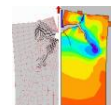


Postoje dva osnovna pristupa analize loma primjenom mehanika loma:

1. ENERGETSKI KRITERIJ

2. PRISTUP ANALIZOM INTENZITETA NAPREZANJA

Oba ta pristupa su ekvivalentna u određenim okolnostima.



3.1 ENERGETSKI KRITERIJ

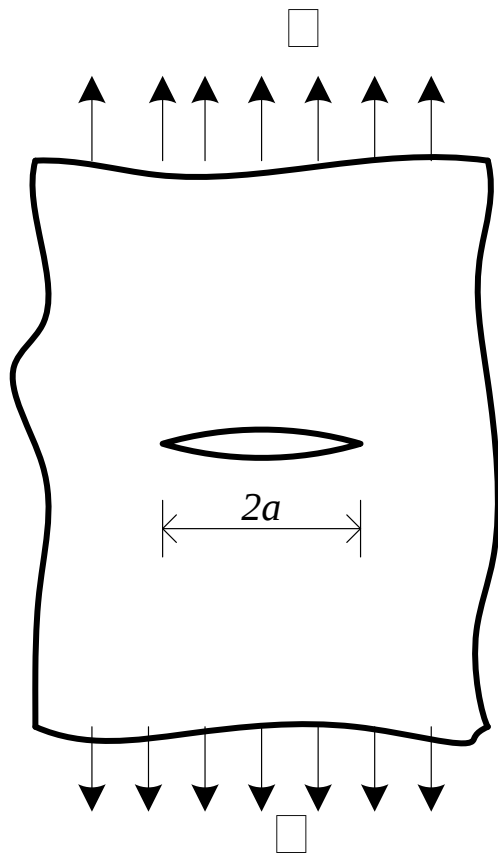
U energetsom pristupu razvijanje pukotine (lom) se događa kad energija potrebna za rast pukotine premaši otpor materijala.

Otpor materijala mora uključiti **površinsku energiju, plastični rad** ili drugi tip **trošenja energije pri razvoju pukotine**.

Ovaj kriterij je predložio Griffith, a Irwin je formulirao ovaj pristup:

Brzina oslobođene energije (*Energy Release Rate*), G , je brzina promjene potencijalne energije po površini pukotine za linearno-elastičan materijal. Naziva se još i **sila razvoja pukotine** (*Crack Driving Force*). U trenutku loma, $G = G_C$, kritična brzina oslobođene energije je mjera otpora širenju pukotine, mjera žilavosti - **pukotinska žilavost** (*fracture toughness*).

Za beskonačnu ploču s pukotinom (širina ploče je $\gg 2a$):



BRZINA OSLOBOĐENE ENERGIJE

$$G = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E}$$

u čast



Alan Arnold Griffith

U trenutku loma, $G = G_C$:

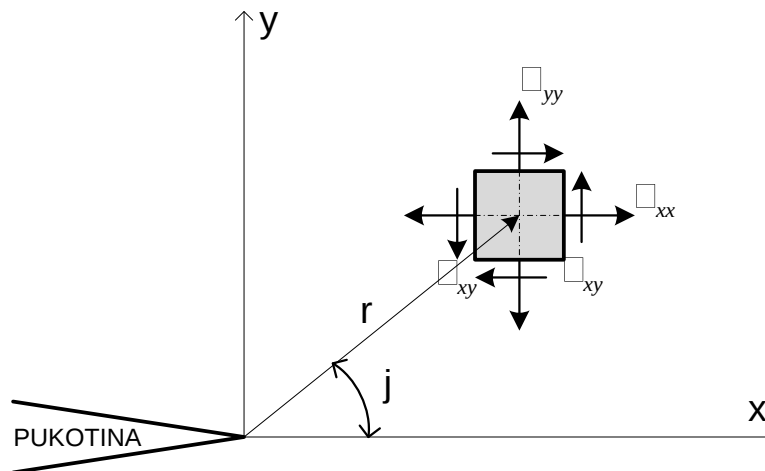
$$G_c = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a_c}{E}$$

U tom trenutku loma imamo **kritičnu kombinaciju naprezanja i veličine pukotine**.

3.2 PRISTUP PREKO INTENZITETA NAPREZANJA

Stanje naprezanja u blizini vrha pukotine:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}^I(\varphi)$$



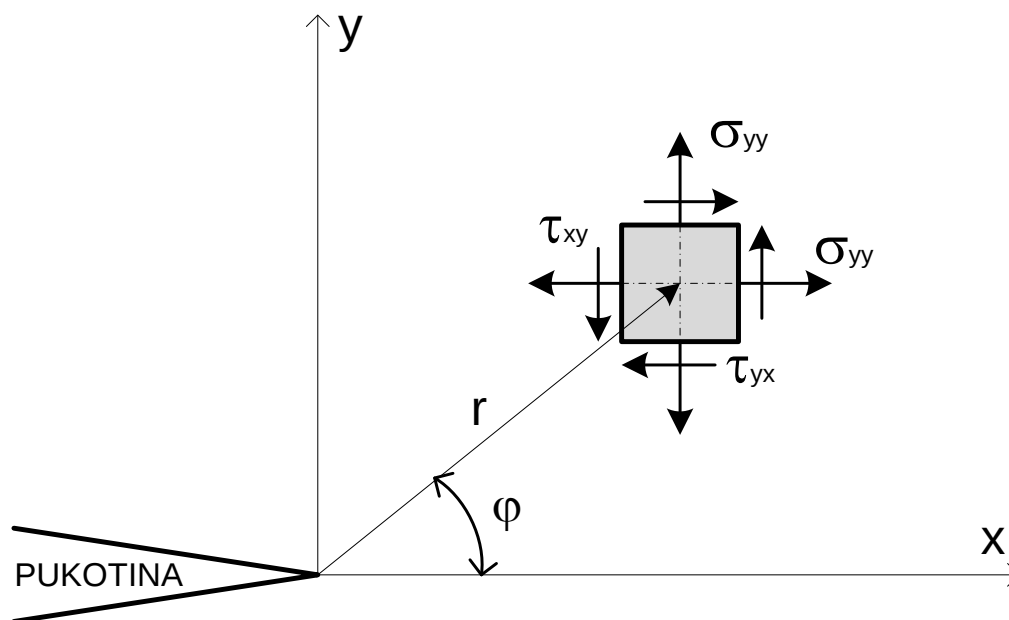
$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left[1 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left[1 + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right)$$

Iz tih izraza se vidi da je svaka komponenta naprezanja proporcionalna jednoj konstanti K_I .

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot$$

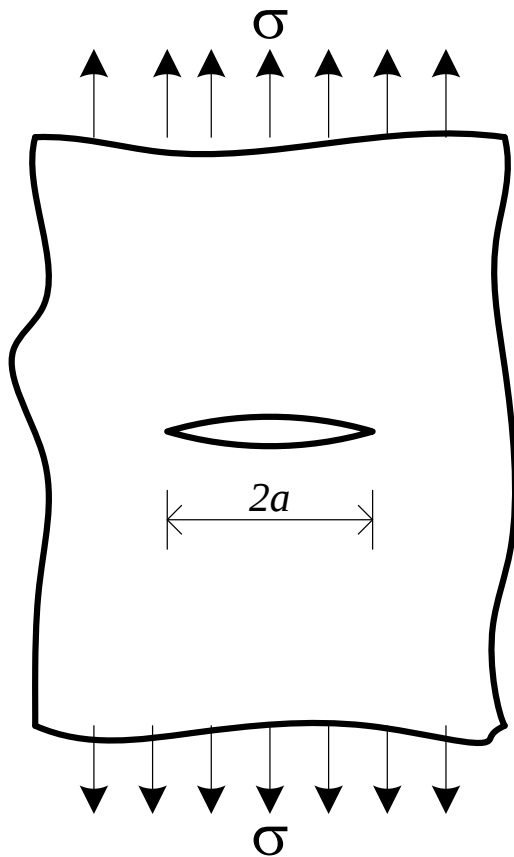


Tu konstantu K_I nazivamo **koeficijent intenziteta naprezanja**.

Ako pretpostavimo da materijal popušta lokalno pri kritičnoj kombinaciji naprezanja i deformacija, slijedi da će se lom dogoditi kod kritične veličine faktora intenziteta naprezanja, K_{IC} .

Ta veličina K_{IC} je karakteristika materijala, mjera žilavosti - **pukotinska žilavost**.

Za beskonačnu ploču s pukotinom:



KOEFICIJENT INTENZITETA NAPREZANJA

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

U ovom slučaju je:

K_I – **sila razvoja pukotine**

K_{IC} – mjera otpornosti materijala na lom
– **pukotinska žilavost**

Uspoređujući izraze Griffithove analogije (energetskog pristupa) i intenziteta naprezanja imamo:

$$G = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E} \longleftrightarrow K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

dolazimo do odnosa između K_I i G :

$$G = \frac{K_I^2}{E}$$

Ovi pristupi preko intenziteta naprezanja i energetski pristup su **ekvivalentni za linearno elastične materijale**.

3.3 RAST PUKOTINE OVISAN O VREMENU

Mehanika loma često igra veliku ulogu u **predviđanju životnog vijeka konstrukcije**, i koristi se u pronalaženju mehanizma rasta pukotine u ovisnosti o vremenu, kao što je zamor ili nastajanje pukotina od korozije.

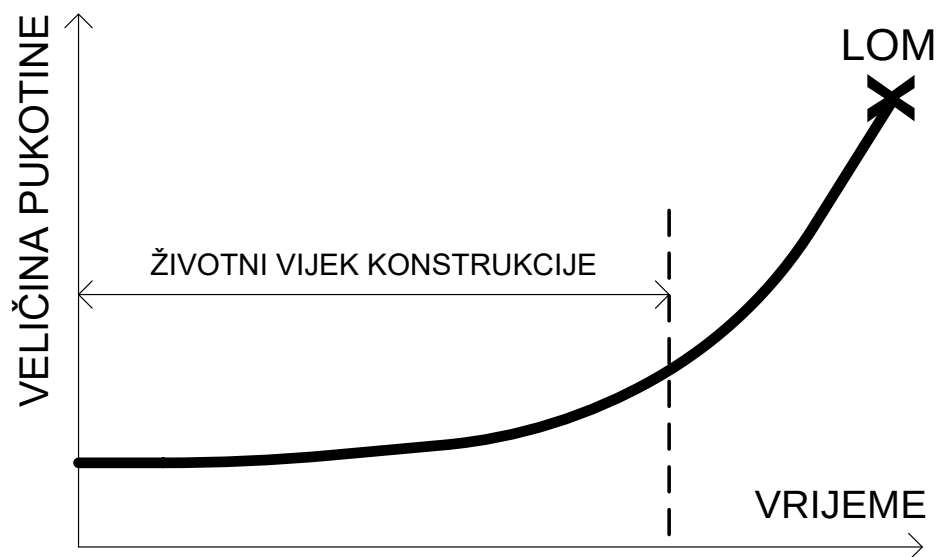
Pukotina u konstrukciji raste vremenom.

Početna pukotina je otkrivena **nedestruktivnim metodama ispitivanja** (NDE), a **kritična veličina pukotine** se odredi iz naprezanja i pukotinske žilavosti (*fracture toughness*).

Dopuštena veličina pukotine se dobije uz određeni koeficijent sigurnosti.

Predviđeni životni vijek trajanja konstrukcije se zaključuje proračunom **vremena potrebnog da pukotina naraste od inicijalne veličine do maksimalno dopuštene**.

Na primjer, rast pukotine u metalu, pri zamoru, može se opisati empirijskim **Parisovim** izrazom:



$$\frac{da}{dN} = C \cdot (\Delta K)^m$$

da / dN prirast pukotine po ciklusu

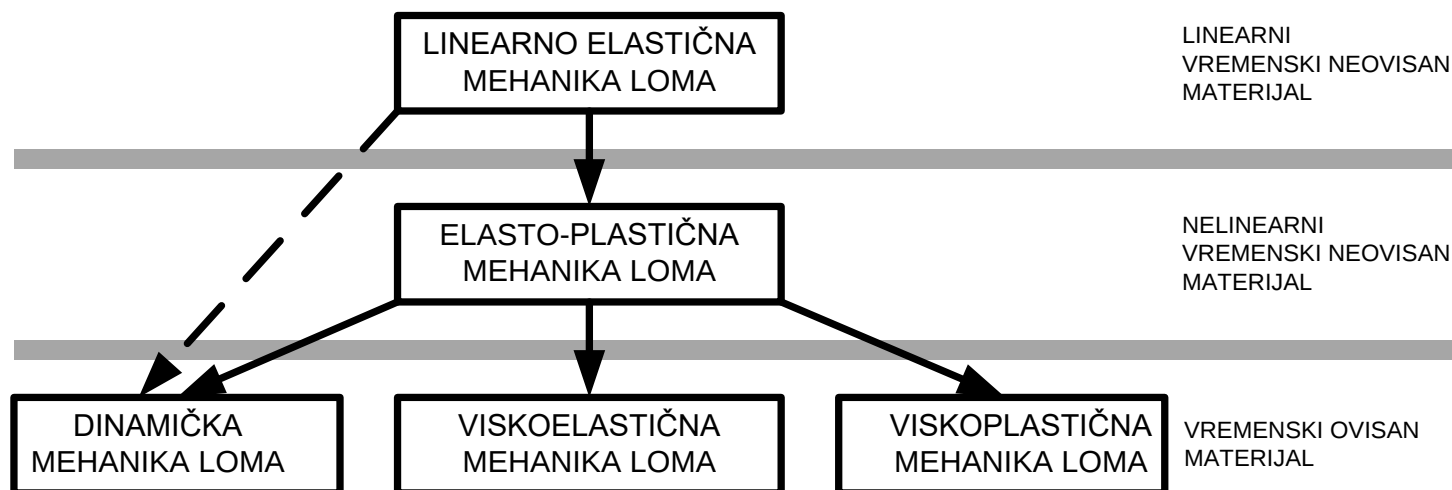
ΔK područje intenziteta naprezanja

C i m konstante materijala (koje se određuju eksperimentalno)

4. UTJECAJ KARAKTERISTIKA MATERIJALA NA LOM

U početku je bila primjenjiva samo **linearno elastična mehanika loma (LEFM)**, a kasnija istraživanja mehanike loma uključuju i ostale tipove ponašanja materijala.

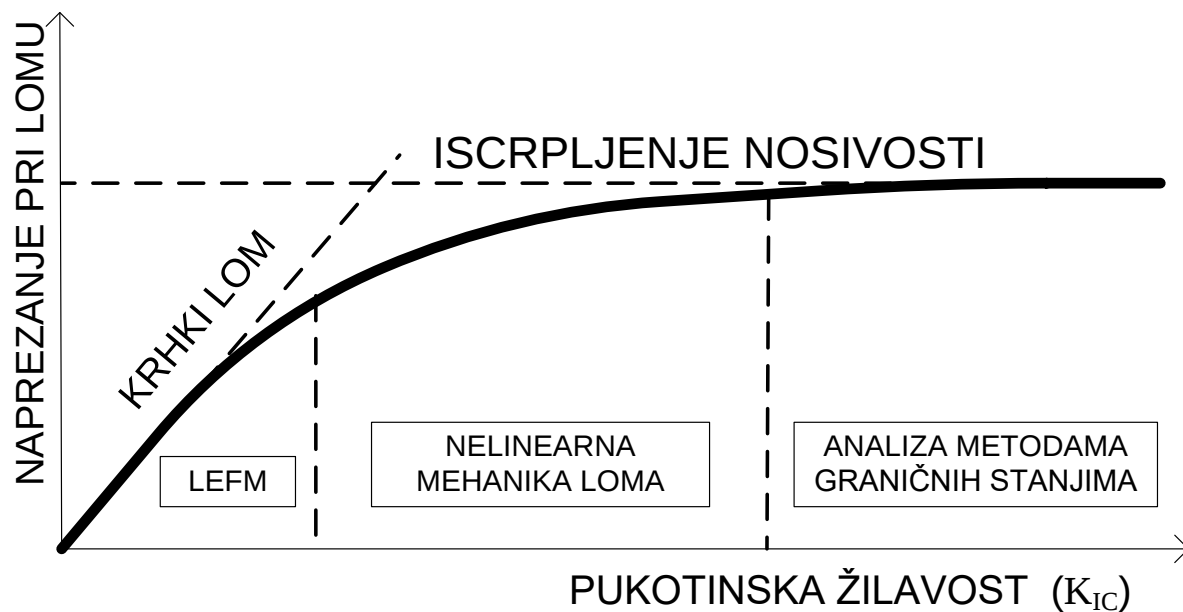
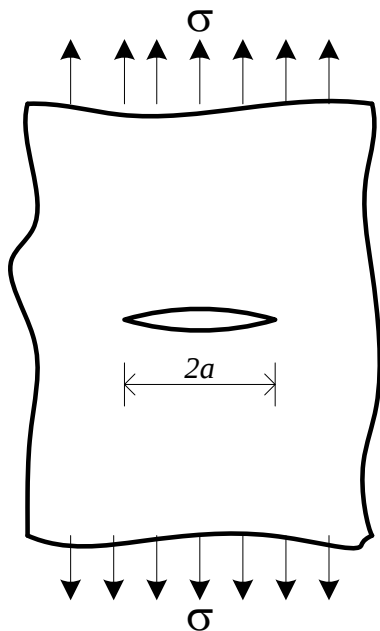
Elasto-plastična mehanika loma (EPFM) se bavi plastičnim deformacijama, dok **dinamička, viskoelastična i viskoplastična mehanika loma** uključuje **vrijeme** kao varijablu.



Pojednostavljena tri područja mehanike loma

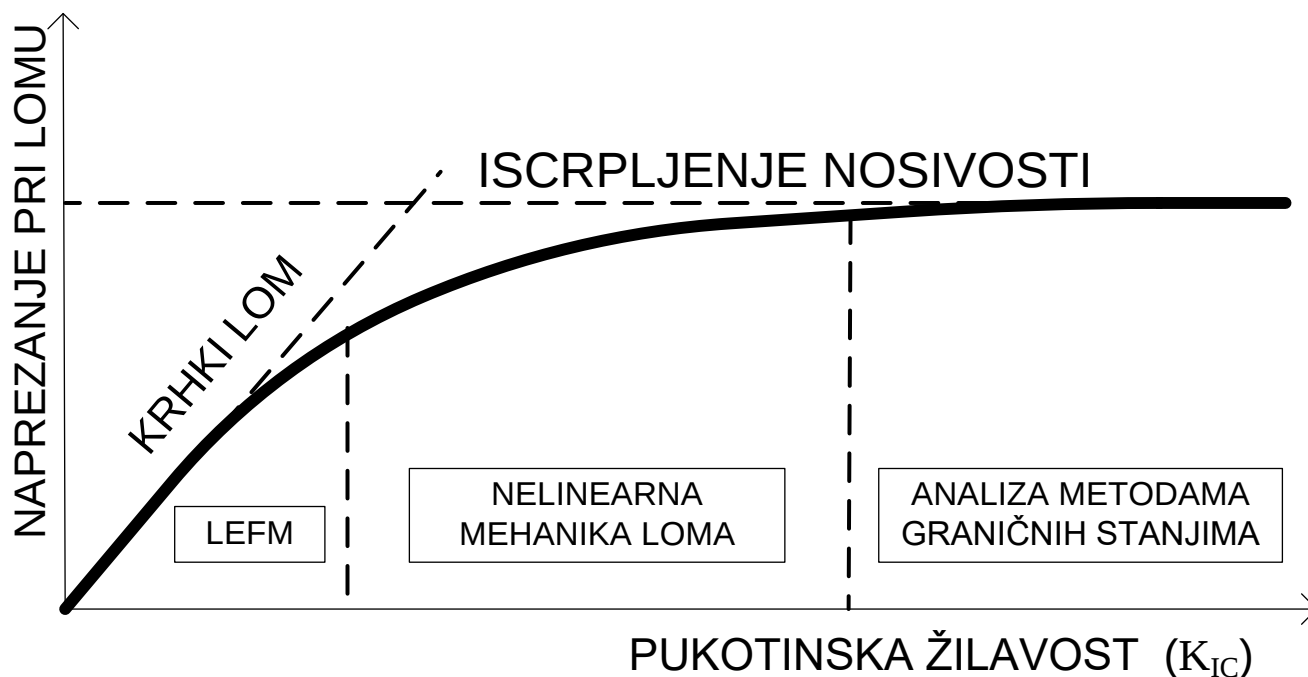
Za malu veličinu K_{IC} krhki lom definira mehanizam loma, kritično naprezanje je linearno sa K_{IC} , kako i predviđa izraz:

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$



Utjecaj pukotinske žilavosti na mehanizam loma

Kod **niske žilavosti** LEFM je primjenjiva na problem, a kod **dovoljno visoke žilavosti** mehanika loma prestaje biti **relevantna** jer je naprezanje pri lomu neosjetljivo na žilavost.



Tipično ponašanje pri lomu nekih materijala

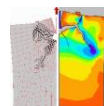
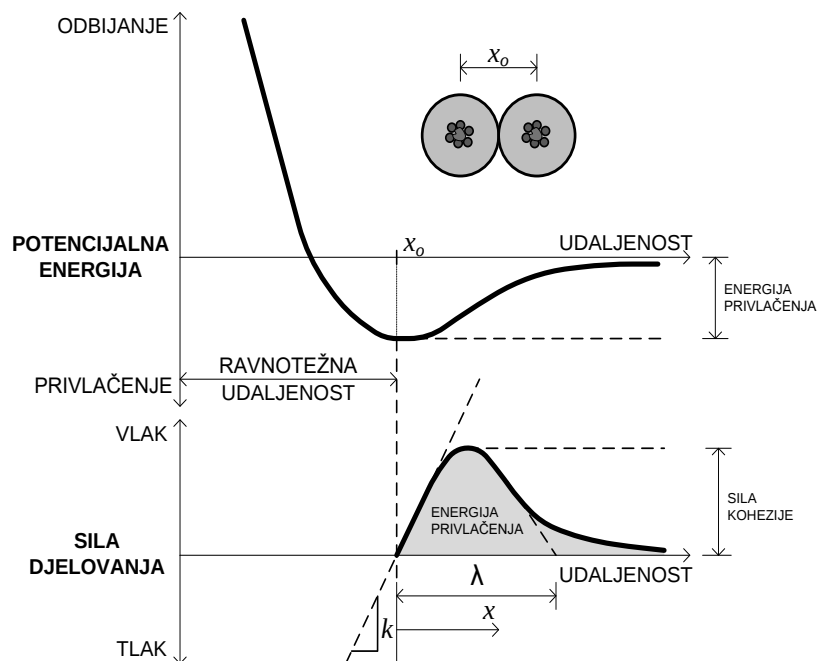
Materijal	Tipično ponašanje pri lomu
Čelik visoke čvrstoće	Linearno elastično
Čelik niske i srednje čvrstoće	Elasto plastično
Nehrđajući čelik	Potpuno plastično
Aluminij	Linearno elastično
Metali pri visokim temperaturama	Viskoplastično
Metali sa visokim deformacijama	Dinamički - viskoplastično

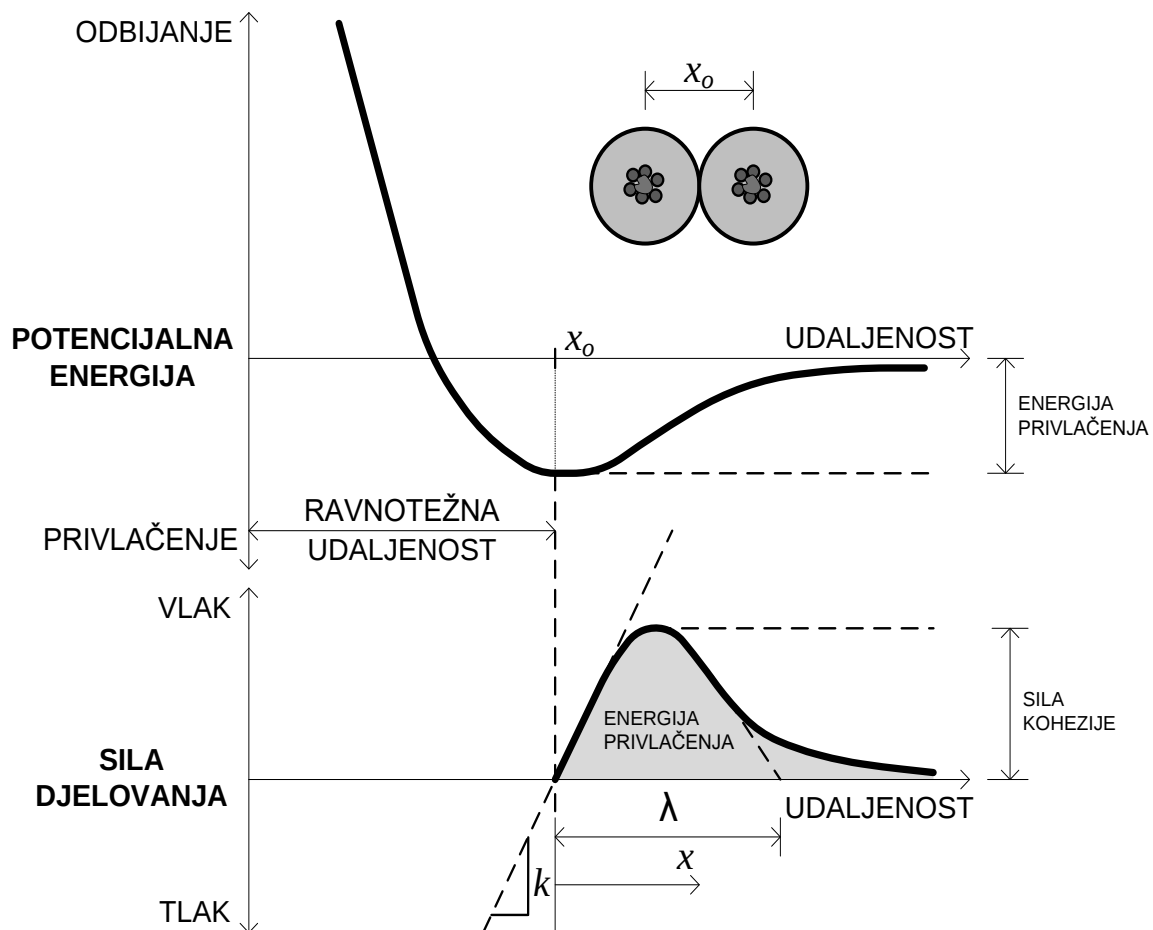
5. LINEARNO ELASTIČNA MEHANIKA LOMA

5.1 Atomistički pristup lomu

Materijal puca ako je naprezanje dovoljno veliko da prekine veze koje drže atome zajedno.

Kada **potencijalna energija poprimi minimalnu vrijednost, nastupa ravnotežni razmak atoma**. Da bi se **atomi rastavili potrebno je uvestisilu zatezanja koja je veća od sile kohezije**.





Energija privlačenja:

$$U = \int_{x_0}^{\infty} F \cdot dx$$

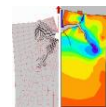
Sila kohezije:

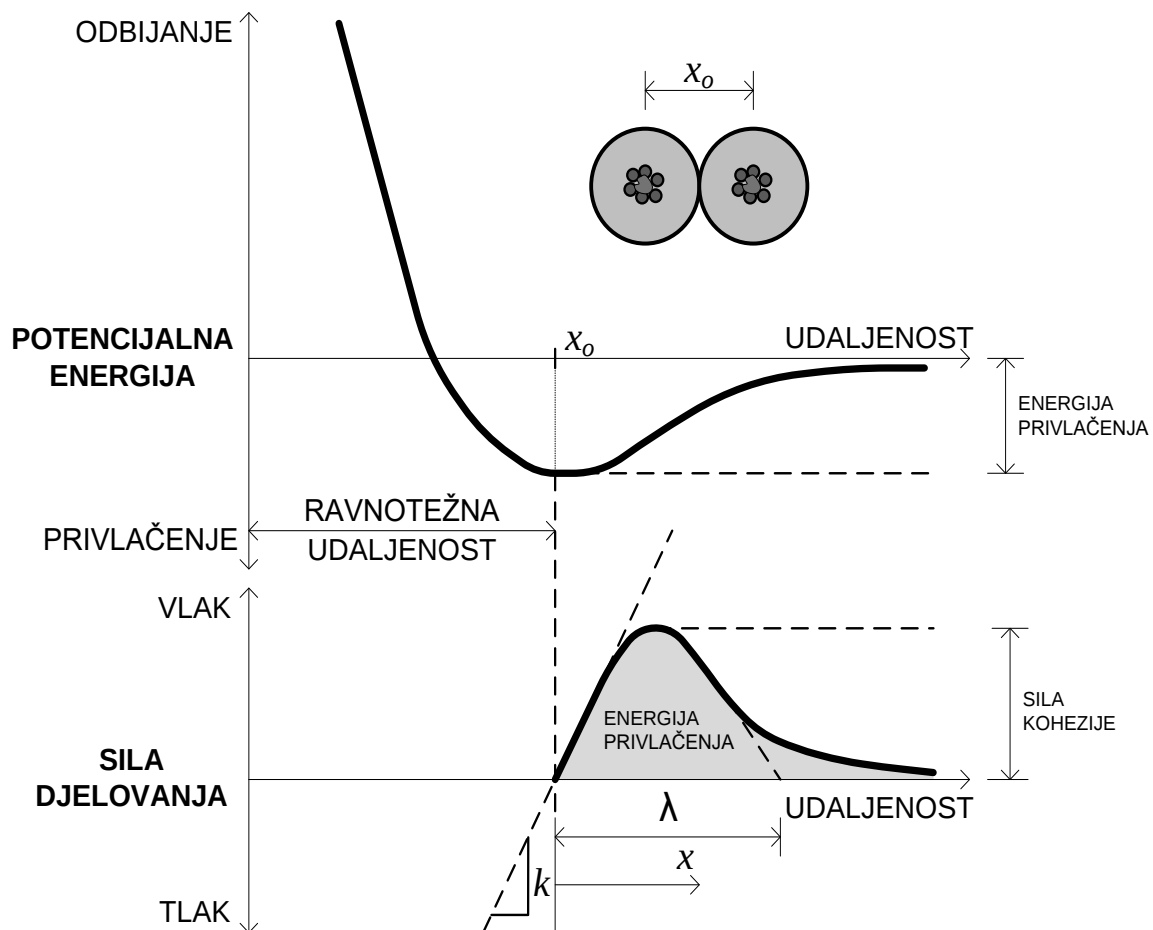
$$F = F_c \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{\lambda}\right)$$

U slučaju malih pomaka

$$F = F_c \cdot \left(\frac{\pi \cdot x}{\lambda}\right)$$

$$\sigma = \sigma_c \cdot \left(\frac{\pi \cdot x}{\lambda}\right)$$



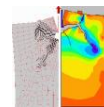


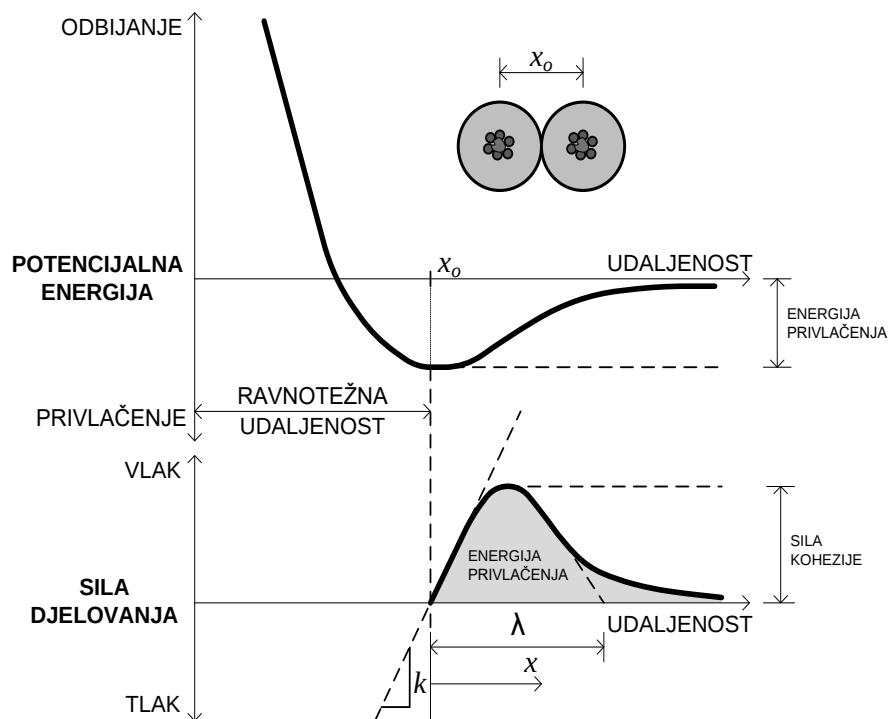
$$\sigma = \sigma_c \cdot \left(\frac{\pi \cdot x}{\lambda} \right)$$

Hookov zakon:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{x}{x_0}$$

$$\sigma_c = \frac{E \cdot \lambda}{\pi \cdot x_0}$$





Površinska energija

(energija potrebna za stvaranje novih površina unutar materijala):

$$\Gamma_s = \gamma_s \cdot A$$

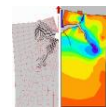
Gustoća površinske energije

Novonastala površina

Pucanjem nastaju 2 površine – potrebno je obaviti rad

$$2 \cdot \gamma_s = \int_0^\lambda \sigma_c \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{\lambda}\right) dx = \sigma_c \cdot \frac{2 \cdot \lambda}{\pi}$$

$$\sigma_c = \frac{E \cdot \lambda}{\pi \cdot x_0} \Rightarrow \sigma_c = \sqrt{\frac{E \cdot \gamma_s}{x_0}} \quad \gamma_s \approx \frac{E \cdot \lambda}{\pi^2}$$



Npr. ČELIK $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
 $\lambda = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

$$\sigma_c = \frac{E \cdot \lambda}{\pi \cdot \chi_o} \quad \gamma_s \approx \frac{E \cdot \lambda}{\pi^2}$$

$$\sigma_c \approx 0,7 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\gamma_s \approx 5 \text{ J/m}^2$$

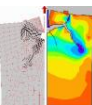
teorijska čvrstoća materijala, ove vrijednosti vrijede samo za idealnu rešetku

Eksperimenti na metalima pokazuju da su **čvrstoće najkvalitetnijih čelika i do nekoliko desetaka puta manja od teorijske čvrstoće.**

PRIBLIŽNO:

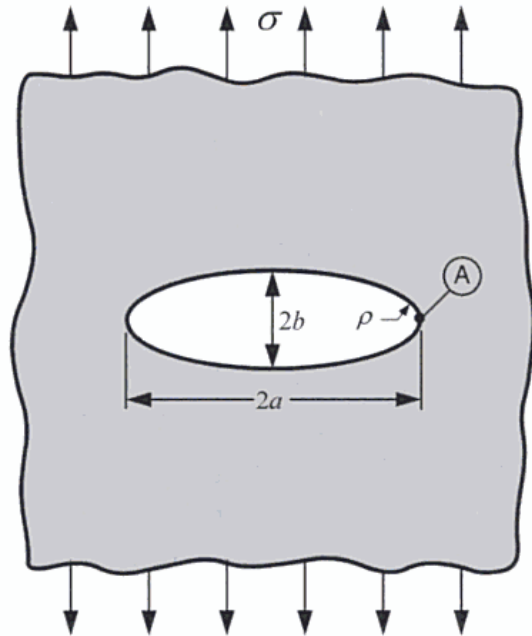
$$\sigma_c = \frac{E}{\pi}$$

Razlog toga je da atomska rešetka nije idealna!!
Stoga su stvarne vrijednosti nekoliko puta manje
Drugim riječima, **greške u materijalu smanjuju globalnu čvrstoću.**



Analiza utjecaja koncentracije naprezanja

Inglis - jednoosno opterećena **ravna ploča sa eliptičnom pukotinom**, bez rubnih pukotina:



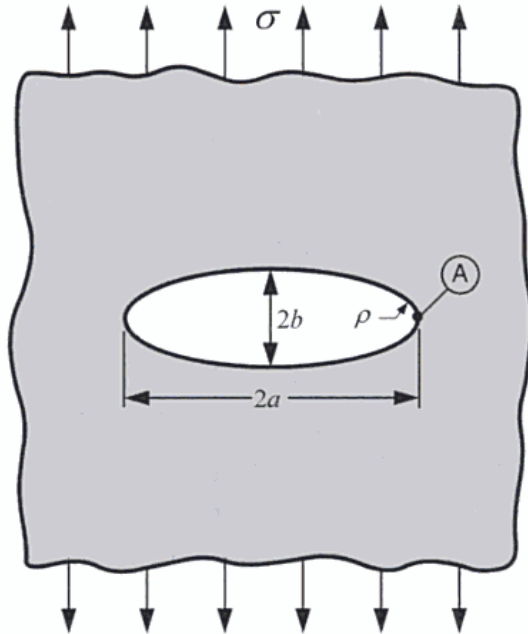
$$\sigma_A = \sigma \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot a}{b} \right)$$

Faktor koncentracije naprezanja:

$$k = \sigma_A / \sigma$$

Za kružni otvor $a = b$:

$$k = 3,0$$



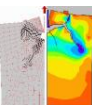
$$\sigma_A = \sigma \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot a}{b}\right)$$

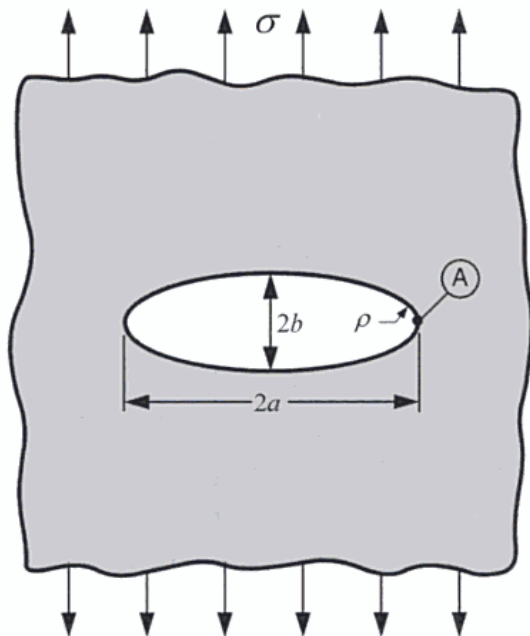
Ako se glavna os a relativno povećava u odnosu na os b tada se eliptična pukotina pretvara u **oštru pukotinu** (*sharp crack*) sa radijusom zakrivljenosti ρ .

$$\sigma_A = \sigma \cdot \left(1 + 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{\rho}}\right) \quad \rho = \frac{b^2}{a} \quad \sigma_A = 2 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{a}{\rho}}$$

Minimalni radijus zaobljenja može biti jednak razmaku atoma:

$$\rho = x_o \quad \sigma_A = 2 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{a}{x_o}}$$





Ako pretpostavimo da lom događa kada je:

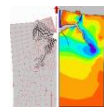
$$\sigma_A = \sigma_c$$

$$\sigma_A = 2 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{a}{x_o}} \quad \sigma_c = \sqrt{\frac{E \cdot \gamma_s}{x_o}}$$

Izjednačavanjem dobivamo:

$$\boxed{\text{failure}} \rightarrow \sigma_f = \sqrt{\frac{E \cdot \gamma_s}{4 \cdot a}}$$

Ovaj se izraz se mora uzeti kao gruba procjena naprezanja pri lomu, jer pretpostavke kontinuuma koje je koristio Inglis ne vrijede za nivou atoma.



5. LINEARNO ELASTIČNA MEHANIKA LOMA

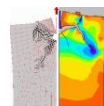
5.2 Griffithov energetski pristup

Prema I. zakonu termodinamike, **ako sistem prelazi iz neravnotežnog u ravnotežno stanje, ukupna energija se smanjuje.**

Pukotina se može formirati (ili se postojeća može povećati) samo pod uvjetom da je proces nastajanja nove ili povećanja postojeće takav da se totalna energija smanjuje ili ostaje konstanta.

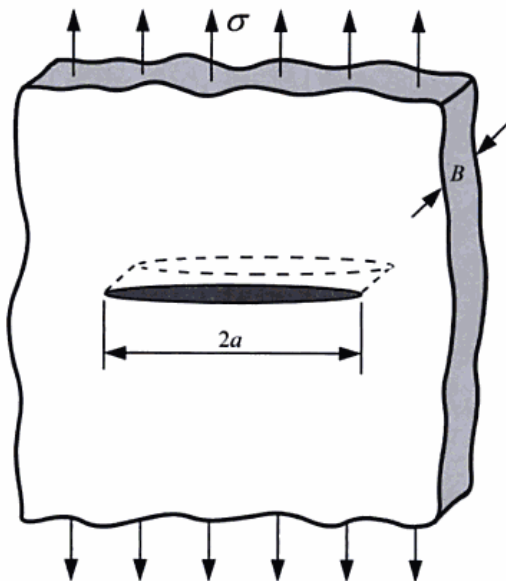
Stoga se može reći da je kritični uvjet za lom definiran razvojem pukotine u ravnotežnom stanju, tj. bez promjene totalne energije. Teorija linearno elastične mehanike loma (**Linear Elastic Fracture Mechanics – LEFM**) postoji od 1920. godine.

Temelj joj je postavio **Alan Arnold Griffith** koji zauzima posebno mjesto u razvoju mehanike loma. On je u svom radu **«The phenomena of rupture and flow in solids»**, koji je objavljen 1920. godine, prvi izveo kriterij loma za idealno krhke materijale.

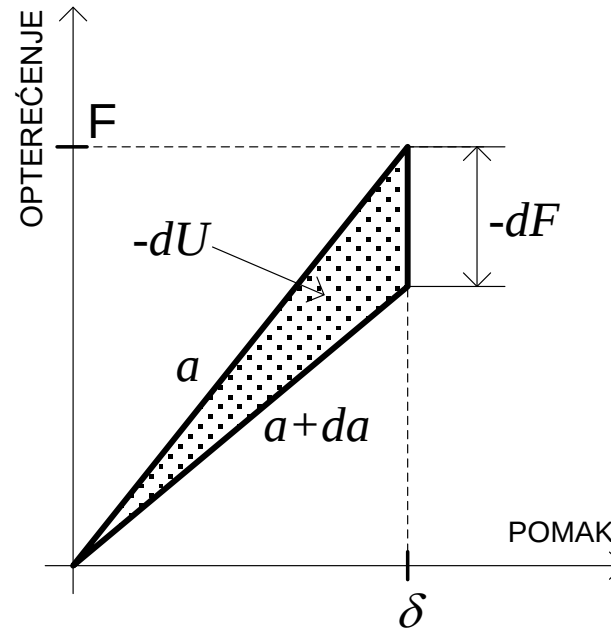
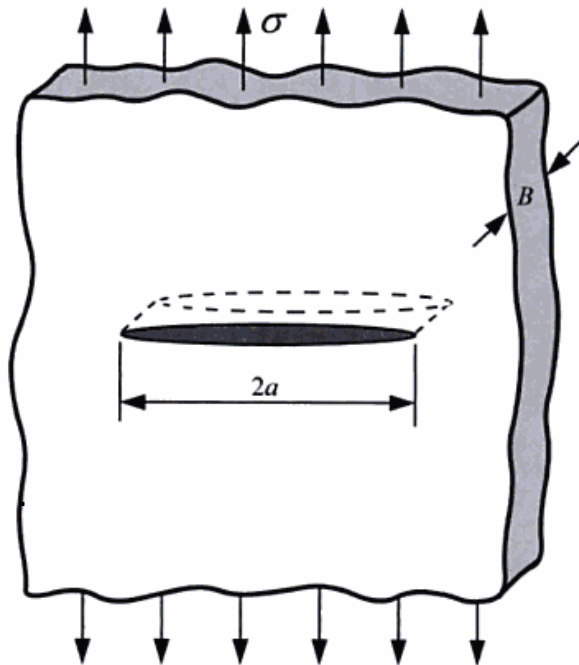


Griffith je predložio je energetski uvjet za razvoj pukotine, a teorija se zasniva na usporedbi oslobođene elastične energije zbog produljenja pukotine i energije novo stvorenih slobodnih površina pukotine.

Promatra se idealno elastična ploča beskonačne dužine i širine, jedinične debljine b , sa središnjom pukotinom duljine $2a$ po cijeloj debljini:

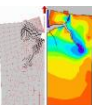


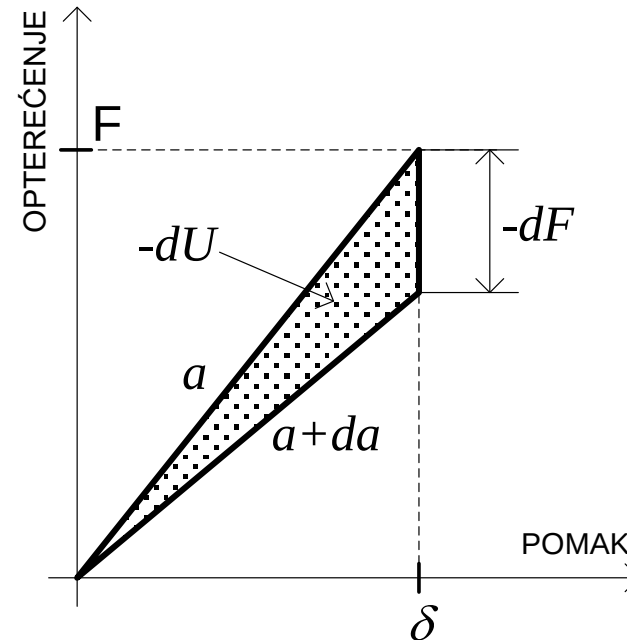
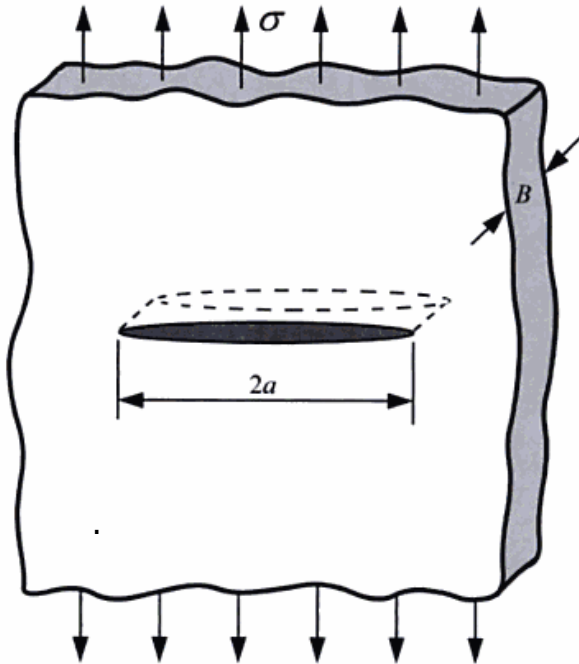
Ploča je opterećena jednolikim, vlačnim naprežanjem σ , koje djeluje u beskonačnosti, dovoljno daleko.



Promjena elastične energije koju ploča sadrži ako se dužina pukotine na jednom kraju poveća za da .

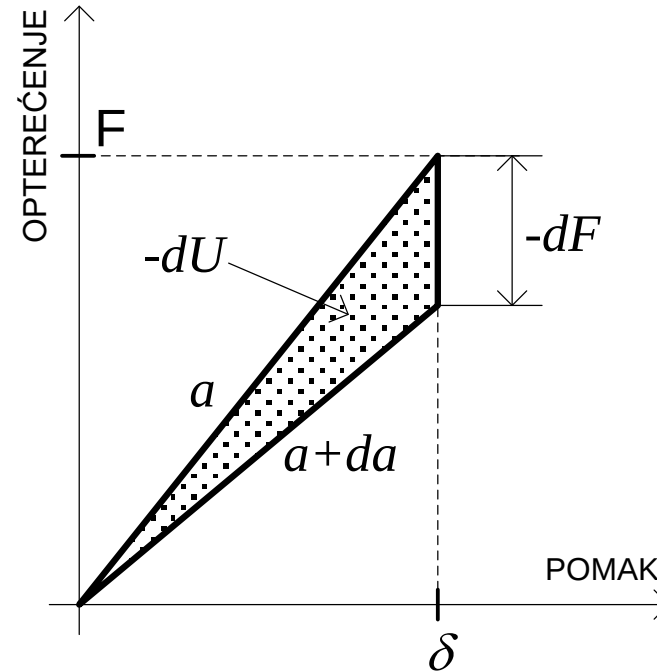
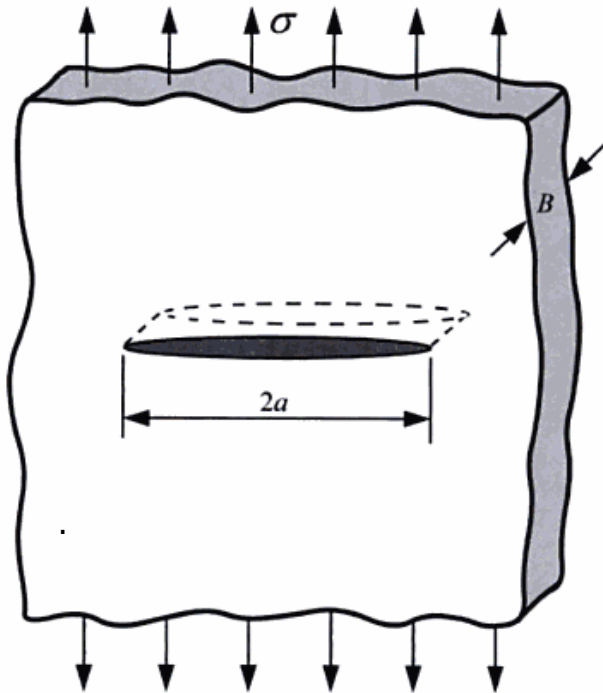
U tom slučaju smanjiti će se krutost ploče, što znači da će se smanjiti i opterećenje za dF .



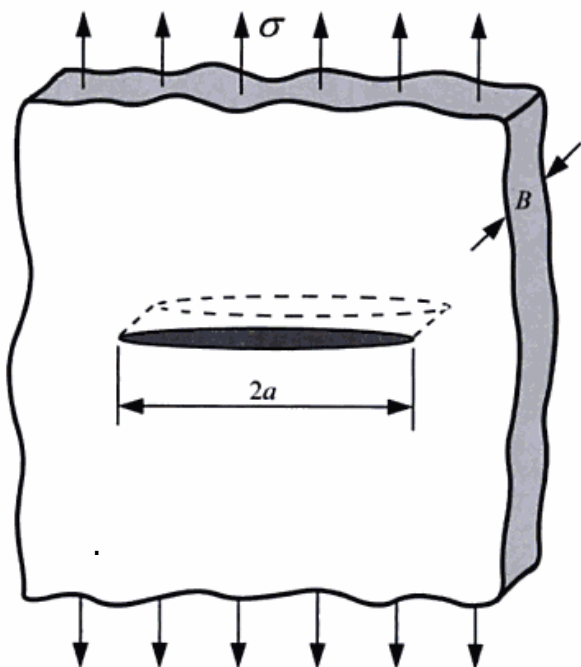


Time se **smanjuje i elastična energija za veličinu koja je predstavljena trokutom.**

Oslobođena elastična energija slijeva se u vrhove pukotine, mjesta koncentracije naprezanja, gdje se pretvara u površinsku energiju.



Da bi se pukotina povećala, potencijalna energija ploče mora biti veća od površinske energije materijala.



Ukupna potencijalna energija deformacija:

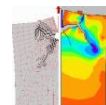
$$U = U_o - U_a + U_\gamma = W$$

U_o – potencijalna energija deformacije neopterećene neraspucale ploče (konstantna)

U_a – **promjena potencijalne energije deformacije** uzrokovana pojavom pukotine duljine $2a$

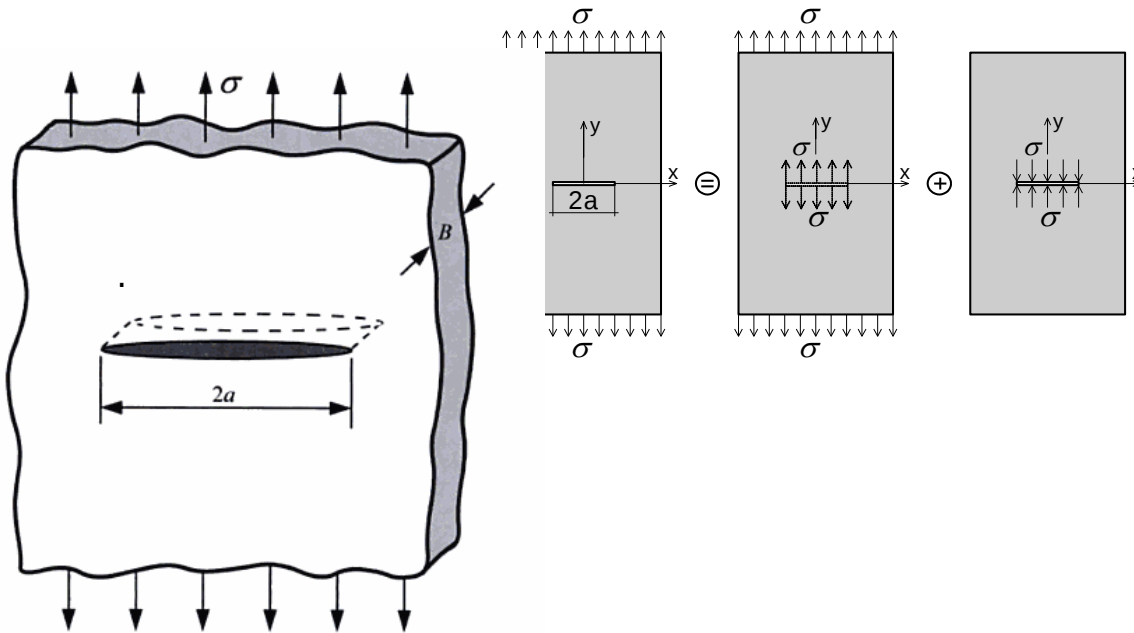
U_γ – **elastična površinska energija u ploči** s pukotinom duljine $2a$

W – mehanički rad vanjskih sila.



Ukupna potencijalna energija deformacija:

$$U = U_o - U_a + U_\gamma = W$$



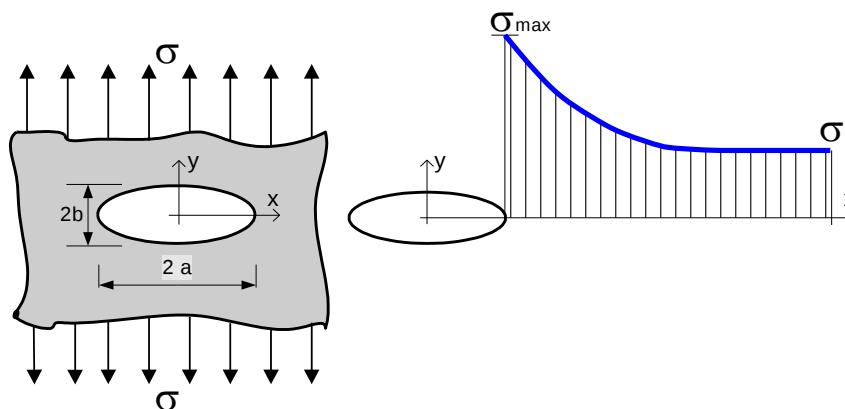
Primjenjen je princip superpozicije

$$U = U_o - U_a + U_\gamma = W$$

Koristeći Inglisovu analizu naprezanja oko eliptične pukotine:

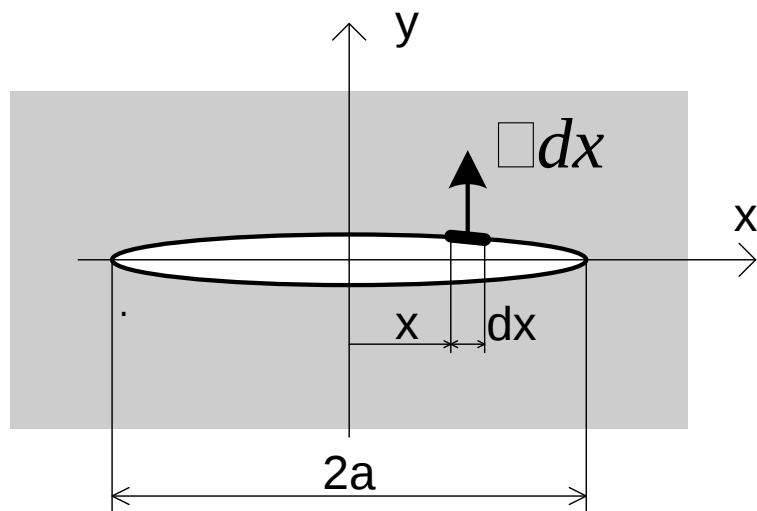
$$\sigma_y = \sigma \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} \cdot \left(2 \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right)^{-1} \right\}$$

$$\begin{array}{ll} |x| \rightarrow a & \sigma_y \rightarrow \infty \\ |x| \gg a & \sigma_y \rightarrow \sigma \end{array}$$



$$U = U_o - U_a + U_\gamma = W$$

Vertikalni pomak gornje površine pukotine: $v(x) = \frac{2 \cdot \sigma}{E'} \sqrt{a^2 - x^2}$

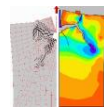


$E' = E$ Ravninsko naprezanje

$E' = \frac{E}{(1 - \nu^2)}$ Ravninska deformacija

Promjena elastične energije uzrokovana pojavom pukotine, dobije se iz rubnog naprezanja

$$U_a = 2 \cdot \left(-\frac{\sigma}{2} \int_{-a}^a v(x) dx \right) = -\frac{\pi \cdot a^2 \cdot \sigma^2}{E'}$$



$$U = U_o - U_a + U_\gamma = W$$

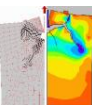
$$U_a = 2 \cdot \left(-\frac{\sigma}{2} \int_{-a}^a v(x) dx \right) = -\frac{\pi \cdot a^2 \cdot \sigma^2}{E'}$$

$$U_a = U_{\text{bez pukotine}} - U_{\text{s pukotinom}} = 2 \cdot \frac{2a \cdot \pi a}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{2 \cdot E'} = \frac{\pi \cdot a^2 \cdot \sigma^2}{E'}$$

$$U_\gamma = 2 \cdot (2a \cdot \gamma_e) \cdot 1 = 4 \cdot a \cdot \gamma_e$$

Ako je rad vanjskih sila jednak nuli, tada je promjena pot.energije uzokovana pukotinom negativna, pa je ukupna pot.energija:

$$U = U_o + U_a + U_\gamma = U_o - \frac{\pi \cdot a^2 \cdot \sigma^2}{E} + 4 \cdot a \cdot \gamma_e$$

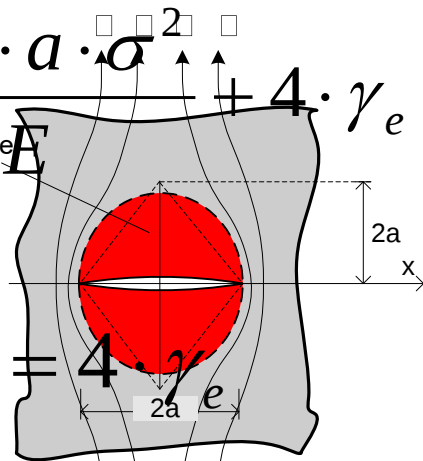


$$U = U_o + U_a + U_\gamma = U_o - \frac{\pi \cdot a^2 \cdot \sigma^2}{E} + 4 \cdot a \cdot \gamma_e$$

Uvjet za stabilan razvoj pukotine je da ukupna energija maksimalna:

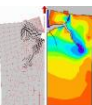
$$\frac{dU}{da} = - \frac{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sigma^2}{E} + 4 \cdot \gamma_e = 0$$

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sigma^2}{E'}$$



$$= 4 \cdot \gamma_e$$

$$\sigma \cdot \sqrt{a} = \sqrt{\frac{2 \cdot E' \cdot \gamma_e}{\pi}}$$



$$\sigma \cdot \sqrt{a} = \sqrt{\frac{2 \cdot E' \cdot \gamma_e}{\pi}}$$

preuredimo izraz :

$$\sigma \sqrt{\pi \cdot a} = \sqrt{2 \cdot E' \cdot \gamma_e} = \text{const}$$

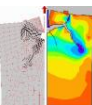
Desna strana te jednadžbe je konstantna (E i γ_s su konstante materijala), prema tome napredovanje pukotina u idealno krhkim materijalima nastupa kada produkt

$$\sigma \cdot \sqrt{a}$$

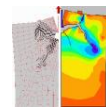
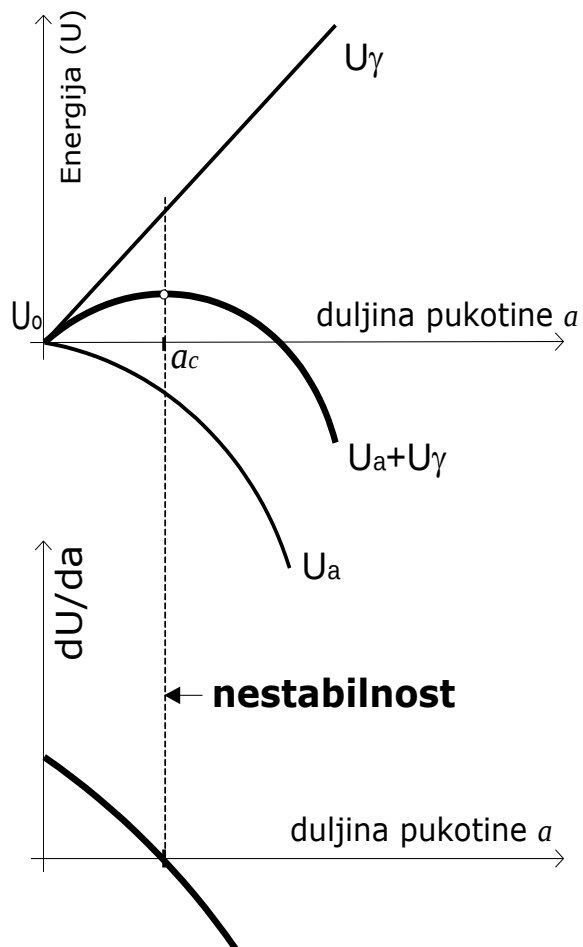
dostigne konstantnu kritičnu vrijednost.

Ovaj izraz predstavlja koeficijent intenziteta naprezanja, a oznaka I predstavlja prvi oblik otvaranja pukotine:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi \cdot a}$$



$$U = U_o + U_a + U_\gamma = U_o - \frac{\pi \cdot a^2 \cdot \sigma^2}{E} + 4 \cdot a \cdot \gamma_e$$



$$\text{Iz} \quad \sigma \cdot \sqrt{a} = \sqrt{\frac{2 \cdot E' \cdot \gamma_s}{\pi}}$$

dobivamo **Griffithovu** formulu za veličinu kritičnog naprezanja za pukotinu zadane duljine $2a$ kod kojeg će nastupiti nestabilno širenje pukotine.

$$\sigma = \sigma_c \quad \sigma_c = \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma_s \cdot E'}{\pi \cdot a}}$$

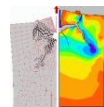
$$a_c = \frac{2 \cdot \gamma_s \cdot E'}{\pi \cdot \sigma^2}$$



$$\frac{\pi \cdot a \cdot \sigma^2}{E'} = 2 \cdot \gamma_s$$

nivo oslobođene
energije

porast površinske
energije



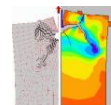
Tako, lom nastupa kada:

$$G = \frac{\pi \cdot a \cdot \sigma^2}{E'} \geq \frac{\pi \cdot a \cdot \sigma_c^2}{E'} = G_c$$

Ovaj izraz vrijedi samo za idealno krhke materijale poput stakla, ne vrijedi za metalne materijale, kod kojih bi trebalo uzeti u obzir pastifikaciju

Otpor pojavi pukotina ovisi samo o površinskoj energiji

$$R = 2 \cdot \gamma_e$$



5. LINEARNO ELASTIČNA MEHANIKA LOMA

5.4 Modificirana Griffithova jednačba

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2 \cdot E' \cdot (\gamma_s + \gamma_p)}{\pi \cdot a}}$$



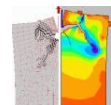
Proširenje na materijale s plastičnim ponašanjem

$$w_f = \gamma_s + \gamma_p$$

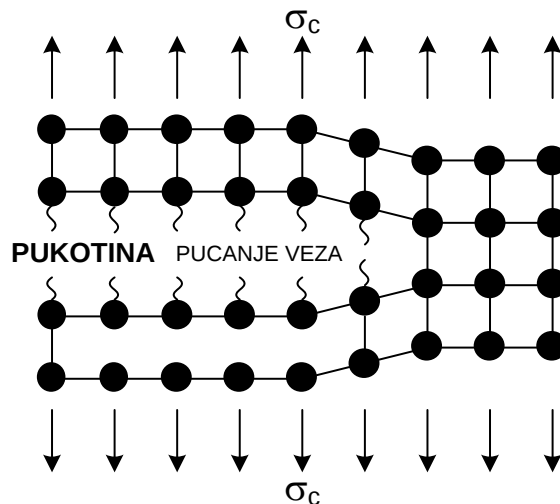
γ_p **rad na plastičnoj deformaciji** po jediničnoj površini novonastale površine

$$\gamma_s \ll \gamma_p$$

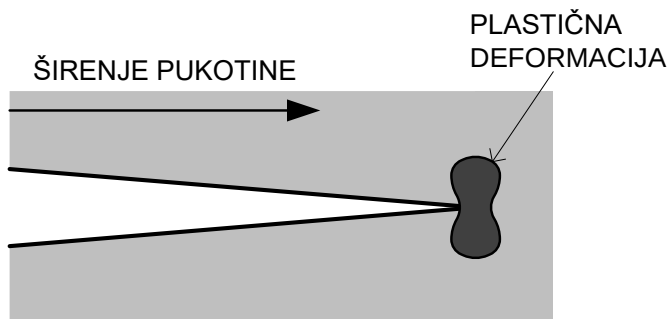
$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2 \cdot E' \cdot w_f}{\pi \cdot a}}$$



idealno krhki materijal

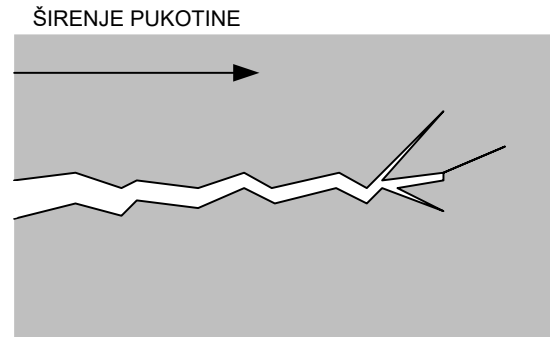


$$w_f = \gamma_s$$



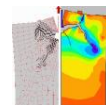
kvazi – krhki elastoplastičan materijal

$$w_f = \gamma_e + \gamma_p$$



krhki materijal sa pukotinom koja se grana

$$w_f = \gamma_e \left(\frac{\text{St var na površina}}{\text{Projicirana površina}} \right)$$



5. LINEARNO ELASTIČNA MEHANIKA LOMA

5.5 Brzina oslobađanja energije (*Energy Release Rate*)

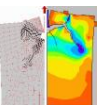
1956. godine Irwin je predložio kriterij loma, koji je u biti ekvivalentan Griffithovom, ali prikladniji za rješavanje inženjerskih problema. On je definirao **brzinu oslobađanja energije** tijekom širenja pukotine G (*Energy Release Rate*) kao:

$$G = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E'}$$

Pukotina se širi kada G dostigne kritičnu vrijednost:

$$G_C = \frac{\pi \cdot \sigma_C^2 \cdot a}{E'} = \frac{dU_\gamma}{da} = 2 \cdot w_f$$

G_C mjera žilavosti materijala (*fracture toughness*)



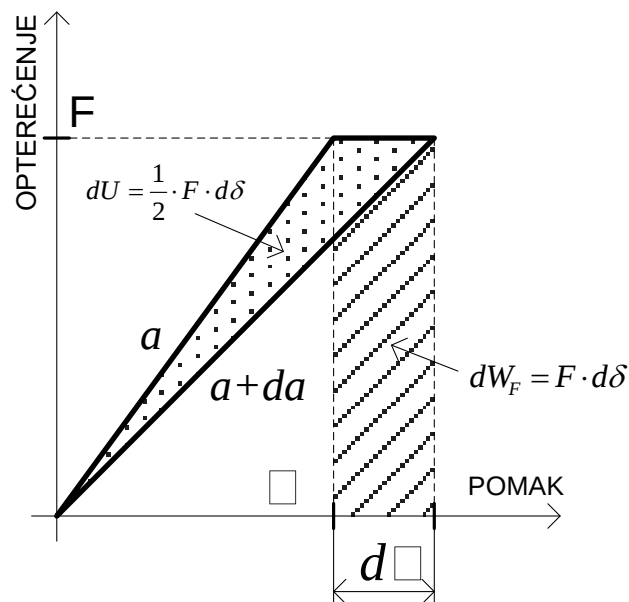
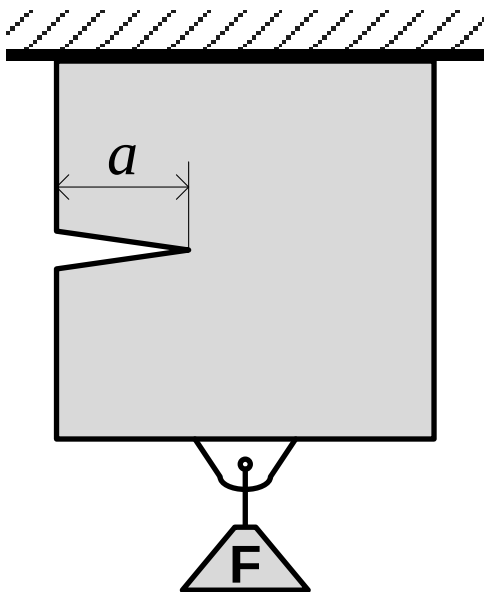
Problem kontrole opterećenja

Potencijalna energija elastičnog tijela:

$$\Pi = U - W_F \quad U \text{ energija deformacija (strain energy)}$$

$$W_F \text{ rad vanjskih sila}$$

$$F = \text{const}$$



$$W_F = F \cdot \delta$$

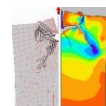
$$U = \int_0^\delta \frac{1}{2} \cdot F \cdot \delta = \frac{F \cdot \delta}{2}$$

$$\Pi = U - W_F = -\frac{F \cdot \delta}{2} = -U$$

$$G = -\frac{dP}{dA} = \frac{1}{b} \times \frac{dU}{da} \bigg|_{F=\text{const}}$$

$$= \frac{F}{2 \times b} \times \frac{dd}{da} \bigg|_{F=\text{const}}$$

$$dA = b da$$



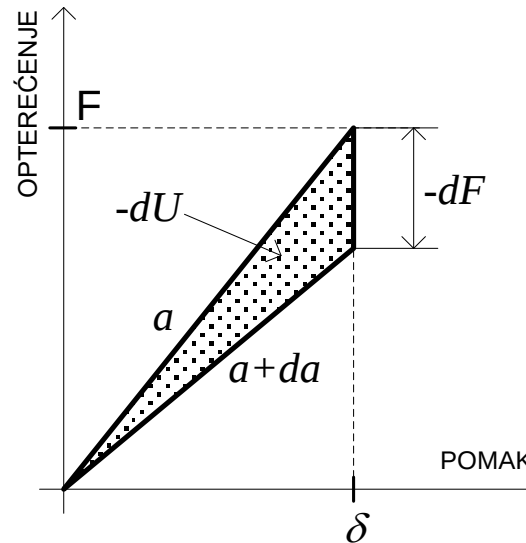
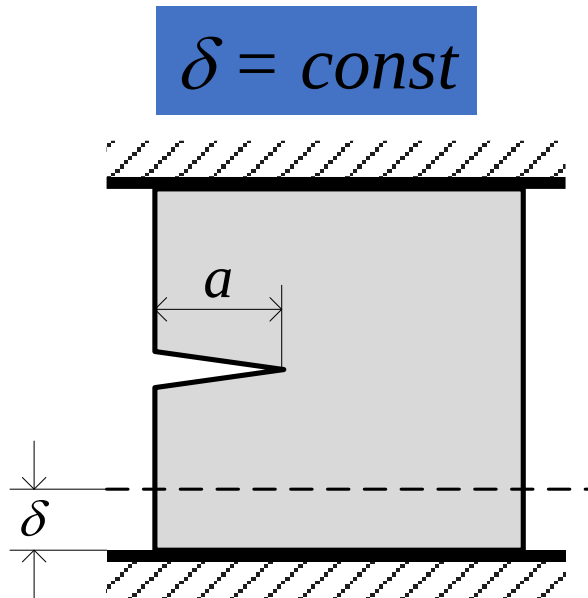
Problem kontrole pomaka

Potencijalna energija elastičnog tijela:

$$\Pi = U - W_F$$

U energija deformacija (*strain energy*)

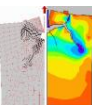
W_F rad vanjskih sila

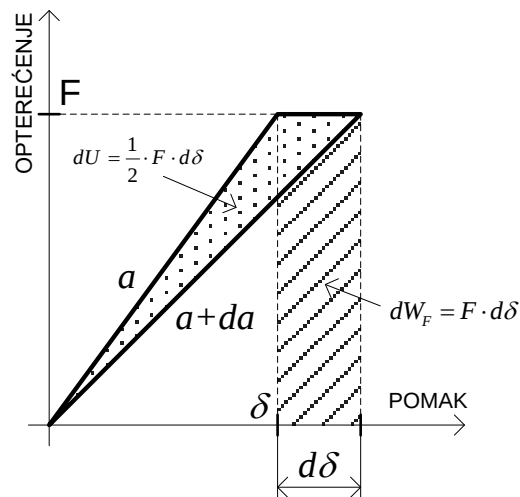
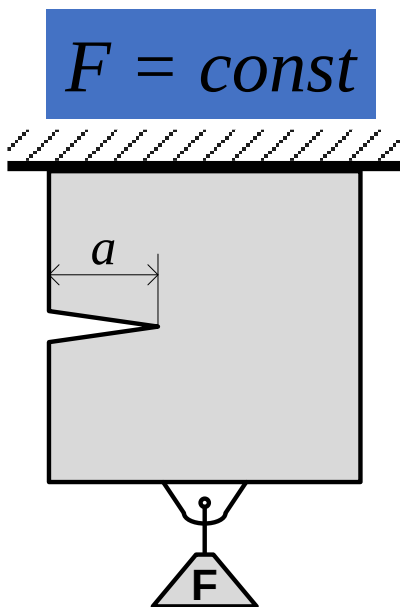


$$W_F = 0$$

$$\Pi = U$$

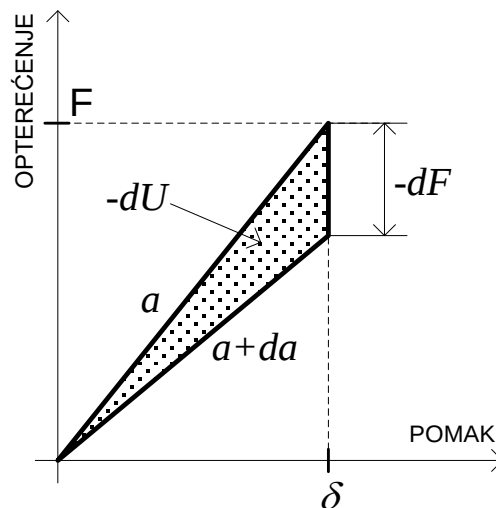
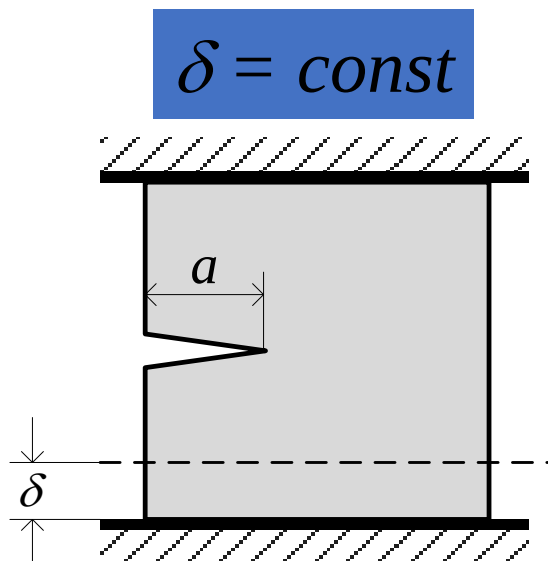
$$G = -\frac{d\Pi}{dA} = \frac{1}{b} \cdot \left(\frac{dU}{da} \right)_{\delta=const} = -\frac{\delta}{2 \cdot b} \cdot \left(\frac{dF}{da} \right)_{\delta=const}$$



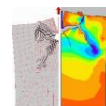


$$\left(\frac{dU}{da} \right)_{F=const} = - \left(\frac{dU}{da} \right)_{\delta=const}$$

$$(dU)_{F=const} = -(dU)_{\delta=const}$$



Pri istoj brzini oslobađanja energije **opterećenje konstantnom silom je znatno opasnije.**



5. LINEARNO ELASTIČNA MEHANIKA LOMA

5.6 Nestabilnost i R krivulja

Pukotina raste ako je $G = 2 \cdot w_f$

Prirast pukotine može biti stabilan i nestabilan, ovisno o tome kako se mijenjaju G i w_f sa veličinom pukotine.

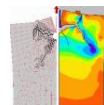
Ako uvedemo oznaku:

$$R = 2 \cdot w_f$$

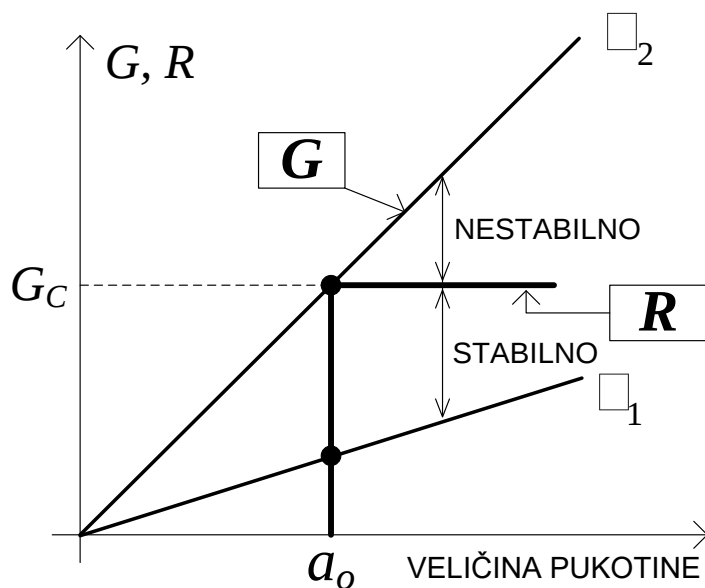
otpornost materijala prema širenju pukotine

Krivulja koja povezuje R sa povećanjem pukotine zove se **krivulja otpornosti pukotine** ili **R-krivulja**.

Odgovarajući dijagram koji povezuje G sa povećanjem pukotine zove se **krivulja širenja pukotine** (*Crack Driving Curve*).



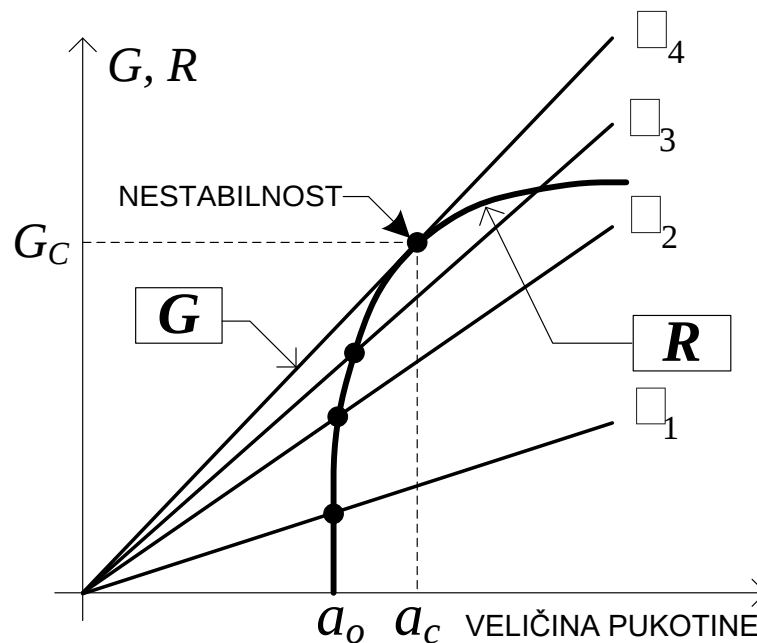
Krivulja otpornosti pukotine ili R-krivulja



**ravna R-krivulja –
otpornost konstantna s
prirastom pukotine**

Uvjet stabilnog prirasta pukotine:

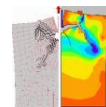
Nestabilan razvoj pukotine:



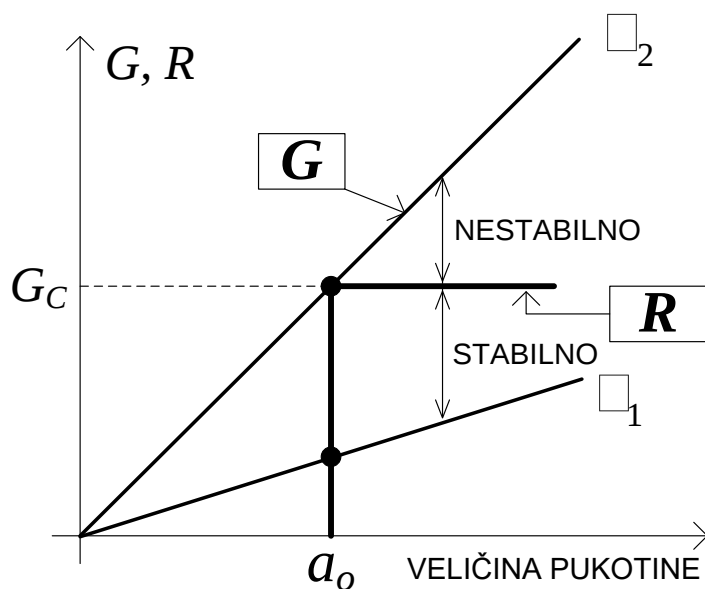
rastuća R-krivuljom

$$G = R \quad \text{ i } \quad \frac{dG}{da} \leq \frac{dR}{da}$$

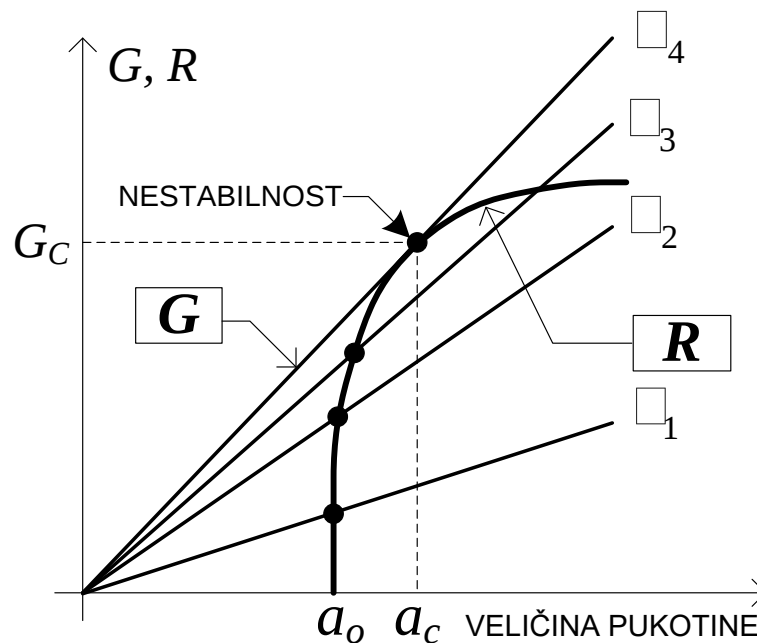
$$\frac{dG}{da} > \frac{dR}{da}$$



Krivulja otpornosti pukotine ili R-krivulja



ravna R-krivulja

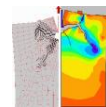


rastuća R-krivuljom

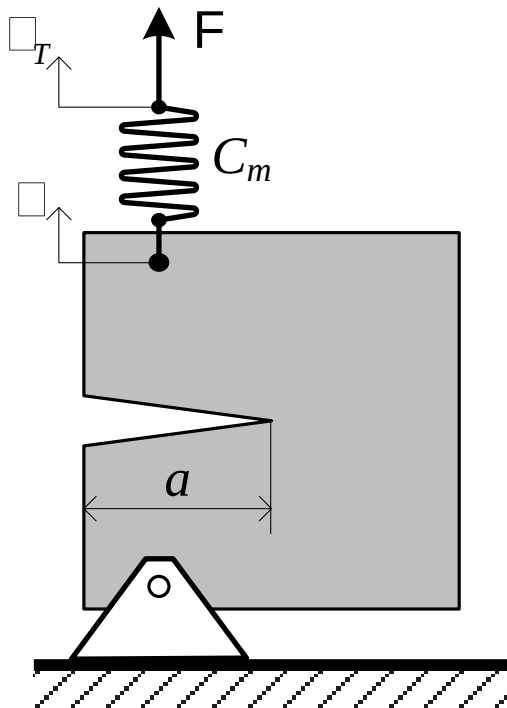
R-krivulja idealno krhkih materijala je uvijek ravna.

Duktilni lom metala obično prati rastuća R-krivulja.

Kontrola pomaka rezultira stabilnijim prirastom pukotine nego kontrola sile.



Većina realnih konstrukcija je izložena kombiniranim uvjetima kontrole pomaka i kontrole opterećenja.



$$d_T = d + C_m \times F$$

Kontrola pomaka odgovara beskonačno krutoj opruzi:

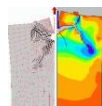
$$C_m = 0$$

Kontrola opterećenja odgovara beskonačno popustljivoj opruzi:

$$C_m = \infty$$

U trenutku nestabilnosti, moraju biti zadovoljeni slijedeći uvjeti:

$$G = R \quad \text{i} \quad \left(\frac{dG}{da} \right)_{\delta T} = \frac{dR}{da}$$



5. LINEARNO ELASTIČNA MEHANIKA LOMA

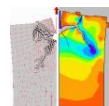
5.7 Analiza polja naprezanja i pomaka oko pukotine

Pristup analize napredovanja pukotine preko ravnoteže energije nailazi na velike probleme za većinu praktičnih situacija.

G. R. Irwin je 1957. godine formulisao uvjet za razvoj pukotine (kriterij lokalnog loma u vrhu pukotine) na osnovu intenziteta polja naprezanja u neposrednoj okolini vrha pukotine (uvjet je potpuno ekvivalentan Griffithovu energetsom uvjetu).

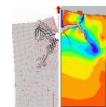
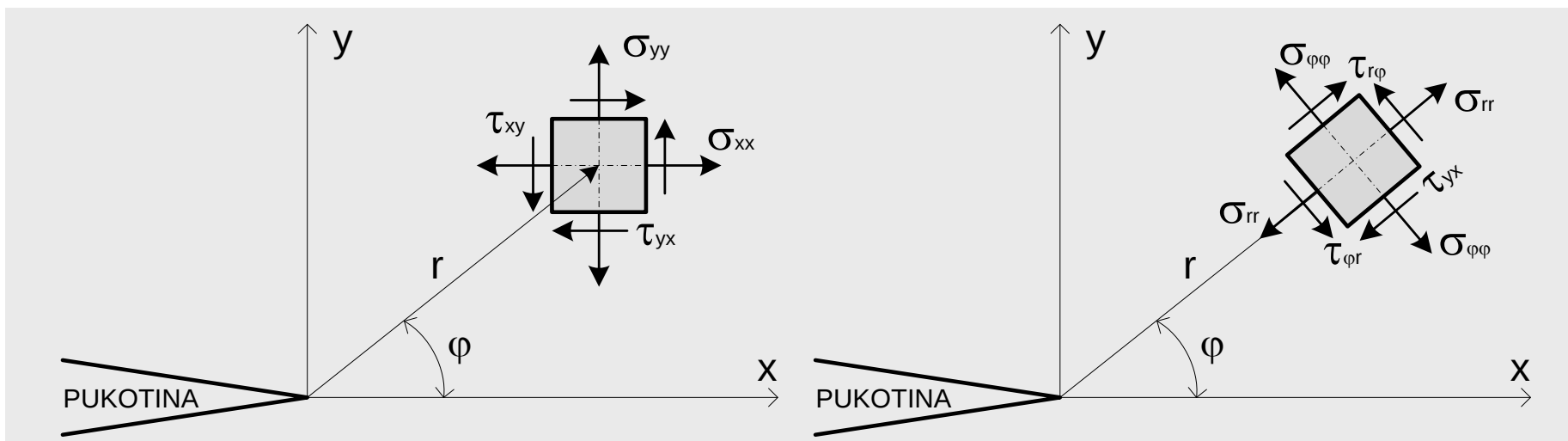
U LEFM-u se za određivanje polja naprezanja i deformacija u okolini pukotine primjenjuju rješenja dobivena metodama linearne teorije elastičnosti, na različite načine.

Najzastupljenija metoda je pomoću Mushelishvili-Kolosovljevih i Westergaardovih jednažbi.

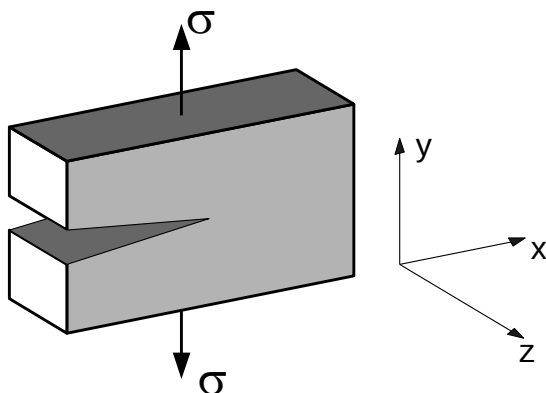


$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}(\varphi)$$

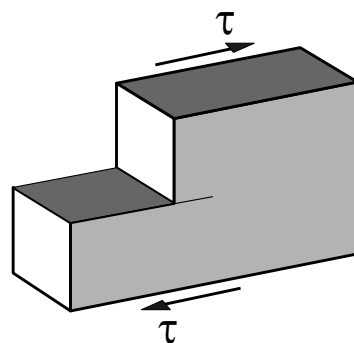
K – koeficijent intenziteta naprezanja ($MPa\sqrt{m}$)



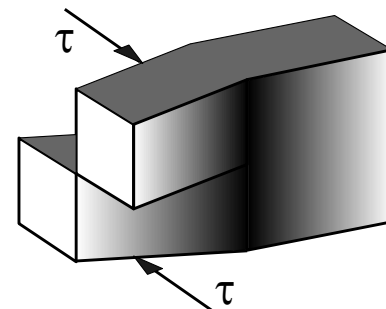
Raspodjela naprezanja u blizini vrha pukotine zavisi od **oblika razvoja pukotine**.



I oblik



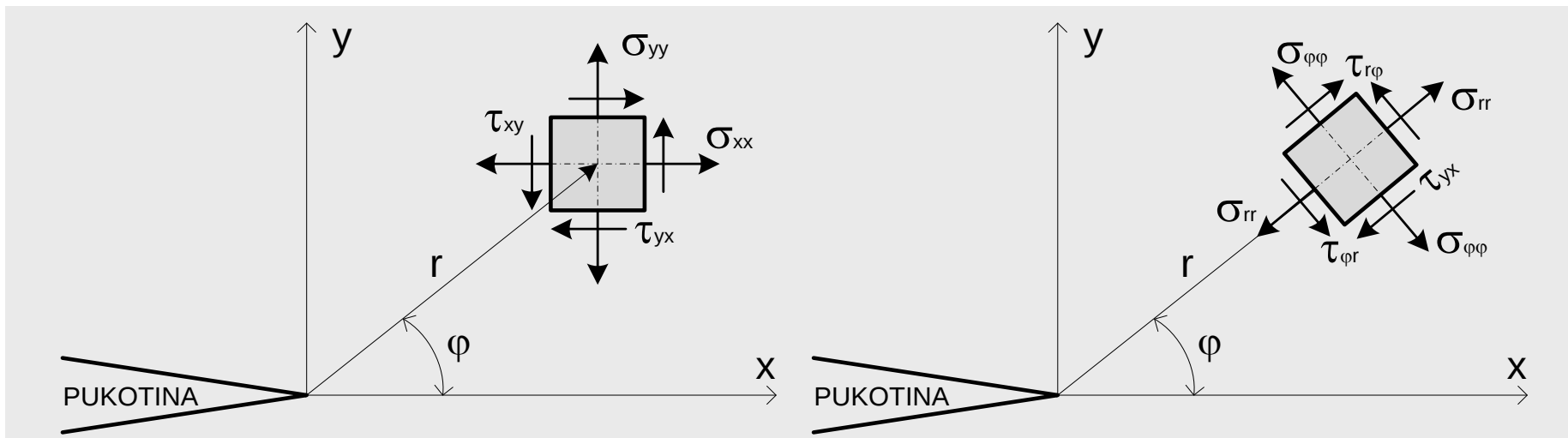
II oblik



III oblik

Najopasniji lomovi nastaju pri razvoju pukotine otvaranjem (**I oblik**). Zbog toga se ovaj oblik i najviše proučava.

Svakom obliku razvoja pukotine odgovara faktor intenziteta naprezanja K_I , K_{II} i K_{III} .

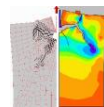


Riješiti neki ravninski problem teorije elastičnosti, znači zadovoljiti diferencijalne jednačbe ravnoteže:

$$\sum_{i,j=x,y,z} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial i} + F_j = 0$$

i uvjete kompatibilnosti deformacija:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$



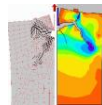
Airy je pokazao da postoji funkcija naprezanja $\Phi(x, y)$

koja zadovoljava jednačbe ravnoteže:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Uvjet kompatibilnosti} \\ &\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \\ &\quad \Downarrow \\ &\quad \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \\ &\quad \nabla^4(\Phi) = \nabla^2[\nabla^2(\Phi)] = 0 \end{aligned}$$

Uvodimo Westergaardovu kompleksnu funkciju naprezanja:

$$Z = Z(z)$$



Airyeva funkcija naprezanja $\Phi(x, y)$

i kompleksna funkcija: $Z = Z(z)$

Su povezane su preko integrala:

$$\Phi(x, y) = \operatorname{Re} \left[\int (Z(z) dz) dz \right] + y \cdot \operatorname{Im} \left(\int Z(z) dz \right) = \operatorname{Re} \bar{\bar{Z}}(z) + y \cdot \operatorname{Im} \bar{\bar{Z}}(z)$$

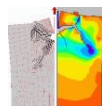
Upotrebom Cauchy-Riemannovih jednažbi:

$$\frac{\partial [\operatorname{Re} Z(z)]}{\partial x} = \frac{\partial [\operatorname{Im} Z(z)]}{\partial y} \quad \frac{\partial [\operatorname{Re} Z(z)]}{\partial y} = -\frac{\partial [\operatorname{Im} Z(z)]}{\partial x}$$

dobivamo: $\sigma_x = \operatorname{Re} Z(z) - y \cdot \operatorname{Im} Z'(z)$

$$\sigma_y = \operatorname{Re} Z(z) + y \cdot \operatorname{Im} Z'(z)$$

$$\tau_{xy} = -y \cdot \operatorname{Re} Z'(z)$$



Točna naprezanja za određeni problem dobiti ćemo upotrebom funkcije $Z(z)$ koja ispunjava rubne uvjete.

Za primjer beskonačne opterećene ploče sa središnjom pukotinom duljine $2a$ to je:

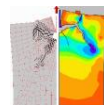
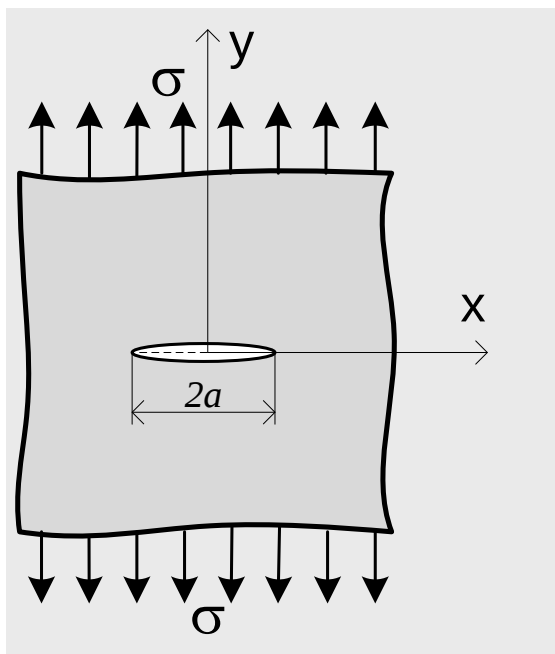
$$Z(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{z^2}}}$$

Na kraju dobivamo:

$$\sigma_x = \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3 \cdot \varphi}{2} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3 \cdot \varphi}{2} \right)$$

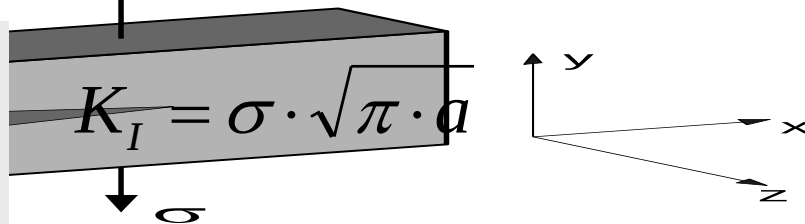
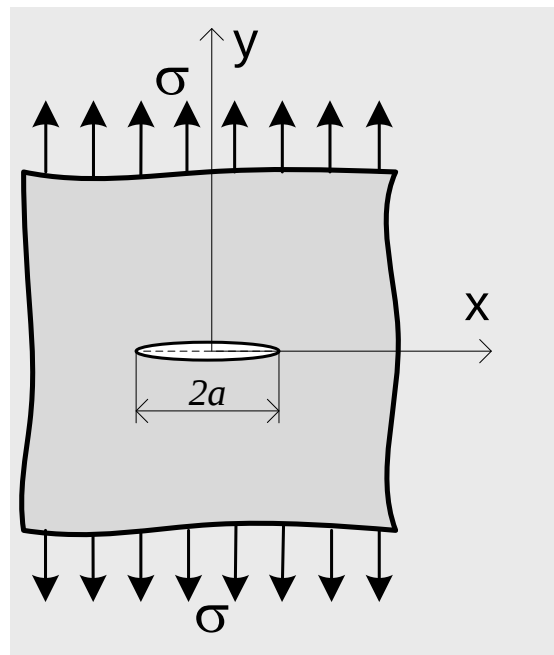
$$\tau_{xy} = \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3 \cdot \varphi}{2}$$



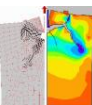
Naprezanja se dobiju umnoškom položaja $\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f(\varphi)$

i faktora $\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$

Taj faktor određuje veličinu elastičnih naprezanja u području korijena pukotine i zove se **koeficijent intenziteta naprezanja** I oblika razvoja pukotine i označava se:

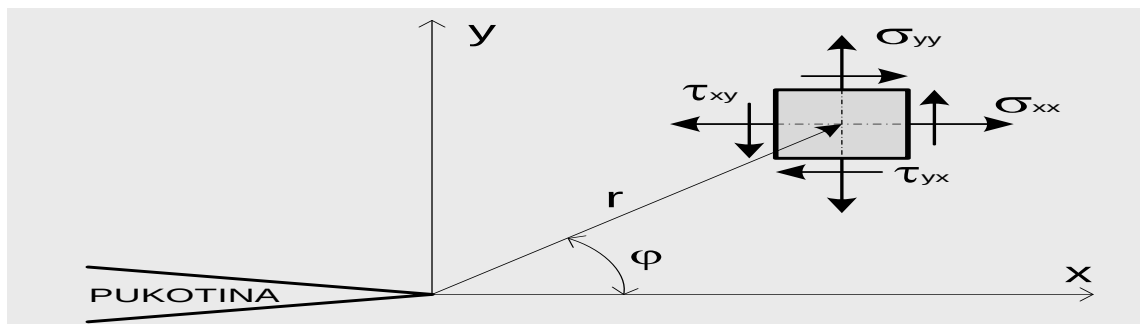


$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \begin{Bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3 \cdot \varphi}{2} \right) \\ \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3 \cdot \varphi}{2} \right) \\ \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3 \cdot \varphi}{2} \end{Bmatrix}$$

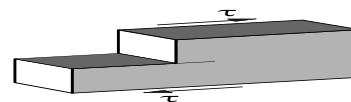


$$\varphi = 0 \Rightarrow \sigma_x = \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \quad \tau_{xy} = 0.$$

Od samo jednoosnog naprezanja u ploči s pukotinom dobivamo dvoosno stanje naprezanja u vrhu pukotine.

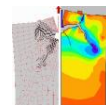


U slučaju II oblika otvaranja pukotine:

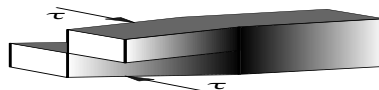


$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{-K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \begin{Bmatrix} \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left(2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3 \cdot \varphi}{2} \right) \\ -\sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left(\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3 \cdot \varphi}{2} \right) \\ -\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3 \cdot \varphi}{2} \right) \end{Bmatrix}$$

$$K_{II} = \tau \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

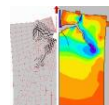


U slučaju III oblika otvaranja pukotine:



$$\tau_{xz} = \frac{-K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \quad \tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$K_{III} = \tau \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$



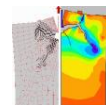
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$\sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$\sigma_3 = 0 \quad \text{ravninsko naprezanje}$$

$$\sigma_3 = \frac{2 \cdot \nu \cdot K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \quad \text{ravninska deformacija}$$

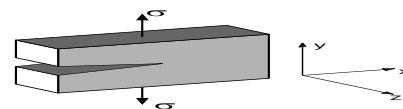


Izrazi za **elastično polje pomaka** omogućuju proračun akumulirane elastične energije, a pružaju osnovu za pomacima kontrolirane kriterije loma.

U slučaju **I oblika** otvaranja pukotine:

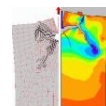
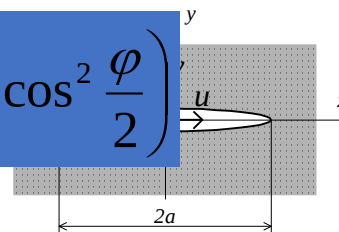
$$u = \frac{K_I \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(\frac{\kappa - 1}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$v = \frac{K_I \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left(\frac{\kappa + 1}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right)$$



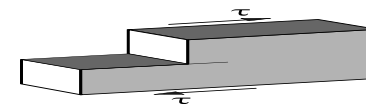
$$\kappa = 3 - 4 \cdot \nu \quad \text{ravninsko naprezanje}$$

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{ravninska deformacija}$$



U slučaju **II oblika** otvaranja pukotine:

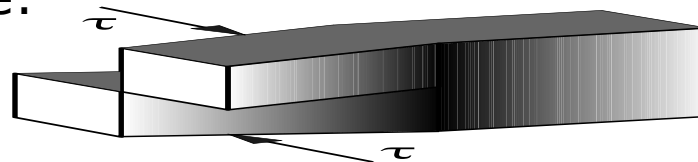
$$u = \frac{K_{II} \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left(\frac{\kappa + 1}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right)$$



$$v = \frac{K_{II} \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(\frac{\kappa - 1}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)$$

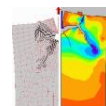
U slučaju **III oblika** otvaranja pukotine:

$$w = \frac{K_{III} \cdot (1 + \nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \sin \frac{\varphi}{2}$$



$$\kappa = 3 - 4 \cdot \nu \quad \text{ravninsko naprezanje}$$

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{ravninska deformacija}$$



5. LINEARNO ELASTIČNA MEHANIKA LOMA

5.7.1 Koeficijent intenziteta naprezanja

Tijelo s pukotinom može biti opterećeno sa svakim od tri načina otvaranja pukotine ili kombinacijom dva ili tri oblika.

Najopasniji lomovi nastaju pri razvoju pukotine otvaranjem (**I oblik**).

Polje naprezanja ispred vrha pukotine u izotropnom linearno elastičnom materijalu, možemo napisati i u slijedećem obliku:

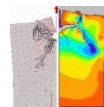
$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}^I(\varphi)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{III} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}^{III}(\varphi)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}^{II}(\varphi)$$

U slučaju kombinacije oblika otvaranja pukotine:

$$\sigma_{ij}^{ukupno} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} + \sigma_{ij}^{III}$$



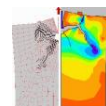
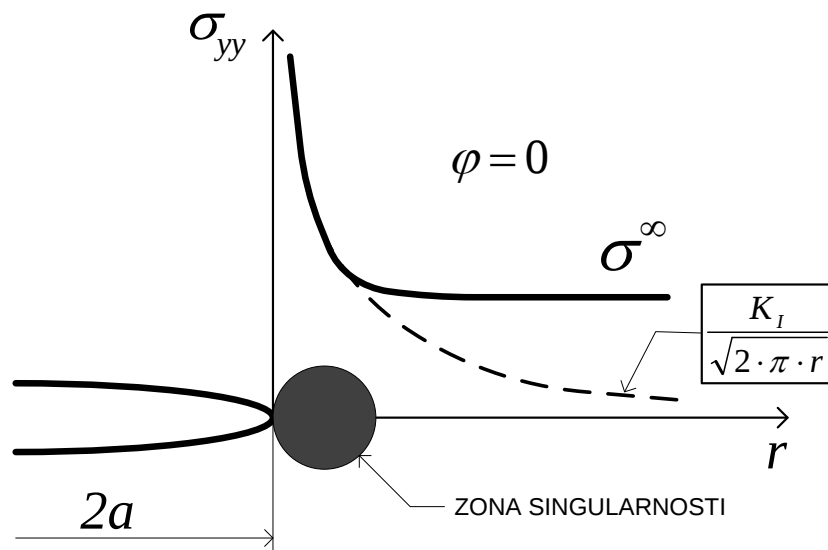
$$\varphi = 0 \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}}$$

Gornji izraz vrijedi samo u uskom području uz pukotinu, gdje singularnost

$$1/\sqrt{r}$$

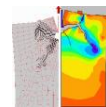
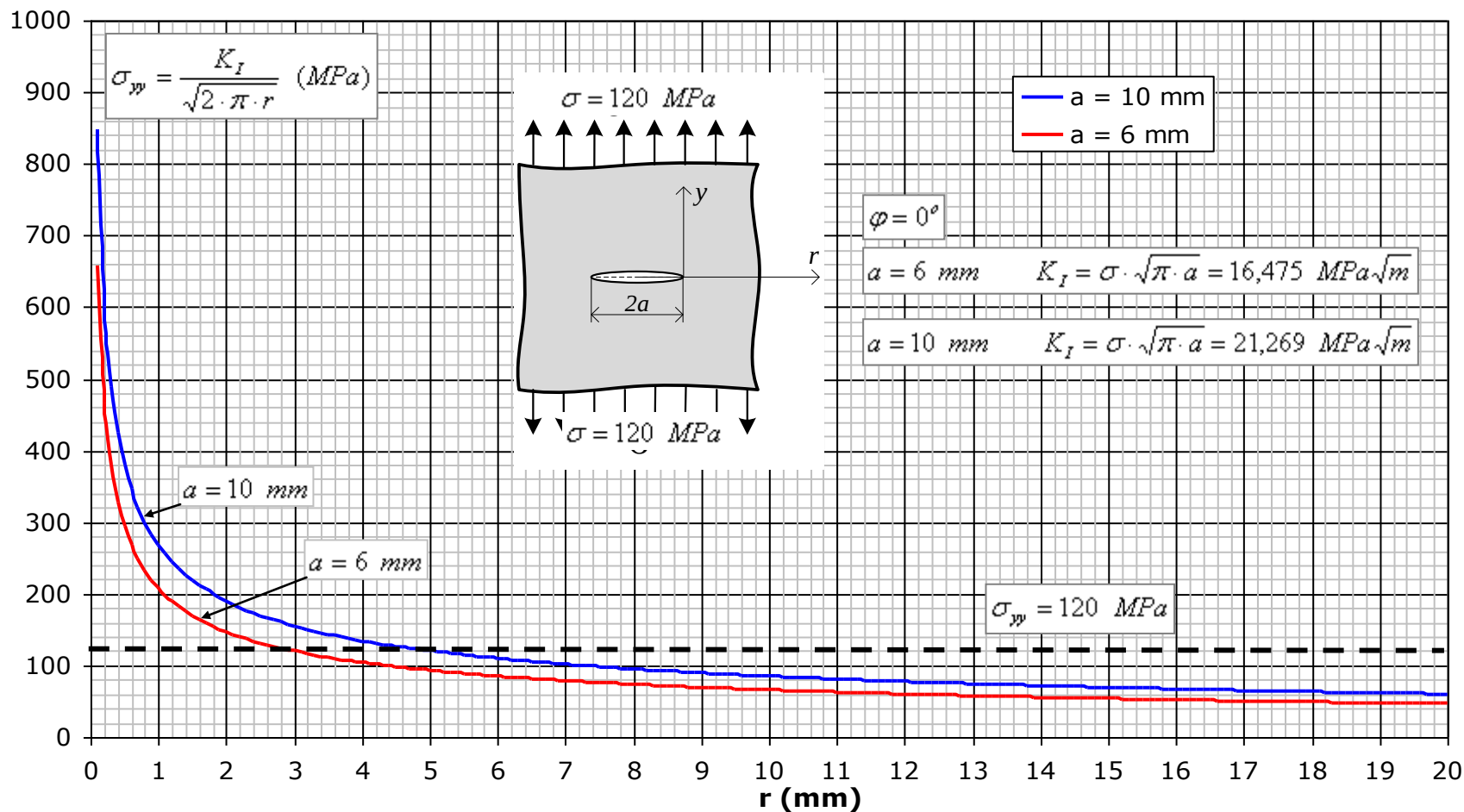
dominira poljem naprezanja.

Koeficijent intenziteta naprezanja definira **amplitudu singularnosti** oko vrha pukotine, odnosno, naprezanja oko vrha pukotine su proporcionalni sa K .



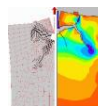
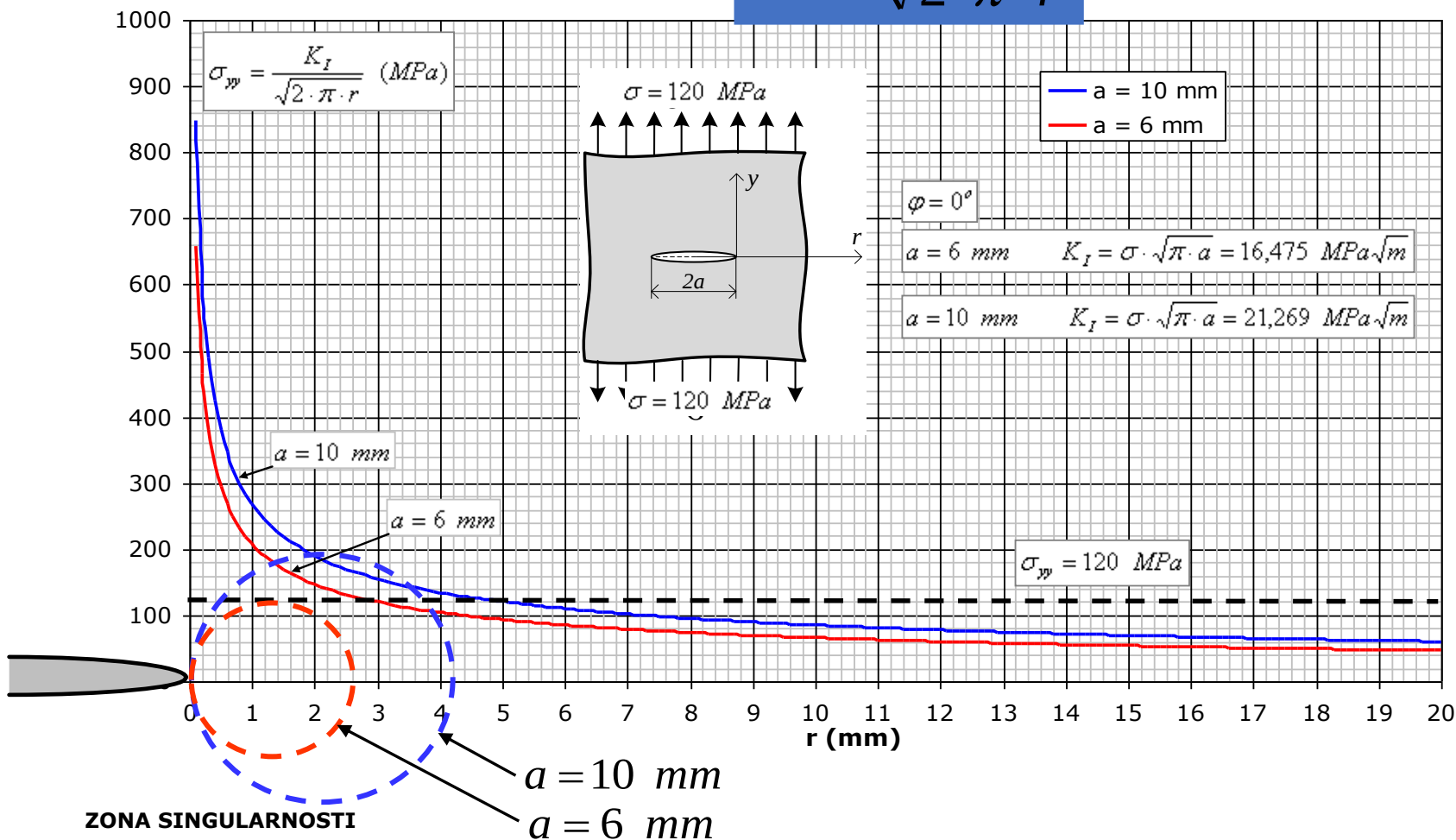
$$\varphi = 0$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}}$$



$$\varphi = 0$$

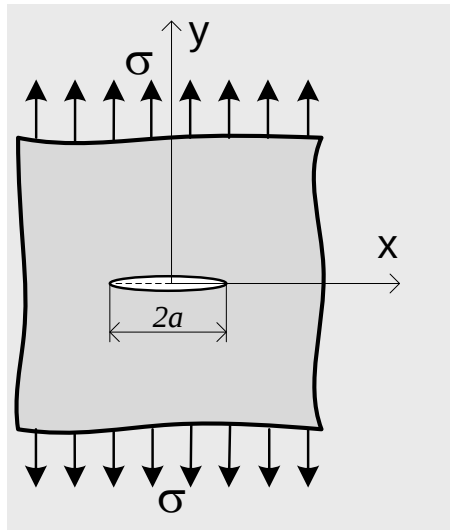
$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}}$$



Da bi koeficijent intenziteta naprezanja bio upotrebljiva veličina, mora biti **određen iz geometrije uzorka i naprezanja** koja djeluju na rubu dovoljno udaljenom od pukotine.

Rješenja u zatvorenom obliku postoje za jednostavne konfiguracije (oblike), dok se u složenijim slučajevima K_I određuje eksperimentalno ili numeričkom analizom.

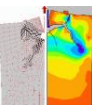
Jedan od slučajeva za koji postoji rješenje u zatvorenom obliku je pukotina u beskonačnoj ploči opterećena vlačnim naprezanjem.



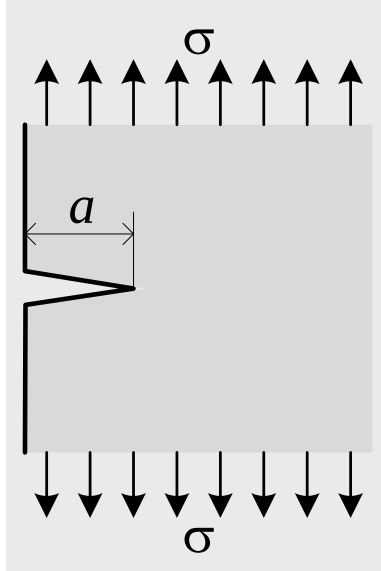
$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

(naprezanje $\cdot \sqrt{\text{dužine}}$)

$$K_I = K_I(\sigma, a)$$

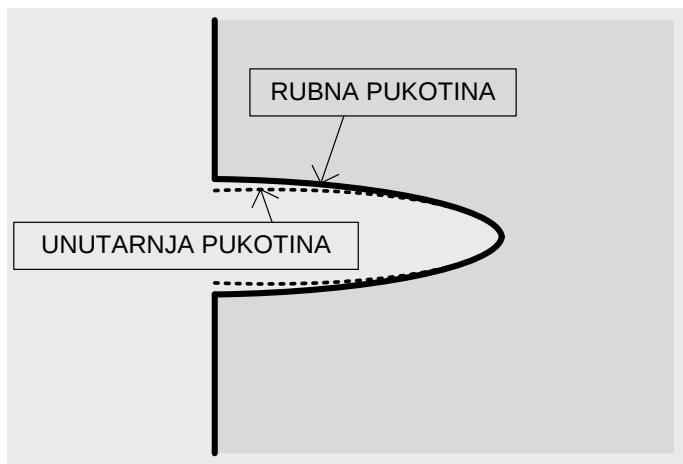


Slično je i u **slučaju polu-beskonačne ploče sa pukotinom na rubu**

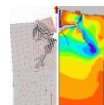


I u tom slučaj postoji rješenje za K_I u zatvorenom obliku:

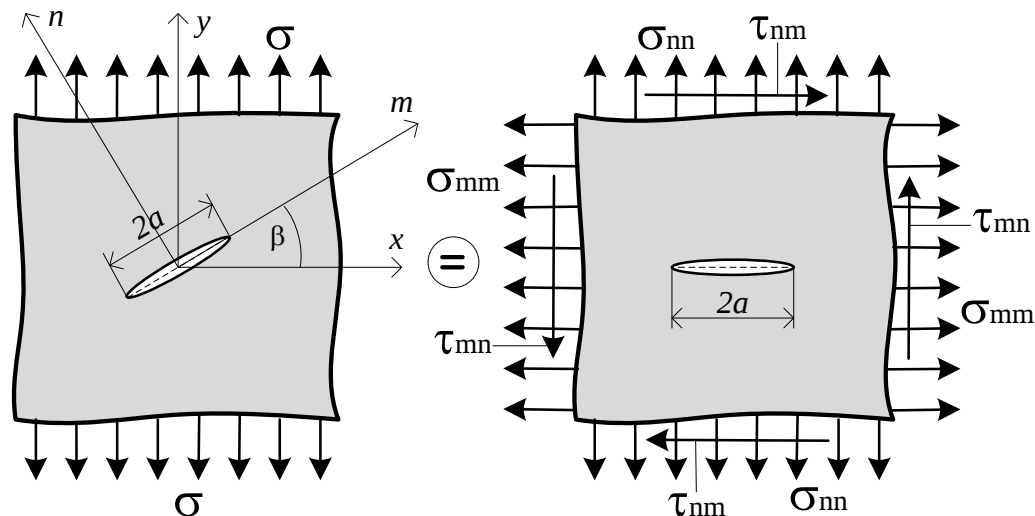
$$K_I = 1,122 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$



Pukotina u površinskom sloju koja izlazi na površinu opasnija je od unutarnje pukotine.



Nagnuta pukotina u beskonačnoj

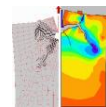


$$K_I = \sigma_{nn} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = \sigma \cdot \cos^2 \beta \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

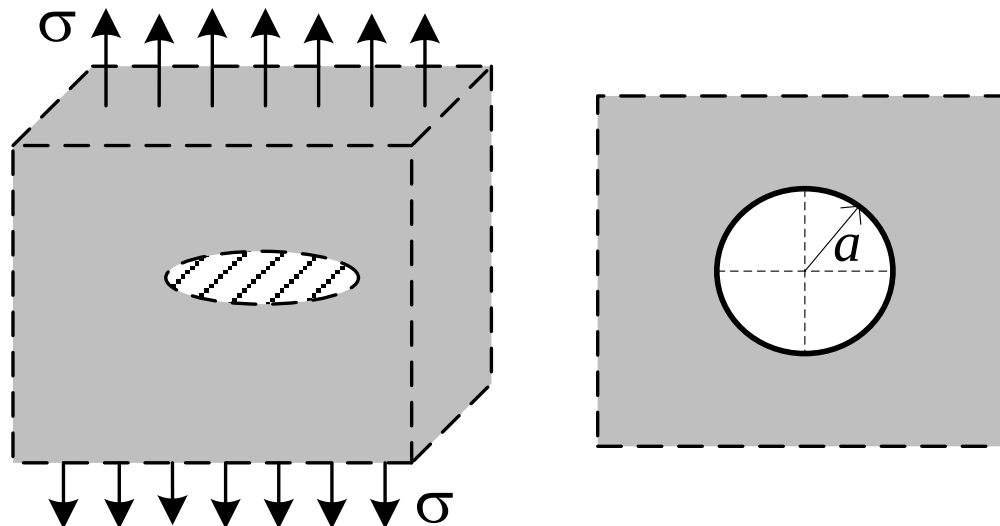
$$K_{II} = \tau_{mn} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = \sigma \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

$\beta = 0$  samo **I oblik**

$\beta = 45^\circ$  K_{II} ima maksimalnu vrijednost

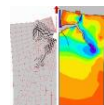


Pukotina u obliku kruga u beskonačnom mediju



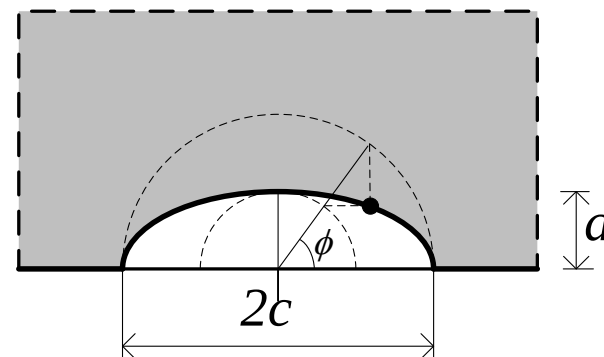
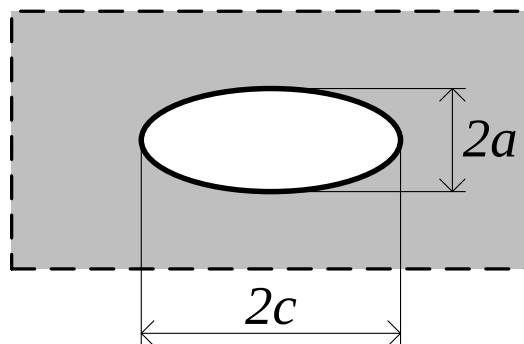
K_I se može odrediti u zatvorenom obliku:

$$K_I = \frac{2}{\pi} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

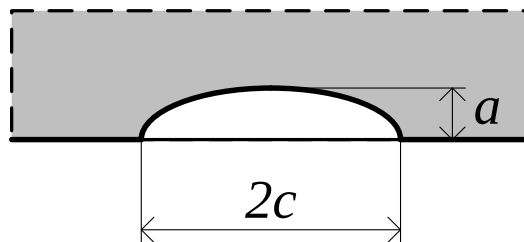


Eliptična ili polu - eliptična pukotina

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot a}{Q}} \cdot f(\phi)$$



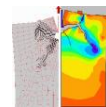
$$K_I = \lambda_s \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot a}{Q}} \cdot f(\phi)$$



$$f(\phi) = \left[\sin^2 \phi + \left(\frac{a}{c} \right)^2 \cdot \cos^2 \phi \right]^{\frac{1}{4}}$$

$$Q = 1 + 1,464 \cdot \left(\frac{a}{c} \right)^{1,65}$$

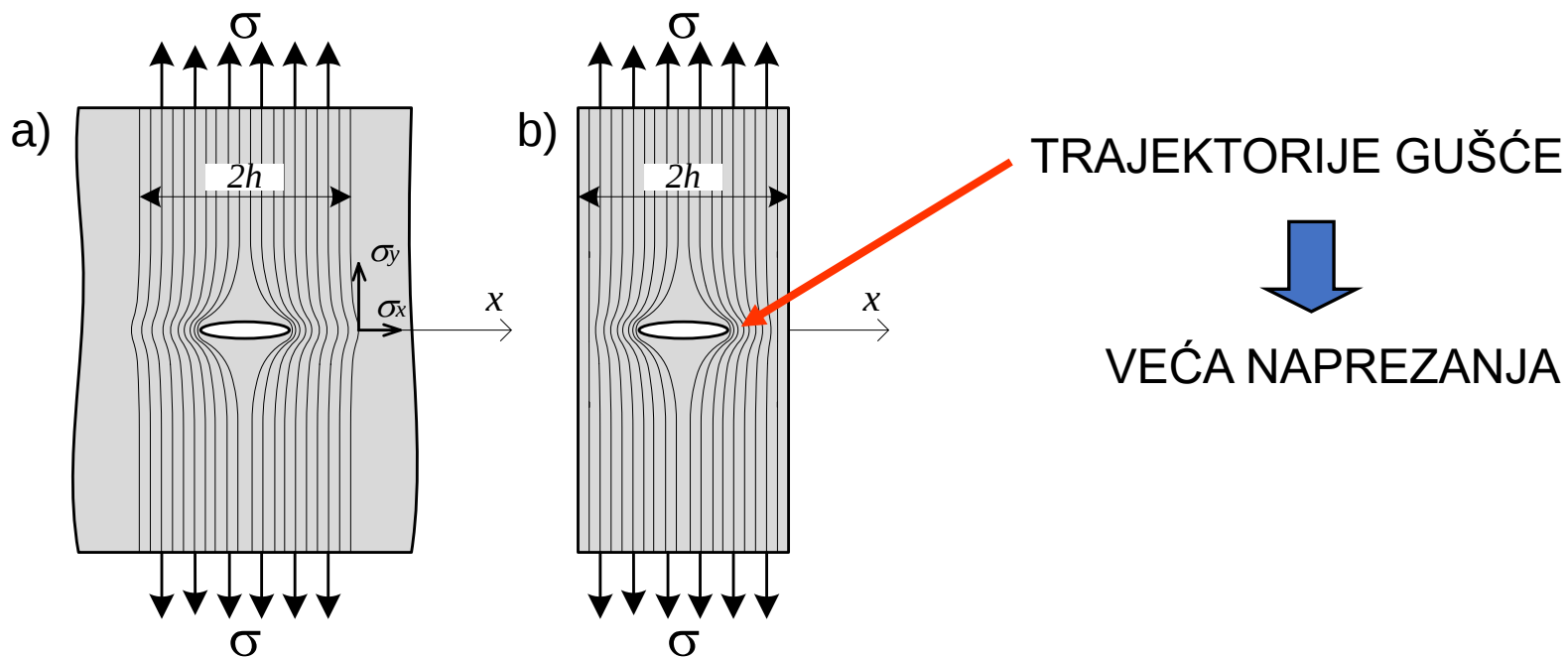
$$\lambda_s = \left(1,13 - 0,09 \cdot \frac{a}{c} \right) \cdot \left[1 + 0,2 \cdot (1 - \sin \phi)^2 \right]$$



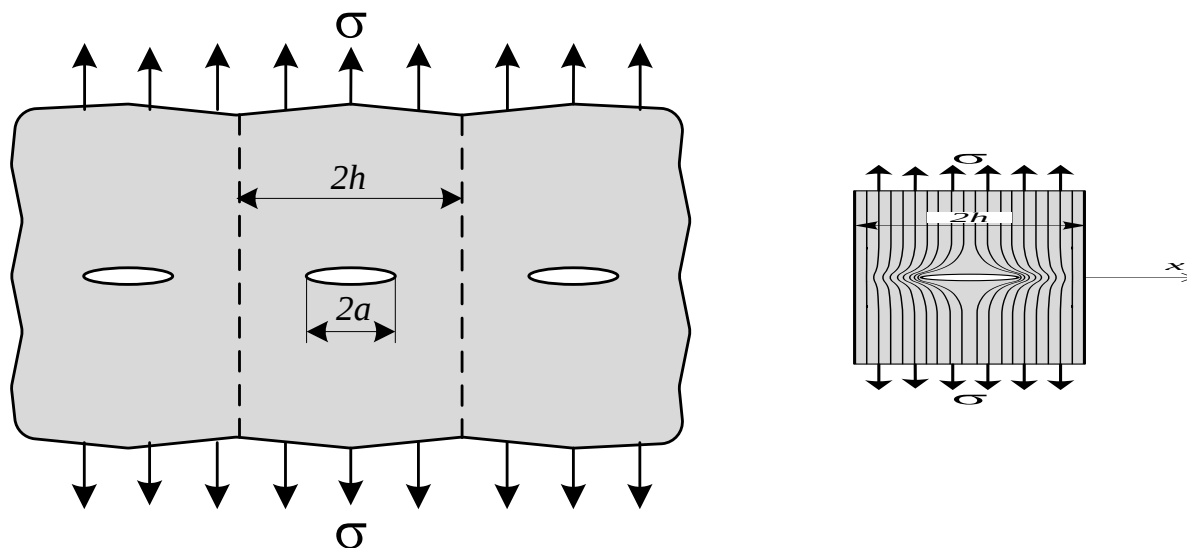
Ako ploča u kojoj se nalazi pukotina nije „beskonačna“ nego **ima konačne dimenzije**, rješenje u zatvorenom obliku nije moguće.

Dok su dimenzije pukotine male u odnosu na ploču, na stanje u vrhu pukotine ne utječu rubovi.

Ako se veličina pukotine povećava ili dimenzije ploče smanje, **vanjski rubovi počinju utjecati**.



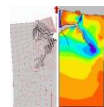
Jedna od tehnika za određivanje utjecaja ruba ploče konačne širine je da pretpostavimo niz kolinearnih pukotina u beskonačnoj ploči:



$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \left[\frac{2 \cdot h}{\pi \cdot a} \cdot \tan \left(\frac{\pi \cdot a}{2 \cdot h} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

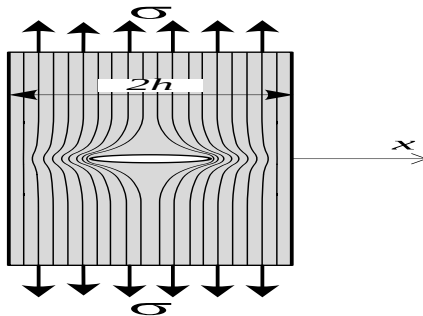
$a/h = 0 \rightarrow$ PUKOTINA U BESKONAČNOJ PLOČI

$$K_I = 1,0 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$



Točna rješenja za pukotinu u ploči konačnih dimenzija mogu se dobiti metodom konačnih elemenata, evo jednog takvog rješenja, prikazanog polinomom:

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \left[\sec\left(\frac{\pi \cdot a}{2 \cdot h}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 - 0,025 \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^2 + 0,06 \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^4 \right]$$

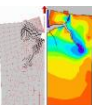


K_I se može izračunati uvođenjem **popravnih funkcija** u različitim oblicima, on se može uvijek svesti na jedan oblik:

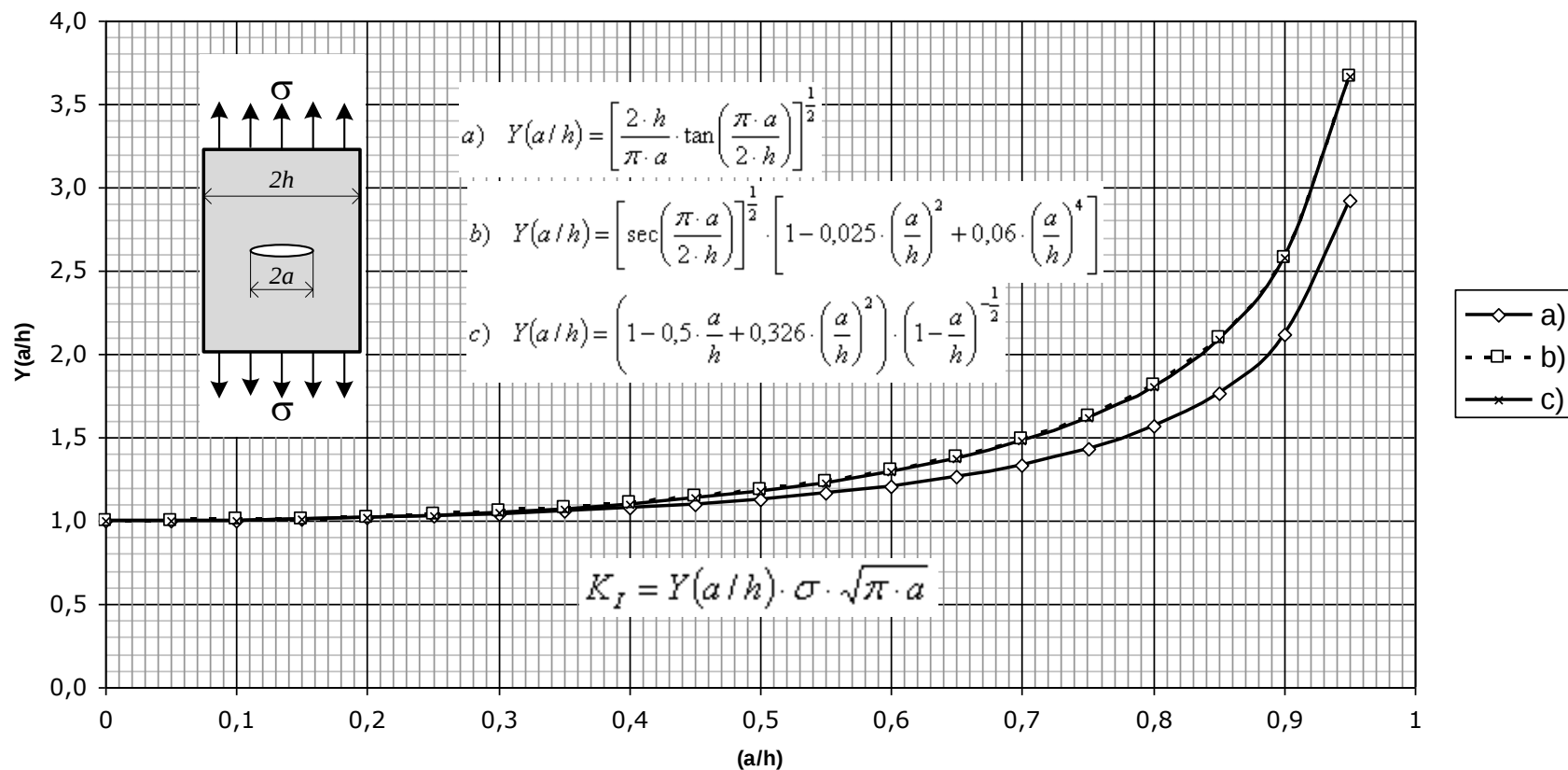
$$K_I = Y(a/h) \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$



POPRAVNA FUNKCIJA

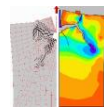


POPRAVNE FUNKCIJE $Y(a/h)$



$$K_I = Y(a/h) \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

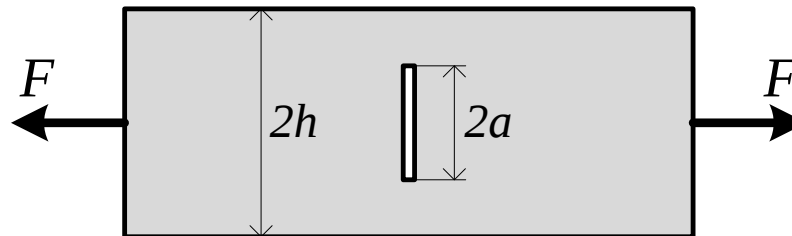
c) Koiter, 1965. godine
Točnost 1 % za bilo koji
odnos a/h



Koeficijent intenziteta naprezanja K_I može se izračunati i po izrazu sljedećeg oblika:

$$K_I = \frac{F}{b \cdot \sqrt{h}} \cdot f(a/h)$$

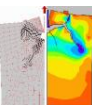
Za prethodni slučaj:



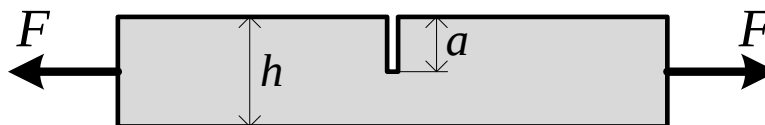
$$f(a/h) = \sqrt{\frac{\pi \cdot a}{4 \cdot h} \cdot \sec \frac{\pi \cdot a}{2 \cdot h}} \cdot \left[1 - 0,025 \cdot \left(\frac{a}{h} \right)^2 + 0,06 \cdot \left(\frac{a}{h} \right)^4 \right]$$

I uvijek se može svesti na oblik:

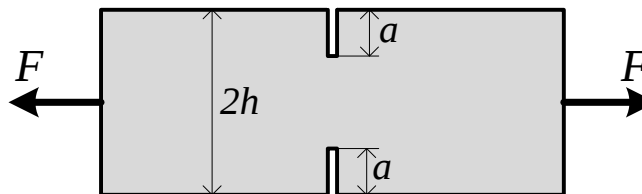
$$K_I = Y(a/h) \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$



Evo **rješenja za nekoliko uobičajenih oblika tijela** (uzorka) s pukotinom opterećenih vlačnom silom F

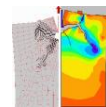


$$f(a/h) = \frac{\sqrt{2 \cdot \tan \frac{\pi \cdot a}{2 \cdot h}}}{\cos \frac{\pi \cdot a}{2 \cdot h}} \cdot \left[0,752 + 2,02 \cdot \frac{a}{h} + 0,37 \cdot \left(1 - \sin \frac{\pi \cdot a}{2 \cdot h} \right)^3 \right]$$

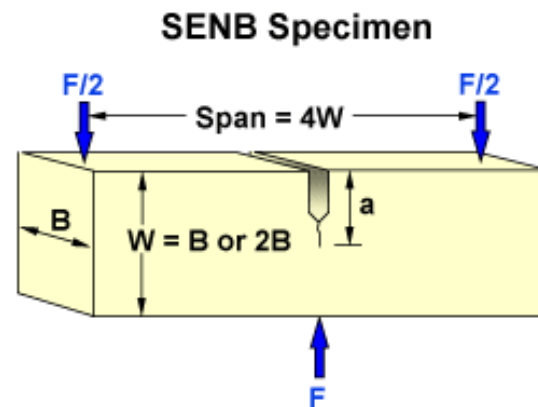
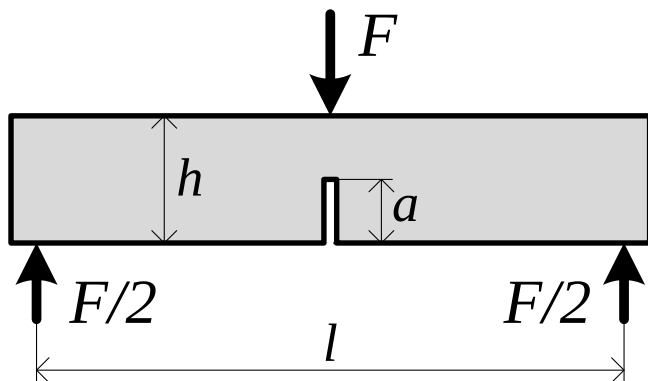


$$f(a/h) = \frac{\sqrt{\frac{\pi \cdot a}{2 \cdot h}}}{\sqrt{1 - \frac{a}{h}}} \cdot \left[1,122 - 0,561 \cdot \frac{a}{h} - 0,205 \cdot \left(\frac{a}{h} \right)^2 + 0,471 \cdot \left(\frac{a}{h} \right)^3 + 0,19 \cdot \left(\frac{a}{h} \right)^4 \right]$$

$$K_I = \frac{F}{b \cdot \sqrt{h}} \cdot f(a/h)$$

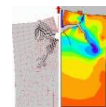


Evo **rješenja za tijelo** (uzorak) s pukotinom opterećenog na savijanje u tri točke

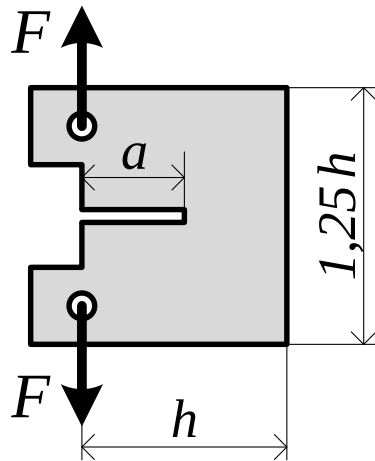


$$f(a/h) = \frac{3 \cdot \frac{l}{h} \cdot \sqrt{\frac{a}{h}}}{2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{a}{h}\right) \cdot \left(1 - \frac{a}{h}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{ 1,99 - \frac{a}{h} \cdot \left(1 - \frac{a}{h}\right) \cdot \left[2,15 - 3,93 \cdot \frac{a}{h} + 2,7 \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^2 \right] \right\}$$

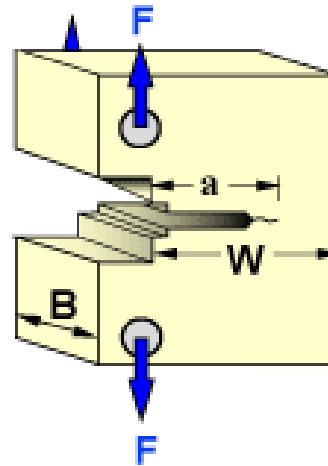
$$K_I = \frac{F}{b \cdot \sqrt{h}} \cdot f(a/h)$$



Rješenje za tijelo (uzorak) s pukotinom opterećenog silom F prema normi ASTM

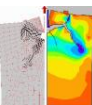


CT Specimen

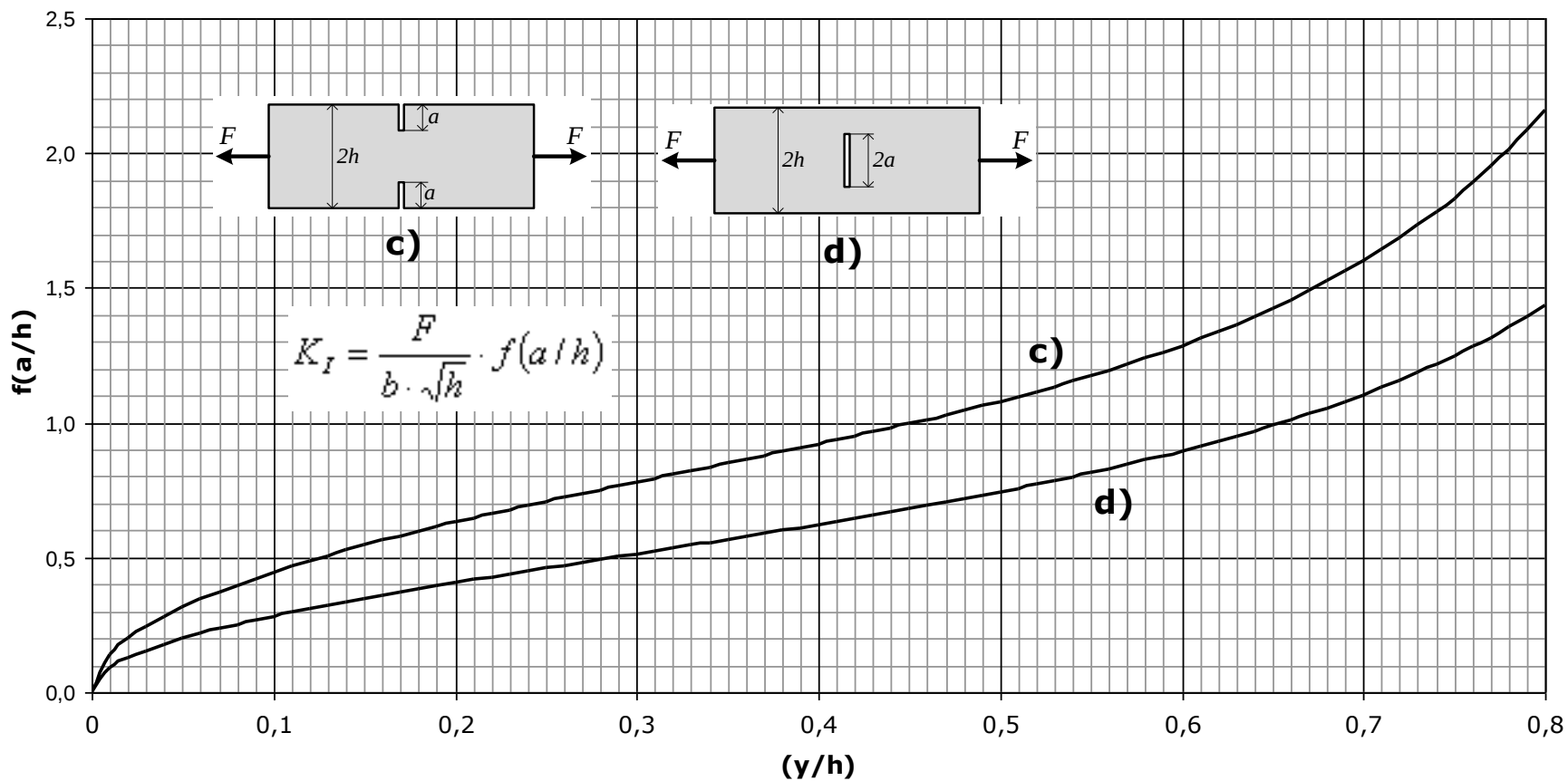


$$f(a/h) = \frac{2 + \frac{a}{h}}{\left(1 - \frac{a}{h}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[0,886 + 4,64 \cdot \frac{a}{h} - 13,32 \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^2 + 14,72 \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^3 - 5,6 \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^4 \right]$$

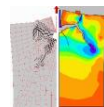
$$K_I = \frac{F}{b \cdot \sqrt{h}} \cdot f(a/h)$$



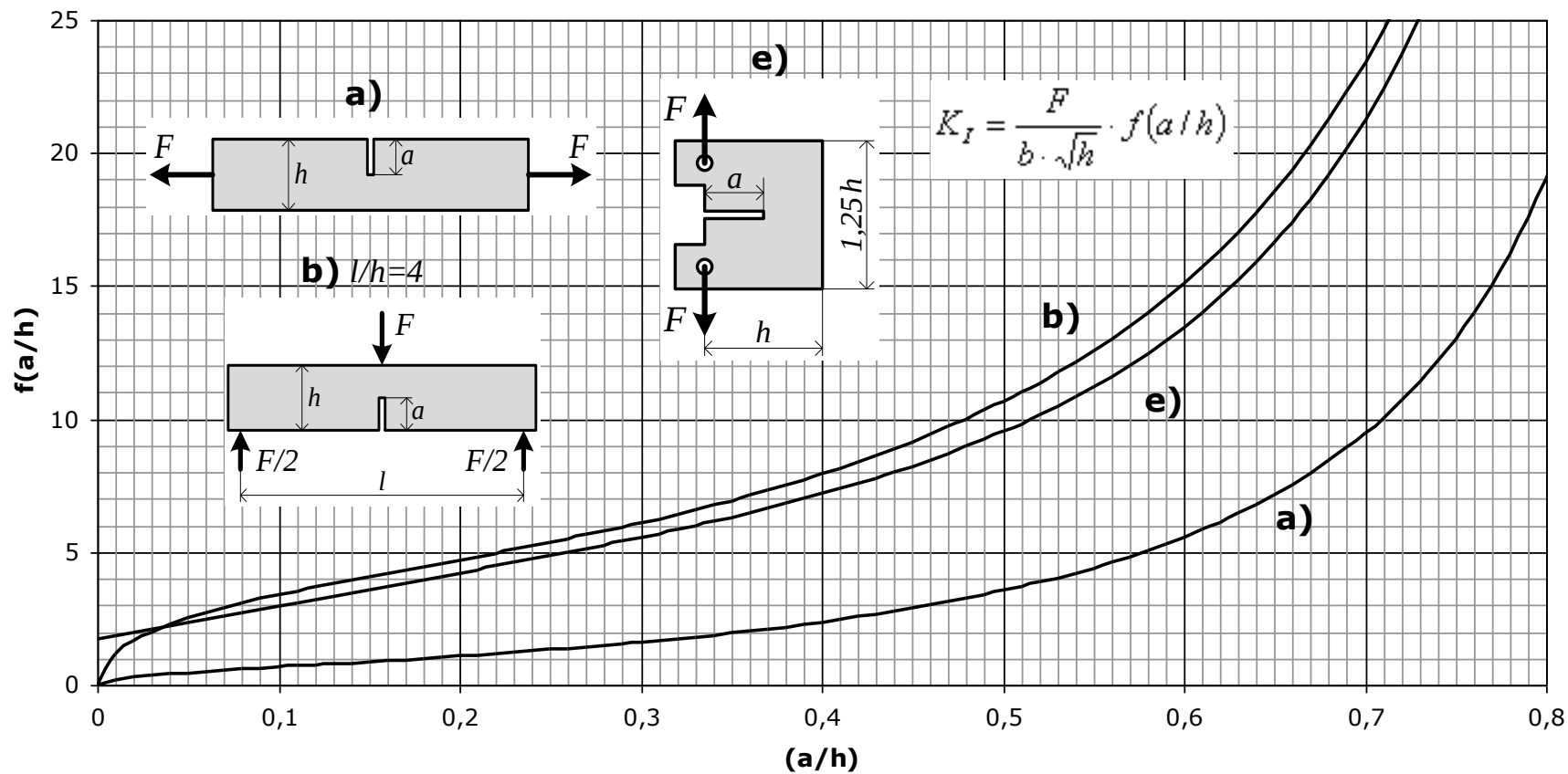
POPRAVNE FUNKCIJE $f(a/h)$



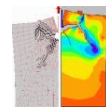
$$K_I = \frac{F}{b \cdot \sqrt{h}} \cdot f(a/h)$$



POPRAVNE FUNKCIJE $f(a/h)$



$$K_I = \frac{F}{b \cdot \sqrt{h}} \cdot f(a/h)$$



5.7.2 Princip superpozicije

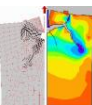
Kod linearno elastičnog materijala, pojedinačne komponente naprezanja, deformacija i pomaka se mogu zbrajati.

Slično je i sa koeficijentima intenziteta naprezanja, koji se **mogu zbrajati za iste oblike otvaranja pukotine i ista opterećenja**.

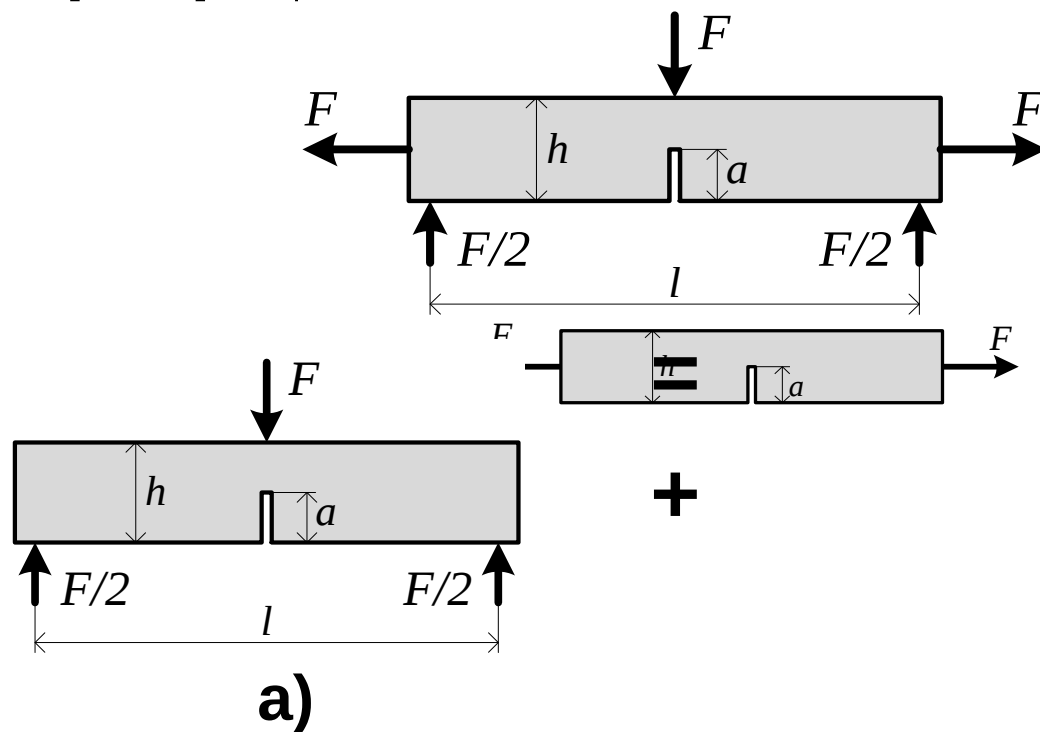
$$K_I^{ukupno} = K_I^{(A)} + K_I^{(B)} + K_I^{(C)} + \dots$$

ali

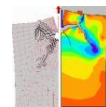
$$K^{ukupno} \neq K_I + K_{II} + K_{III}$$



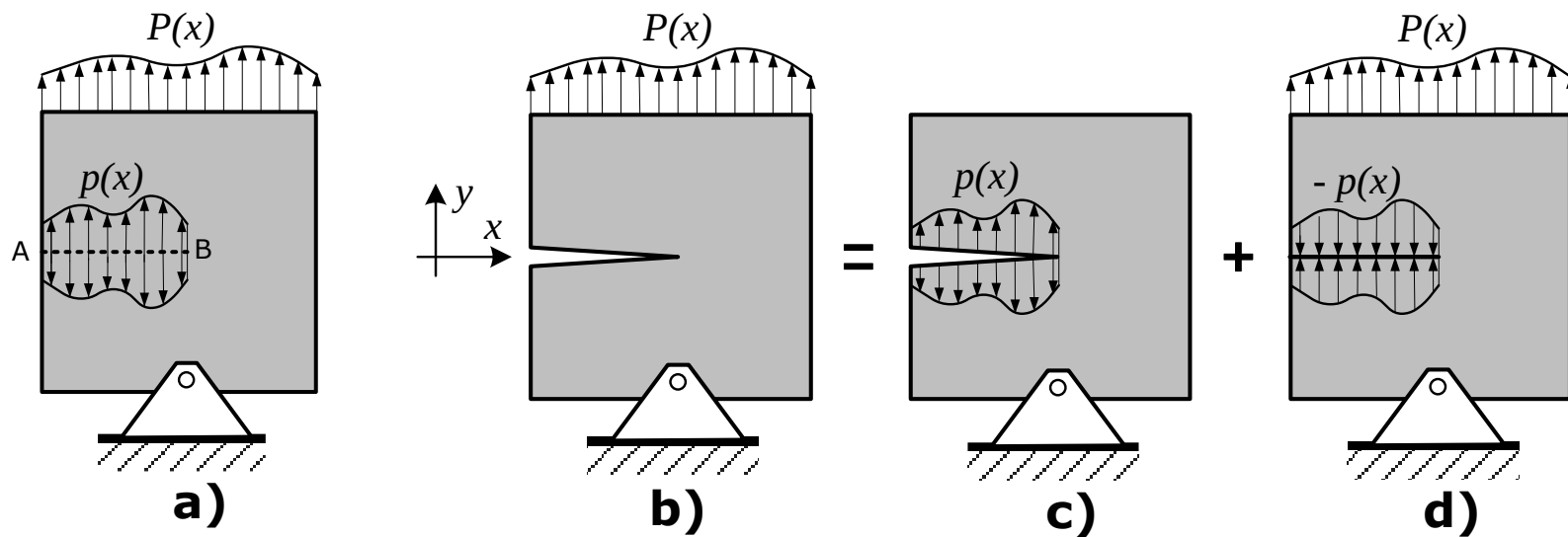
Princip superpozicije



$$K_I^{ukupno} = K_I^{(a)} + K_I^{(b)} = \frac{1}{b\sqrt{h}} \cdot \left[F_a \cdot f_a\left(\frac{a}{h}\right) + F_b \cdot f_b \cdot \left(\frac{a}{h}\right) \right]$$



Princip superpozicije



$$K_I^{(b)} = K_I^{(c)} + K_I^{(d)} = K_I^{(c)} + 0 = K_I^{(c)}$$

5.8 Odnos između K i G

Do sada su prikazana dva parametra koji opisuju ponašanje pukotine:

G - **brzina oslobađanja energije**

K - **koeficijent intenziteta naprezanja**

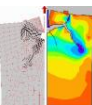
Za linearno elastične materijale K i G su jedinstveno povezani.

$$G = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E'} \quad \longleftrightarrow \quad K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad G = \frac{K_I^2}{E'}$$

$$E' = E \quad \text{za ravninsko naprezanje}$$

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \text{za ravninsku deformaciju}$$



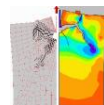
5. LINEARNO ELASTIČNA MEHANIKA LOMA

5.9 Plastičnost u vrhu pukotine

Teorija elastičnosti predviđa beskonačne vrijednosti naprezanja u vrhu pukotine.

U stvarnim materijalima to nije moguće, zato što je radijus pukotine konačan i zato što plastičnost rezultira relaksacijom naprezanja oko vrha pukotine (**naprezanje ne može biti veće od granice tečenja**).

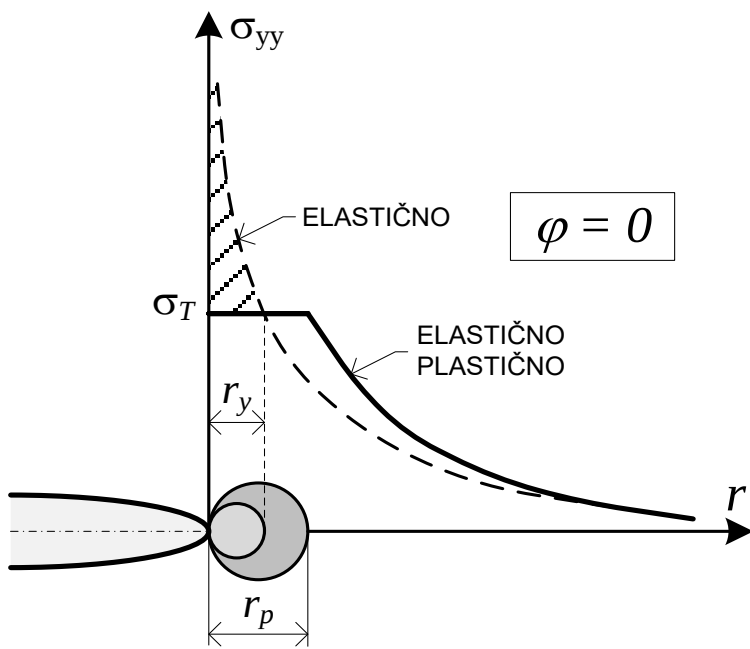
LEFM vrijedi jedino ako je područje plastičnosti malo u odnosu na dimenzije elementa.



5.9 Plastičnost u vrhu pukotine

5.9.1 Irwinov pristup

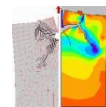
$$\varphi = 0 \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot a}}$$



$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot a}} = \sigma_T \quad \Rightarrow \quad r_y = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_T} \right)^2$$

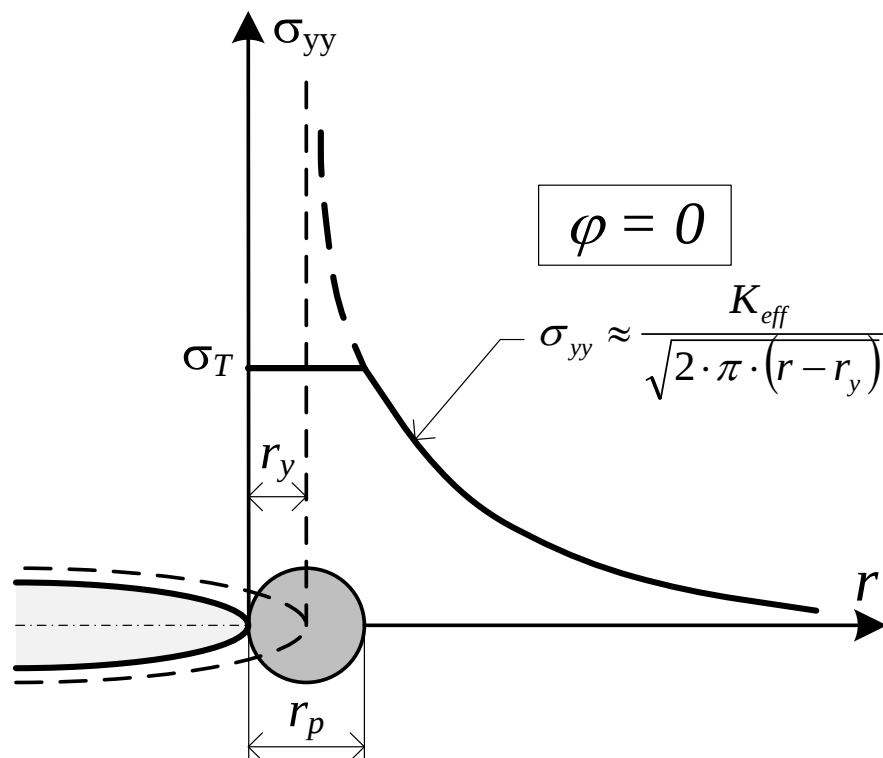
$$\sigma_T \cdot r_p = \int_0^{r_y} \sigma_{yy} \cdot dr = \int_0^{r_y} \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot dr$$

$$r_p = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_T} \right)^2$$



Irwin je predložio koncept **efektivne duljine pukotine** (*effective crack length*).

On je našao dobar način određivanja koeficijenta intenziteta naprezanja premještanjem vrha pukotine u središte plastičnog područja.

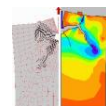


$$a_{eff} = a + r_y$$

$$K_{eff} = Y(a_{eff}) \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a_{eff}}$$

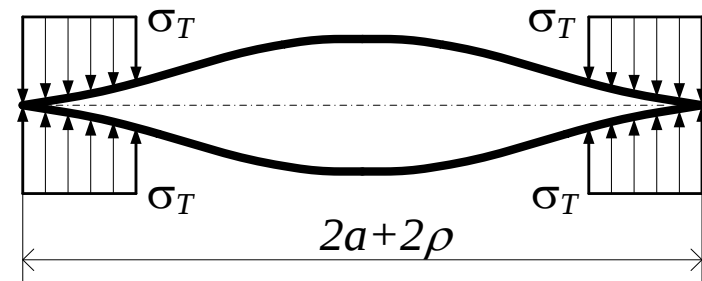
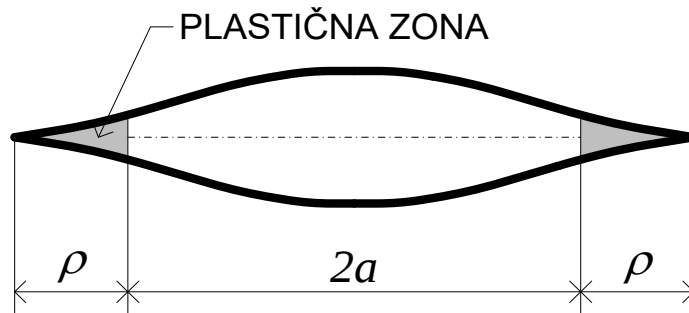
Za **I oblik**:

$$K_{eff} = \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_T} \right)^2}}$$



5.9.2 Dudgale-Barenblattov model

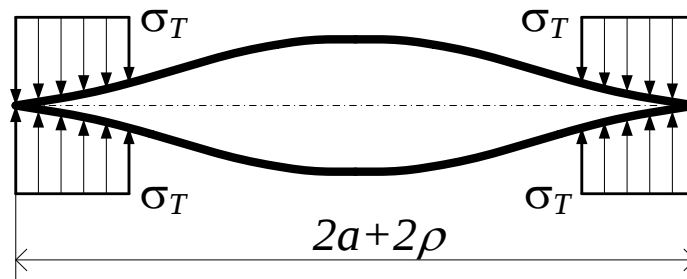
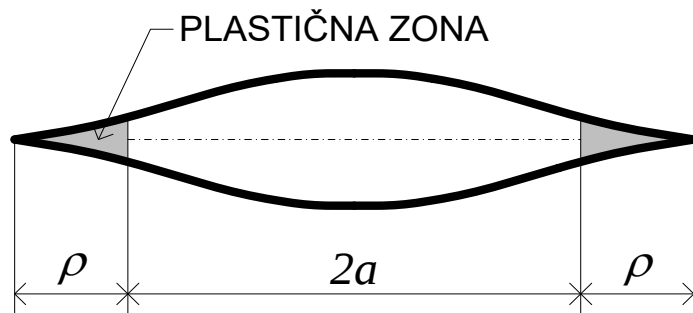
Pretpostavili su dugačko, usko plastično područje u materijalu:



Elasto-plastično ponašanje aproksimirano je superpozicijom 2 poznata elastična rješenja:

1. Unutarnja pukotina je izložena djelovanju vlačnog naprezanja na udaljenom rubu
2. Unutarnja pukotina je izložena tlačnim naprezanjima oko vrha pukotine (koja zatvaraju pukotinu).

5.9.2 Dudgale-Barenblattov model



Dudgale-Barenblatt

$$\rho = \frac{\pi^2 \cdot \sigma^2 \cdot a}{8 \cdot \sigma_T} = \frac{\pi}{8} \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_T} \right)^2$$

Irwin

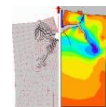
$$r_p = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_T} \right)^2$$

$$\pi / 8 = 0,392$$

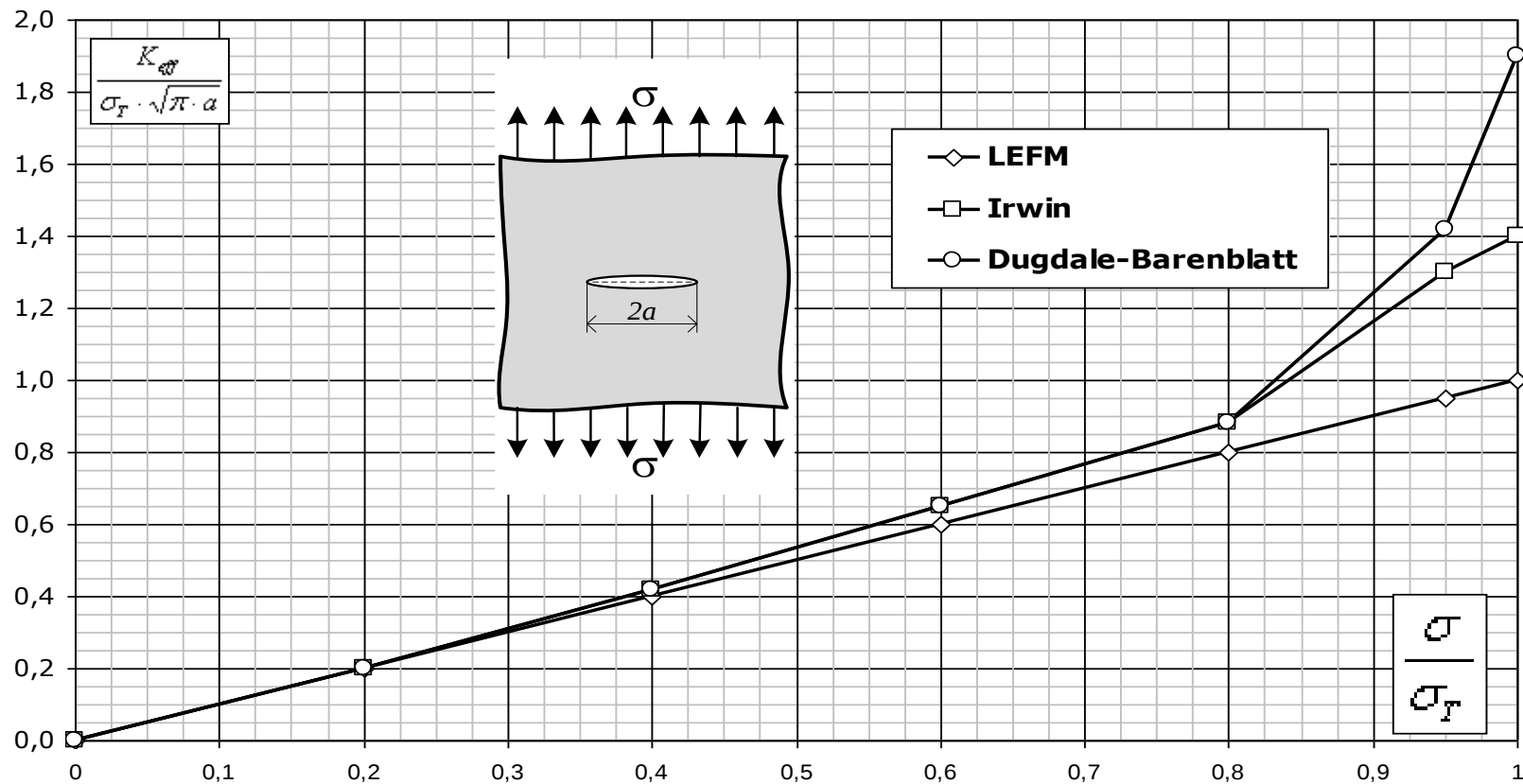


slično

$$1 / \pi = 0,318$$



USPOREDBA KOREKCIJA PLASTIČNOG PODRUČJA



5. LINEARNO ELASTIČNA MEHANIKA LOMA

5.10 Oblik plastičnog područja

Dosadašnje procjene veličine plastičnog područja odnose se na ravninu pukotine:

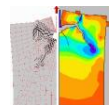
$$\varphi = 0$$

Moguće je ocijeniti područje plastičnosti u svim kutovima primjenom određenog kriterija tečenja na jednadžbe

Uzmimo von Misesov kriterij:

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2}$$



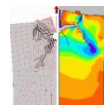
$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]}$$

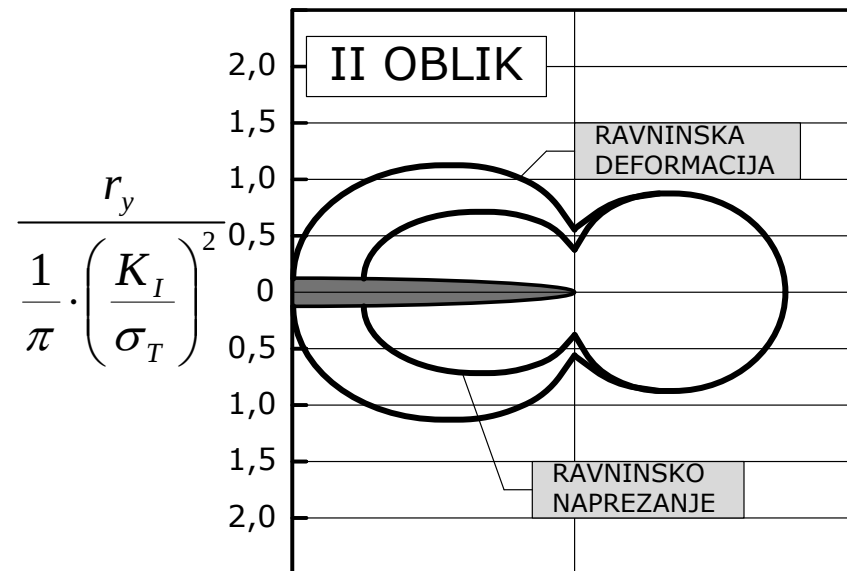
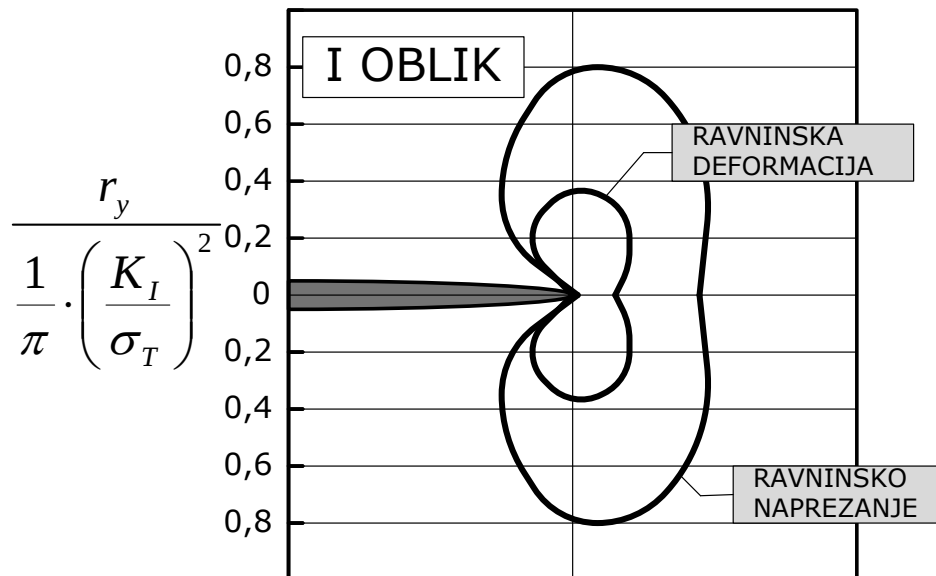
$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left[1 + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \quad \sigma_3 = 0 \quad \mathbf{RN}$$

$$\sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left[1 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \quad \sigma_3 = \frac{2 \cdot \nu \cdot K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad \mathbf{RD}$$

$$r_y(\varphi) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_T}\right)^2 \cdot \left(1 + \cos \varphi + \frac{3}{2} \cdot \sin^2 \varphi\right) \quad \mathbf{RN}$$

$$r_y(\varphi) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_T}\right)^2 \cdot \left[(1 - 2 \cdot \nu)^2 \cdot (1 + \cos \varphi) + \frac{3}{2} \cdot \sin^2 \varphi\right] \quad \mathbf{RD}$$



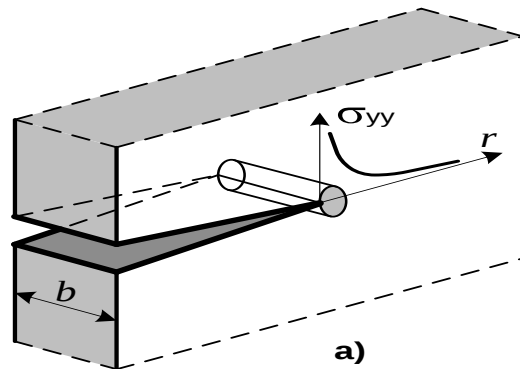


Oblik plastičnog područja prema von Misesovom kriteriju

5.10 Usporedba ravninskog naprezanja i ravninske deformacije

Najviše klasičnih rješenja u mehanici loma se svodi na **dvodimenzinalni problem**.

Pretpostavlja se da je najmanje jedno glavno naprezanje ili deformacija jednako nuli (ovisno dali se radi o **ravninskom stanju naprezanja** ili **deformacija**).

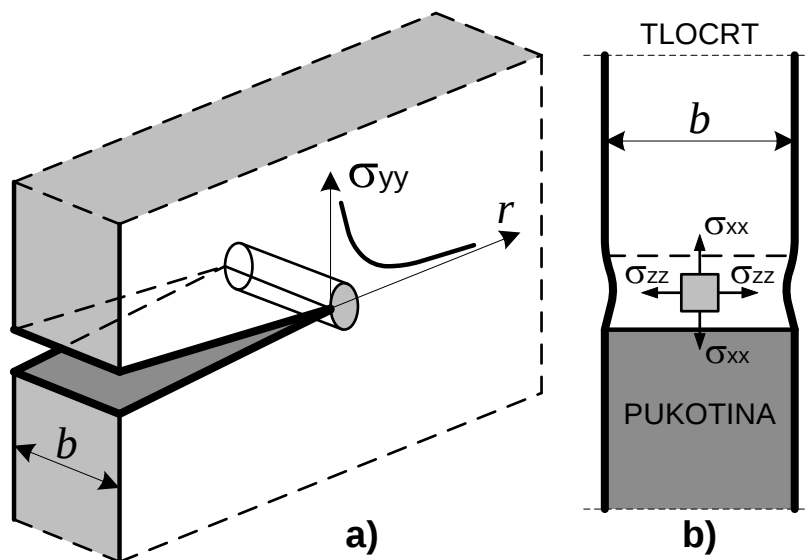


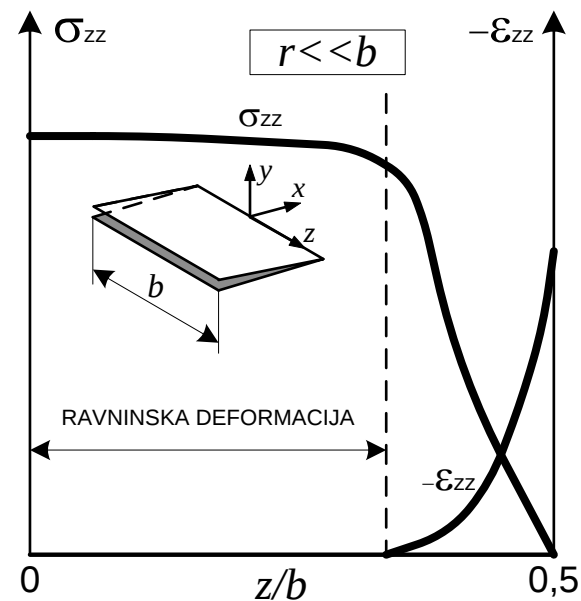
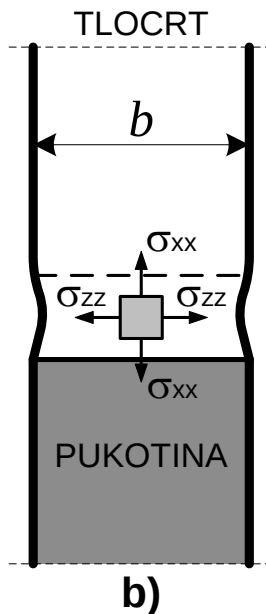
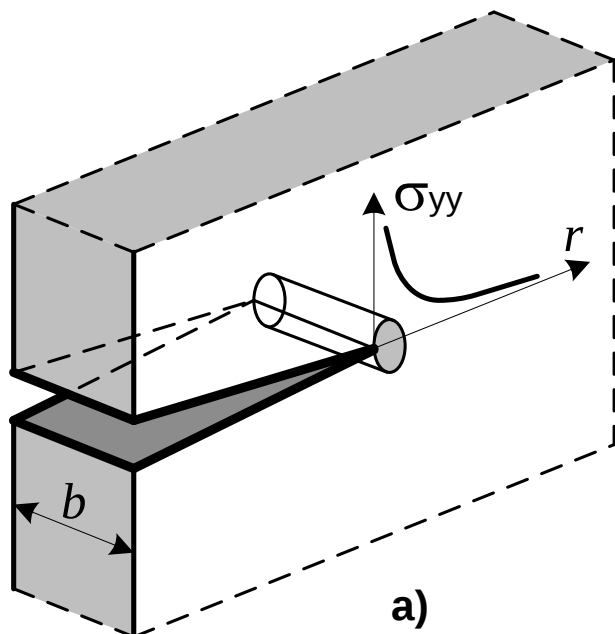
Da nema pukotine ploča bi bila u uvjetima ravninskog stanja naprezanja. Područje ploče koje je dovoljno daleko od vrha pukotine se također nalazi u ravninskom stanju naprezanja.

Materijal blizu vrha pukotine je opterećen većim naprezanjem nego okolni materijal. Materijal blizu vrha pukotine se skuplja u x i z smjeru, ali je to skupljanje spriječeno okolnim materijalom.

Ovo ograničenje uzrokuje troosno stanje naprezanja blizu vrha pukotine. Za $r \ll b$ uvjeti ravninskog stanja deformacija postoje u unutrašnjosti ploče.

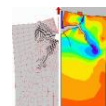
Materijal na površini ploče se nalazi u stanju ravninskog naprezanja, jer nema naprezanja okomitog na površinu.



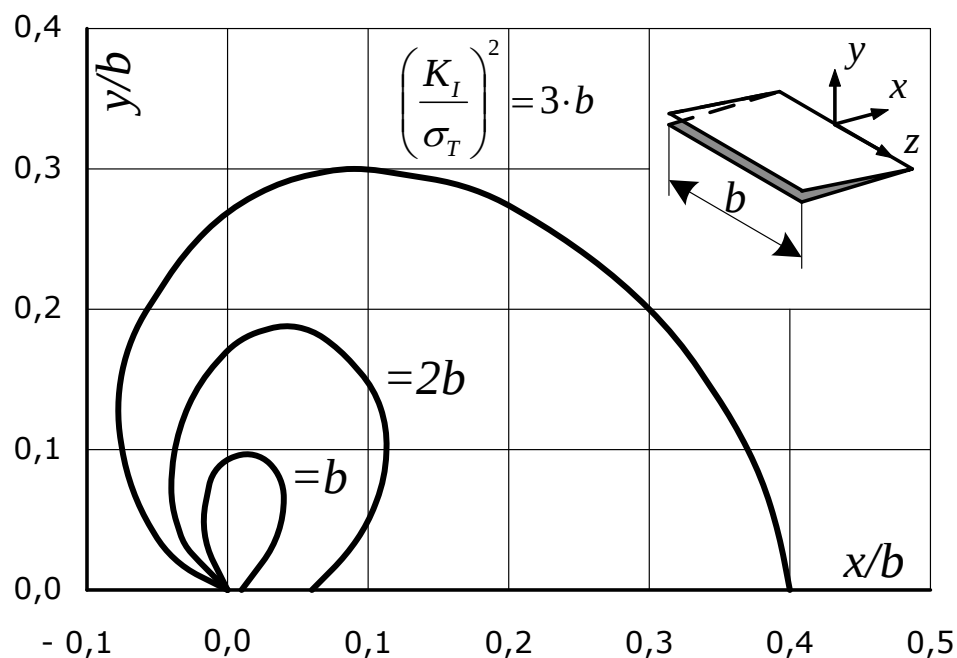


Na površini ploče: $z/b = 0,5$ $\sigma_{zz} = 0$ $\epsilon_{zz} = |\epsilon_{\max}|$

U sredini ploče: $z = 0$ $\epsilon_{zz} = 0$ $\sigma_{zz} = \nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$



Područje plastičnosti u sredini ploče za **I** oblik



Ako $\left(K_I / \sigma_T\right)^2$ raste u odnosu na širinu, područje plastičnosti se povećava

5.11 K kao kriterija loma

U prethodnim poglavljima uveden je koncept područja singularnosti naprezanja, koje se može opisati jednim parametrom, **koeficijentom intenziteta naprezanja, K** .

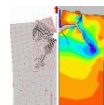
Naprezanje blizu vrha pukotine u linearno elastičnom materijalu se mijenjaju sa:

$$1/\sqrt{r}$$

K definira amplitudu singularnosti.

Ako je K poznat, mogu se odrediti **polja naprezanja, deformacija i pomaka** u području kojim dominira singularitet

Do otkazivanja materijala dolazi u lokalnom području pri nekoj kombinaciji naprezanja i deformacija, proširenje pukotine će se mora dogoditi pri **kritičnoj veličini K_C** .



K_C – žilavost materijala (konstanta)

koja ne ovisi o veličini i geometriji raspucanog tijela,

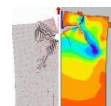
Ovo prethodno ne obuhvaća plastičnost ili nelinearno ponašanje materijala u vrhu pukotine, jer se **singularitet može primjeniti samo na linearno elastične materijale**.

Postavlja se pitanje:

Dali je K koristan kriterij loma u materijalima koji pokazuju nelinearno ponašanje?

Pod određenim uvjetima **DA**, K jedinstveno karakterizira stanje oko vrha pukotine ako postoji i područje plastičnosti.

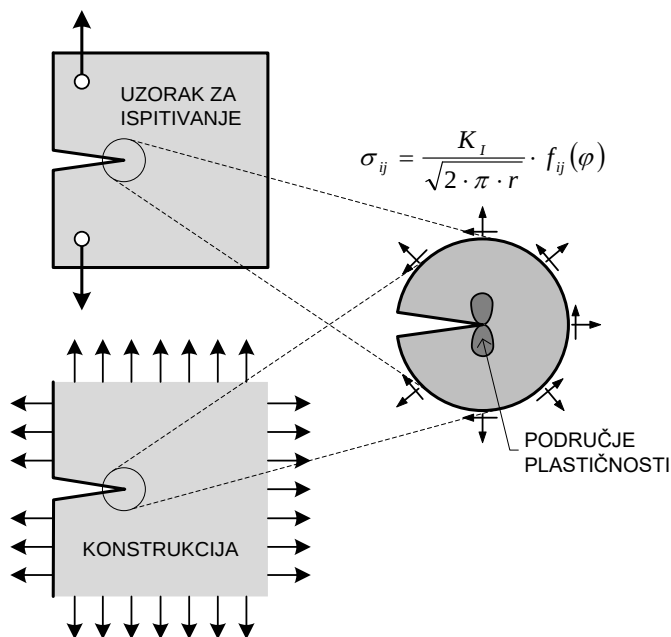
Tada je K_C materijalna konstanta koja ne ovisi o geometriji.



Prikazani uzorak za ispitivanje i dio konstrukcije opterećeni istim nivoom koeficijenta intenziteta naprezanja.

Dakle obje strukture će se slomiti pri istoj kritičnoj veličini K_C .

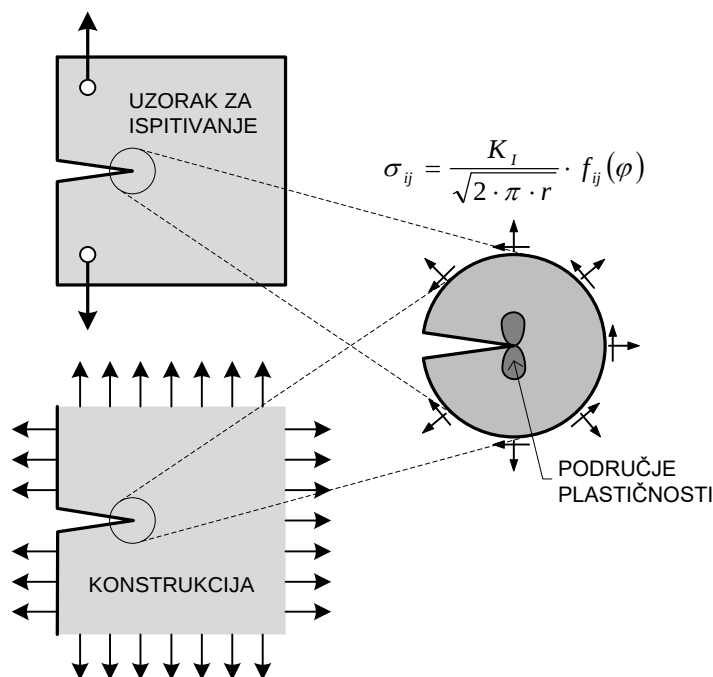
Izdvojimo iz tih struktura dio iz područja oko vrha pukotine, ali dovoljno male veličine da je unutar područja u kojem dominira singularnost. Utjecaj ostatka strukture na taj dio može se modelirati naprezanjima.



Znači nalazimo se u području singularnosti, i kod određenog nivoa opterećenja pojavit će se zona plastičnosti oko vrha pukotine.

Iako ne poznajemo stvarnu raspodjelu naprezanja u području plastičnosti, može se tvrditi da je ona jedinstveno opisana sa rubnim uvjetima.

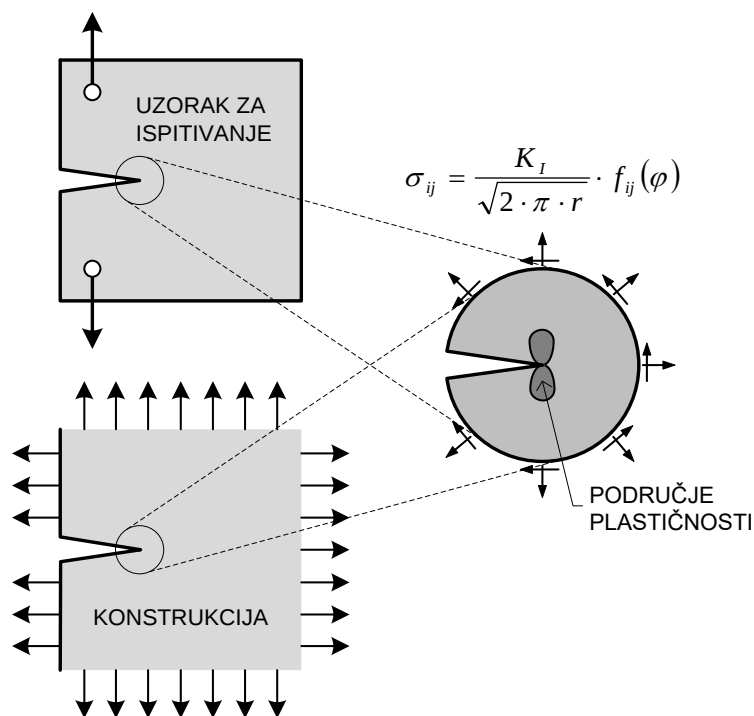
Tako K_I opisuje uvjete oko vrha pukotine, iako singularnost ne vrijedi u području plastičnosti.



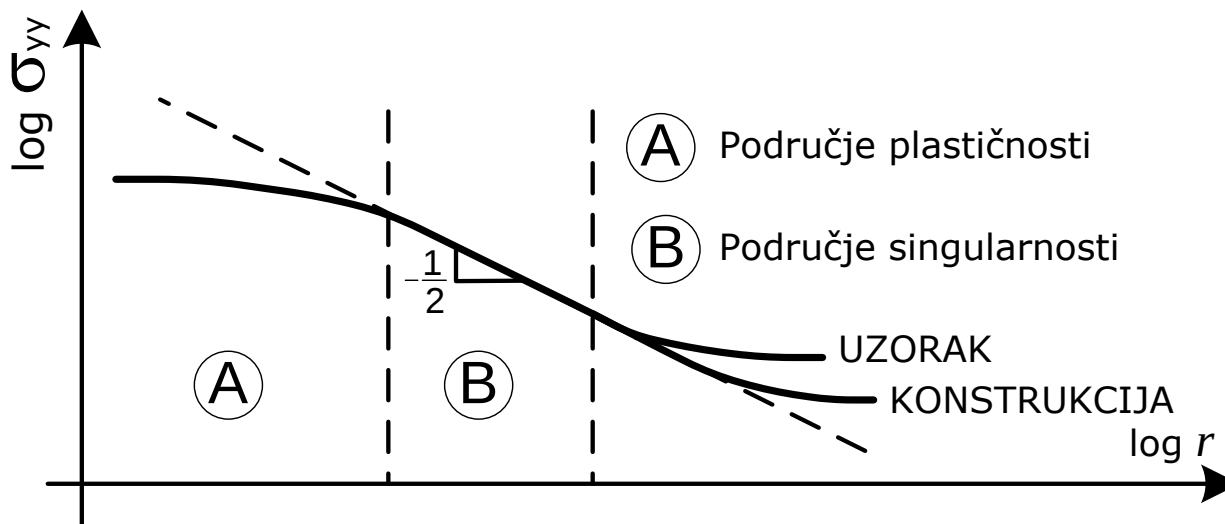
Ako se područje plastičnosti povećava, u jednom trenutku će obuhvatiti i područje singularnosti.

***K* više ne opisuje stanje naprezanja oko vrha pukotine.**

Praktično to znači da LEFM ne vrijedi ako je područje plastičnosti relativno veliko u odnosu na druge ključne dimenzije, kao što je veličina pukotine.



Raspored naprezanja u konstrukciji i uzorku



- u području singularnosti raspored naprezanja je linearan
- u zoni plastičnosti naprezanja su manja nego što bi bila po rješenjima elastičnosti
- izvan područja singularnosti stanje naprezanja je različito

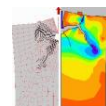
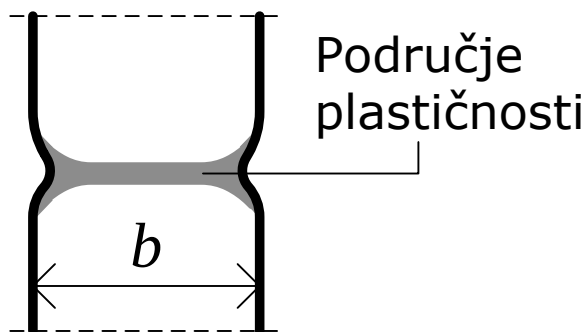
Većina praktičnih primjena mehanike loma razmatra samo I oblik.

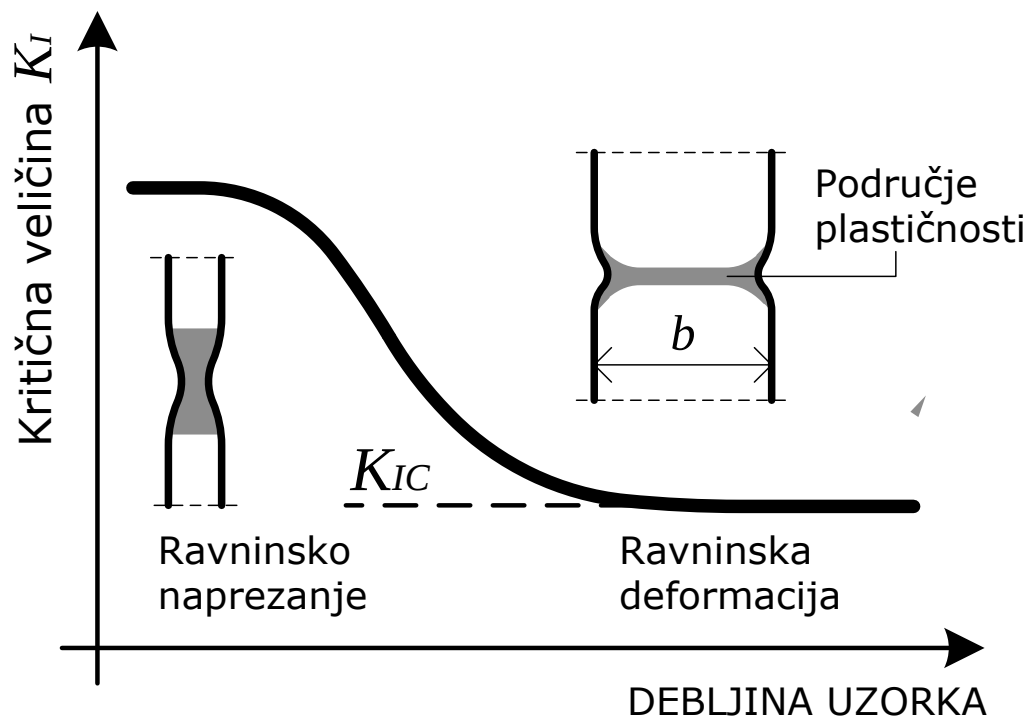
 K_{IC}

kritična veličina koeficijenta intenziteta naprezanja je konstanta materijala samo u određenim uvjetima, u drugim slučajevima može biti geometrijski ovisna

Plastična zona ili područje plastičnosti mora biti malo u usporedbi s debljinom uzorka radi ostvarenja uvjeta ravninske deformacije.

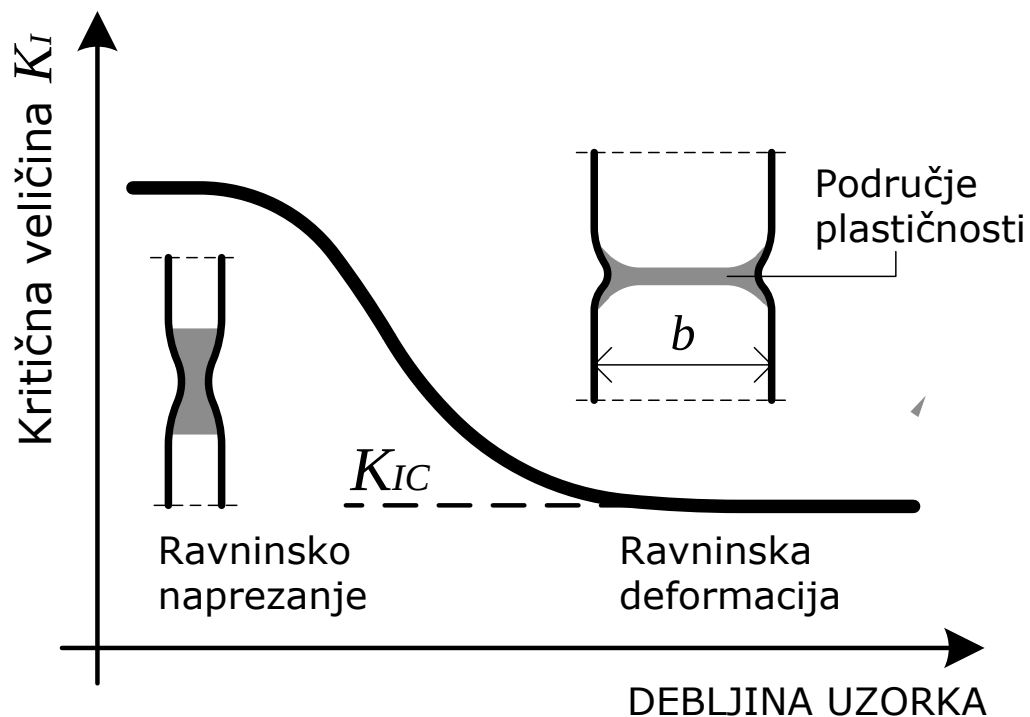
Uvjeti ravninske deformacije oko vrha pukotine moraju postojati unutar, po dubini područja plastičnosti.





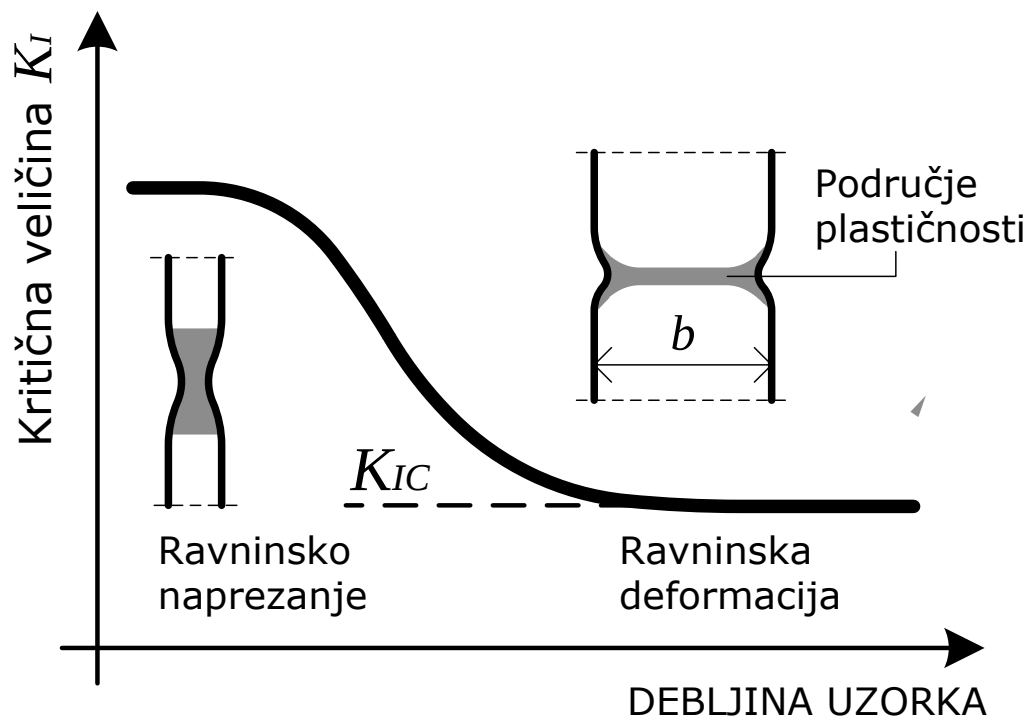
Mala debljina (u odnosu na veličinu područja plastičnosti) uzrokuje lom pri ravninskom naprezanju.

Žilavost materijala se smanjuje povećanjem debljine do nivoa kada povećanje debljine nema više utjecaja na žilavost.



Veličina K_I na tom nivou određuje K_{IC} , žilavost materijala pri ravninskoj deformaciji.

Kritičnu veličinu K_I koja je određena u drukčijim uvjetima nećemo zvati K_{IC} .



Veličina K_I na tom nivou određuje K_{IC} , žilavost materijala pri ravninskoj deformaciji.

Kritičnu veličinu K_I koja je određena u drukčijim uvjetima nećemo zvati K_{IC} .

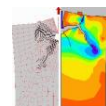
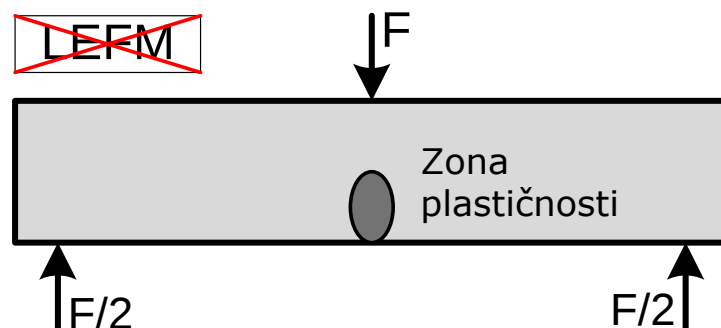
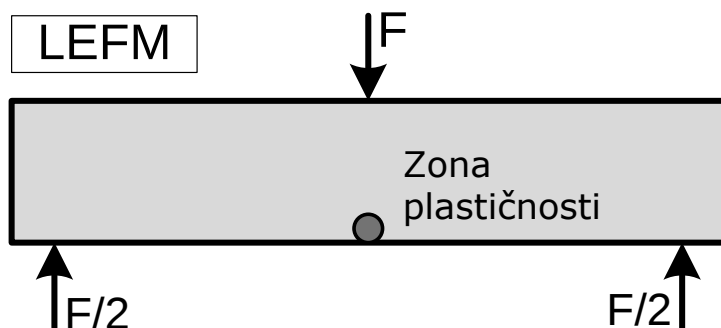
Dimenzije uzoraka ili konstrukcije u ravnini su također važne kao i debljina.

Pri određivanju K_I one su važne da bi se osiguralo područje singularnosti u blizini vrha pukotine.

Kada zona plastičnosti postane velika nema više područja singularnosti i K_I ne opisuje uvjete oko vrha pukotine.

Područje plastičnosti mora biti unutar područja singularnosti.

Općenito područje singularnosti je malo u odnosu na dimenzije strukture.

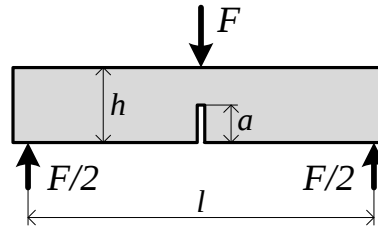


Prema normi ASTM (*American Society for Testing and Materials*) za ispitivanje K_{IC} moraju biti ispunjeni slijedeći zahtjevi:

$$b \geq 2,5 \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_T} \right)^2$$

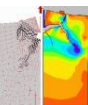
$$a \geq 2,5 \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_T} \right)^2$$

$$(h - a) \geq 2,5 \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_T} \right)^2$$

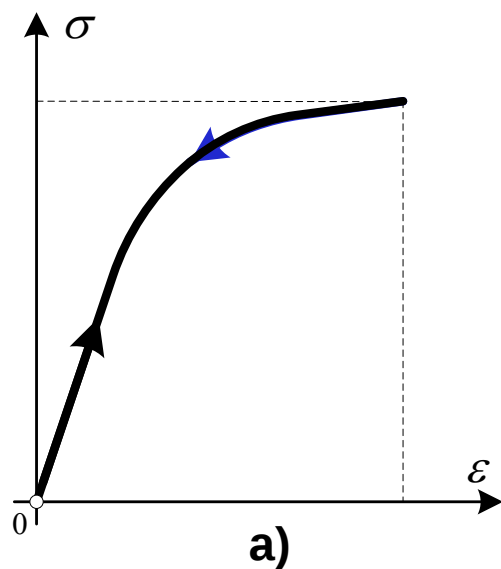


Zahtjev za debljinom uzorka osigurava uvjet ravninske deformacije, a zahtjevi za veličinu drugih dimenzija u ravnini osiguravaju linearno elastično ponašanje kojim su opisani uvjeti u vrhu pukotine.

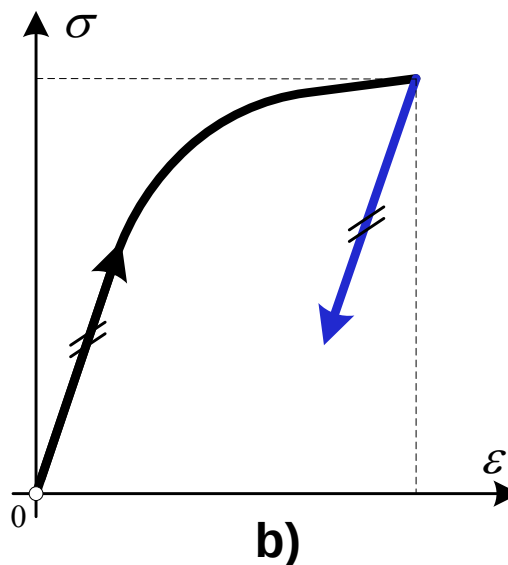
Korekcija plastičnog područja može proširiti korištenje LEFM-a izvan uobičajenih ograničenja



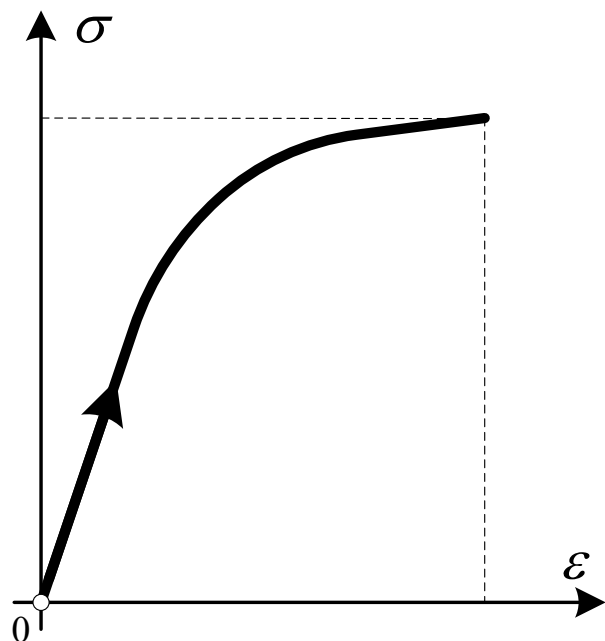
Kada nelinearno ponašanje materijala postane značajno ne možemo koristiti analize preko intenziteta naprezanja i primijeniti parametre koji opisuju stanje u vrhu pukotine.



NELINEARNO ELASTIČAN
MATERIJAL



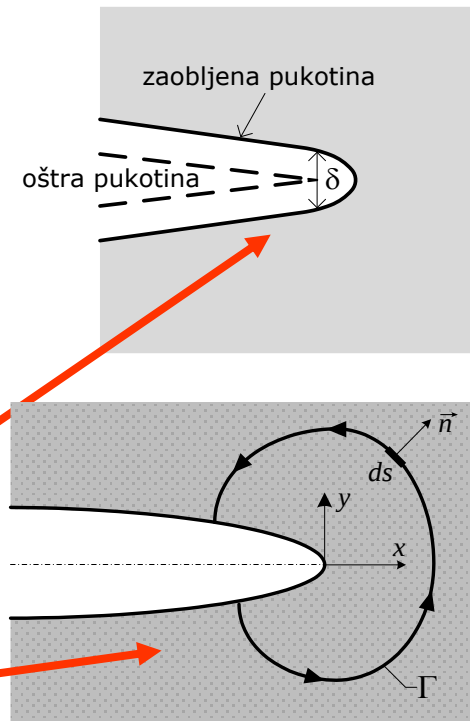
ELASTO -PLASTIČAN
MATERIJAL



NELINEARNO PONAŠANJE MATERIJAL

Uvode se dva nova parametra:

- širenje vrha pukotine CTOD (δ)
- J integral



Oni su predmet **ELASTO-PLASTIČNE MEHANIKE LOMA
(EPFM)**