Poglavlje 5
Slučajne varijable

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. **Slučajna varijabla** je funkcija

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Slučajne varijable s obzirom na njihovu sliku $R(X)$ dijelimo na

(i) **diskretne** - slika $R(X)$ je konačan ili prebrojiv skup (npr. broj automobila, broj ljudi,...)

(ii) **neprekidne** - slika $R(X)$ je neki interval (npr. količina vode, vrijeme, ...)

5.1. Diskretne slučajne varijable

Diskretna slučajna varijabla određena je svojom slikom $R(X)$ i brojevima (distribucijom) $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ za $x_i \in R(X)$. Jasno je da je

$$\sum_{x_i \in R(X)} p_i = \sum_{x_i \in R(X)} \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(X \in R(X)) = 1.$$

Svaku diskretnu slučajnu varijablu zapisujemo tablično

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}$$

i tu tablicu nazivamo **funkcija vjerojatnosti od** X i pišemo

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Funkcija distribucije $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ diskretne slučajne varijable X je definirana relacijom

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \in R(X), x_i \leq x} p_i$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Očekivanje od X, u oznaci $\mathbb{E}(X)$, je broj definiran s

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x_i \in R(X)} x_i \cdot p_i.$$

Ovaj broj daje usrednjenje (srednju vrijednost) slučajne varijable X.

Svojstva očekivanja:

(i) $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

(ii) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$, gdje su X i Y diskretne slučajne varijable.

Varijanca od X u oznaci $\mathrm{Var}(X)$, je broj definiran s

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \sum_{x_i \in R(X)} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \cdot p_i = \sum_{x_i \in R(X)} x_i^2 \cdot p_i - \mathbb{E}(X)^2.\end{aligned}$$

Svojstva varijance:

(i) $\mathrm{Var}(\lambda X) = \lambda^2 \mathrm{Var}(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

(ii) $\mathrm{Var}(X + \lambda) = \mathrm{Var}(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Standardna devijacija od X, u oznaci $\sigma(X)$, je broj dan formulom

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Zadatak (5.1.)

Diskretna slučajna varijabla X zadana je funkcijom vjerojatnosti

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

a) Odredite sliku slučajne varijable X.
b) Odredite funkciju distribucije varijable X.
c) Prikažite grafički funkciju distribucije varijable X.

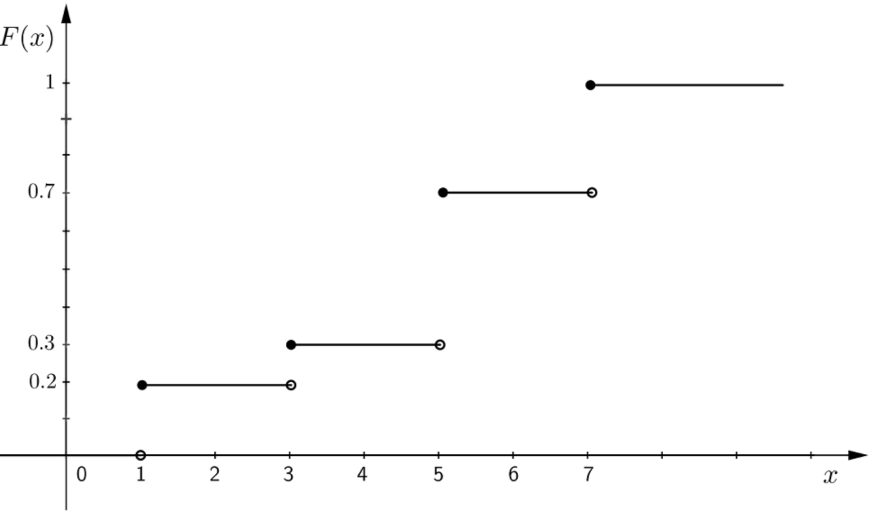
Rješenje:

a) Slika slučajne varijable X: $R(X) = \{1, 3, 5, 7\}$.

b) Funkcija distribucije od X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.2, & 1 \leq x < 3 \\ 0.3, & 3 \leq x < 5 \\ 0.7, & 5 \leq x < 7 \\ 1, & x \geq 7 \end{cases}$$

c) Graf funkcije distribucije:


F(x)
1
0.7
0.3
0.2
0
1
2
3
4
5
6
7
x

Zadatak (5.3.)

Diskretna slučajna varijabla X zadana je funkcijom vjerojatnosti $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 2 & 2.5 & 6 & 8 \\ C & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 2C \end{pmatrix}$. Odredite

a) konstantu C,
b) očekivanje i varijancu,
c) $\mathbb{P}(1 \leq X < 6)$ i $\mathbb{P}(3 \leq X)$.

Rješenje:

a) Znamo da mora vrijediti $C + 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.1 + 2C = 1$. Prema tome, $C = 0.1$

b) Određujemo očekivanje slučajne varijable X:

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot 0.1 + 1.5 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 + 2.5 \cdot 0.3 + 6 \cdot 0.1 + 8 \cdot 0.2 = 3.6.$$

Sada možemo izračunati i varijancu od X:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= 1^2 \cdot 0.1 + 1.5^2 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.2 + 2.5^2 \cdot 0.3 + 6^2 \cdot 0.1 \\ &\qquad + 8^2 \cdot 0.2 - 3.6^2 \\ &= 6.44.\end{aligned}$$

c) Tražene vjerojatnosti iznose:

$$\mathbb{P}(1 \leq X < 6) = 0.1 + 0.1 + 0.2 + 0.3 = 0.7 \qquad \text{i}$$
$$\mathbb{P}(3 \leq X) = 0.1 + 0.2 = 0.3.$$

Zadatak (5.4.)

Bacamo dvije igraće kocke. Neka je X razlika većeg i manjeg broja koji su pali.

a) Odredite funkciju vjerojatnosti slučajne varijable X.
b) Odredite i skicirajte funkciju distribucije slučajne varijable X.
c) Izračunajte $\mathbb{P}(1 < X \leq 3)$, $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 5)$ i $\mathbb{P}(0 \leq X < 3)$.
d) Izračunajte očekivanje i varijancu slučajne varijable X.

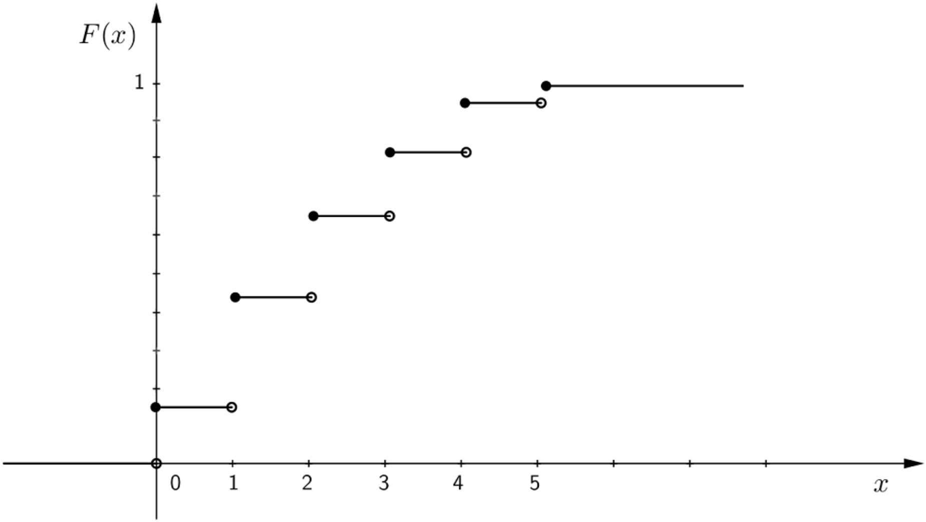
Rješenje: a) Funkcija vjerojatnosti od X je određena sljedećom tablicom:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{6}{36} & \frac{10}{36} & \frac{8}{36} & \frac{6}{36} & \frac{4}{36} & \frac{2}{36} \end{pmatrix}.$$

b) Funkcija distribucije od X ima oblik:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{6}{36}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{16}{36}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{24}{36}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{30}{36}, & 3 \leq x < 4 \\ \frac{34}{36}, & 4 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

Graf funkcije distribucije od X je prikazan na sljedećoj slici:


F(x)
1
0
1
2
3
4
5
x

c) Tražene vjerojatnosti iznose:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(1 < X \leq 3) &= \frac{8}{36} + \frac{6}{36} = \frac{7}{18}, \\
\mathbb{P}(2 \leq X \leq 5) &= \frac{8}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{5}{9} \qquad \text{i} \\
\mathbb{P}(0 \leq X < 3) &= \frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

d) Očekivanje od X iznosi:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_i = 0 \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + \cdots + 5 \cdot \frac{2}{36} = \frac{70}{36} = 1.944$$

Varijanca od X je jednaka:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i x_i^2 p_i - (\mathbb{E}X)^2 = 0^2 \cdot \frac{6}{36} + 1^2 \cdot \frac{10}{36} + \cdots + 5^2 \cdot \frac{2}{36} - 1.944^2 = 2.054.$$

Zadatak (5.7.)

Diskretne slučajne varijable X i Y zadane su funkcijama vjerojatnosti

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}, \qquad Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Opišite varijable $Z = 3X + 1$ i $V = Y^2$.

Rješenje: Odredimo najprije očekivanja i varijance slučajnih varijabli X i Y:

$$\mathbb{E}X = 0.4 + 0.2 + 0.9 = 1.5, \quad \operatorname{Var} X = 0.4 + 0.4 + 2.7 - 1.5^2 = 1.25$$

i

$$\mathbb{E}Y = -0.2 + 0.3 + 0.2 = 0.3, \quad \operatorname{Var} Y = 0.2 + 0.3 + 0.4 - 0.09 = 0.81.$$

Nađimo sada funkciju vjerojatnosti, očekivanje i varijancu slučajne varijable Z:

$$Z \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{E}Z = 5.5 \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Var} Z = 9 \operatorname{Var} X = 9 \cdot 1.25 = 11.25.$$

Sada određujemo funkciju vjerojatnosti, očekivanje i varijancu slučajne varijable V:

$$V \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{E}V = 0.9 \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Var} V = 2.1 - 0.9^2 = 1.29.$$

Zadatak (5.8.)

Diskretna slučajna varijabla X zadana je funkcijom vjerojatnosti
$X \sim \begin{pmatrix} -e & -1 & 1 & e & e^2 \\ 0.3 & 0.1 & x & 3x & 0.2 \end{pmatrix}$. Odredite

a) broj x,
b) funkciju vjerojatnosti slučajne varijable $Y = \ln |X|$,
c) funkciju distribucije F_Y slučajne varijable Y,
d) očekivanje $\mathbb{E}(Y)$ slučajne varijable Y.

Rješenje:

a) Znamo da vrijedi $0.3 + 0.1 + x + 3x + 0.2 = 1$, pa je $x = 0.1$.

b) Funkcija vjerojatnosti slučajne varijable Y je dana tablicom:

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

c) Funkcija distribucije slučajne varijable Y ima oblik:

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.2, & 0 \leq x < 1 \\ 0.8, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

d) Očekivanje slučajne varijable Y je jednako:

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.2 = 1.$$

Domaća zadaća

Zadatak (5.2.)

Odredite matematičko očekivanje i standardnu devijaciju diskretne slučajne varijable X zadane funkcijom vjerojatnosti
$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 & ? \end{pmatrix}$.

Rješenje: Najprije moramo odrediti vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednost 4:

$$\mathbb{P}(X = 4) = 1 - 0.4 - 0.3 - 0.1 = 0.2.$$

Sada računamo matematičko očekivanje slučajne varijable X:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_i = 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.2 = 2.1.$$

Da bismo našli standardnu devijaciju, moramo najprije odrediti varijancu slučajne varijable X:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i x_i^2 p_i - (\mathbb{E}X)^2 = 1^2 \cdot 0.4 + 2^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.1 + 4^2 \cdot 0.2 - 2.1^2 = 1.29.$$

Standardna devijacija slučajne varijable X iznosi:

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{1.29} = 1.136.$$

Domaća zadaća

Zadatak (5.5.)

Promatramo slučajan pokus bacanja dvije igraće kocke i slučajnu varijablu $X=$ suma brojeva koji su pali.

a) Odredite funkciju vjerojatnosti i funkciju distribucije slučajne varijable X.

b) Izračunajte vjerojatnost da je zbroj brojeva koji su pali veći od 4, a manji ili jednak 8.

c) Izračunajte očekivanje i varijancu slučajne varijable X.

Rješenje: a) Funkcija vjerojatnosti od X ima oblik:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Odredimo funkciju distribucije od X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{1}{36}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{36}, & 3 \leq x < 4 \\ \frac{6}{36}, & 4 \leq x < 5 \\ \frac{10}{36}, & 5 \leq x < 6 \\ \frac{15}{36}, & 6 \leq x < 7 \\ \frac{21}{36}, & 7 \leq x < 8 \\ \frac{26}{36}, & 8 \leq x < 9 \\ \frac{30}{36}, & 9 \leq x < 10 \\ \frac{33}{36}, & 10 \leq x < 11 \\ \frac{35}{36}, & 11 \leq x < 12 \\ 1, & x \geq 12 \end{cases}$$

b) Tražena vjerojatnost iznosi:

$$\mathbb{P}(4 < X \leq 8) = \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{20}{36}.$$

c) Očekivanje od X iznosi:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_i = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \cdots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7.$$

Varijanca od X je jednaka:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i x_i^2 p_i - (\mathbb{E}X)^2 = 2^2 \cdot \frac{1}{36} + 3^2 \cdot \frac{2}{36} + \cdots + 12^2 \cdot \frac{1}{36} - 7^2 = 5.83.$$

Domaća zadaća

Zadatak (5.6.)

Ispravan novčić bačen je četiri puta. Neka X označava broj pisama u najduljem nizu. Odredite funkciju vjerojatnosti, očekivanje i varijancu slučajne varijable X.

Rješenje: Broj pisama u najduljem nizu ne mora biti ukupan broj pisama koje se pojavljuju, jer je npr. $X(p,g,p,g) = 1$, a $X(p,p,g,g) = 2$.

Skup svih ishoda opisanog eksperimenta je dan sa

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_i \in \{p, g\}, i = 1, 2, 3, 4\},$$

pa je

$$n_\Omega = 2^4 = 16.$$

Slika slučajne varijable X ima oblik

$$R(X) = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Odredimo vjerojatnosti da slučajna varijabla X postiže vrijednosti iz $R(X)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0) &= \mathbb{P}(\{(g,g,g,g)\}) = \frac{1}{16}, \\
\mathbb{P}(X=1) &= \mathbb{P}(\{(p,g,g,g),(g,p,g,g),(g,g,p,g), \\
&\qquad (g,g,g,p),(p,g,p,g),(g,p,g,p),(p,g,g,p)\}) = \frac{7}{16}, \\
\mathbb{P}(X=2) &= \mathbb{P}(\{(p,p,g,g),(g,p,p,g),(g,g,p,p), \\
&\qquad (p,p,g,p),(p,g,p,p)\}) = \frac{5}{16}, \\
\mathbb{P}(X=3) &= \mathbb{P}(\{(p,p,p,g),(g,p,p,p)\}) = \frac{2}{16} \qquad \text{i} \\
\mathbb{P}(X=4) &= \mathbb{P}(\{(p,p,p,p)\}) = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Sada možemo napisati funkciju vjerojatnosti

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{5}{16} & \frac{2}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix},$$

a zatim i izračunati očekivanje i varijancu

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_i x_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{7}{16} + 2 \cdot \frac{5}{16} + 3 \cdot \frac{2}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{27}{16}, \\ \mathrm{Var}(X) &= \sum_i x_i^2 p_i - (\mathbb{E}X)^2 \\ &= 0^2 \cdot \frac{1}{16} + 1^2 \cdot \frac{7}{16} + 2^2 \cdot \frac{5}{16} + 3^2 \cdot \frac{2}{16} + 4^2 \cdot \frac{1}{16} - (\frac{27}{16})^2 \\ &= \frac{247}{256}. \end{aligned}$$

Domaća zadaća

Zadatak (5.9.)

Diskretna slučajna varijabla zadana je funkcijom vjerojatnosti $X \sim \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \end{pmatrix}$. Odredite funkciju vjerojatnosti slučajne varijable $Y = \sin X$.

Rješenje: Budući da je slika slučajne varijable X jednaka

$$R(X) = \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\},$$

onda slika slučajne varijable Y mora biti

$$R(Y) = \{\sin\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{2}, \sin\frac{3\pi}{4}\} = \{\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\}.$$

Prema tome, funkcija vjerojatnosti slučajne varijable Y ima oblik:

$$Y \sim \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$