Poglavlje 5.3
Neprekidne slučajne varijable

Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ neprekidna slučajna varijabla. Dakle, $R(X)$ je neki interval u $\mathbb{R}$. Kao i u diskretnom slučaju X je u potpunosti određena svojom slikom $R(X)$ i funkcijom gustoće. Funkcija gustoće od X je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava sljedeće uvjete:

(i) $f(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}$,

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$,

(iii) $\mathbb{P}(X \leqslant a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx, \quad a \in \mathbb{R}$.

Uočimo da iz svojstva (iii) slijedi da za sve $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$, vrijedi

$$\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Nadalje, zbog neprekidnosti od X imamo

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b).$$

Funkcija distribucije (raspodjele) od X je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x).$$

Vrijedi sljedeće:

(i) $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1,$

(ii) F je neopadajuća

(iii) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R},$

(iv) $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a),$

(v) $F'(x) = f(x).$

Uočimo da kao i u diskretnom slučaju F daje punu informaciju o X, tj.

$$f(x) = F'(x) \quad \text{i} \quad R(X) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}.$$

Zadatak (5.20.)

Funkcija gustoće vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable X dana je formulom:

$$f(x) = \begin{cases} C \cdot \cos x & : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & : x < -\frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

a) Odredite konstantu C.
b) Nacrtajte graf funkcije gustoće vjerojatnosti f.
c) Odredite funkciju distribucije F i nacrtajte njen graf.
d) Odredite $\mathbb{P}(0 \leq X \leq \frac{\pi}{4})$.

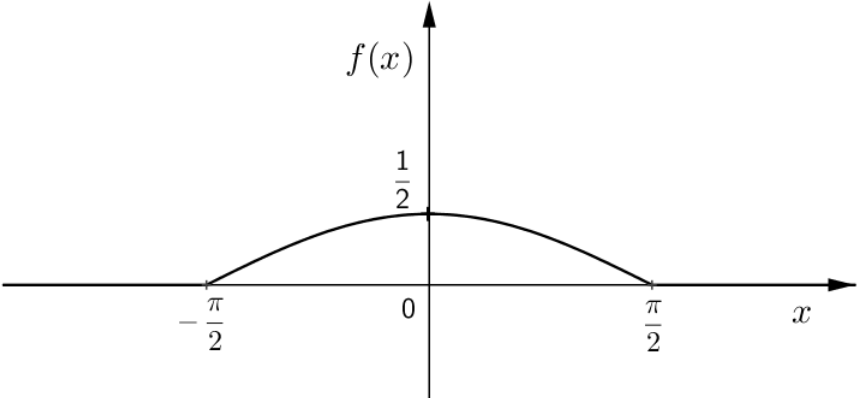
Rješenje: a) Konstantu C određujemo iz uvjeta $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$:

$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = C \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = C \sin x|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = C(\sin \frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2})) =$
$2C \Rightarrow C = \frac{1}{2}.$

Prema tome, funkcija gustoće vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable X dana je formulom:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \cos x & : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & : x < -\frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

b) Graf funkcije gustoće slučajne varijable X je prikazan na sljedećoj slici:



c) Funkciju distribucije određujemo koristeći se formulom $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
Za $x < -\frac{\pi}{2}$ imamo:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0$$

Za $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ imamo:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0 \cdot\ dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{1}{2} \cos t\, dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \cos t\, dt =$$
$$\frac{1}{2} \sin t|_{-\frac{\pi}{2}}^{x} = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \sin(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2}.$$

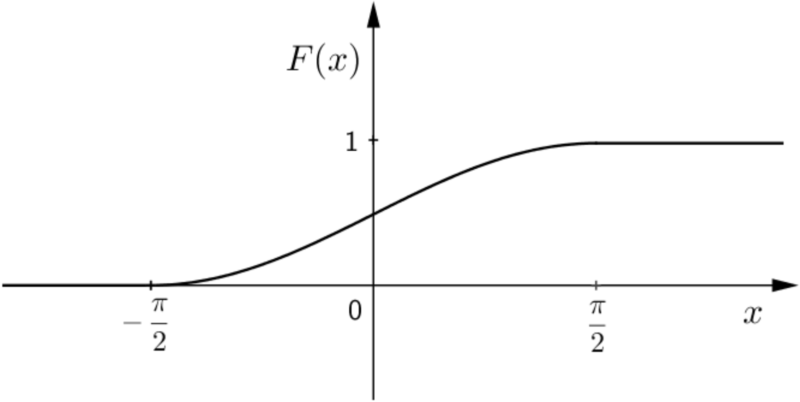
Za $x > \frac{\pi}{2}$ imamo:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0 \cdot\ dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos t\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} 0 \cdot\ dt = 1.$$

Dakle, funkcija distribucije slučajne varijable X ima oblik:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & : x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1) & : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & : x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Graf funkcije distribucije se nalazi na sljedećoj slici:



d) Tražena vjerojatnost iznosi:
$\mathbb{P}(0 \leq X \leq \frac{\pi}{4}) = F(\frac{\pi}{4}) - F(0) = \frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{4} + 1) - \frac{1}{2}(\sin 0 + 1) =$
$\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Zadatak (5.21.)

Funkcija gustoće vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable X dana je formulom:

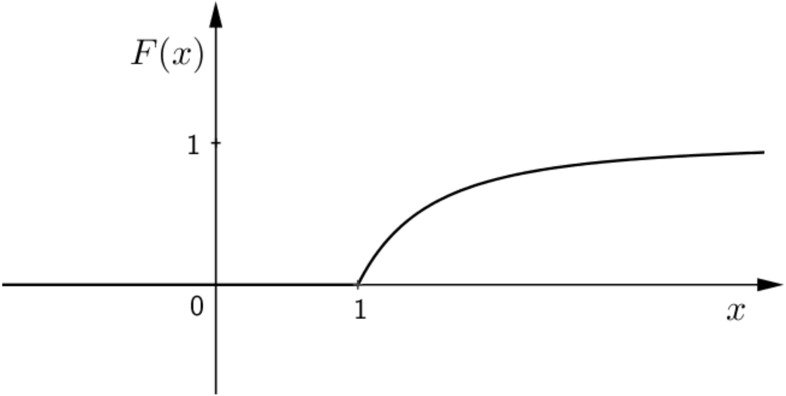
$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 1 \\ \frac{2}{x^3} & : x > 1 \end{cases}$$

a) Odredite funkciju distribucije F slučajne varijable i nacrtajte njen graf.
b) Izračunajte $\mathbb{P}(0 < X < 3)$ i $\mathbb{P}(X > 1)$.

Rješenje: a) Funkcija distribucije slučajne varijable X je dana formulom:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & : x > 1 \end{cases}$$

Graf funkcije distribucije je na sljedećoj slici:



b) Tražene vjerojatnosti su:
$\mathbb{P}(0 < X < 3) = F(3) - F(0) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ i
$\mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1.$

Zadatak (5.22.)

Funkcija gustoće vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable X dana je formulom:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & : 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & : x < 0, x > 2 \end{cases}$$

a) Odredite konstantu a.

b) Napišite pripadnu funkciju distribucije.

c) Izračunajte $\mathbb{P}(0.4 \leq X \leq 1.5)$.

Rješenje:

a) Konstantu a određujemo iz uvjeta $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.
Kada u gornji uvjet uvrstimo funkciju gustoće vjerojatnosti dobijemo $a\int_0^2 x^2 \mathrm{d}x = 1$, što povlači da je $a = \frac{3}{8}$.

b) Funkcija distribucije slučajne varijable X ima oblik:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ \frac{x^3}{8} & : 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & : x > 2 \end{cases}$$

c) Tražena vjerojatnost iznosi:
$\mathbb{P}(0.4 \leq X \leq 1.5) = F(1.5) - F(0.4) = \frac{1}{8}(1.5^3 - 0.4^3) = 0.4139.$

Za neprekidnu slučajnu varijablu X definiramo očekivanje od X s

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx.$$

Varijancu od X definiramo s

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X)]^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx - (\mathbb{E}(X))^2$$

Standardnu devijaciju od X definiramo s

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Uočimo da funkcija gustoće ne mora biti neprekidna već samo funkcija distribucije (zadana je integralom). Funkcija distribucije diskretnih slučajnih varijabli je stepenastog oblika (zadana je sumom). Dakle, razlog zašto slučajne varijable nazivamo diskretnim ili neprekidnim je dan svojstvom njihove funkcije distribucije (skokovita ili neprekidna).

Zadatak (5.23.)

Funkcija distribucije slučajne varijable X zadana je formulom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 2 \\ 0.5x - 1 & : 2 < x \leq 4 \\ 1 & : x > 4 \end{cases}$$

a) Odredite vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednost veću od 0.2 i vjerojatnost da poprimi vrijednost manju od 3.
b) Nađite očekivanje i varijancu slučajne varijable X.

Rješenje:

a) Vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednost veću od 0.2 iznosi:
$\mathbb{P}(X > 0.2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 0.2) = 1 - F(0.2) = 1 - 0 = 1,$
dok vjerojatnost da poprimi vrijednost manju od 3 iznosi:
$\mathbb{P}(X < 3) = F(3) = 0.5 \cdot 3 - 1 = 0.5.$

b) Gustoća vjerojatnosti slučajne varijable X je dana formulom:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0.5 & : 2 < x \leq 4 \\ 0 & : \text{inače} \end{cases}$$

Očekivanje slučajne varijable X je jednako:
$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = 0.5\int_2^4 x\,dx = 0.5\frac{x^2}{2}\Big|_2^4 = 0.5(\frac{16}{2} - \frac{4}{2}) = 3.$
Varijanca od X je stoga:
$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - (\mathbb{E}(X)^2) = 0.5\int_2^4 x^2 dx - 9 =$
$0.5\frac{x^3}{3}\Big|_2^4 - 9 = 0.5(\frac{64}{3} - \frac{8}{3}) - 9 = \frac{1}{3}.$

Teorem

Neka je X neprekidna slučajna varijabla, a funkcija $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona na $R(X)$ i derivabilna. Za neprekidnu slučajnu varijablu $Y = h(X)$ vrijedi:

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x)\, dx.$$

Zadatak (5.24)

Slučajna varijabla X ima funkciju gustoće vjerojatnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x & : 0 < x < \pi \\ 0 & : x \leq 0, x \geq \pi \end{cases}$$

Odredite matematičko očekivanje slučajne varijable $Y = X^2$.

Ukoliko definiramo $h(x) = x^2$, iz gornjeg teorema slijedi da je očekivanje slučajne varijable Y jednako:

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx =$$

$$\left\{\begin{matrix} u = x^2 & dv = \sin x dx \\ du = 2xdx & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}x^2\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x\cos x\,dx =$$

$$\left\{\begin{matrix} u = x & dv = \cos x dx \\ du = dx & v = \sin x \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}\pi^2\cos\pi + x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\,dx =$$

$$\frac{\pi^2}{2} + \cos\pi - \cos 0 = \frac{\pi^2}{2} - 2.$$

Zadatak (5.25.)

Neprekidna slučajna varijabla X ima funkciju gustoće vjerojatnosti

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x & : 0 < x < \pi \\ 0 & : x \leq 0, x \geq \pi \end{cases}$$

Neka je $Y = -2X + 3$. Odredite

a) Očekivanje $\mathbb{E}(Y)$ slučajne varijable Y.

b) Varijancu $Var(Y)$ slučajne varijable Y.

Rješenje:

a) Znamo da vrijedi $\mathbb{E}(Y) = -2\mathbb{E}(X) + 3$.
Očekivanje slučajne varijable X iznosi:
$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}\int_0^\pi x \sin x \, dx = \begin{Bmatrix} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{Bmatrix} =$
$\frac{1}{2}(-x \cos x|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \, dx) = \frac{1}{2}(\pi + \sin x|_0^\pi) = \frac{1}{2}\pi.$
Dakle, $\mathbb{E}(Y) = -\pi + 3$.

b) Također znamo da vrijedi $Var(Y) = 4Var(X)$.
Varijanca slučajne varijable X je jednaka:
$Var(X) = \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx - (\mathbb{E}(X))^2 = DZ = \frac{\pi^2}{2} - 2 - (\frac{1}{2}\pi)^2 =$
$\frac{\pi^2}{4} - 2.$
Prema tome, $Var(Y) = \pi^2 - 8$.

Zadatak (5.26.)

Funkcija gustoće vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable X dana je formulom:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sqrt{2} - x & : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ 0 & : x < 0, x > \sqrt{2} \end{cases}$$

a) Odredite funkciju distribucije F_X, očekivanje $\mathbb{E}(X)$ i varijancu $Var(X)$ slučajne varijable X.

b) Neka je $Y = 2X + 1$. Nađite očekivanje $\mathbb{E}(Y)$ i varijancu $Var(Y)$ slučajne varijable Y.

Rješenje:

a) Funkcija distribucije od X ima oblik:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ \sqrt{2}x - \frac{x^2}{2} & : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ 1 & x > \sqrt{2} \end{cases}$$

Očekivanje od X je dano sa:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\sqrt{2}} x(\sqrt{2} - x)\mathrm{d}x = (\sqrt{2}\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})|_0^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Varijanca od X iznosi:

$$Var(X) = \int_0^{\sqrt{2}} x^2(\sqrt{2} - x)\mathrm{d}x - (\frac{\sqrt{2}}{3})2 = (\sqrt{2}\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4})|_0^{\sqrt{2}} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}.$$

b) Očekivanje od Y je jednako:

$$\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{E}(X) + 1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} + 1.$$

Varijanca od Y iznosi:

$$Var(Y) = 2^2 Var(X) = \frac{4}{9}.$$