# 5.2. Primjeri diskretnih slučajnih varijabli

# 5.2.1. Binomna slučajna varijabla

# Bernoullijeva slučajna varijabla

Diskretna slučajna varijabla $X$ je **Bernoullijeva** s parametrom $0 \leqslant p \leqslant 1$ ako je njena raspodjela oblika

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Ova slučajna varijabla može se interpretirati kao ishod pokusa koji može rezultirati samo uspjehom ili neuspjehom (vjerojatnost uspjeha je $p$).
Očito je

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}(X) = p(1-p).$$

# Binomna slučajna varijabla

Diskretna slučajna varijabla $X$ je **binomna** s parametrima $0 \leqslant p \leqslant 1$ i $n \geqslant 1$ ako je njena raspodjela oblika

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

gdje je

$$p_i = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Binomna slučajna varijabla jest broj uspjeha $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ u $n$ nezavisnih ponavljanja pokusa kod kojeg kao ishod imamo uspjeh s vjerojatnošću $p$ i neuspjeh s vjerojatnošću $1 - p$. Vjerojatnost od $i$ uspjeha i $n - i$ neuspjeha u $n$ nezavisnih ponavljanja pokusa je $p^i(1-p)^{n-i}$, a broj načina na koje možemo izabrati $i$ uspjeha od $n$ ponavljanja je $\binom{n}{i}$. Nije teško izračunati da je

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{i} \quad Var = np(1-p).$$

## Zadatak (5.10.)

Bacamo simetričnu kocku 3 puta. Neka je $X$ slučajna varijabla koja označava koliko je puta pao broj 6. Odredite funkciju vjerojatnosti slučajne varijable $X$. Odredite očekivani broj šestica u 3 bacanja.

Rješenje: Znamo da je $X=$"broj pojavljivanja šestice u 3 bacanja". Očito je $X$ binomna slučajna varijabla s parametrima $n = 3$ i $p = \frac{1}{6}$.
Odredimo vjerojatnosti da $X$ poprimi vrijednosti iz slike $R(X) = \{0, 1, 2, 3\}$:

$$f(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.5787,$$

$$f(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.3472,$$

$$f(2) = \mathbb{P}(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 = 0.0695 \quad \text{i}$$

$$f(3) = \mathbb{P}(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0 = 0.0046.$$

Funkcija vjerojatnosti slučajne varijable $X$ je zadana tablicom:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ f(0) & f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}.$$

Očekivani broj šestica u tri bacanja je jednak:

$$\mathbb{E}(X) = n \cdot p = \frac{1}{2}.$$

## Zadatak (5.12)

Strijelac gađa metu 3 puta. U svakom gađanju vjerojatnost pogotka iznosi $\frac{1}{2}$. Neka slučajna varijabla $X$ predstavlja broj pogodaka u metu. Odredite funkciju vjerojatnosti i funkciju distribucije slučajne varijable $X$. Kolika je vjerojatnost da će strijelac pogoditi metu jednom ili dva puta?

Rješenje:

Znamo da je $X$="broj pogodaka u metu u 3 gađanja", pa je jasno da je $X \sim B(3, \frac{1}{2})$.

Odredimo funkciju vjerojatnosti slučajne varijable $X$:

$$f(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.125,$$

$$f(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.375,$$

$$f(2) = \mathbb{P}(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0.375 \quad \text{i}$$

$$f(3) = \mathbb{P}(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0.125$$

Stoga je

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ f(0) & f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}.$$

Funkcija distribucije slučajne varijable $X$ ima oblik:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0 \\ 0.125, \quad 0 \leq x < 1 \\ 0.5, \quad 1 \leq x < 2 \\ 0.875, \quad 2 \leq x < 3 \\ 1, \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Vjerojatnost da će strijelac pogoditi metu jednom ili dva puta iznosi:

$$\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = 0.375 + 0.375 = 0.75.$$

# Domaća zadaća

## Zadatak (5.11)

Vjerojatnost da se tijekom jedne godine u nekom gradu dogodi potres iznosi $p = 0.2$. Pretpostavljamo da se u jednoj godini ne može dogoditi više od jednog potresa. Kolika je vjerojatnost da se tijekom 5 godina

a) ni u jednoj godini ne dogodi potres,

b) barem jedne godine pojavi potres?

c) Koliki je očekivani broj potresa u razdoblju od 10 godina i kolika je pripadna varijanca?

Rješenje: Uz oznaku $X=$"broj godina s potresom u promatranom razdoblju", očito je $X \sim B(n, 0.2)$.

a) Budući da je $n = 5$, vjerojatnost da se ni u jednoj godini ne dogodi potres iznosi:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{5}{0} 0.2^0 \cdot (1 - 0.2)^5 = 0.3277.$$

b) Uz $n = 5$, vjerojatnost da se barem jedne godine pojavi potres je jednaka:

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - 0.3277 = 0.6723.$$

c) Kako je $n = 10$, očekivani broj potresa računamo po formuli:

$$\mathbb{E}(X) = 10 \cdot 0.2 = 2,$$

a pripadnu varijancu pomoću izraza:

$$Var(X) = 10 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 1.6.$$

**Zadatak (5.13)**

Bacamo novčić pet puta. Kolika je vjerojatnost da se pojavilo pismo

a) točno tri puta,
b) više od dva puta,
c) između dva i četiri puta?

Uz oznaku $X=$"broj pojavljivanja pisama u 5 bacanja" vrijedi $X \sim B(5, 0.5)$.

a) Vjerojatnost da se pojavilo pismo točno tri puta iznosi:

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{5}{3} 0.5^3 \cdot 0.5^2 = 0.3125.$$

b) Vjerojatnost da se pojavilo pismo više od dva puta je jednaka:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 2) &= \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5)\\ &= \binom{5}{3} 0.5^5 + \binom{5}{4} 0.5^5 + \binom{5}{5} 0.5^5 = 0.5.\end{aligned}$$

c) Vjerojatnost da se pojavilo pismo između dva i četiri puta je:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4) &= \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4)\\ &= \binom{5}{2} 0.5^5 + \binom{5}{3} 0.5^5 + \binom{5}{4} 0.5^5 = 0.78125.\end{aligned}$$

# Poissonova slučajna varijabla

Diskretna slučajna varijabla $X$ je Poissonova s parametrom $\lambda > 0$, u oznaci $X \sim Poi(\lambda)$, ako vrijedi

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix},$$

gdje je

$$p_i = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Ova slučajna varijabla broji slučajne događaje u vremenu ili prostoru. Parametar $\lambda$ predstavlja prosječan broj slučajnih događaja u jedinici vremena ili prostora i vrijedi $\mathbb{E}(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.

## Zadatak (5.14.)

Broj prometnih nesreća na određenoj dionici puta u toku jednog mjeseca je Poissonova slučajna varijabla $X$ s parametrom $\lambda = 4$. Kolika je vjerojatnost da se tijekom nekog mjeseca

a) ne dogodi niti jedna nesreća,
b) dogode više od 3 nesreće?
c) Koliki je očekivani broj nesreća tijekom jednog mjeseca i kolika je pripadna varijanca?

Rješenje: Označimo sa $X =$ "broj prometnih nesreća u toku jednog mjeseca". Znamo da je $X \sim Poi(4)$.

a) Vjerojatnost da se tijekom nekog mjeseca ne dogodi niti jedna nesreća iznosi:
$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{4^0}{0!}e^{-4} = 0.01832$ .

b) Vjerojatnost da se tijekom nekog mjeseca dogode više od 3 nesreće je jednaka:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 3) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 3) \\
&= 1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3)) \\
&= 1 - \left(\frac{4^0}{0!}e^{-4} + \frac{4^1}{1!}e^{-4} + \frac{4^2}{2!}e^{-4} + \frac{4^3}{3!}e^{-4}\right) \\
&= 1 - (0.0183 + 0.0733 + 0.1465 + 0.1954) \\
&= 0.5665
\end{aligned}$$

c) Očekivani broj nesreća tijekom jednog mjeseca je jednak $\mathbb{E}(X) = 4$, dok pripadna varijanca iznosi $Var(X) = 4$.

## Zadatak (5.15.)

Na nekom graničnom prijelazu prođu prosječno 2 vozila u minuti. Kolika je vjerojatnost da će tijekom bilo koje minute proći

a) jedno vozilo?
b) najviše jedno vozilo?

Rješenje: Neka je $X=$"broj vozila koja prijeđu granični prijelaz u minuti". Tada je $\lambda = 2$ i $X \sim Poi(2)$.

a) Vjerojatnost da će tijekom bilo koje minute proći jedno vozilo iznosi: $\mathbb{P}(X=1) = \frac{2^1}{1!}e^{-2} = 0.2707$.

b) Vjerojatnost da će tijekom bilo koje minute proći najviše jedno vozilo je jednaka:
$\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = \dfrac{2^0}{0!}e^{-2} + \dfrac{2^1}{1!}e^{-2} =$
$0.1353 + 0.2707 = 0.4060.$

## Zadatak (5.16.)

Prodavač osiguranja proda prosječno tri police osiguranja tjedno. Izračunajte vjerojatnost da će u nekom tjednu prodati više od dvije a manje od pet polica osiguranja.

Rješenje: Označimo sa $X =$ "broj prodanih polica osiguranja u jednom tjednu". Tada je $\lambda = 3$ i $X \sim P(3)$.
Vjerojatnost da će u nekom tjednu prodavač uspjeti prodati više od dvije, a manje od pet polica osiguranja iznosi:
$\mathbb{P}(2 < X < 5) = \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) = \frac{3^3}{3!}e^{-3} + \frac{3^4}{4!}e^{-3} =$
$0.2240 + 0.1680 = 0.392.$

# Geometrijska slučajna varijabla

Diskretna slučajna varijabla $X$ je geometrijska s parametrom $0 < p \leqslant 1$, u oznaci $X \sim G(p)$, ako vrijedi

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix},$$

gdje je

$$p_i = (1-p)^{i-1}p, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Ova slučajna varijabla predstavlja broj nezavisnih ponavljanja eksperimenta koji mogu rezultirati uspjehom ili neuspjehom (vjerojatnost uspjeha je $p$) sve do prvog uspjeha. Dakle, $(1-p)^{i-1}p$ znači da u prvih $i-1$ ponavljanja imamo neuspjehe, a u $i$-tom ponavljanju dogodi se uspjeh. Nije teško vidjeti da je

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{i} \quad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

## Zadatak (5.17.)

U kutiji se nalazi 5 plavih i 10 zelenih kuglica. Izvlačimo kuglice jednu za drugom s vraćanjem u kutiju dok ne dobijemo plavu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da ćemo tek u sedmom izvlačenju dobiti plavu kuglicu? Koliki je očekivani broj izvlačenja?

Rješenje: Neka je $X =$ "broj izvlačenja dok se ne izvuče plava kuglica".
Uz $p = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ imamo da je $X \sim G(\frac{1}{3})$.
Vjerojatnost da ćemo tek u sedmom izvlačenju dobiti plavu kuglicu iznosi:
$\mathbb{P}(X = 7) = (1 - \frac{1}{3})^{7-1} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \frac{1}{3} = 0.0293.$
Očekivani broj izvlačenja je jednak $E(X) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$

## Zadatak (5.18.)

Student izlazi na ispit iz kolegija Vjerojatnost i statistika dok ga ne položi. Ako je vjerojatnost da će student položiti ispit svaki put jednaka $\frac{1}{4}$, kolika je vjerojatnost da će student položiti ispit na trećem izlasku?

Rješenje: Označimo sa $X =$ "broj izlazaka studenta na ispit dok ga ne položi". Tada je $X \sim G(\frac{1}{4})$.

Vjerojatnost da će student položiti ispit na trećem izlasku računamo po formuli:

$\mathbb{P}(X = 3) = (1 - \frac{1}{4})^{3-1} \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = 0.1406.$

## Zadatak (5.19.)

Poznato je da je u određenom procesu proizvodnje 20% proizvoda neispravno. Proizvode ispitujemo dok ne naiđemo na prvi neispravni proizvod. Kolika je vjerojatnost da ćemo ispitati samo 5 proizvoda?

Rješenje: Neka je $X$="broj ispitanih proizvoda do otkrivanja prvog neispravnog". Tada je $p = 0.2$ i $X \sim G(0.2)$.

Vjerojatnost da ćemo ispitati samo 5 proizvoda dok ne naiđemo na prvi neispravni proizvod iznosi:

$\mathbb{P}(X = 5) = (1 - 0.2)^{5-1} \cdot 0.2 = (0.8)^4 \cdot 0.2 = 0.0819.$