Primjeri neprekidnih slučajnih varijabli

Funkcija gustoće - podsjetnik

Slučajna varijabla $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je **neprekidna** ako postoji ("izmjeriva") funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:

(i) $f(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}$,

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$,

(iii) $\displaystyle\mathbb{P}(X \leqslant a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx, \qquad a \in \mathbb{R}$.

Funkciju $f(x)$ zovemo **funkcija gustoće** od X.

Iz svojstva (iii) slijedi da za sve $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$, vrijedi

$$\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Isto tako, vrijedi i

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b).$$

Funkcija raspodjele - podsjetnik

Funkcija raspodjele od X je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s

$$\boxed{F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x).}$$

Vrijedi sljedeće:

(i) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ i $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$,

(ii) $F(x)$ je neopadajuća,

(iii) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}$,

(iv) $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$,

(v) ako je $f(x)$ po dijelovima neprekidna, onda $F'(x) = f(x)$ osim možda u točkama prekida od $f(x)$.

Primjeri neprekidnih slučajnih varijabli: Uniformna slučajna varijabla

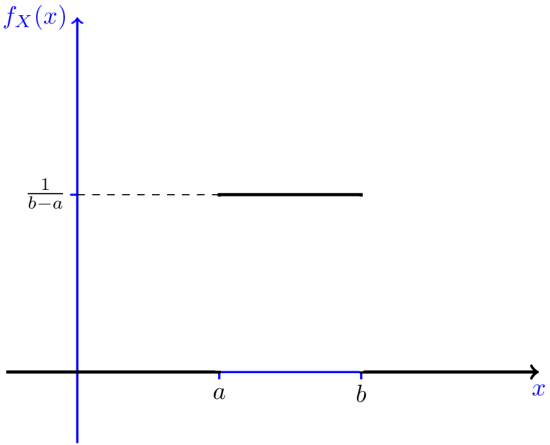
Uniformna slučajna varijabla

Uniformna slučajna varijabla X na segmentu $[a, b]$, u oznaci $X \sim U(a, b)$, je neprekidna slučajna varijabla za koju vrijedi:

- $R(X) = [a, b]$
- funkcija gustoće $f(x)$ je zadana kao

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Uniformna slučajna varijabla



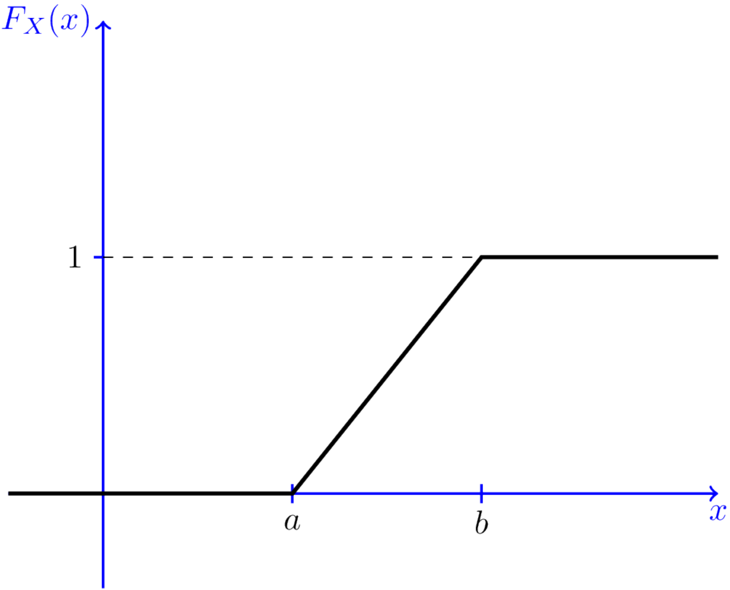
Slika: Funkcija gustoće uniformne slučajne varijable

Uniformna slučajna varijabla - funkcija raspodjele

Integriranjem dobivamo funkciju raspodjele

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x < b \\ 1, & x \geqslant b. \end{cases}$$

Uniformna slučajna varijabla



Uniformna slučajna varijabla

U Primjeru 3.18 izračunali smo

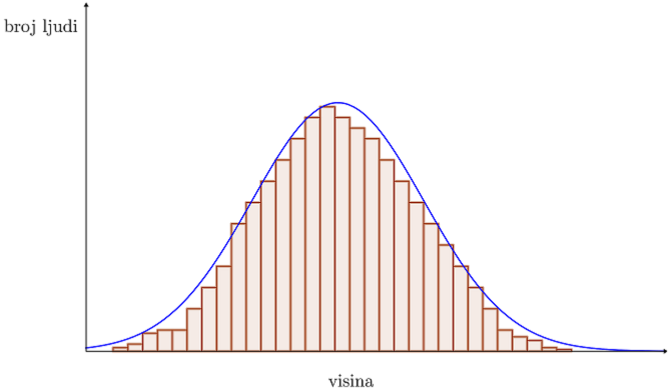
$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ova slučajna varijabla koristi se kod eksperimenata kod kojih je pripadnost ishoda jednako dugim podintervalima od $[a, b]$ jednako vjerojatna.

Primjeri neprekidnih slučajnih varijabli: Normalna slučajna varijabla

Normalna slučajna varijabla

Jedna je od najvažnijih i najčešće korištenih slučajnih varijabli.

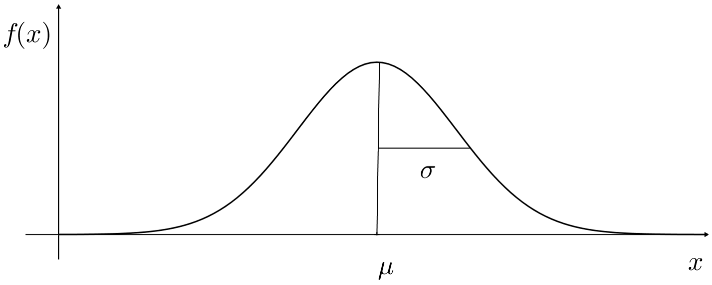


Slika: Ilustracija učestalosti različitih visina

Normalna slučajna varijabla – funkcija gustoće

Normalna slučajna varijabla X s parametrima $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$, u oznaci $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, je neprekidna slučajna varijabla dana s $R(X) = \mathbb{R}$ i funkcijom gustoće

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$



Slika: Funkcija gustoće normalne slučajne varijable

Normalna slučajna varijabla – očekivanje i varijanca

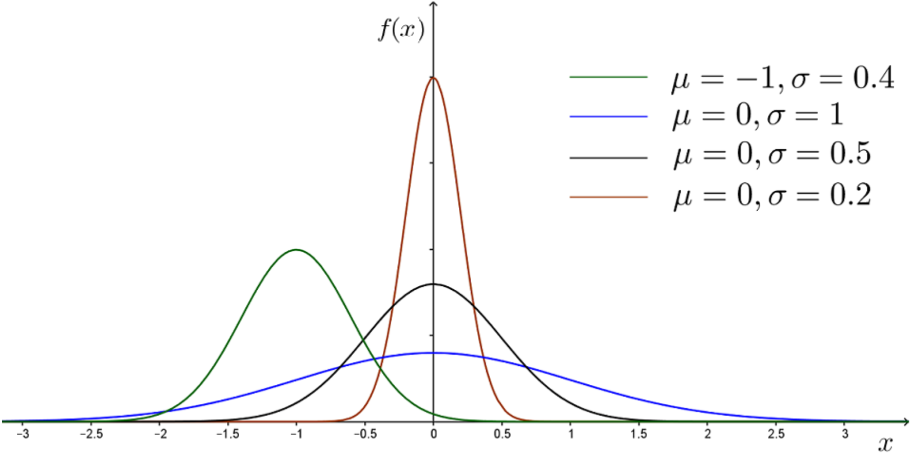
$f(x)$ je zvonolikog oblika, simetrična je oko μ i

$$\int_{-\infty}^{\mu} f(x)\,dx = \int_{\mu}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Parametar μ zovemo parametrom lokacije, a σ^2 zovemo parametrom raspršenja. Naime, vrijedi

$$\mathbb{E}(X) = \mu \qquad \text{i} \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2.$$

Normalna slučajna varijabla



Slika: Funkcije gustoća različitih normalnih slučajnih varijabli

Normalna slučajna varijabla – funkcija raspodjele

Funkcija raspodjele od $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dana je s

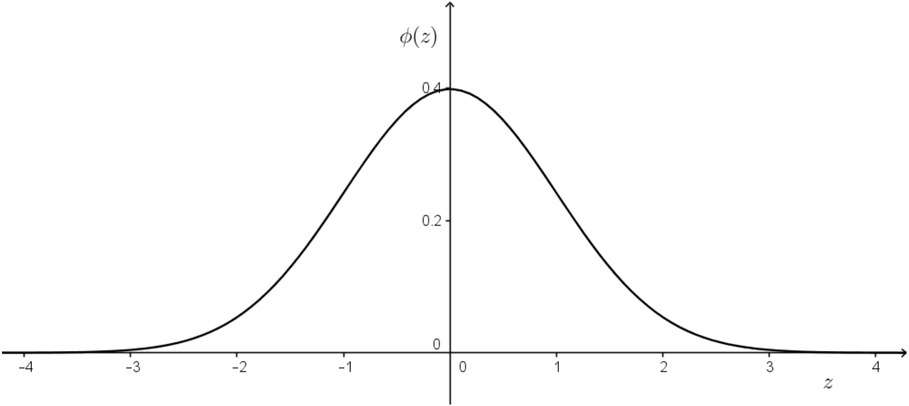
$$F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Vrijednosti od $F(x)$ su tabelirane. Međutim, bilo bi nepraktično tabelirati $F(x)$ za sve μ i σ pa to činimo samo za jedan slučaj, za takozvanu **jediničnu normalnu slučajnu varijablu**, a ostale dobivamo iz tog.

Jedinična normalna slučajna varijabla je

$$Z \sim N(0,1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad \text{i} \quad \Phi(z) = \mathbb{P}(Z \leqslant z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(x)\, dx.$$

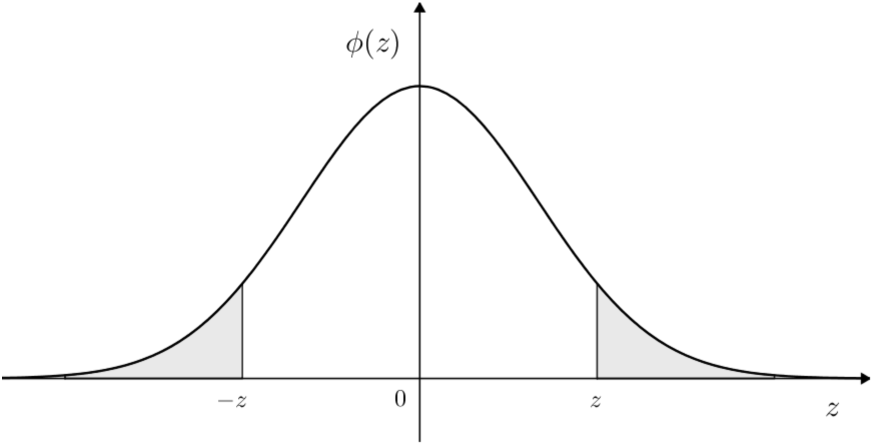
Jedinična normalna slučajna varijabla



Slika: Funkcija gustoće jedinične normalne slučajne varijable

Jedinična normalna slučajna varijabla

Vrijednosti na osi apscisa interpretiraju se u jedinicama standardnih devijacija i nazivaju se z-**vrijednosti**. Npr., $z = 2$ označava da je točka udaljena za dvije standardne devijacije u desno od očekivanja.



Svođenje na jediničnu normalnu slučajnu varijablu

Imajući tabeliranu $Z \sim N(0,1)$, slučajnu varijablu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dobijemo iz

$$X = \sigma Z + \mu.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} Z \sim N(0,1) &\implies \sigma Z + \mu \sim N(\mu, \sigma^2) \\ X \sim N(\mu, \sigma^2) &\implies \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1). \end{aligned}$$

Svođenje na jediničnu normalnu slučajnu varijablu

Sada imamo

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \mathbb{P}(Z \leqslant z) = \Phi(z),$$

gdje je $z = (x-\mu)/\sigma$ i $\Phi(z)$ iščitamo iz tablice.

Uočimo još da je dovoljno tabelirati vrijednosti od $\Phi(z)$ samo za $z \geqslant 0$, jer vrijedi

$$\Phi(-z) = \mathbb{P}(Z \leqslant -z) = \mathbb{P}(Z \geqslant z) = 1 - \mathbb{P}(Z \leqslant z) = 1 - \Phi(z).$$

Čitanje iz tablice jedinične normalne distribucije

Koristimo prvu stranicu VIS tablice.pdf iz Repozitorija (Materijali za pomoć u učenju).

Za vrijednosti z između 0 i 3, u njoj pišu četiri decimale iza decimalne točke u $\Phi(z)$.

Npr. $\Phi(1.28) = 0.8997$, $\Phi(1.65) = 0.9515$.

Kako odrediti $\Phi(-1)$? Vrijedi $\Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$, pa je

$$\Phi(-1) = 1 - 0.8413 = 0.1587.$$

Primjer

Primjer

Neka je $X \sim N(5, 25)$. Odredimo $\mathbb{P}(-2 < X < 10)$.

Imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(-2 < X < 10) &= F(10) - F(-2) \\
&= \Phi\left(\frac{10-5}{5}\right) - \Phi\left(\frac{-2-5}{5}\right) \\
&= \Phi(1) - \Phi(-1.4) \\
&= \Phi(1) - 1 + \Phi(1.4) \\
&= 0.761.
\end{aligned}$$

□

Primjeri neprekidnih slučajnih varijabli: Eksponencijalna slučajna varijabla

Eksponencijalna slučajna varijabla – funkcija gustoće

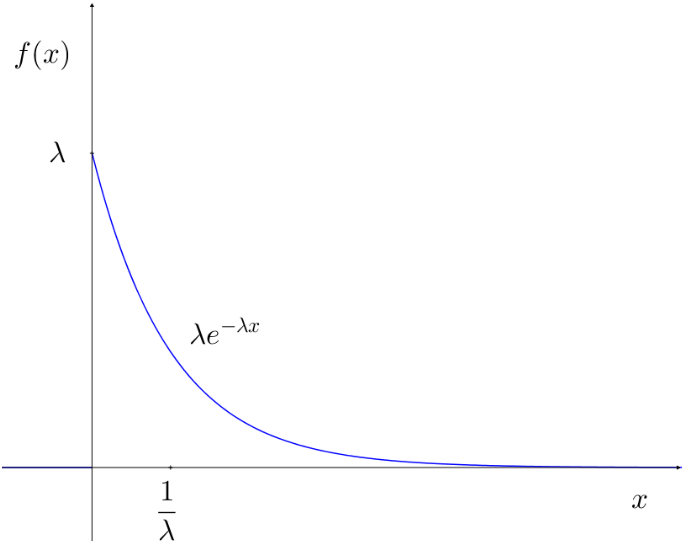
Eksponencijalna slučajna varijabla X s parametrom $\lambda > 0$, u oznaci $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, je neprekidna slučajna varijabla dana s

- $R(X) = (0, \infty)$
- i funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Pokažite da je $f(x)$ funkcija gustoće.

Eksponencijalna slučajna varijabla – graf funkcije gustoće



Slika: Funkcija gustoće eksponencijalne slučajne varijable

Eksponencijalna slučajna varijabla – funkcija raspodjele

Uočimo da vrijedi

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Koristeći metodu parcijalne integracije zaključujemo da vrijedi

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{i} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Eksponencijalna slučajna varijabla

Eksponencijalna slučajna varijabla usko je povezana s Poissonovom slučajnom varijablom.

Poissonova broji slučajne događaje u jedinici vremena (frekvenciju), dok eksponencijalna mjeri vrijeme između dva slučajna događaja: dolazak telefonskih poziva u centralu, dolazak mušterija u trgovinu, itd.

Parametar λ, slično kao i kod Poissonove slučajne varijable, označava prosječan broj pojavljivanja u jedinici vremena, tj. prosječnu frekvenciju.

Eksponencijalna slučajna varijabla – primjer

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Primjer

Službenik na šalteru posluži u prosjeku 30 stranaka na sat. Ako je vrijeme posluživanja eksponencijalna slučajna varijabla, kolika je vjerojatnost da će iduća stranka potrošiti više od 5 minuta na posluživanju (i čekanju)? Kolika je vjerojatnost da će potrošiti manje od 2 minute?

Imamo $X \sim \mathrm{Exp}(0.5)$. Dakle,

$$\mathbb{P}(X > 5) = 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 1 - F(5) = e^{-0.5 \cdot 5} = 0.082$$
$$\mathbb{P}(X < 2) = F(2) = 1 - e^{-0.5 \cdot 2} = 0.632. \qquad \square$$

Eksponencijalna slučajna varijabla – svojstvo zaboravljanja

Slično kao i geometrijska slučajna varijabla, eksponencijalna slučajna varijabla ima svojstvo zaboravljivosti: za sve $s, t \geqslant 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t).$$

Ako je X uvjetovano na nepojavljivanje događaja kroz neki početni vremenski interval duljine s, raspodjela preostalog vremena jednaka je kao i neuvjetovana raspodjela.