnost da radi ispravno dok je pod opterećenjem iznosi 0.7, dok je vjerojatnost ispravnog rada dok nije pod opterećenjem jednaka 0.9. Izračunajte vjerojatnost da:

a) stroj radi ispravno.
b) je stroj ispravan i pod opterećenjem.
c) je stroj pod opterećenjem ako je ispravan.
d) je stroj pod opterećenjem ako nije ispravan.

Rješenje: Uvedimo oznake:
$H_1 \ldots$ stroj je pod opterećenjem,
$H_2 \ldots$ stroj nije pod opterećenjem i
$A \ldots$ stroj radi ispravno.
Tada vrijedi
$\mathbb{P}(H_1) = 0.4, \quad \mathbb{P}(H_2) = 0.6$ i
$\mathbb{P}(A|H_1) = 0.7, \quad \mathbb{P}(A|H_2) = 0.9.$

a) Vjerojatnost da stroj radi ispravno iznosi

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2) = 0.4 \cdot 0.7 + 0.6 \cdot 0.9 = 0.82.$$

b) Vjerojatnost da je stroj ispravan i da radi pod opterećenjem iznosi

$$\mathbb{P}(A \cap H_1) = \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28.$$

c) Vjerojatnost da je stroj pod opterećenjem ako je ispravan je jednaka

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_1|A) &= \frac{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1)}{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2)} \\ &= \frac{0.4 \cdot 0.7}{0.4 \cdot 0.7 + 0.6 \cdot 0.9} = 0.34.\end{aligned}$$

d) Znamo da je $\mathbb{P}(A^c|H_1) = 0.3$ i $\mathbb{P}(A^c|H_2) = 0.1$. Tada je vjerojatnost da je stroj pod opterećenjem ako nije ispravan jednaka

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_1|A^c) &= \frac{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A^c|H_1)}{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A^c|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A^c|H_2)} \\ &= \frac{0.4 \cdot 0.3}{0.4 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.1} = 0.67.\end{aligned}$$

Zadatak

Studenti prve godine podijeljeni su u dva turnusa. Prvi turnus sastoji se od 22 studenta i 18 studentica, dok se drugi turnus sastoji od 27 studenata i 13 studentica. Profesor na slučajan način izabare jedan od dva turnusa, a zatim u njemu na slučajan način izabere jednog studenta/studenticu. Ako znamo da je slučajno odabrana studentica, kolika je vjerojatnost da je profesor odabrao drugi turnus?

Formula produkta vjerojatnosti: Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ događaji. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}). \quad (3)$$

Zadatak (4.8.)

Kuharica zna pripremiti 4 vrste jela. Tjedan započinje bilo kojim jelom s jednakom vjerojatnošću. Zatim ponavlja jelo od prethodnog dana s vjerojatnošću 0.4 ili odabire jedno od preostalih jela, koja su sva jednako vjerojatna. Kolika je vjerojatnost da će izbor jela biti b, b, a, c, c?

Rješenje: Definiramo događaje:
$A_1 \ldots$ prvo izabrano jelo je b,
$A_2 \ldots$ drugo izabrano jelo je b,
$A_3 \ldots$ treće izabrano jelo je a,
$A_4 \ldots$ četvrto izabrano jelo je c i
$A_5 \ldots$ peto izabrano jelo je c.
Tada vrijedi
$\mathbb{P}(A_1) = 0.25, \quad \mathbb{P}(A_2|A_1) = 0.4, \quad \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = 0.2,$
$\mathbb{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0.2 \quad$ i $\quad \mathbb{P}(A_5|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) = 0.4.$

Vjerojatnost da će izbor jela biti b, b, a, c, c prema formuli produkta vjerojatnosti iznosi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \mathbb{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ \cdot \mathbb{P}(A_5|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) \\ = 0.25 \cdot 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.4 = \frac{1}{625}.\end{aligned}$$

Domaća zadaća

Zadatak (4.3.)

Bacamo tri simetrične kocke. Kolika je vjerojatnost da je pala točno jedna šestica ako je poznato da su pali različiti brojevi?

Rješenje: Ukupan broj ishoda opisanog eksperimenta iznosi $n_\Omega = 6^3$.
Uvedimo oznake:
$A \ldots$ pala je točno jedna šestica i
$B \ldots$ pali su različiti brojevi.
Tada je broj ishoda povoljan za događaj B jednak $n_B = 6 \cdot 5 \cdot 4$, a broj ishoda povoljnih za događaj $A \cap B$ iznosi $n_{A \cap B} = 3 \cdot 5 \cdot 4$.
Vjerojatnost da je pala točno jedna šestica ako znamo da su pali različiti brojevi je jednaka

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}}{\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}} = \frac{1}{2}.$$

Domaća zadaća

Zadatak (4.6.)

Uređaj se može naći u dva režima rada: normalnom i otežanom. U normalnom režimu se nalazi 75%, a u otežanom režimu 25% radnog vremena. Za vrijeme normalnog rada uređaj otkazuje s vjerojatnošću 0.2, a za vrijeme otežanog rada s vjerojatnošću 0.5. Ako znamo da je uređaj otkazao, kolika je vjerojatnost da se to dogodilo za vrijeme otežanog režima rada? Kolika je vjerojatnost da uređaj ne otkaže?

Rješenje: Uvedimo oznake:
$H_1 \ldots$ uređaj je u normalnom režimu rada,
$H_2 \ldots$ uređaj je u otežanom režimu rada i
$A \ldots$ uređaj je otkazao.
Tada je
$\mathbb{P}(H_1) = 0.75, \quad \mathbb{P}(H_2) = 0.25,$ i
$\mathbb{P}(A|H_1) = 0.2, \quad \mathbb{P}(A|H_2) = 0.5.$
Prema Bayesovoj formuli vjerojatnost da je uređaj radio u otežanom režimu rada kada je otkazao iznosi
$$\mathbb{P}(H_2|A) = \frac{\mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2)}{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2)} = \frac{0.25 \cdot 0.5}{0.75 \cdot 0.2 + 0.25 \cdot 0.5} = 0.45.$$
Znamo da događaj "uređaj nije otkazao" možemo označiti sa A^C. Vrijedi da je
$\mathbb{P}(A^C|H_1) = 0.8, \quad \mathbb{P}(A^C|H_2) = 0.5.$
Vjerojatnost da uređaj ne otkaže je prema formuli potpune vjerojatnosti jednaka
$$\mathbb{P}(A^C) = \mathbb{P}(A^C|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A^C|H_2)\mathbb{P}(H_2) = 0.8 \cdot 0.75 + 0.5 \cdot 0.25 = 0.725.$$

Zadatak (4.9.)

Građevinska tvrtka nabavlja crijep od dobavljača A, B i C. Pri prvoj kupnji vjerojatnost da odabere dobavlječa A iznosi 0.5, a s jednakom vjerojatnošću bira dobavljače B i C. Pri svakoj sljedećoj kupnji vjerojatnost da ostane pri istom dobavljaču iznosi 0.6, a između ostala dva dobavljača bira s jednakim vjerojatnostima. Kolika je vjerojatnost da je crijep nabavljen prema redoslijedu AABCCA?

Rješenje: Uvedimo oznake:

$A_1 \ldots$ prvi izabrani dobavljač je A,

$A_2 \ldots$ drugi izabrani dobavljač je A,

$A_3 \ldots$ treći izabrani dobavljač je B,

$A_4 \ldots$ četvrti izabrani dobavljač je C,

$A_5 \ldots$ peti izabrani dobavljač je C i

$A_6 \ldots$ šesti izabrani dobavljač je A.

Vjerojatnost da je crijep nabavljen prema redoslijedu AABCCA iznosi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6) \\
&\qquad = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \mathbb{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
&\qquad\qquad \cdot \mathbb{P}(A_5|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \cdot \mathbb{P}(A_6|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \\
&\qquad = 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.2 = 0.00144.
\end{aligned}$$

Domaća zadaća

Zadatak (4.10.)

Iz snopa od 52 karte izvlačimo dvije karte, jednu po jednu.

a) Kolika je vjerojatnost da je druga izvučena karta pik ako je prva karta pik, a prvu kartu nakon izvlačenja nismo vraćali u snop?

b) Kolika je vjerojatnost da je druga izvučena karta pik ako je prva karta pik, a prvu kartu smo nakon izvlačenja vraćali u snop?

Rješenje: Uvedimo oznake:
$A_1 \ldots$ prva izvučena karta je pik i
$A_2 \ldots$ druga izvučena karta je pik.

a) U slučaju da prvu kartu ne vraćamo u snop, nakon prvog izvlačenja u snopu je ostala 51 karta, od čega je 12 pikova pa je tražena vjerojatnost jednaka

$$\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{\binom{12}{1}}{\binom{51}{1}} = \frac{12}{51}.$$

b) U slučaju da prvu kartu vraćamo u snop, nakon prvog izvlačenja u snopu su opet 52 karte, od čega 13 pikova pa tražena vjerojatnost iznosi

$$\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{\binom{13}{1}}{\binom{52}{1}} = \frac{13}{52}.$$