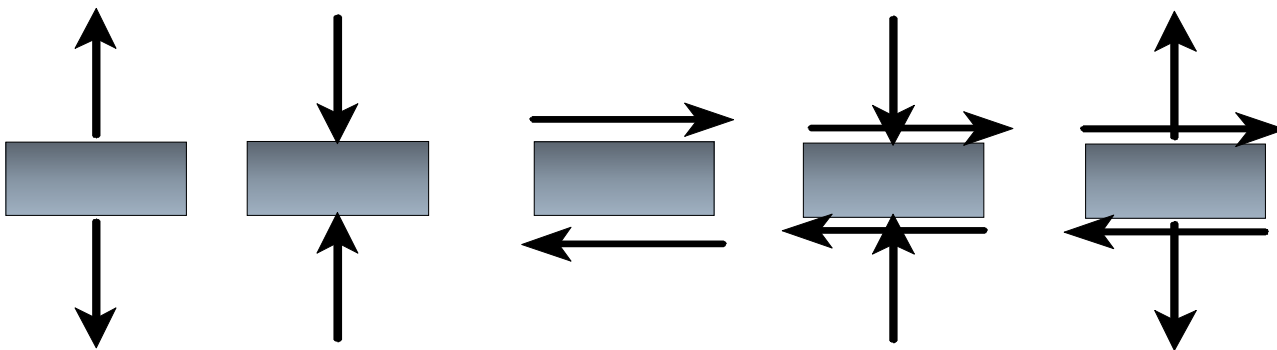

FIZIKALNO-MEHANIČKA SVOJSTVA MATERIJALA

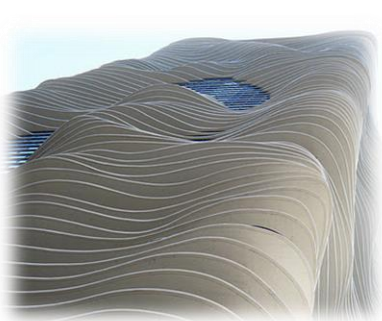


SADRŽAJ VJEŽBI

Svojstva materijala koja određuju njegovo ponašanje pod **vanjskim opterećenjem** zovemo **MEHANIČKA SVOJSTVA**.

- Naprezanja
- Deformacija
- Čvrstoća
- Poissonov koeficijent
- Youngov modul elastičnosti
- Modul posmika

ZAŠTO?



OPASNOST

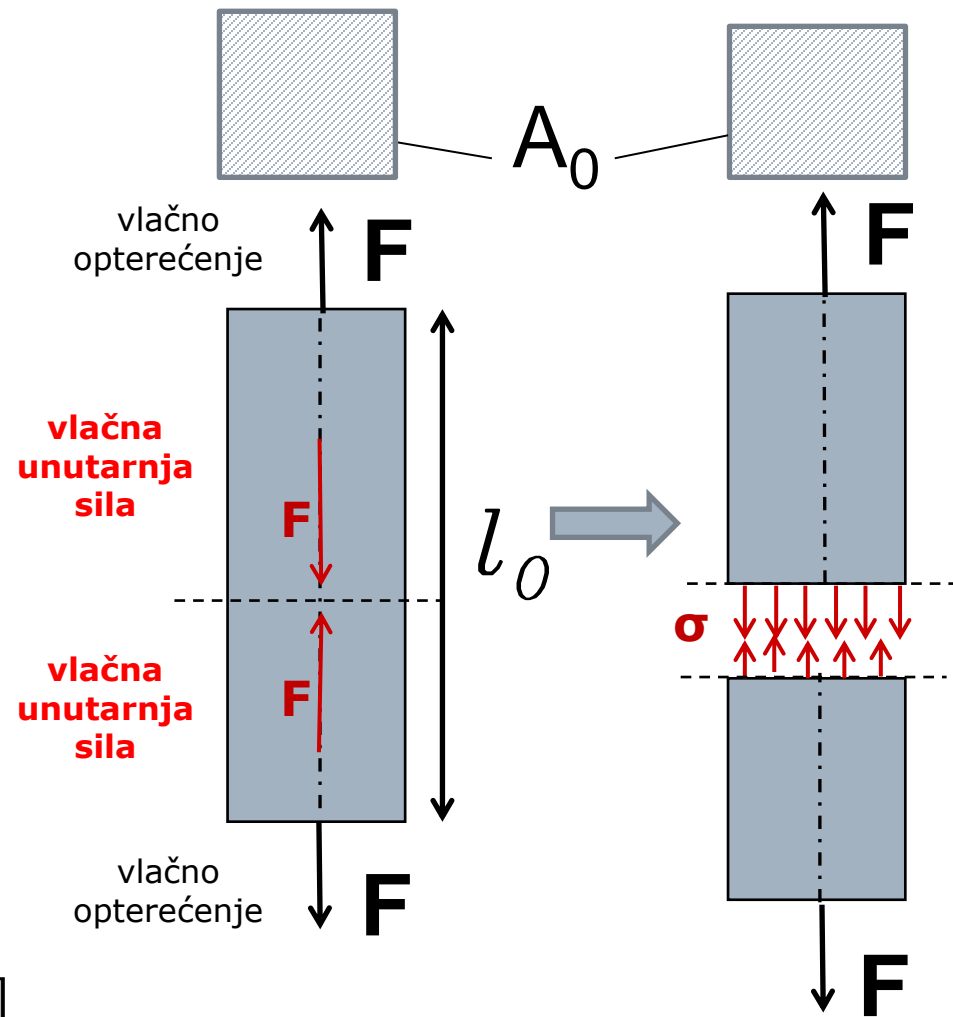
- ❑ Dhaka – Bangladeš (24.4.2013.)
 - ❑ U glavnom gradu se srušila zgrada od 8 katova.
 - ❑ Poginulo je najmanje 70 ljudi.
- ❑ Mumbai – Indija (5.4.2013.)
 - ❑ Najmanje 29 osoba je poginulo kada se u predgrađu srušila zgrada u izgradnji.



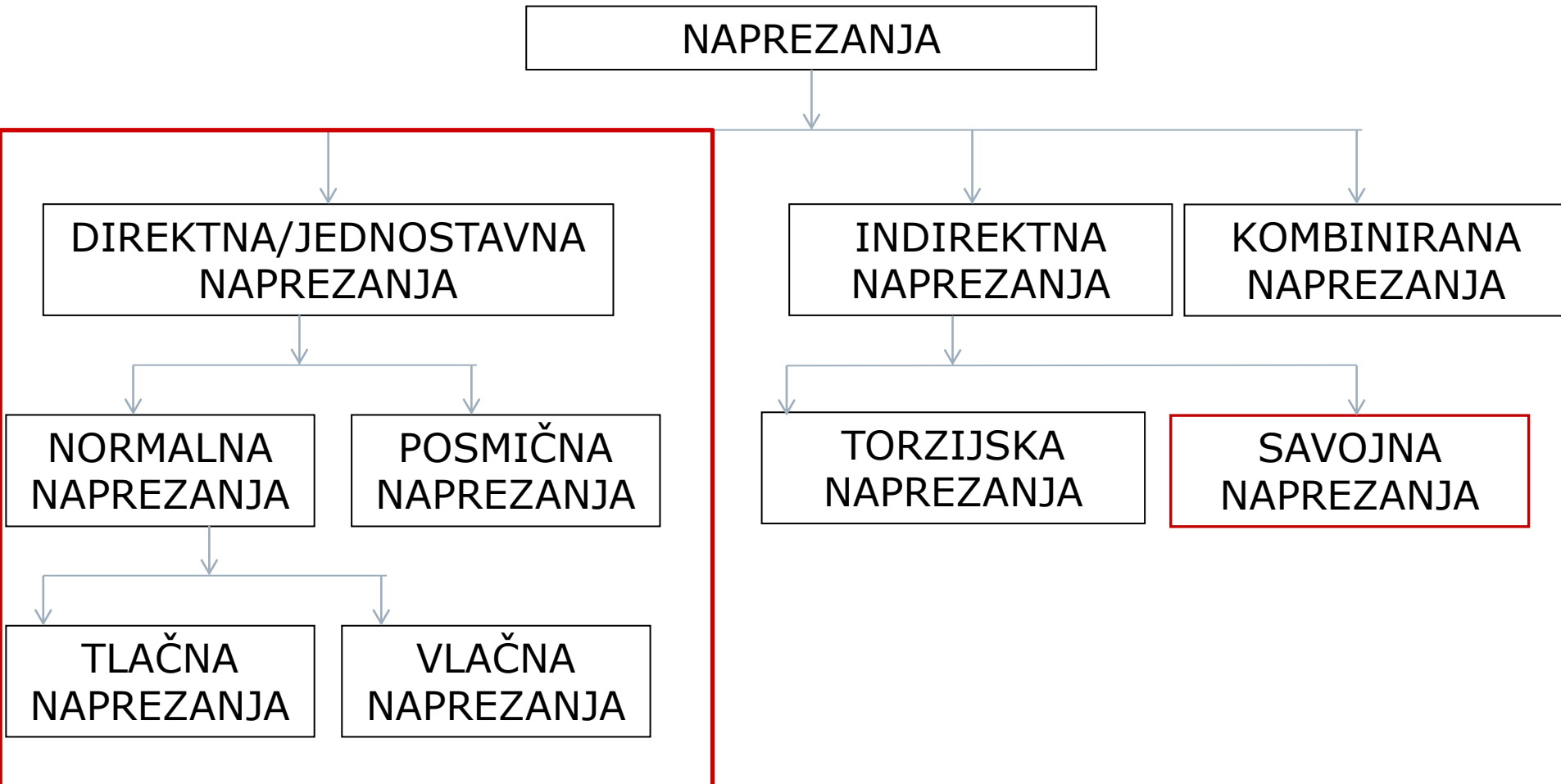
NAPREZANJA

- Štap ima **početnu duljinu**, l_0 , i **početnu površinu poprečnog presjeka**, A_0
- Na štap djeluje **vanjska sila**, F , (predstavlja opterećenje na štap),
- U štapu se pojavljuju **unutarnje sile** (unutarnja reakcija tijela/štapa na djelovanje vanjske sile)
- **Naprezanja** se definiraju kao omjer ukupnog nanesenog opterećenja (ukupne vanjske sile) i početne površine na koju sila djeluje:

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad [\text{N/m}^2; \text{Pa}] \quad [\text{N/mm}^2; \text{MPa}]$$

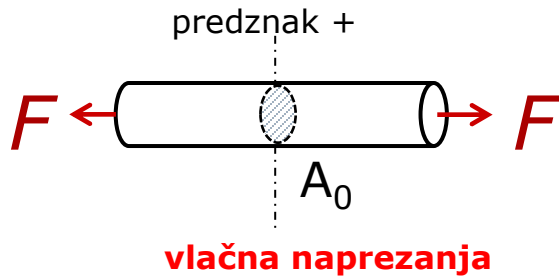


VRSTE NAPREZANJA OVISNO O OPTEREĆENJU

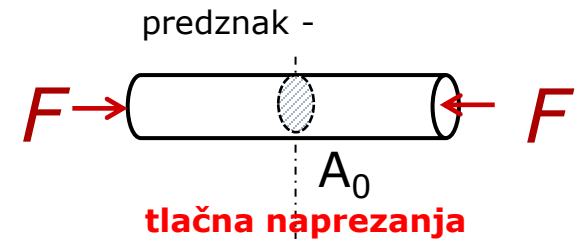


NORMALNA NAPREZANJA

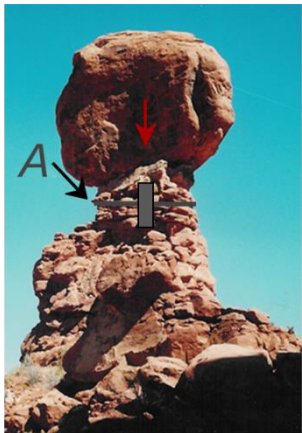
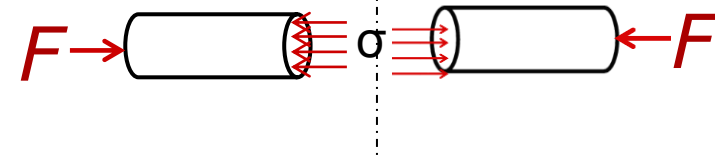
Normalna napreznaja (tlačna i vlačna) pojavljuju se **okomito** na površinu djelovanja vanjskog opterećenja.



$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad [\text{N/mm}^2]$$



tlačna napreznaja

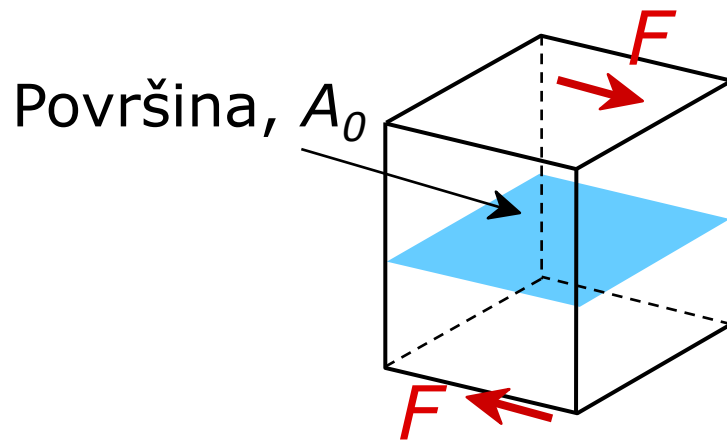


Balanced Rock, Arches National Park
(photo courtesy P.M. Anderson)

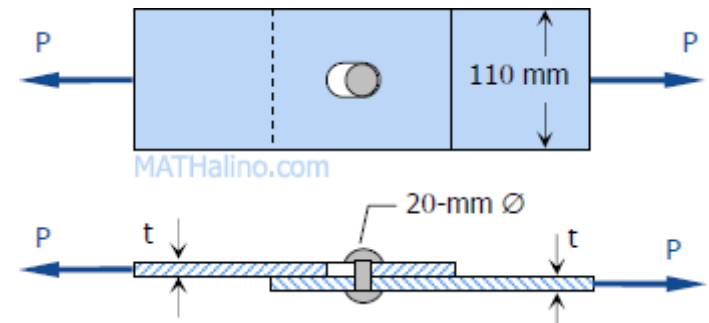


POSMIČNA NAPREZANJA

- Posmična naprezanja se pojavljaju **paralelno** sa površinom na koju djeluje vanjsko opterećenje



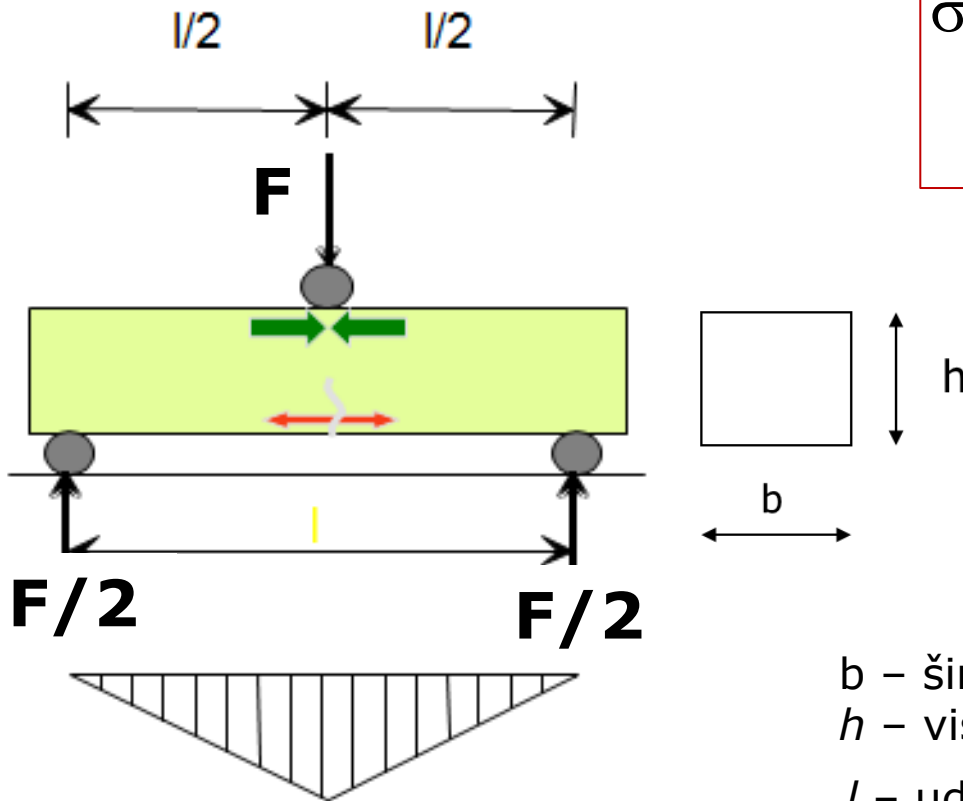
$$\tau = \frac{F}{A_0} \quad [\text{N/mm}^2]$$



SAVIJANJE MATERIJALA

JEDNA SILA:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{\frac{F \cdot l}{4}}{\frac{b \cdot h^2}{6}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{F \cdot l}{b \cdot h^2}$$



b – širina poprečnog presjeka uzorka
 h – visina poprečnog presjeka uzorka
 l – udaljenost oslonaca
 L – ukupna duljina uzorka

ČVRSTOĆA MATERIJALA

- pod čvrstoćom materijala se podrazumijeva njegova sposobnost da se odupre djelovanju unutrašnjih naprezanja koja se javljaju pod utjecajem opterećenja
- ocjenjuje se na temelju maksimalnog opterećenja koje materijal može podnijeti

VLAČNA, TLAČNA I POSMIČNA ČVRSTOĆA

$$\sigma \text{ ili } \tau = \frac{F_{\max}}{A_0} \text{ [N/mm}^2\text{]}$$

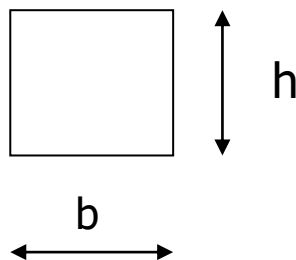
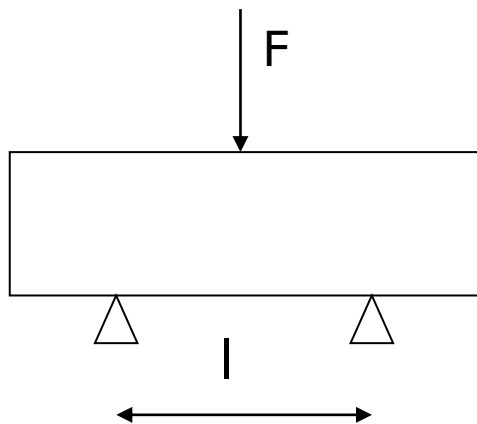
σ – čvrstoća (N/mm²)

F – **najveća sila koju materijal može podnijeti bez loma** (N)

A_0 - ispitna površina uzorka (mm²)

ČVRSTOĆA MATERIJALA

SAVOJNA ČVRSTOĆA



$$W = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{F_{\max} \cdot L}{\frac{4}{6} \cdot b \cdot h^2} \quad [\text{N/mm}^2]$$

L - razmak između ležajeva (mm)

F_{\max} - sila pri slomu uzorka (N)

h - visina stranice poprečnog presjeka (mm)

b - debljina stranice poprečnog presjeka (mm)

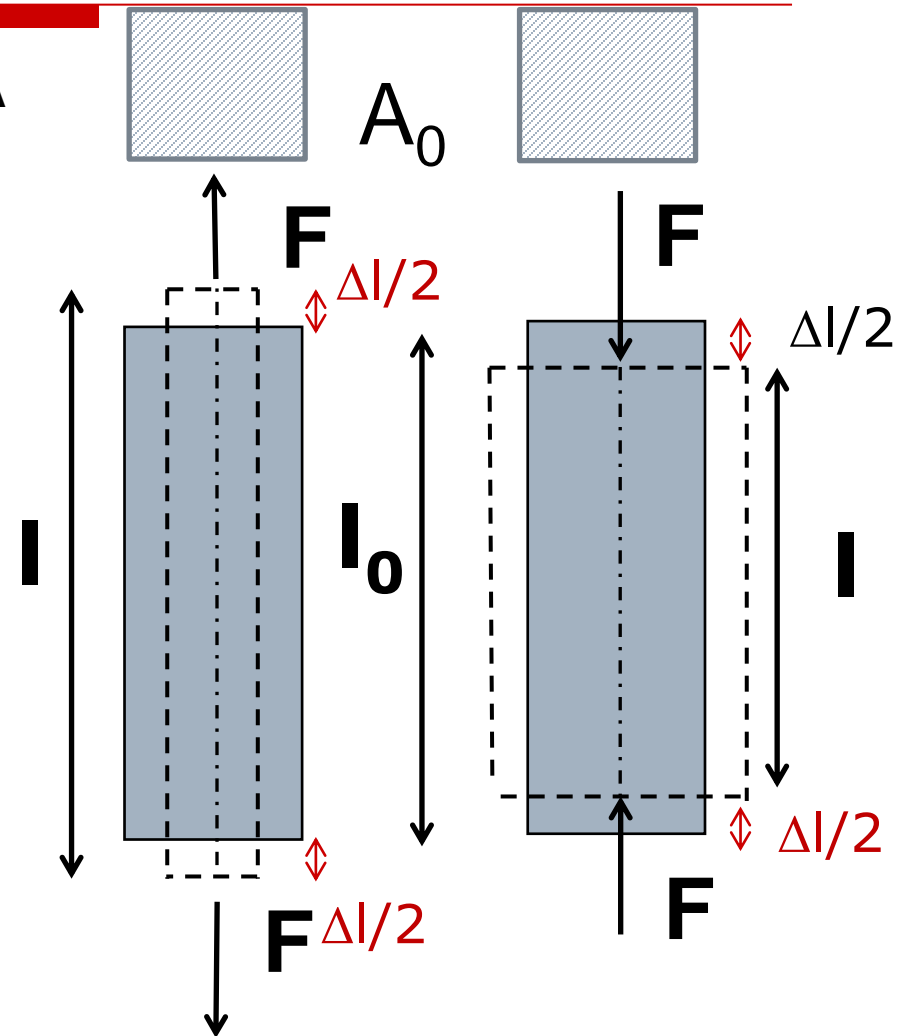
DEFORMACIJE

TLAČNA I VLAČNA DEFORMACIJA

- Uslijed djelovanja sile štap se produlji (uslijed vlačne sile) ili skрати (uslijed tlačne sile) za Δl
- **Relativno produljenje/skraćenje ili relativna deformacija** je promjena dimenzije tijela po jedinici duljine uslijed djelovanja vanjske sile

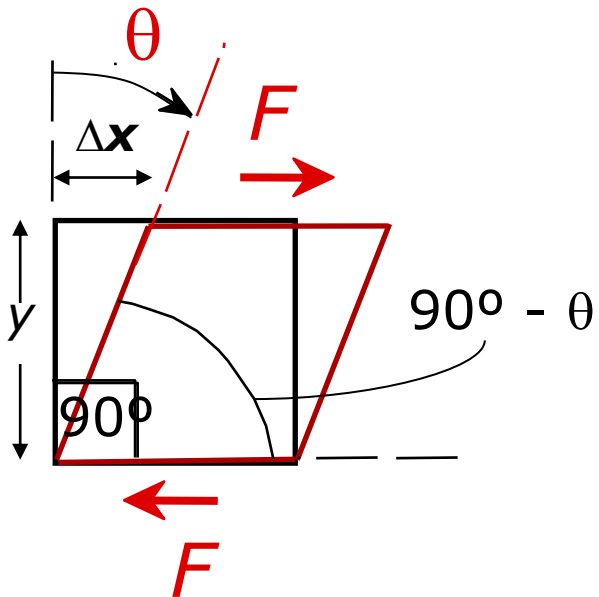
$$\varepsilon_u = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

bezdimenzijska veličina, a može se izraziti još jedinicama: mm/m, %, ‰, itd.



DEFORMACIJE

POSMIČNA DEFORMACIJA

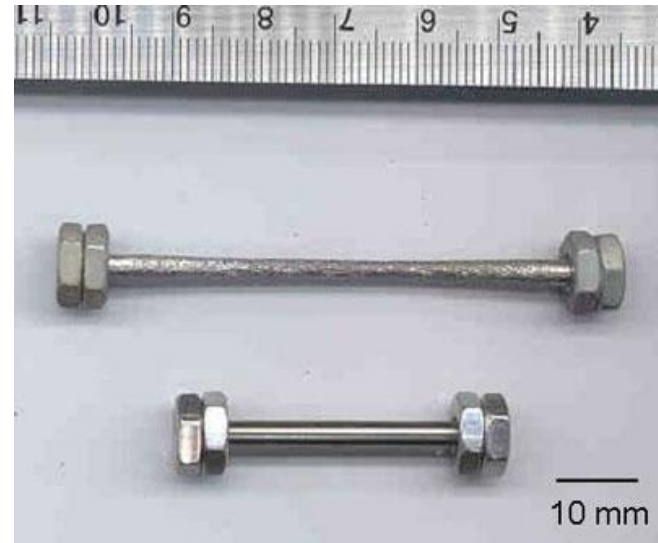
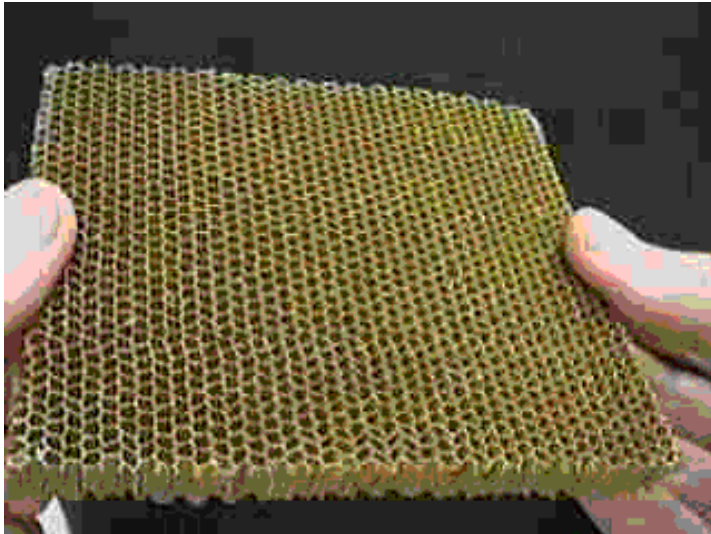


$$\gamma = \frac{\Delta x}{y} = \tan \theta$$

za dovoljno male deformacije:

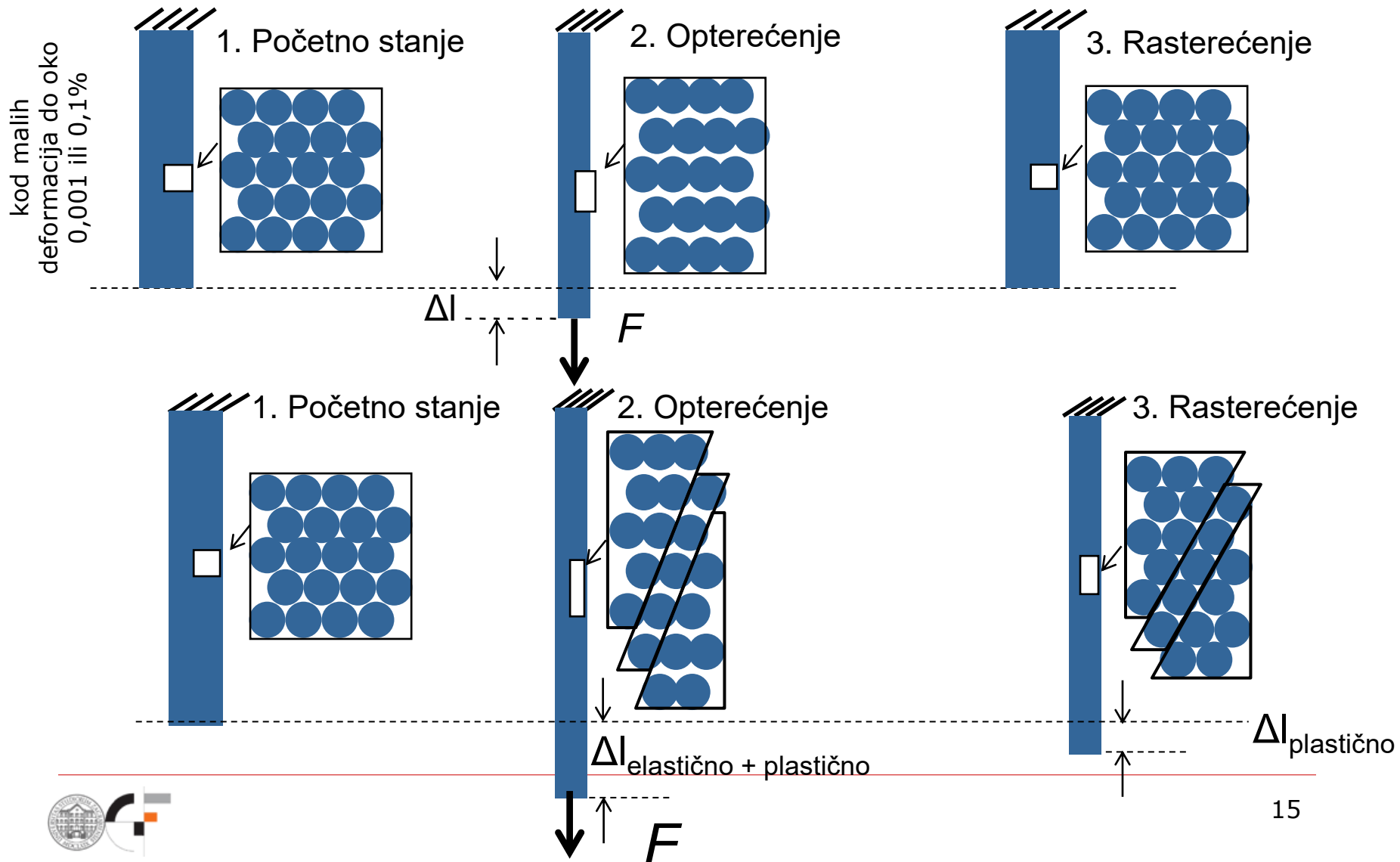
$$\gamma = \theta$$

DEFORMACIJE

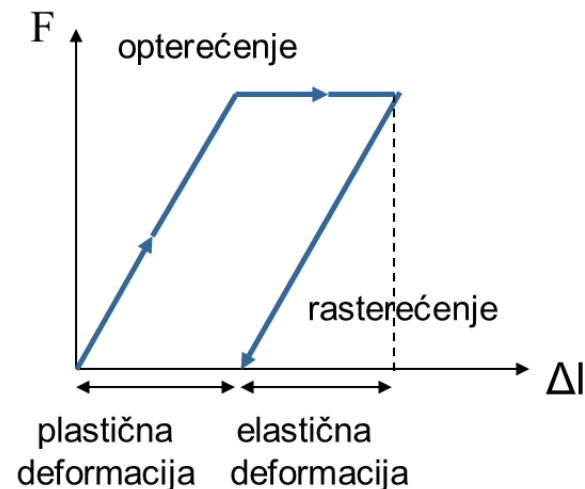
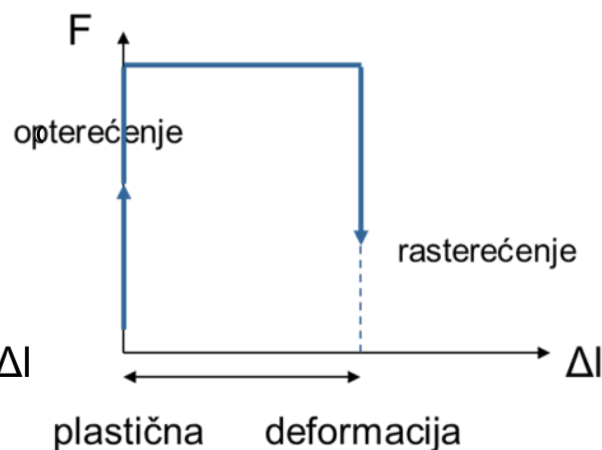
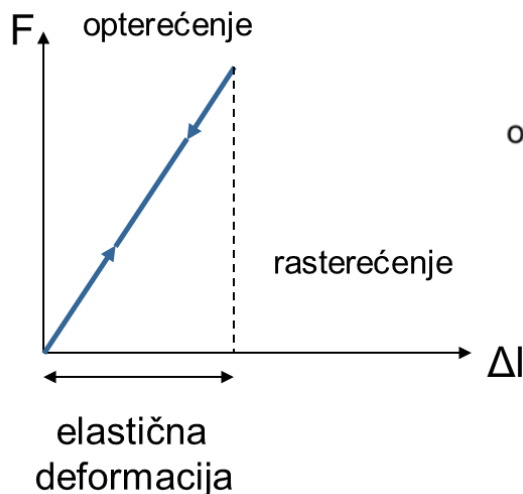


DEFORMACIJE

- Odgovor materijala na vanjsku silu ovisi o vrsti i prirodi veza i strukturnom rasporedu atoma, molekula ili iona.



DEFORMACIJE



POTPUNO ELASTIČNO

ako se nakon prestanka opterećenja potpuno vraća u svoj prvobitni položaj.

POTPUNO PLASTIČNO

ako se nakon prestanka opterećenja trajno deformira.

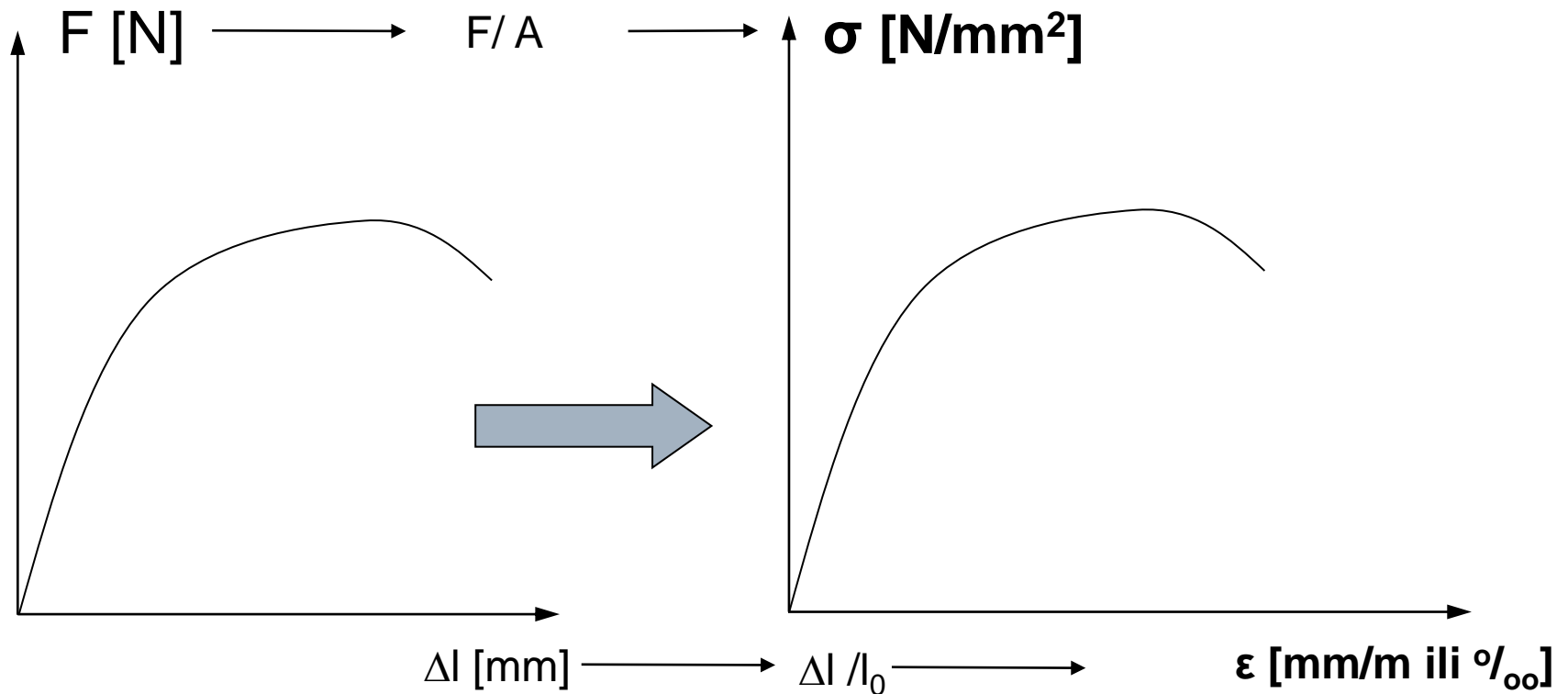
DJELOMIČNO ELASTIČNO

ako nakon prestanka opterećenja zaostane određeni iznos deformacije.

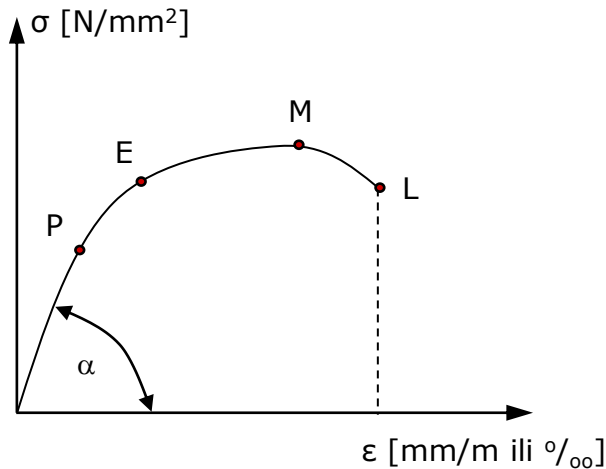
Radni dijagram

MJERENO:
Sila - produljenje

IZRAČUNATO
Naprezanje - deformacija



HOOKEOV ZAKON – MODUL ELASTIČNOSTI



P – granica proporcionalnosti
E – granica elastičnosti
M – najveće naprezanje

$$E = \frac{\Delta \sigma}{\Delta \varepsilon} = \tan \alpha$$

[N/mm² ili MPa] (najčešće [GPa])

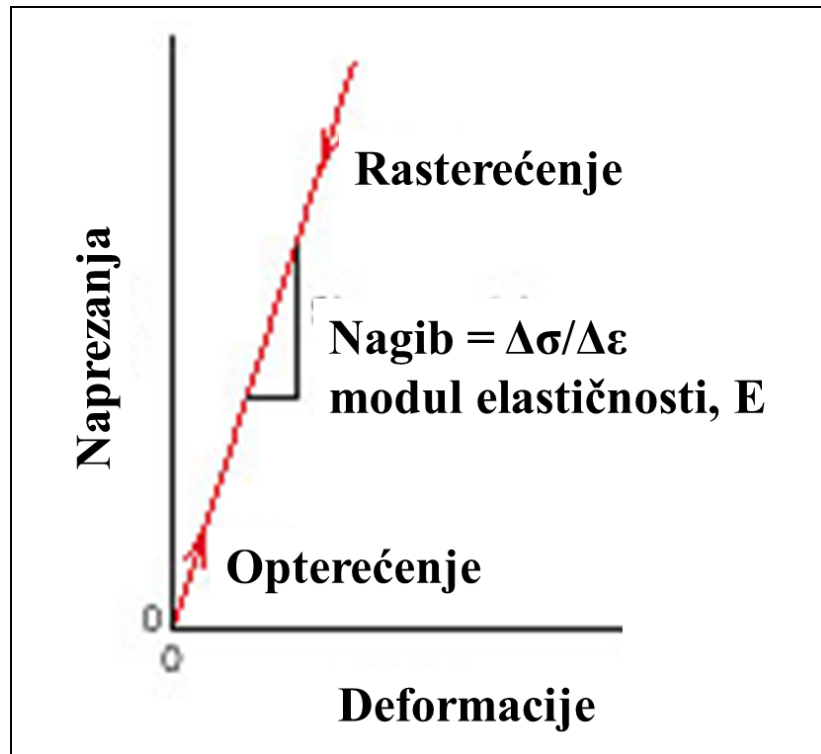
- Do granice proporcionalnosti (P) naprezanja i deformacije su proporcionalne → dakle njihova veza je linearna.
- Ako su naprezanja proporcionalna deformaciji, tada će za bilo koji materijal vrijediti da je omjer naprezanja i deformacije konstantan.
- Omjer normalnih naprezanja (σ) i deformacija (ε) je konstanta poznata kao **Youngov modul elastičnosti**.

RADNI DIJAGRAM

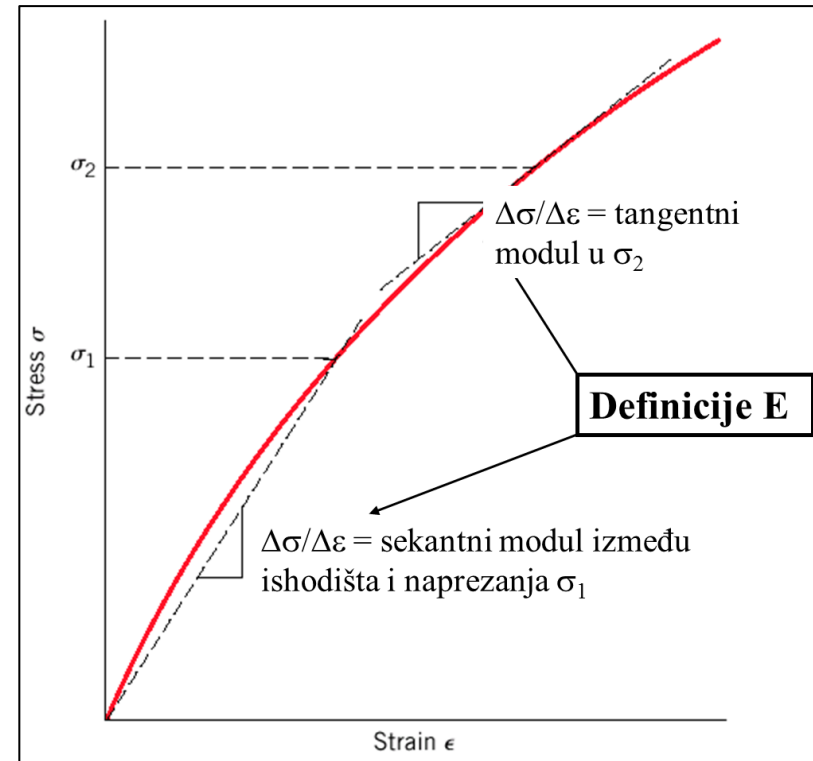


MODUL ELASTIČNOSTI

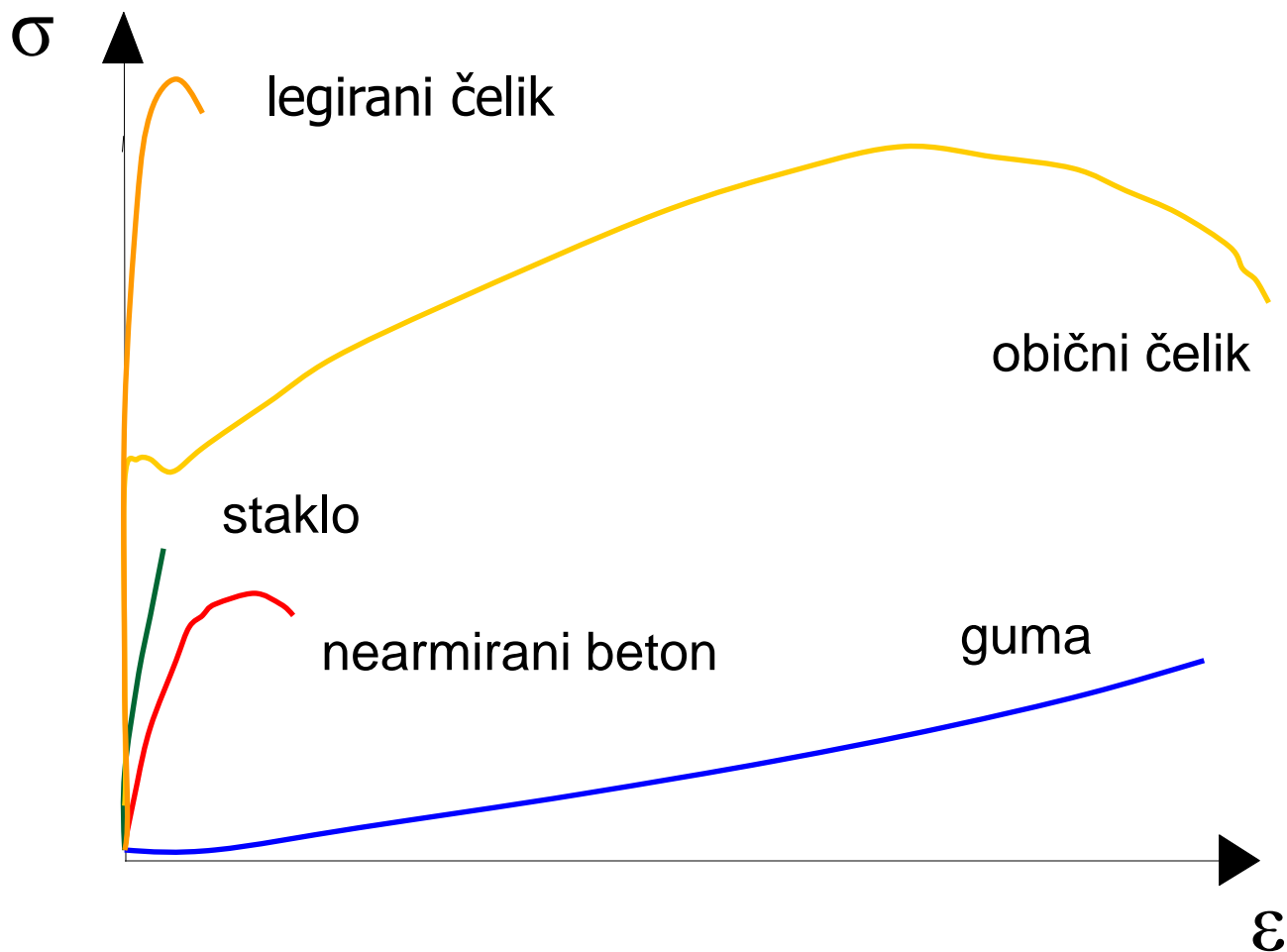
- elastične deformacije su **linearne** i povratne (npr. čelik)



- elastične deformacije **nisu linearne** ali su povratne (većina polimera, beton i sl.)



Radni dijagram građevinskih materijala



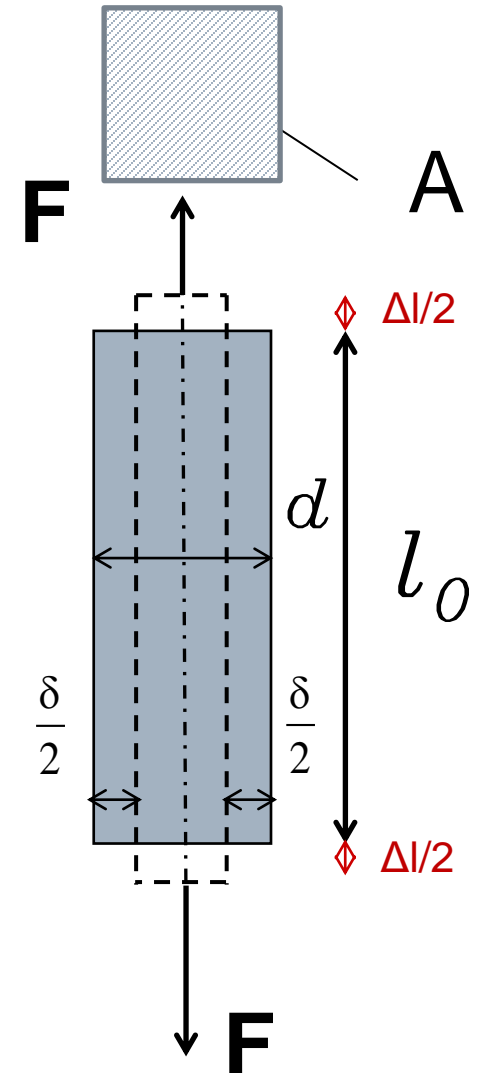
POISSONOV KOEFICIJENT

- Prilikom djelovanja vlačne sile tijelo se izdužuje (uzdužna deformacija ε_u) i sužuje (poprečna deformacija ε_p).
- Relativno suženje ili relativna poprečna deformacija:

$$\varepsilon_p = \frac{\delta}{d}$$

- Omjer poprečne i uzdužne deformacije naziva se **Poissonov koeficijent**.

$$\nu = -\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_u} = -\frac{\frac{\delta}{d}}{\frac{\Delta l}{l_0}} \quad 0 \leq \nu \leq 0,5$$



MODUL POSMIKA

- Za djelovanje posmičnih naprezanja vrijedi odnos:

$$\tau = G\gamma \quad [\text{GPa}]$$

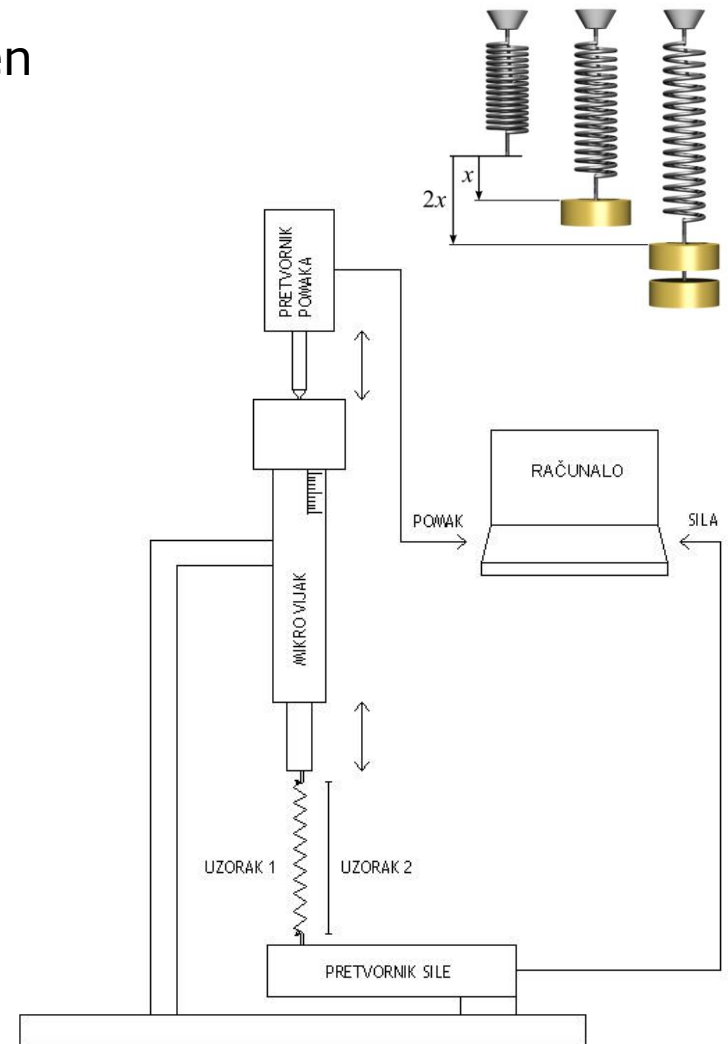
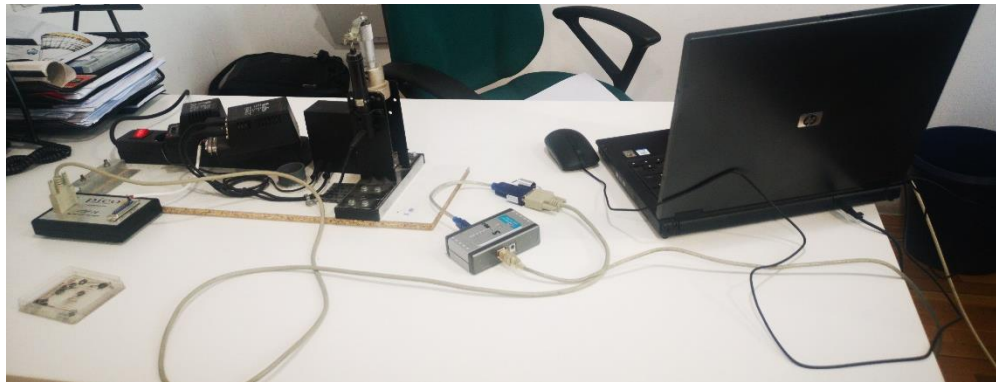
τ – posmično naprezanje
 γ – posmična deformacija
 G – modul posmika

- Elastične konstante materijala (E , ν i G) su povezane slijedećim odnosom:

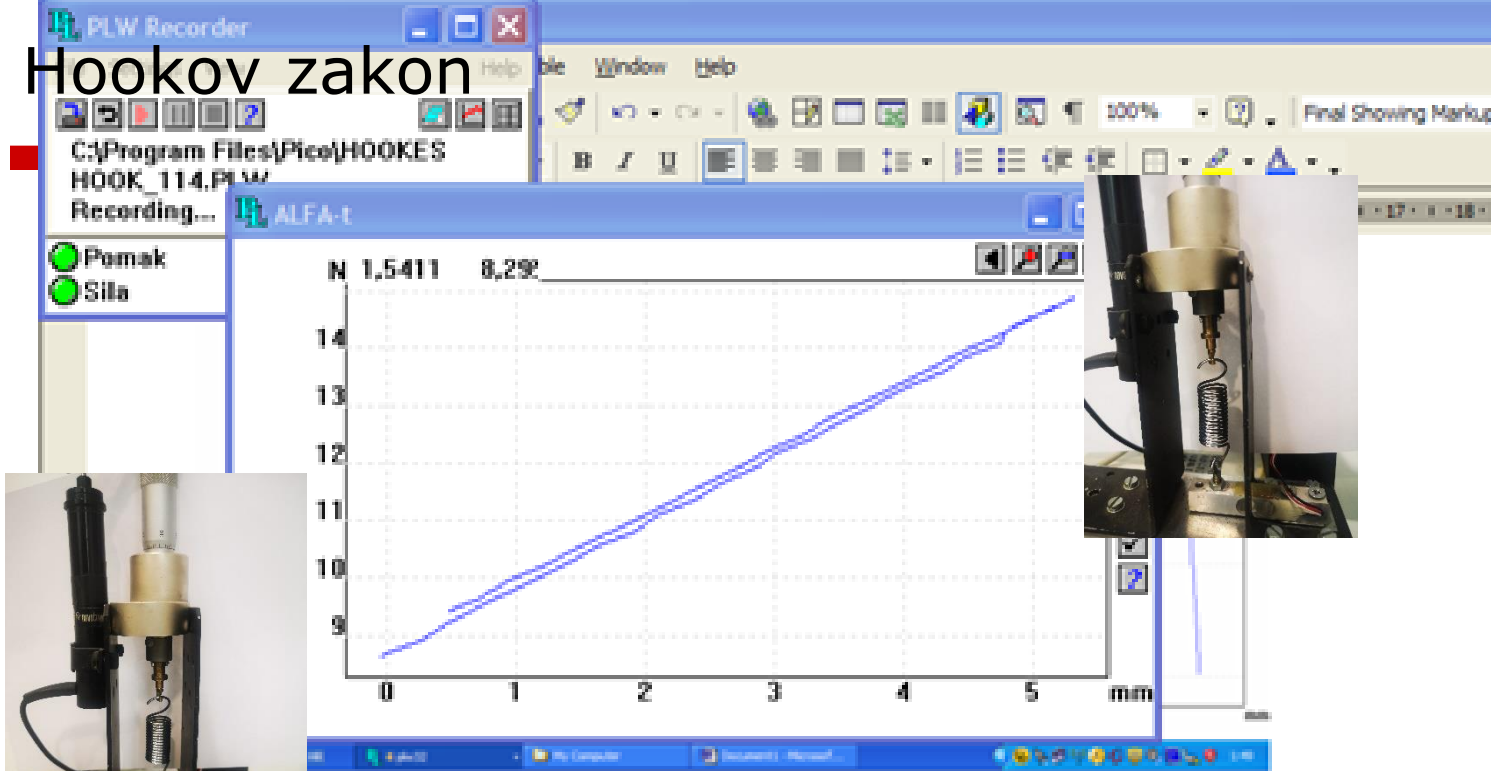
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Primjeri: Hookeov zakon

- Uzorak (opruga krutosti k) je obješen na mikrovijak pomoću kojeg se u oprugu unose deformacije.
- Mikrovijak je spojen s pretvaračem pomaka koji informaciju o pomaku šalje računalu.
- Drugi kraj uzorka povezan je s pretvaračem sile koji informaciju o sili šalje računalu.



Hookov zakon



Time	Sila	Pomak
23	9,96	0,9462
24	10,02	1,0199
25	10,10	1,0912
26	10,10	1,0912
27	10,17	1,1614
28	10,26	1,2523
29	10,37	1,3245
30	10,50	1,4324
31	10,63	1,5638
32	10,78	1,7135
33	10,95	1,8697
34	11,17	2,0655

Hookov zakon

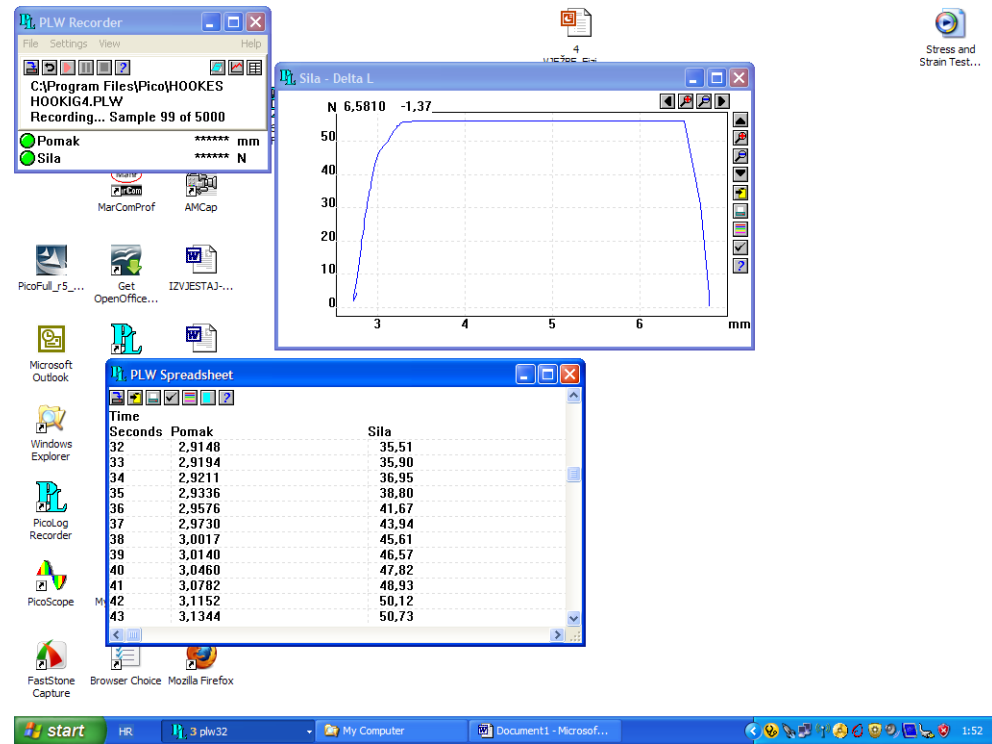
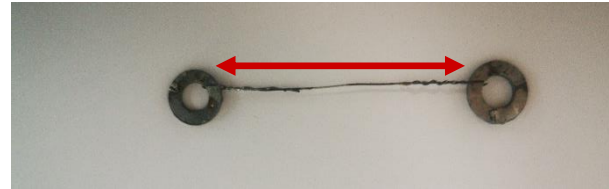
Tablica 1. Sila potrebna za jedinično produljenje opruge

Produljenje opruge Δl [mm]	Sila F [N]	Promjena sile ΔF [N]
0	-	-
1	10,00	1,14
2	11,14	1,14
3	12,28	1,14
4	13,32	1,13
5	14,45	
6	-	

$$\text{Krutost opruge } k = \frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{1,14 \text{ N}}{1 \text{ mm}} = 1,14 \text{ N/mm}$$

Modul elastičnosti i čvrstoća žice

Promjer žice \varnothing [mm]	L_0 [mm]
0,3	40 mm



Modul elastičnosti i čvrstoća žice



Modul elastičnosti i čvrstoća žice

Tablica 2. sila loma i deformacija žice

F_{\max} [N]	Elastično područje			
	F_1 [N]	Δl_1 [mm]	F_2 [N]	Δl_2 [mm]
56,13	20.13	2.8151	30.02	2.8819

Čvrstoća žice $\sigma =$????

Modul elastičnosti žice $E =$?????

PONOVIMO OSNOVNE POJMOVE

□ **Naprezanja**

- unutarnja reakcija tijela na djelovanje vanjske sile svedene po jedinici površine [N/mm^2 , MPa].

□ **Deformacija**

- promjena dimenzije tijela po jedinici duljine uslijed djelovanja vanjske sile [bezd. veličina, mm/m, ‰].

□ **Poissonov koeficijent**

- omjer poprečne i uzdužne deformacije u el. području [bez. veličina].

□ **Youngov modul elastičnosti**

- omjer naprezanja i deformacija u elastičnom području [GPa].

□ **Čvrstoća**

- Najveće naprezanje koje materijal može doseći prije loma; otpornost materijala deformaciji i lomu [N/mm^2 , MPa].

ZADATAK 1

- Bakrena šipka ($E=110$ GPa) ima elastičnu deformaciju u području naprezanja manjim od 95 MPa.
 - a) Koja je minimalna dimenzija kvadratičnog poprečnog presjeka bakrene šipke koja će podnijeti opterećenje od 1340 kg ne prelazeći granicu elastičnosti?
 - b) Kolika je deformacija šipke uslijed navedenog opterećenja?

Rješenje:

a) $1340 \text{ kg} \times g = 13\,400 \text{ N}$

$\approx 10 \text{ m/s}^2$
↙

$$\sigma = \frac{F}{A} \longrightarrow A = \frac{F}{\sigma} = \frac{13400}{95} = 141,05 \text{ mm}^2 \longrightarrow b = 11,8 \text{ mm}$$

b) $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{95}{110000} = 0,00086$

ZADATAK 2

Kružna čelična šipka, početnog promjera 20 mm i duljine 2 m, vlačno je opterećena masom od 2000 kg.

- a) Ako je modul elastičnosti šipke 200 GPa, koliko se produjli šipka pod spomenutim opterećenjem?
- b) Ako je Poissonov omjer čelika 0,4 koliki je promjer šipke pod opterećenjem?

Rješenje:

- Poprečni presjek šipke:

$$A = \frac{(20 \times 10^{-3})^2 \times \pi}{4} = 3,14 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

- Opterećenje šipke:

$$F = 2000 \text{ kg} \times \mathbf{g} = 2 \times 10^4 \text{ N}$$

↖
 $\approx 10 \text{ m/s}^2$

ZADATAK 2 - rješenje

Rješenje:

a) Naprezanje u šipki:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{(2 \times 10^4)}{3,14 \times 10^{-4}} = 6,4 \times 10^7 \text{ Pa}$$

Deformacija šipke:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{6,4 \times 10^7}{200 \times 10^9} = 3,2 \times 10^{-4}$$

Nova duljina šipke:

$$l = l_0 + \varepsilon l_0 = 2 + (3,2 \times 10^{-4} \times 2) = 2,00064 \text{ m}$$

ZADATAK 2 - rješenje

Rješenje:

b) Bočna deformacija uzrokovana vl. opterećenjem:

$$\varepsilon_p = \nu \times \varepsilon_u = 0,4 \times 3,2 \times 10^{-4} = 1,28 \times 10^{-4}$$

- Promjena promjera:

$$\delta = \varepsilon_p \times 2r = 1,28 \times 10^{-4} \times 0,02 = 2,56 \times 10^{-6} \text{ mm}$$

- Novi promjer šipke:

$$2r_{kon} = 0,02 - 2,56 \times 10^{-6} = 1,9999744 \times 10^{-2} \text{ m} = 19,99744 \text{ mm}$$

ZADATAK 3

Armiranobetonski stup, visine 0,5 m, se uslijed opterećenja u el. području skrati za 0,25 mm. Ako je modul elastičnosti betona 25 GPa, a čelične šipke (ubetonirane u stup) je 200 GPa, koliko iznose naprezanja u betonu, a koliko u čeličnoj šipki.

$$E_1 = 25\text{GPa} = 25 \times 10^3 \text{MPa}$$

$$E_2 = 200\text{GPa} = 200 \times 10^3 \text{MPa}$$

$$l_0 = 0,5\text{m}$$

$$\Delta l = 0,25\text{mm} = 0,25 \times 10^{-3} \text{m}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\varepsilon = \frac{0,25 \times 10^{-3}}{0,5} = 5 \times 10^{-4}$$

$$\sigma_b = E_b \times \varepsilon$$

$$\sigma_b = 25 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-4} = 12,5 \text{MPa}$$

$$\sigma_{\check{c}} = E_{\check{c}} \times \varepsilon =$$

$$= 200 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-4} = 100 \text{MPa}$$

ZADATAK 4

Spremnik za vodu se nalazi na 4 jednaka drvena stupa koji jednako prenose opterećenje. Svaki stup ima kvadratični poprečni presjek sa stranicom 50 mm, i dužinu od 1 m. Kada se spremnik napuni s vodom volumena $0,8 \text{ m}^3$, svaki stup se skрати za 0,07 mm.

- a) Koliko iznosi Youngov modul elastičnosti drvenih stupova u smjeru opterećenja?
- b) Ako se dimenzija poprečnog presjeka drvenih stupova, uslijed opterećenja promijeni na 50,00015 mm, koliko iznosi Poissonov omjer drveta?
- c) Ako se iz spremnika ispumpa 300L vode, kolike će biti dimenzije stupova?

Pretpostaviti da su deformacije u elastičnom području. Ne uzima se u obzir težina spremnika.

ZADATAK 4 - rješenje

Rješenje:

a) Koliko iznosi Youngov modul elastičnosti drvenih stupova u smjeru opterećenja?

U volumenu od $0,8 \text{ m}^3$ se nalazi masa od 800 kg , pa je prema tome djelovanje na stupove $800 \times g = 8000 \text{ N}$

$$\sigma = \frac{F}{4xA} = \frac{8000}{(4 \times 0,05 \times 0,05)} = 8 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$\varepsilon_u = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{0,07}{1000} = 7 \times 10^{-5}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{8 \times 10^5}{7 \times 10^{-5}} = 11,4 \times 10^9 \text{ Pa} = 11,4 \text{ GPa}$$

ZADATAK 4 - rješenje

Rješenje:

- b) Ako se dimenzija poprečnog presjeka drvenih stupova, uslijed opterećenja promijeni na 50,00015 mm, koliko iznosi Poissonov omjer drveta?**

$$\Delta d_2 = 50,00015 - 50 = 0,00015 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta d}{d_0} = \frac{0,00015}{50} = 3 \times 10^{-6}$$

$$\nu = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_u} = \frac{3 \times 10^{-6}}{7 \times 10^{-5}} = 0,043$$

ZADATAK 4 - rješenje

Rješenje

c) Ako se iz spremnika ispumpa 300L vode, kolike će biti dimenzije stupova?

300 l vode ima masu 300 kg → masa vode u spremniku je sada $800-300=500\text{kg}$
Promjene u dimenzijama stupova su proporcionalne promjeni opterećenja, tj.
 $500/800 = 0,625$ dimenzija iz dijela zadatka pod b) će biti:

$$0,07 \times 0,625 = 0,044 \text{ mm}$$

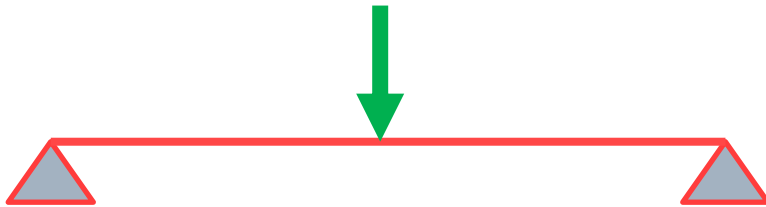
$$\text{pa je dužina stupa } 1000 - 0,044 = 999,956 \text{ mm}$$

$$0,00015 \times 0,625 = 0,000094 \text{ mm}$$

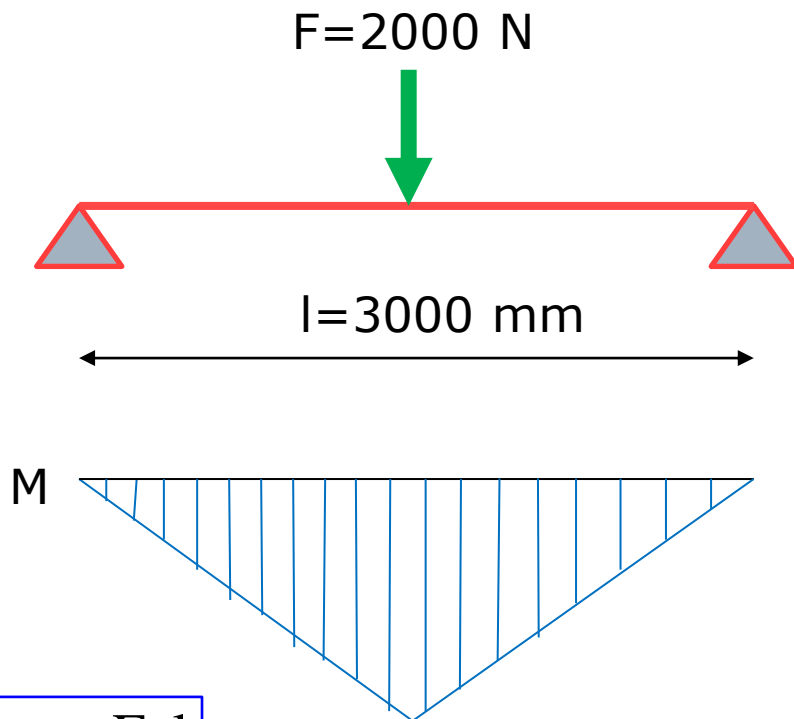
$$\text{pa je dimenzija pop. presjeka } 50 + 0,000094 = 50,000094 \text{ mm}$$

ZADATAK 5

- Kolika mora biti debljina daske na improviziranom prijelazu (kao na slici) kako bi čovjek težine 2 kN mogao prijeći preko rijeke. Raspon daske je 3000 mm.
- Daska je širine 20 cm, a čvrstoća na savijanje je 100 MPa.



Rješenje



$$M = \frac{F \cdot l}{4}$$

$$M = \frac{2000 \times 3000}{4} = 1\,500\,000 \text{ Nmm}$$



$$W = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$W = \frac{200 \times h^2}{6} = ???$$



Rješenje

$$\sigma_s = \frac{M}{W}$$

Sjetimo se...

- zadana je čvrstoća na savijanje σ_s drveta
- $\sigma_s = 100 \text{ MPa} = 100 \text{ N/mm}^2$

$$100 = \frac{1500000}{\frac{200 \times h^2}{6}}$$

$$h^2 = \frac{1500000}{\frac{200 \times 100}{6}}$$

$$h = \sqrt{450} = 21,21 \text{ mm}$$

