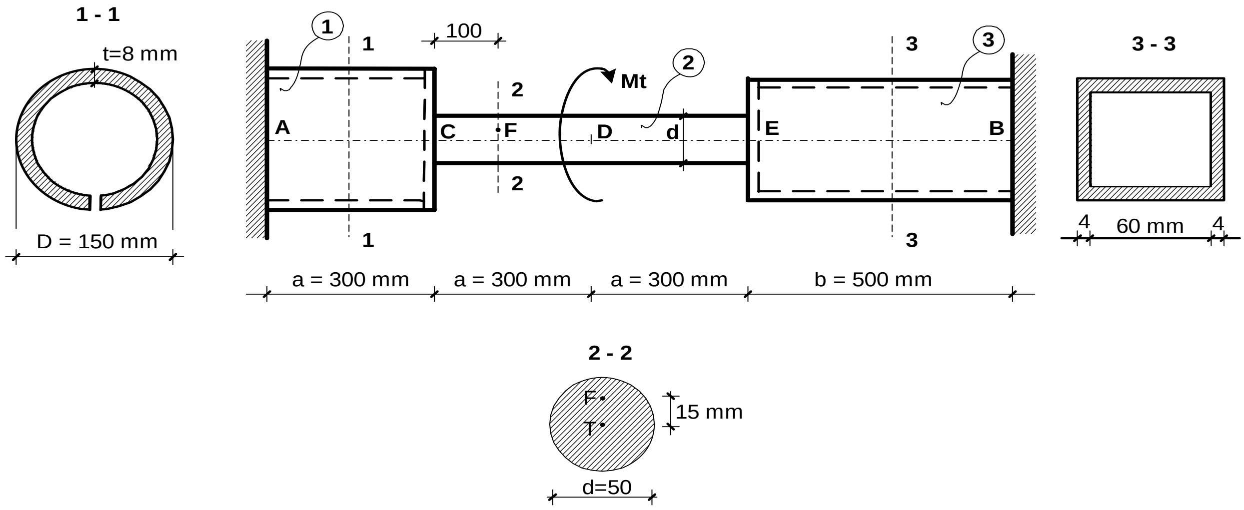
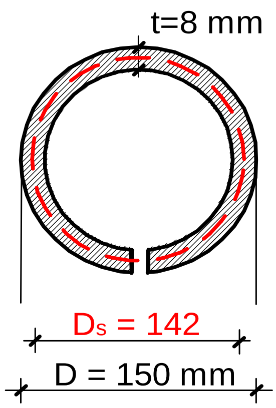
ZADATAK:

Za zadani štap sastavljen iz tri dijela treba odrediti dijagram momenata torzije, najveće naprezanje na pojedinom dijelu, te najveći kut zaokreta štapa, ako naprezanje u točki F presjeka 2-2 iznosi $\tau_F = 30$ MPa.
Štap je izrađena iz čelika čiji je modul elastičnosti $E=2\cdot10^5$ MPa, a Poissonov koeficijent $\upsilon=0,3$.



RJEŠENJE:

Torzijski moment tromosti dijela 1 (tankostjeni otvoreni presjek):



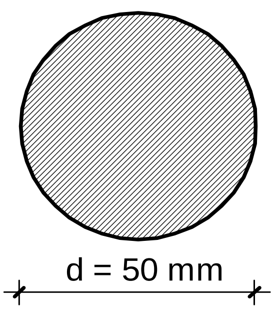
$$D_s = 150 - 8 = 142mm$$

$$s = D_s\pi = 142 \cdot \pi = 446,1mm$$

$$I_{t1} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} s_i \cdot t_i^3 = \frac{1}{3}\cdot D_s \cdot \pi \cdot t_i^3 = \frac{1}{3}\cdot 446,1 \cdot 8^3$$

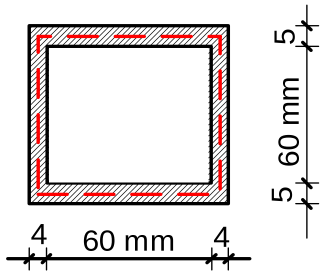
$$I_{t1} = 0,761 \cdot 10^5\, mm^4$$

Polarni moment tromosti dijela 2 (puni kružni presjek):



$$I_{p2} = \frac{d^4\pi}{32} = \frac{50^4\pi}{32} = 6,136 \cdot 10^5\, mm^4$$

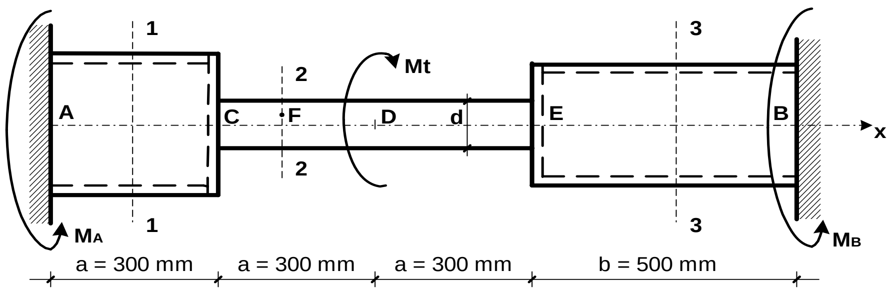
Torzijski moment tromosti dijela 3 (tankostjeni zatvoreni presjek):



$$A_0 = 64 \cdot 65 = 4160\ mm^2$$

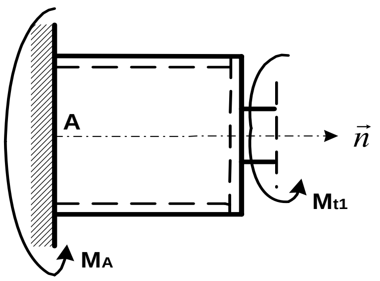
$$I_{t3} = \frac{4 \cdot A_0^2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{t_i}} = \frac{4 \cdot 4160^2}{2\frac{64}{5} + 2\frac{65}{4}} = 11{,}914 \cdot 10^5\ mm^4$$

Uvjet ravnoteže:



$$\sum M_x = 0$$
$$M_A - M_t + M_B = 0$$
$$M_A + M_B = M_t \qquad (1)$$

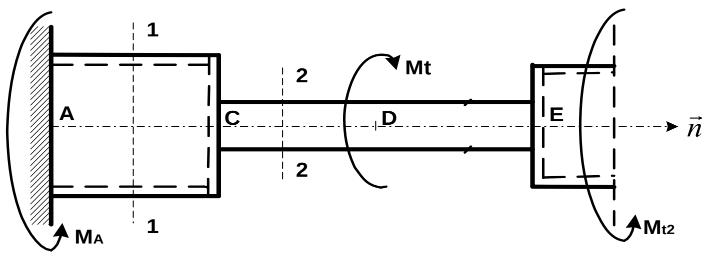
Određivanje dijagrama momenata torzije (metodom prereza):



Presječemo štap prije mjesta djelovanja vanjskog momenta torzije, u tom presjeku djeluje neki unutarnji moment torzije. Pretpostavljamo da je pozitivan, crtamo ga tako da vektor momenta djeluje u smjeru vanjske normale na presjek. Postavljamo uvjet ravnoteže za promatrani dio štapa:

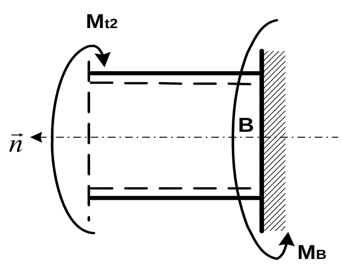
$$\sum M_x = 0 \;\Rightarrow M_A + M_{t1} = 0 \Rightarrow \; M_{t1} = -M_A$$

Unutarnji moment torzije ne mijenja se do mjesta na kojem djeluje prvi sljedeći vanjski moment torzije, pa sljedeći presjek radimo negdje iza vanjskog momenta torzije.



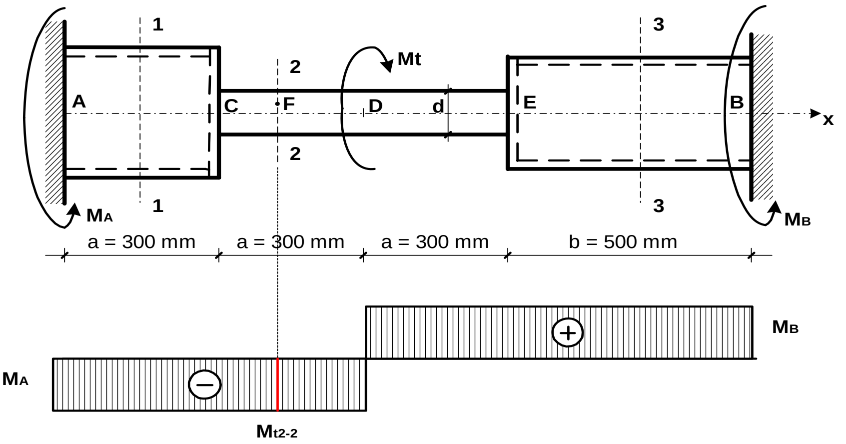
$$\sum M_x = 0 \;\Rightarrow M_A - M_t + M_{t2} = 0$$
$$\Rightarrow \; M_{t2} = M_t - M_A$$
$$\text{iz uvjeta ravnoteže } \; M_t - M_A = M_B$$
$$\Rightarrow \; M_{t2} = M_B$$

ili sa druge strane



$$\sum M_x = 0 \;\Rightarrow M_{t2} - M_B = 0$$
$$\Rightarrow \; M_{t2} = M_B$$

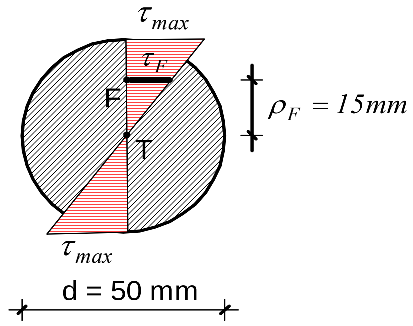
Crtamo dijagram momenata torzije u kojem nisu poznate veličine M_A i M_B.



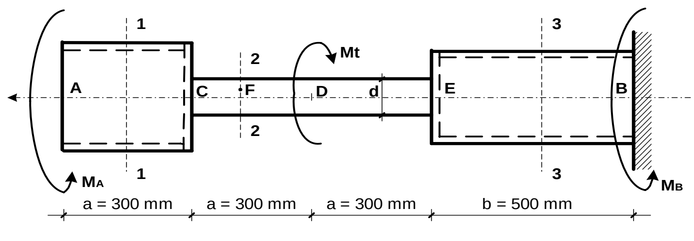
Iz zadanog posmičnog naprezanja u točki F presjeka 2-2 možemo odrediti moment torzije u presjeku 2-2 koji uzrokuje naprezanje τ_F.

$$\tau_F = \frac{M_{t2-2}}{I_{p2}} \cdot \rho_F = 30\ MPa;$$

$$\frac{M_A}{6{,}136 \cdot 10^5} \cdot 15 = 30 \Rightarrow M_A = 1{,}227\,kNm$$



Momenti torzije M_t i M_B su nam i dalje nepoznati, te postavljamo uvjet deformacija da je kut zaokreta $\varphi_A = 0$ (na mjestu upetosti nema zaokreta poprečnog presjeka).



<u>Kut zaokreta φ_A principom superpozicije</u>: oslobađamo upetost u presjeku A i promatramo djelovanje vanjskih momenata torzije.

$$\varphi_A = -\frac{M_A \cdot a}{G \cdot I_{t1}} - \frac{M_A \cdot 2a}{G \cdot I_{p2}} - \frac{M_A \cdot b}{G \cdot I_{t3}} + \frac{M_t \cdot a}{G \cdot I_{p2}} + \frac{M_t \cdot b}{G \cdot I_{t3}} = 0 \,/ \cdot \frac{G \cdot I_{p2}}{a}; \qquad G = \frac{E}{2(1+\upsilon)} = 0{,}769 \cdot 10^5\,MPa$$

$$M_t\left(1 + \frac{I_{p2}}{I_{t3}}\frac{b}{a}\right) = \frac{M_A \cdot I_{p2}}{I_{t1}} + M_A \cdot 2 + \frac{M_A \cdot b \cdot I_{p2}}{a \cdot I_{t3}} \Rightarrow M_t = 7{,}211\,kNm$$

$$\text{iz (1)} \qquad M_B = M_t - M_a = 7{,}211 - 1{,}227 = 5{,}984\,kNm$$

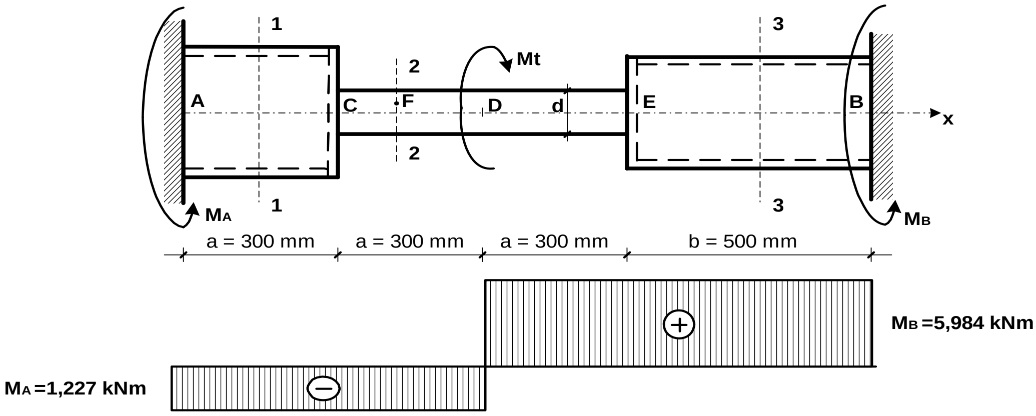
Izraz za kut zaokreta φ_A (uvjet deformacija) možemo postaviti i preko unutarnjih momenata iz dijagrama momenata torzije.

$$\varphi_A = \frac{M_{AC} \cdot a}{G \cdot I_{t1}} + \frac{M_{CD} \cdot a}{G \cdot I_{p2}} + \frac{M_{DE} \cdot a}{G \cdot I_{p2}} + \frac{M_{EB} \cdot b}{G \cdot I_{t3}} = 0;$$

$$\varphi_A = \frac{-M_A \cdot a}{G \cdot I_{t1}} + \frac{-M_A \cdot a}{G \cdot I_{p2}} + \frac{M_B \cdot a}{G \cdot I_{p2}} + \frac{M_B \cdot b}{G \cdot I_{t3}} = 0 \;\Rightarrow\; M_B = 5{,}984\ kNm$$

$$iz\ (1) \qquad M_t = M_A + M_B = 1{,}227 + 5{,}984 = 7{,}211\ kNm$$

Sada možemo nacrtati dijagram momenata torzije sa poznatim vrijednostima:



<u>Najveća naprezanja:</u>

Najveće naprezanje tankostjenog otvorenog presjeka:

$$\tau_{1max} = \frac{M_{1max}}{I_{t1}} \cdot t_{max} = \frac{1{,}227 \cdot 10^6}{0{,}761 \cdot 10^5} \cdot 8 = 129{,}00\ MPa;$$

Najveće naprezanje punog kružnog presjeka:

$$\tau_{2max} = \frac{M_{2max}}{I_{p2}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{5{,}984 \cdot 10^6}{6{,}136 \cdot 10^5} \cdot \frac{50}{2} = 234{,}80\ MPa;$$

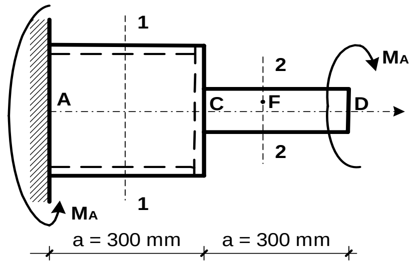
Najveće naprezanje tankostjenog zatvorenog presjeka:

$$\tau_{3max} = \frac{M_{2max}}{2 \cdot A_o \cdot t_{min}} = \frac{5{,}984 \cdot 10^6}{2 \cdot 4160 \cdot 4} = 179{,}81\ MPa;$$

Određivanje najvećeg kuta zaokreta:

Najveći kut zaokreta nalazi se na mjestu djelovanja vanjskog momenta torzije (presjek D). Kuteve zaokreta možemo odrediti principom superpozicije. Na mjestu gdje nas zanima kut zaokreta presječemo štap, na tom mjestu djeluje moment torzije takav da promatrani dio štapa bude u ravnoteži.

$$\varphi_{max} = \varphi_D = -\frac{M_A \cdot a}{G \cdot I_{t1}} - \frac{M_A \cdot a}{G \cdot I_{p2}} =$$
$$= -0{,}0629 - 0{,}0078 = -0{,}0707\,rad;$$



ili preko unutarnjih momenata torzije iz djagrama momenata torzije:

$$\varphi_{max} = \varphi_D = \varphi_{AC} + \varphi_{CD} = \frac{M_{AC} \cdot a}{G \cdot I_{t1}} + \frac{M_{CD} \cdot a}{G \cdot I_{p2}} = \frac{-M_A \cdot a}{G \cdot I_{t1}} + \frac{-M_A \cdot a}{G \cdot I_{p2}} =$$
$$= -0{,}0629 - 0{,}0078 = -0{,}0707\,rad;$$