Neprekidne slučajne varijable

Diskretne slučajne varijable u potpunosti su određene

- svojom slikom
- i funkcijom vjerojatnosti (tj. vjerojatnostima $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$, $x_i \in R(X)$).

Neprekidne slučajne varijable kao sliku imaju neprebrojiv skup u $\mathbb{R}$ i one uglavnom modeliraju probleme koji su po svojoj prirodi neprekidni: masa ili volumen nečega, količina proteklog vremena itd.

U tom slučaju vjerojatnosti $\mathbb{P}(X = x)$, $x \in R(x)$, neće biti od prevelike koristi, tj. uvijek će biti nula.

Neprekidne slučajne varijable nećemo opisivati funkcijama vjerojatnosti!

Funkcija gustoće

Slučajna varijabla $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je **neprekidna** ako postoji ("izmjeriva") funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:

(i) $f(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R},$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1,$

(iii) $\displaystyle\mathbb{P}(X \leqslant a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx, \qquad a \in \mathbb{R}.$

Funkciju $f(x)$ zovemo **funkcija gustoće** od X.

Iz svojstva (iii) slijedi da za sve $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$, vrijedi

$$\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Isto tako, vrijedi i

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b).$$

Funkcija raspodjele

Funkcija raspodjele od X je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s

$$\boxed{F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x).}$$

Vrijedi sljedeće:

(i) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ i $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$,

(ii) $F(x)$ je neopadajuća,

(iii) $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}$,

(iv) $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$,

(v) ako je $f(x)$ po dijelovima neprekidna, onda $F'(x) = f(x)$ osim možda u točkama prekida od $f(x)$.

Determinističke karakteristike

Kao i za diskretne slučajne varijable, uvodimo i determinističke karakteristike neprekidnih slučajnih varijabli.

To su:

(1) očekivanje

(2) varijanca

(3) standardna devijacija

Očekivanje

Za neprekidnu slučajnu varijablu X definiramo **očekivanje** od X (ako donji integral postoji) s

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx.}$$

Vrijedi sljedeće:

(i) $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X), \quad \lambda \in \mathbb{R}$,

(ii) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

Varijanca i standardna devijacija

Varijancu od X (ako donji integral postoji) definiramo s

$$\boxed{\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2)] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x) dx.}$$

Također, lagano se pokaže

$$\boxed{\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mathbb{E}(X)^2.}$$

Vrijedi sljedeće:

(i) $\operatorname{Var}(\lambda X) = \lambda^2 \operatorname{Var}(X), \quad \lambda \in \mathbb{R}$,

(ii) $\operatorname{Var}(X + \lambda) = \operatorname{Var}(X)$.

Standardnu devijaciju od X (ako X ima varijancu) definiramo s

$$\sigma(X) = \sqrt{\operatorname{Var}(X)}.$$

Napomenimo sljedeće:

(i) ako je X neprekidna slučajna varijabla sa slikom $R(X)$ i funkcijom gustoće $f(x)$ i $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ neka funkcija, tada je $g(X)$ slučajna varijabla definirana na istom vjerojatnosnom prostoru kao i X, ima sliku $g(R(X))$ i vrijedi (ako donji integrali postoje)

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx,$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(g(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (g(x) - \mathbb{E}(g(X))^2 f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x)f(x)dx - \mathbb{E}(g(X))^2.\end{aligned}$$

U definicijama očekivanja i varijance od X smo imali $g(x) = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, i $g(x) = (x - \mathbb{E}(X))^2$.

(ii) ako su X i Y dvije neprekidne slučajne varijable definirane na istom vjerojatnosnom prostoru, onda je i $X+Y$ slučajna varijabla definirana na istom vjerojatnosnom prostoru kao X i Y te vrijedi

$$R(X+Y) \subseteq \{x+y : x \in R(X),\ y \in R(Y)\}.$$

Međutim, uočimo da $X+Y$ nije nužno neprekidna (npr. ako je $Y=-X$, onda je $X+Y=0$).

(iii) rekli smo da ako su X i Y iste vrste (obje diskretne ili obje neprekidne), onda vrijedi $\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$. Međutim, ta relacija vrijedi i ako nisu iste vrste.

Primjer (3.18.)

Promotrimo slučajni pokus biranja jedne točke iz segmenta $[a, b]$. Neka je X slučajna varijabla čija je vrijednost izabrana točka. Odredimo funkcije gustoće i raspodjele od X te izračunajmo pripadno očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju.

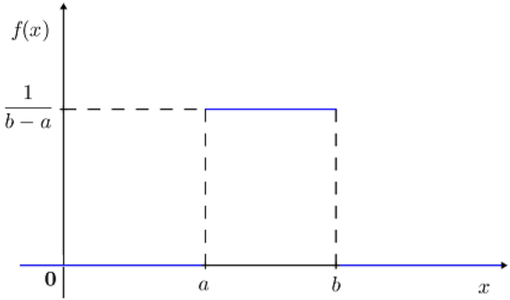
Očito je $\Omega = [a, b]$ i $X : \Omega \to [a, b]$ je dana s $X(\omega) = \omega$. Imamo

$$\mathbb{P}([c, d]) = \frac{d - c}{b - a}, \quad [c, d] \subseteq [a, b].$$

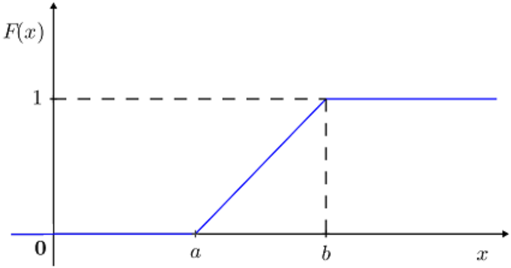
Dakle,

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x < b \\ 1, & x \geqslant b \end{cases}$$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & x > b \end{cases}$$



f(x)
1
b − a
0
a
b
x



F(x)
1
0
a
b
x

Sad možemo izračunati

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \mathbb{E}(X)^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

- Uočimo da funkcija gustoće ne mora biti neprekidna već samo funkcija raspodjele!
- Funkcija raspodjele diskretnih slučajnih varijabli je stepenastog oblika i očito ima prekid u svakoj točki slike.
- Dakle, slučajne varijable nazivamo diskretnim ili neprekidnim zbog svojstva njihove funkcije raspodjele (skokovita ili neprekidna).

Primjer (3.19.)

Biramo točku na slučajan način unutar kruga radijusa $r > 0$. Neka je X slučajna varijabla čija je vrijednost udaljenost odabrane točke od središta kruga. Odredimo $f(x)$, $F(x)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ i $\sigma(X)$.

Očito je $\Omega = \{\omega = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$ i $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je dana s

$$X(\omega) = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \omega = (x, y) \in \Omega.$$

Imamo

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{r^2\pi}, \qquad A \subseteq \Omega,$$

gdje $\mu(A)$ predstavlja površinu skupa A.

Dakle,

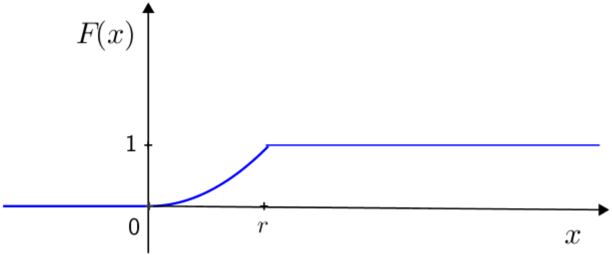
$$F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{r^2}, & 0 \leqslant x < r \\ 1, & x \geqslant r \end{cases}$$

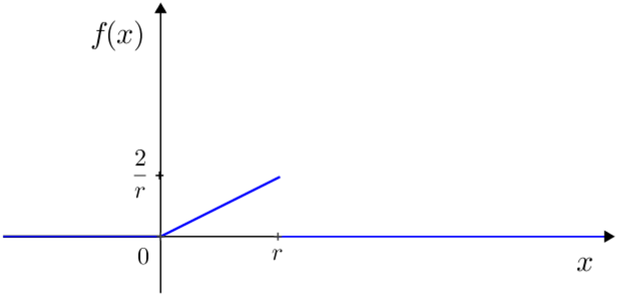
$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{2x}{r^2}, & 0 \leqslant x < r \\ 0, & x > r \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^r \frac{2x^2}{r^2}\,dx = \frac{2}{3}r$$

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \mathbb{E}(X)^2 = \int_0^r \frac{2x^3}{r^2}\,dx - \frac{4}{9}r^2 = \frac{1}{18}r^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \frac{r}{3\sqrt{2}}.$$


$F(x)$
1
0
r
x


$f(x)$
$\frac{2}{r}$
0
r
x

Primjer (3.20.)

Neka je X slučajna varijabla čija je vrijednost vrijeme trajanja akumulatora i dana je funkcijom raspodjele

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 \leqslant x < 2 \\ 1, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

Odredimo funkciju gustoće od X, izračunajmo pripadno očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju te odredimo vjerojatnost da se akumulator potrošio u razdoblju od 1.5 godine do 2 godine.

Imamo

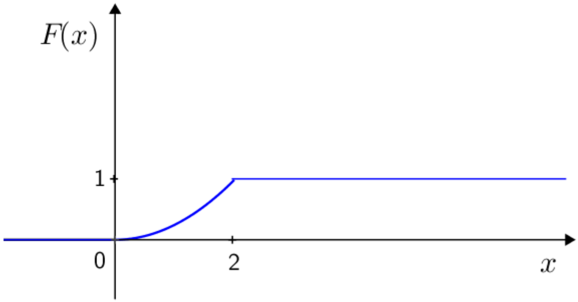
$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 \leqslant x < 2 \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

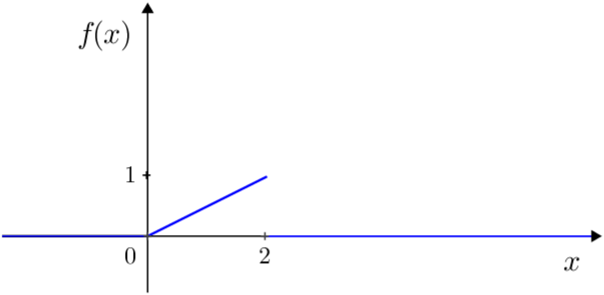
Dakle,

$$
\begin{aligned}
R(X) &= [0,2] \\
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}\, dx = \frac{4}{3} \\
\mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - \mathbb{E}(X)^2 = \int_0^2 \frac{x^3}{2}\, dx - \frac{16}{9} = \frac{2}{9} \\
\sigma(X) &= \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \frac{\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}
$$

Tražena vjerojatnost je

$$\mathbb{P}(1.5 < X \leqslant 2) = F(2) - F(1.5) = 0.4375.$$


F(x)
1
0
2
x


f(x)
1
0
2
x