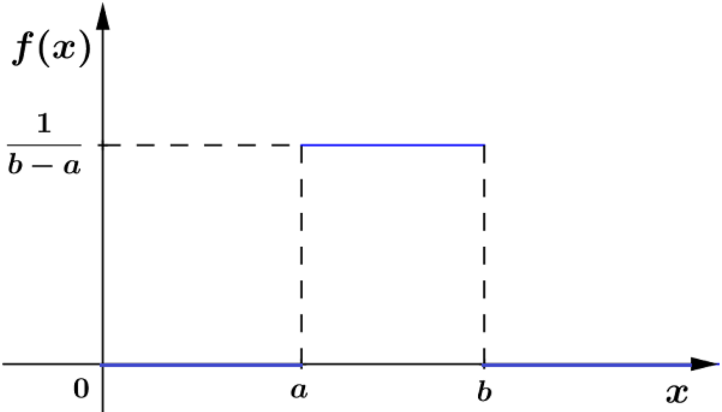
Poglavlje 5.4
Primjeri neprekidnih slučajnih varijabli

Uniformna slučajna varijabla

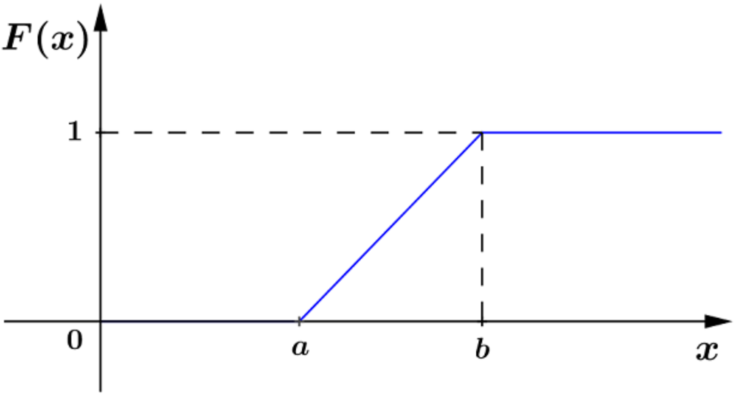
Uniformna slučajna varijabla X, u oznaci $X \sim U(a,b)$, je neprekidna slučajna varijabla za koju vrijedi $R(X) = [a,b]$ i

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$



Uočimo da je

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 1, & x > b \end{cases} .$$



Zadatak (5.30.)

Slučajna varijabla X distribuirana je uniformno na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Odredite funkciju distribucije slučajne varijable $Y = \sin X$

Rješenje: Budući da sinus preslikava $[0, \frac{\pi}{2}]$ u segment $[0, 1]$, slika varijable Y je $R(Y) = [0, 1]$. Distribuciju od Y označimo s $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y)$. Očito je $F_Y(y) = 0$ za $y < 0$, te je $F_Y(y) = 1$ za $y \geqslant 1$.

Funkcija distribucije slučajne varijable X dana je s

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ \frac{2}{\pi}x & : 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 1 & : x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Za $y \in [0,1]$ je $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(\sin X \leqslant y)$, što je (budući da je $X \in [0, \frac{\pi}{2}]$ te je sinus rastuća funkcija na tom intervalu), jednako $\mathbb{P}(X \leqslant \arcsin y) = F_X(\arcsin y) = \frac{2}{\pi} \arcsin y$. Dakle, funkcija distribucije slučajne varijable Y je dana s

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & : y < 0 \\ \frac{2}{\pi} \arcsin y & : 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 1 & : x > 1 \end{cases}$$

Normalna (Gaussova) slučajna varijabla

Normalna slučajna varijabla X, u oznaci $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, je neprekidna slučajna varijabla dana s $R(X) = \mathbb{R}$ i funkcijom gustoće

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

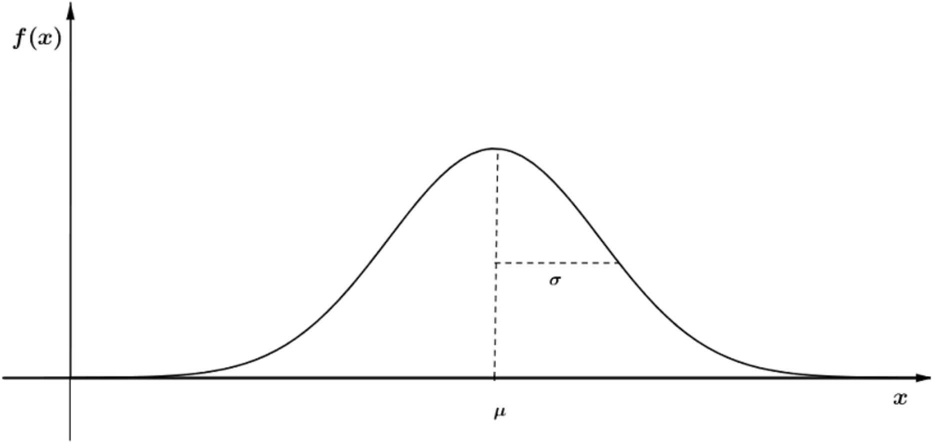
Dakle, f je zvonolika, simetrična oko μ i repovi joj idu u $-\infty$ i $+\infty$. Uočimo i da je

$$\int_{-\infty}^{\mu} f(x)\,dx = \int_{\mu}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Parametar μ zovemo parametrom lokacije, a σ^2 zovemo parametrom raspršenja:

$$\mathbb{E}(X) = \mu \quad \text{i} \quad Var(X) = \sigma^2.$$

Graf funkcije gustoće normalne slučajne varijable je prikazan na sljedećoj slici:



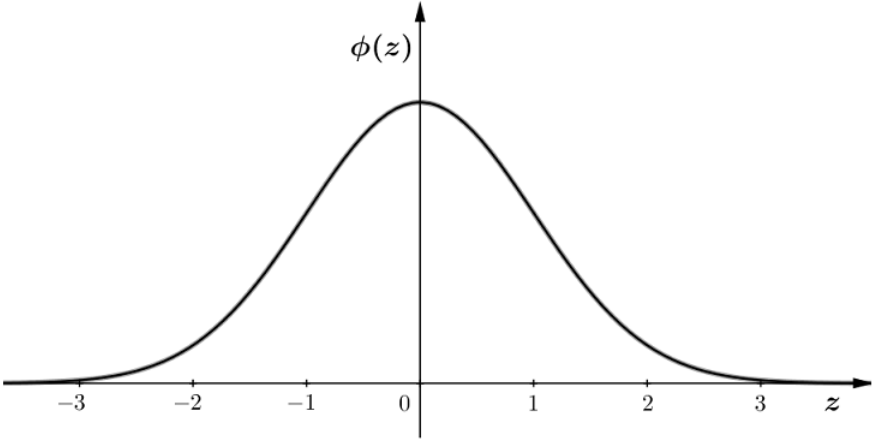
Funkcija distribucije od $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ je dana s

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Ovaj integral se ne da elementarno riješiti i zato su vrijednosti od F tabelirane. Međutim, bilo bi nepraktično tabelirati F za sve μ i σ, pa to činimo samo za jedan slučaj, za takozvanu jediničnu (standardnu) normalnu slučajnu varijablu, a ostale dobivamo iz ovog. Jedinična normalna slučajna varijabla je

$$Z \sim N(0,1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad \text{i} \quad \Phi(z) = \mathbb{P}(Z \leqslant z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(x)\,dx.$$

Graf funkcije gustoće jedinične normalne slučajne varijable vidimo na sljedećoj slici:



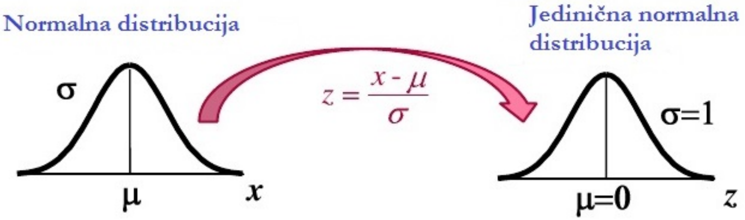
Vrijednosti na osi apscisa, u slučaju standardne normalne slučajne varijable, se označavaju sa z i izražavaju se u jedinicama standardnih devijacija. Na primjer, izraz $z = 2$ označava da je točka apscise udaljena za dvije standardne devijacije u desno. Imajući tabeliranu $Z \sim N(0,1)$, slučajnu varijablu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dobijemo iz

$$X = \sigma Z + \mu.$$

Dakle,

$$Z \sim N(0,1) \implies \sigma Z + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$$
$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \implies \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

Bilo koju normalnu slučajnu varijablu pretvaramo u jediničnu normalnu slučajnu varijablu pomoću sljedeće transformacije:

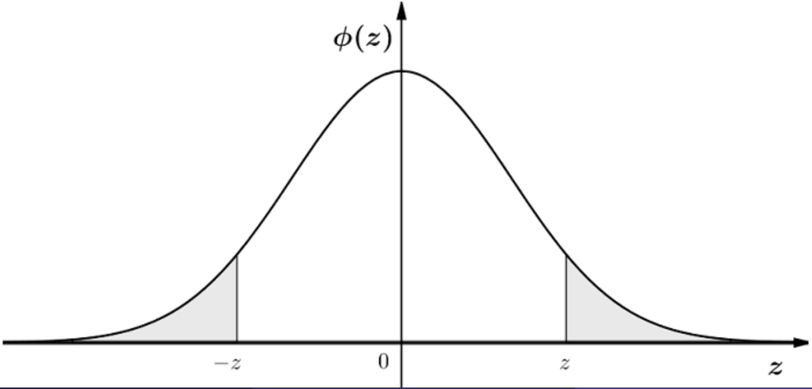


Sada imamo

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \mathbb{P}(Z \leqslant z) = \Phi(z),$$

gdje je $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ i $\Phi(z)$ iščitamo iz tablice. Uočimo još da je dovoljno tabelirati vrijednosti za $\Phi(z)$ samo za $z \geqslant 0$ jer vrijedi:

$$\Phi(-z) = \mathbb{P}(Z \leqslant -z) = \mathbb{P}(Z \geqslant z) = 1 - \mathbb{P}(Z \leqslant z) = 1 - \Phi(z).$$



Zadatak (5.27.)

Godišnja količina oborina u nekom mjestu izražena u l/m^2 je normalno distribuirana slučajna varijabla X s očekivanjem $\mu = 360 l/m^2$ i standardnom devijacijom $\sigma = 120 l/m^2$. Kolika je vjerojatnost da

a) neke godine količina oborina premaši $500 l/m^2$?

b) količina oborina bude između $300 l/m^2$ i $400 l/m^2$?

c) količina oborina bude manja od $200 l/m^2$?

Rješenje: Znamo da je $X \sim N(360, 120^2)$ godišnja količina oborina u l/m^2.

a) Vjerojatnost da neke godine količina oborina premaši $500 l/m^2$ iznosi: $\mathbb{P}(X > 500) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 500) = 1 - F(500) = 1 - \Phi(\frac{500-360}{120}) = 1 - \Phi(1.17) = 1 - 0.879 = 0.121$.

b) Vjerojatnost da količina oborina bude između $300 l/m^2$ i $400 l/m^2$ je jednaka: $\mathbb{P}(300 \leq X \leq 400) = F(400) - F(300) = \Phi(\frac{400-360}{120}) - \Phi(\frac{300-360}{120}) = \Phi(0.33) - \Phi(-0.5) = \Phi(0.33) - (1 - \Phi(0.5)) = 0.6293 - 1 + 0.6915 = 0.3208$.

c) Vjerojatnost da količina oborina bude manja od $200 l/m^2$ iznosi: $\mathbb{P}(X < 200) = \Phi(\frac{200-360}{120}) = \Phi(-1.33) = 1 - \Phi(1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$.

Zadatak (5.28.)

Visina učenika osmih razreda osnovne škole je normalno distribuirana slučajna varijabla s očekivanjem 175 cm i standardnom devijacijom od 8 cm. Izračunajte vjerojatnost da je slučajno odabrani učenik niži od očekivane visine.

Rješenje: Vjerojatnost da je slučajno odabrani učenik niži od očekivane visine iznosi:
$\mathbb{P}(X < 175) = F(175) = \Phi(\frac{175-175}{8}) = \Phi(0) = 0.5.$

Zadatak (5.29.)

Instrumentom se mjeri određena veličina A, pri čemu je greška mjerenja slučajna varijabla X distribuirana po normalnoj razdiobi s očekivanjem $\mu = 0$ i standardnom devijacijom $\sigma = 5$. Kolika je vjerojatnost da

a) greška mjerenja ne premaši po apsolutnoj vrijednosti 6?

b) se pri mjerenju veličine A=60 pogriješi više od 10%?

Rješenje: Znamo da je $X \sim N(0, 25)$ greška kod mjerenja veličine A.

a) Vjerojatnost da greška mjerenja ne premaši po apsolutnoj vrijednosti 6 iznosi:
$\mathbb{P}(|X| \leq 6) = \mathbb{P}(-6 \leq X \leq 6) = F(6) - F(-6) =$
$\Phi(\frac{6-0}{5}) - (1 - \Phi(\frac{6-0}{5})) = 2\Phi(1.2) - 1 = 2 \cdot 0.8849 - 1 = 0.7698.$

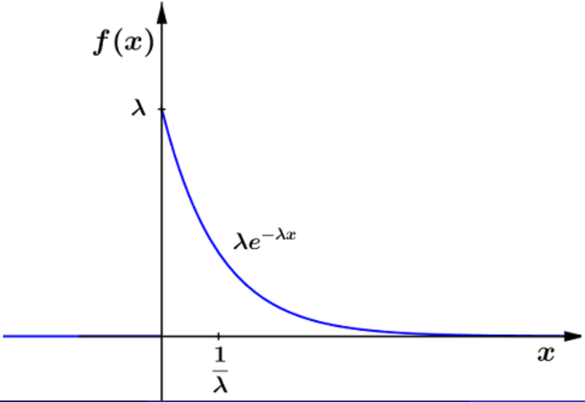
b) Budući da 10% od $A = 60$ iznosi 6, treba odrediti:
$\mathbb{P}(|X| > 6) = 1 - \mathbb{P}(|X| \leq 6) = 1 - 0.7698 = 0.2302.$

Eksponencijalna slučajna varijabla

Eksponencijalna slučajna varijabla X, u oznaci $X \sim Exp(\lambda)$, je neprekidna slučajna varijabla dana s $R(X) = (0, \infty)$ i

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

za parametar $\lambda > 0$.



Uočimo da vrijedi

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

i

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{i} \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Ova slučajna varijabla slična je po svome značenju Poissonovoj slučajnoj varijabli. Naime, Poissonova slučajna varijabla je brojala slučajne događaje, dok eksponencijalna mjeri vrijeme između dva slučajna događaja kao što su dolazak telefonskih poziva u centralu, dolazak mušterija u trgovinu i slično.
Broj λ označava, slično kao i kod Poissonove slučajne varijable, prosječan broj pojavljivanja promatranog događaja u jedinici vremena.

Zadatak (5.31.)

Vijek trajanja žarulje je slučajna varijabla X distribuirana po eksponencijalnoj razdiobi s očekivanjem $\mathbb{E}(X) = 2000$ sati. Kolika je vjerojatnost da će žarulja pregoriti:

a) u prvih tisuću sati rada?
b) u toku drugih tisuću sati rada?
c) nakon 5000 sati rada?

Rješenje: Budući da je $\mathbb{E}(X) = 2000 = \frac{1}{\lambda}$ imamo da je parametar eksponencijalne slučajne varijable X jednak $\lambda = \frac{1}{2000}$.
Stoga je funkcija distribucije od X oblika:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2000}x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

a) Vjerojatnost da će žarulja pregoriti u prvih tisuću sati rada iznosi:
$\mathbb{P}(X \leq 1000) = F(1000) = 1 - e^{-\frac{1}{2000}\cdot 1000} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0.3935.$

b) Vjerojatnost da će žarulja pregoriti u toku drugih tisuću sati rada je jednaka:
$\mathbb{P}(1000 < X \leq 2000) = F(2000) - F(1000) =$
$1 - e^{-\frac{1}{2000}\cdot 2000} - 1 + e^{-\frac{1}{2000}\cdot 1000} = e^{-0.5} - e^{-1} = 0.2387.$

c) Vjerojatnost da će žarulja pregoriti nakon 5000 sati rada je:
$\mathbb{P}(X > 5000) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 5000) = 1 - F(5000) =$
$1 - 1 + e^{-\frac{1}{2000}\cdot 5000} = e^{-2.5} = 0.0821.$

Zadatak (5.32.)

Službenik na šalteru posluži u prosjeku 30 stranaka na sat. Ako je vrijeme posluživanja eksponencijalna slučajna varijabla X, kolika je vjerojatnost da će iduća stranka potrošiti više od 5 minuta na posluživanju (i čekanju)? Kolika je vjerojatnost da će potrošiti manje od 2 minute?

Rješenje: Vjerojatnost da će stranka potrošiti više od 5 minuta na posluživanju (i čekanju) iznosi:
$\mathbb{P}(X \geqslant 5) = 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 1 - F(5) = e^{-0.5 \cdot 5} = 0.082$,
a vjerojatnost da će potrošiti manje od 2 minute je jednaka:
$\mathbb{P}(X \leqslant 2) = F(2) = 1 - e^{-0.5 \cdot 2} = 0.632$.