Numerika za ODJ

Promotrimo problem rješavanja ODJ prvog reda, to jest, želimo riješiti

$$\boxed{y' = f(x, y)},$$

gdje je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neka funkcija.
Ako želimo jedinstveno rješenje, treba nam početni ili rubni uvjet, to jest, rješavamo problem

$$\boxed{y' = f(x, y) \text{ na } [a, b] \text{ uz uvjet } y(a) = y_0.}$$

Ovaj problem zove se **Cauchyjev problem**.

Ideja numeričkog rješavanja Cauchyjevog problema je aproksimacija funkcije y Taylorovim polinomom:

$$\boxed{y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \dots}$$

Za h "dovoljno mali", h^2, h^3, ... će biti još i manji, pa će vrijediti

$$\boxed{y(x+h) \approx y(x) + hy'(x).}$$

Eulerova metoda

Postupak:

- Razbijemo segment $[a, b]$ na n jednakih "malih" intervala širine $h = \frac{b-a}{n}$. Dakle, imamo:

$$a = x_0 < x_1 = x_0 + h < x_2 = x_1 + h < \dots < x_n = x_{n-1} + h = b.$$

$$\Longrightarrow \boxed{x_k = x_0 + kh}, k = 1, \dots, n$$

- Iz Taylorove formule imamo:

$$\begin{aligned}
y_0 &= y(x_0) = y(a) = y_0 \to \text{ početni uvjet}, \\
y_1 &= y(x_1) = y(x_0 + h) \approx y(x_0) + hy'(x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0), \\
y_2 &= y(x_2) = y(x_1 + h) \approx y(x_1) + hy'(x_1) = y_1 + hf(x_1, y_1), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \; k = 0, 1, \dots, n-1, \text{ gdje je } y_k = y(x_k).$$

Zadatak (1.)

Eulerovom metodom riješite $y' = x + y$ na $[0, 1]$ ako je $y(0) = 0$ i $h = 0.2$ (to jest, $n = 5$).

Rj.:

Egzaktno rješenje ovog problema je $y(x) = e^x - x - 1$.

Poboljšana Eulerova metoda

Rješavamo Cauchyjev problem

$$\boxed{y' = f(x, y) \text{ na } [a, b] \text{ uz uvjet } y(a) = y_0.}$$

Postupak:

- Razbijemo segement $[a, b]$ na n jednakih "malih" intervala širine $\frac{b-a}{n}$.
- Koristeći Eulerovu metodu, **poboljšanu Eulerovu metodu** definiramo na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
y(x_0) &= y(a) = y_0, \\
y_{i+1}^* &= y_i + hf(x_i, y_i), i = 0, 1, ..., n-1, \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)), i = 0, 1, ..., n-1.
\end{aligned}
$$

- korigiramo nagib kojim krećemo iz (x_i, y_i): novi nagib je aritmetička sredina od $f(x_i, y_i)$ i $f(x_{i+1}, y_{i+1}^*$
- y_{i+1}^* uvodimo jer ne znamo y_{i+1}, pa ga ocjenjujemo linearnom aproksimacijom iz (x_i, y_i)

Zadatak (2.)

Poboljšanom Eulerovom metodom riješite $y' = x + y$ na $[0, 1]$ ako je $y(0) = 0$ i $h = 0.2$ (to jest, $n = 5$).

Rj.:

Označimo s $k_1^i = hf(x_i, y_i)$ i $k_2^i = hf(x_{i+1}, y_{i+1}^*)$. Tada formule koje koristimo glase:

$$y_{i+1}^* = y_i + k_1^i, i = 0, ..., n-1,$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1^i + k_2^i), i = 0, ..., n-1.$$

Uvrstimo što su h i y_{i+1}^*:

$$k_1^i = 0.2(x_i + y_i),$$
$$k_2^i = 0.2(x_{i+1} + y_{i+1}^*) = 0.2(x_{i+1} + y_i + 0.2(x_i + y_i)),$$

i sve skupa imamo:

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}(0.2x_i + 0.2y_i + 0.2x_{i+1} + 0.2y_i + 0.04x_i + 0.04y_i) \\
&= y_i + \frac{1}{2}(0.24x_i + 0.44y_i + 0.2x_{i+1}) \\
&= 0.12x_i + 1.22y_i + 0.1x_{i+1} \\
&= 0.22x_i + 1.22y_i + 0.02, i = 0, 1, ..., n-1.
\end{aligned}
$$

Izračunate vrijednosti su redom:

$$
\begin{aligned}
&x_0 = 0, \quad y_0 = y(0) = 0 \\
&x_1 = 0.2, \quad y_1 = 0 + 0.02 = 0.02, \\
&x_2 = 0.4, \quad y_2 = 0.22 \cdot 0.2 + 1.22 \cdot 0.02 + 0.02 = 0.0884, \\
&x_3 = 0.6, \quad y_3 = 0.22 \cdot 0.4 + 1.22 \cdot 0.0884 + 0.02 = 0.2158, \\
&x_4 = 0.8, \quad y_4 = 0.22 \cdot 0.6 + 1.22 \cdot 0.2158 + 0.02 = 0.4153, \\
&x_5 = 1, \quad y_5 = 0.22 \cdot 0.8 + 1.22 \cdot 0.4153 + 0.02 = 0.7027.
\end{aligned}
$$

x-koord.	Euler	poboljšani	egzaktno
0	0	0	0
0.2	0	0.02	0.0214
0.4	0.04	0.0884	0.0918
0.6	0.128	0.2158	0.2221
0.8	0.274	0.4153	0.4255
1	0.489	0.7027	0.7182

Runge-Kutta metoda

Još preciznija od prethodne dvije metode je metoda Runge-Kutta. Ponovno, rješavamo Cauchyjev problem:

$$\boxed{y' = f(x, y) \text{ na } [a, b] \text{ uz uvjet } y(a) = y_0.}$$

Postupak za Runge-Kutta metodu 4. reda:

- Razbijemo segement $[a, b]$ na n jednakih "malih" intervala širine $h = \frac{b-a}{n}$.

- Iterativno dobijemo sljedeći niz:

$$y(x_0) = y(a) = y_0,$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i), i = 0, 1, ..., n-1,$$

gdje su

$$k_1^i = hf(x_i, y_i),$$
$$k_2^i = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^i}{2}),$$
$$k_3^i = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^i}{2}),$$
$$k_4^i = hf(x_i + h, y_i + k_3^i), i = 0, 1, ..., n-1.$$

Zadatak (3.)

Riješite $y' = x + y$ na $[0, 1]$ uz uvjet $y(0) = 0$ Runge-Kutta metodom ako je $h = 0.2$ $(n = 5)$.

Računamo redom

$$
\begin{aligned}
y_0 &= y(0) = 0, \\
k_1^0 &= hf(x_0, y_0) = 0.2(0+0) = 0, \\
k_2^0 &= hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^0}{2}) = 0.2(0+0.1+0+0) = 0.02, \\
k_3^0 &= hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^0}{2}) = 0.2(0+0.1+0+0.01) = 0.022, \\
k_4^0 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_3^0) = 0.2(0+0.2+0+0.022) = 0.0444,
\end{aligned}
$$

pa slijedi $y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1^0 + 2k_2^0 + 2k_3^0 + k_4^0) = 0.0214$. Na analogan način dobijemo i ostale vrijednost y_i.

x-koord.	Euler	poboljšani	Runge-Kutta	egzaktno
0	0	0	0	0
0.2	0	0.02	0.214	0.021403
0.4	0.04	0.0884	0.91818	0.091825
0.6	0.128	0.2158	0.22211	0.22212
0.8	0.274	0.4153	0.425521	0.425541
1	0.489	0.7027	0.718251	0.718282

Zadatak (4a.)

Riješite $y' = x + y$ na $[0, 0.5]$ uz uvjet $y(0) = 1$ Runge-Kutta metodom ako je $h = 0.1$ $(n = 5)$.

Rj.:

Egzaktno rješenje je $y(x) = 2e^x - x - 1$.

Zadatak (4b.)

Riješite $y' = xy$ na $[0, 1]$ uz uvjet $y(0) = 1$ Runge-Kutta metodom ako je $h = 0.2$ ($n = 5$).

Rj.:

Egzaktno rješenje je $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.