Poglavlje 6
Diskretni dvodimenzionalni slučajni vektori

Neka su $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ dvije diskretne slučajne varijable. Funkciju $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$, danu s $(X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$ zovemo **dvodimenzionalni slučajni vektor**.

Ako je $R(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ i $R(Y) = \{y_1, \ldots, y_m\}$, tada (X, Y) zapisujemo pomoću sheme:

$$(X, Y) \sim \begin{pmatrix} X \backslash Y & y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ x_1 & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ x_2 & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nm} \end{pmatrix},$$

gdje je $p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$.

Funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danu s

$$f(x, y) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x, Y = y), & x \in R(X), y \in R(Y) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

zovemo **funkcija vjerojatnosti od** (X, Y). Vrijedi $p_{ij} = f(x_i, y_j)$.

Funkciju $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danu s

$$F(x, y) = \sum_{\substack{x_i \in R(X) \\ x_i \leq x}} \sum_{\substack{y_j \in R(Y) \\ y_j \leq y}} f(x_i, y_j)$$

zovemo **funkcija distribucije od** (X, Y).
Marginalne funkcije vjerojatnosti slučajnog vektora (X, Y) su funkcije $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dane s

$$f_1(x) = \sum_{y \in R(Y)} f(x, y) \quad \text{i} \quad f_2(y) = \sum_{x \in R(X)} f(x, y).$$

Marginalne funkcije vjerojatnosti su baš funkcije vjerojatnosti od slučajnih varijabli X i Y, tj. $f_1(x) = f_X(x)$, $f_2(y) = f_Y(y)$.

Zadatak (6.1.)

Dvodimenzionalni slučajni vektor (X, Y) zadan je shemom:

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X\backslash Y & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0.05 & 0.1 & 0.03 \\ -1 & 0.05 & 0.05 & 0.12 \\ 0 & 0.1 & 0.05 & 0.07 \\ 1 & 0 & 0.1 & 0.06 \\ 2 & 0.05 & 0 & 0.03 \\ 3 & 0.05 & 0.05 & 0.04 \end{pmatrix}.$$

Odredite:

a) marginalne funkcije vjerojatnosti, te očekivanja $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y)$ i varijance $\mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y)$ komponenti slučajnog vektora,

b) vjerojatnost $\mathbb{P}(|X| \leq 1, |Y| \leq 1)$.

Rješenje: a) Neka je f_1 funkcija vjerojatnosti od X:
$f_1(-2) = 0.05 + 0.1 + 0.03 = 0.18$,
$f_1(-1) = 0.05 + 0.05 + 0.12 = 0.22$,
$f_1(0) = 0.1 + 0.05 + 0.07 = 0.22$,
$f_1(1) = 0 + 0.1 + 0.06 = 0.16$,
$f_1(2) = 0.05 + 0 + 0.03 = 0.08$ i
$f_1(3) = 0.05 + 0.05 + 0.04 = 0.14$.
Prema tome,

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.18 & 0.22 & 0.22 & 0.16 & 0.08 & 0.14 \end{pmatrix}.$$

Neka je f_2 funkcija vjerojatnosti od Y:
$f_2(0) = 0.05 + 0.05 + 0.1 + 0 + 0.05 + 0.05 = 0.3$,
$f_2(1) = 0.1 + 0.05 + 0.05 + 0.1 + 0 + 0.05 = 0.35$ i
$f_2(2) = 0.03 + 0.12 + 0.07 + 0.06 + 0.03 + 0.04 = 0.35$.
Tada je

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0.35 & 0.35 \end{pmatrix}.$$

Odredimo očekivanja i varijance komponenti slučajnog vektora:
$\mathbb{E}(X) = (-2)\cdot 0.18 - 1\cdot 0.22 + 0\cdot 0.22 + 1\cdot 0.16 + 2\cdot 0.08 + 3\cdot 0.14 = 0.16$,
$\mathbb{E}(Y) = 0.03 + 1\cdot 0.35 + 2\cdot 0.35 = 0.35 + 0.7 = 1.05$,
$\mathrm{Var}(X) = (-2)^2\cdot 0.18 + (-1)^2\cdot 0.22 + 1\cdot 0.16 + 2^2\cdot 0.08 + 3^2\cdot 0.14 - 0.16^2 = 2.68 - 0.16^2 = 2.6544$ i
$\mathrm{Var}(Y) = 1^2\cdot 0.35 + 2^2\cdot 0.35 - 1.05^2 = 0.6475$.

b) Tražena vjerojatnost iznosi:
$\mathbb{P}(|X| \leq 1, |Y| \leq 1) = \mathbb{P}(X = -1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = -1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0.05 + 0.05 + 0.1 + 0.05 + 0 + 0.1 = 0.35$.

Kovarijanca od (X, Y) je broj μ_{xy} definiran s $\mu_{xy} = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, gdje je

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x_i \in R(X)} \sum_{y_j \in R(Y)} x_i y_j f(x_i, y_j).$$

Koeficijent korelacije slučajnih varijabli X i Y je broj

$$\rho_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_1 \sigma_2},$$

gdje su $\sigma_1 = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ i $\sigma_2 = \sqrt{\mathrm{Var}(Y)}$.
Slučajne varijable X i Y su **nezavisne** ako vrijedi

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y), \forall x \in R(X), \forall y \in R(Y).$$

Teorem

Neka je (X, Y) dvodimenzionalni slučajni vektor i $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Tada vrijedi $\mathbb{E}(h(X, Y)) = \displaystyle\sum_{x_i \in R(X)} \sum_{y_j \in R(Y)} h(x_i, y_j) f(x_i, y_j)$.

Zadatak (6.2)

Bacamo dvije kocke. Definiramo slučajne varijable $X=$"veći od brojeva koji su pali" i

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{ako je zbroj brojeva na na obje kocke paran} \\ 1, & \text{ako je zbroj brojeva na obje kocke neparan.} \end{cases}$$

a) Odredite kovarijancu μ_{xy} i koeficijent korelacije ρ_{xy} slučajnog vektora (X, Y).
b) Odredite vjerojatnosti $\mathbb{P}(3 < X \leq 6, Y = 1)$ i $\mathbb{P}(2 \leq X < 4, Y < 1)$.
c) Kolika je vrijednost funkcije distribucije $F(x, y)$ slučajnog vektora (X, Y) u točki $(3, 1)$?
d) Jesu li slučajne varijable X i Y međusobno zavisne?
e) Odredite očekivanje kompozicije $\mathbb{E}(X \cdot Y^{17})$.

Rješenje: a) Znamo da su slike slučajnih varijabli X i Y sljedeći skupovi:
$R(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i $R(Y) = \{0, 1\}$.
Funkcija vjerojatnosti slučajnog vektora (X, Y), te marginalne funkcije vjerojatnosti varijabli X i Y dane su shemom:

$$(X, Y) \sim \begin{pmatrix} X \backslash Y & 0 & 1 & f_1(x) \\ 1 & \frac{1}{36} & 0 & \frac{1}{36} \\ 2 & \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} \\ 3 & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{5}{36} \\ 4 & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{7}{36} \\ 5 & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{9}{36} \\ 6 & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{11}{36} \\ f_2(y) & \frac{18}{36} & \frac{18}{36} & 1 \end{pmatrix}.$$

Kovarijanca μ_{XY} je definirana relacijom $\mu_{XY} = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
Stoga računamo sljedeća očekivanja:

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=0}^{1} i \cdot j \cdot f(i,j) =$$

$$2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{36} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot 1 \cdot \frac{4}{36} + 5 \cdot 1 \frac{4}{36} + 6 \cdot 1 \cdot \frac{6}{36} = \frac{82}{36} = 2.2778,$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot f_1(i) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} =$$

$$\frac{161}{36} = 4.4722 \quad \text{i}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{j=0}^{1} j \cdot f_2(j) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.5.$$

Dakle, kovarijanca iznosi:

$\mu_{XY} = 2.27 - 4.472 \cdot 0.5 = 0.0416.$

Koeficijent korelacije ρ_{XY} se računa po formuli $\rho_{XY} = \dfrac{\mu_{XY}}{\sigma_1 \sigma_2}$, gdje je $\sigma_1 = \sqrt{Var(X)}$ i $\sigma_2 = \sqrt{Var(Y)}$.

Odredimo standardne devijacije σ_1 i σ_2:

$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 =$

$1^2 \cdot \dfrac{1}{36} + 2^2 \cdot \dfrac{3}{36} + 3^2 \cdot \dfrac{5}{36} + 4^2 \cdot \dfrac{7}{36} + 5^2 \cdot \dfrac{9}{36} + 6^2 \cdot \dfrac{11}{36} - 4.472^2 = 1.9715,$

$\sigma_1 = \sqrt{\text{Var}(X)} = 1.4041,$

$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = 1^2 \cdot \dfrac{1}{2} - 0.5^2 = 0.5 - 0.25 = 0.25$ i

$\sigma_2 = \sqrt{\text{Var}(Y)} = 0.5.$

Prema tome, koeficijent korelacije iznosi:

$$\rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{0.0416}{1.4041 \cdot 0.5} = 0.0594.$$

b) Tražene vjerojatnosti su jednake:

$$\mathbb{P}(3 < X \leq 6, Y = 1) = \frac{4}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} = \frac{14}{36} \quad \text{i}$$

$$\mathbb{P}(2 \leq X < 4, Y < 1) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} = \frac{4}{36}.$$

c) Vrijednost funkcije distribucije u zadanoj točki iznosi:

$$F(3,1) = f(1,0) + f(2,0) + f(3,0) + f(1,1) + f(2,1) + f(3,1) =$$

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + 0 + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{9}{36}.$$

d) Budući da je $f(1,1) = 0$ i $f_1(1) = \frac{1}{36}$, $f_2(1) = \frac{18}{36}$, slučajne varijable X i Y su zavisne.

e) Očekivanje kompozicije iznosi:

$$\mathbb{E}(XY^{17}) = 1 \cdot 0^{17} \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot 0^{17} \cdot \frac{1}{36} + \cdots + 5 \cdot 1^{17} \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot 1^{17} \cdot \frac{6}{36} = 2.27.$$

Zadatak (6.3.)

Promatramo slučajan pokus bacanja 2 igraće kocke i slučajnu varijablu X="suma brojeva koji su pali", te varijablu Y="broj 1 ako su pali jednaki brojevi, 0 inače".

a) Nađite funkciju vjerojatnosti slučajnog vektora (X, Y).
b) Odredite vjerojatnost $\mathbb{P}(3 < X \leq 6, Y = 1)$ i vrijednost $F(8, 1)$ funkcije distribucije slučajnog vektora.
c) Ispitajte jesu li varijable X i Y nezavisne.

Rješenje: Funkcija vjerojatnosti slučajnog vektora (X, Y) ima oblik:

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X \backslash Y & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \frac{1}{36} \\ 3 & \frac{2}{36} & 0 \\ 4 & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \\ 5 & \frac{4}{36} & 0 \\ 6 & \frac{4}{36} & \frac{1}{36} \\ 7 & \frac{6}{36} & 0 \\ 8 & \frac{4}{36} & \frac{1}{36} \\ 9 & \frac{4}{36} & 0 \\ 10 & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \\ 11 & \frac{2}{36} & 0 \\ 12 & 0 & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Tražena vjerojatnost iznosi:

$\mathbb{P}(3 < X \leq 6, Y = 1) = f(4,1) + f(5,1) + f(6,1) = \dfrac{1}{36} + 0 + \dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{18}$,

dok je vrijednost funkcije distribucije jednaka:

$F(8,1) = f(2,0) + f(3,0) + f(4,0) + \cdots + f(7,1) + f(8,1) = \dfrac{13}{18}$.

Varijable X i Y nisu nezavisne jer je

$f(6,1) = \frac{1}{36} \neq \frac{5}{36} \cdot \frac{6}{36} = f_1(6) \cdot f_2(1)$.

Zadatak (6.4.)

Neka je (X, Y) slučajni vektor iz prethodnog zadatka i neka je $h(x, y) = x \cdot y$. Odredite očekivanje kompozicije $\mathbb{E}(h(X, Y))$.

Rješenje: Traženo očekivanje iznosi:

$$\mathbb{E}(h(X,Y)) = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j) f(x_i, y_j) = \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j f(x_i, y_j) =$$

$$2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} + 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} + 8 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} + 10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} + 12 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} = \frac{7}{6}.$$

Zadatak (6.5.)

Ispitajte jesu li komponente X i Y slučajnog vektora

$$(X, Y) \sim \begin{pmatrix} X\backslash Y & 0 & 1 \\ 1 & 0.16 & 0.24 \\ 2 & 0.24 & 0.36 \end{pmatrix}$$

nezavisne?

Rješenje: Dopunimo funkciju vjerojatnosti slučajnog vektora vrijednostima marginalnih funkcija vjerojatnosti

$$(X, Y) \sim \begin{pmatrix} X \backslash Y & 0 & 1 & f_1(x) \\ 1 & 0.16 & 0.24 & 0.4 \\ 2 & 0.24 & 0.36 & 0.6 \\ f_2(y) & 0.4 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Provjerimo nezavisnost komponenti slučajnog vektora:
$f(1,0) = 0.16 = 0.4 \cdot 0.4 = f_1(1) \cdot f_2(0)$,
$f(1,1) = 0.24 = 0.4 \cdot 0.6 = f_1(1) \cdot f_2(1)$,
$f(2,0) = 0.24 = 0.6 \cdot 0.4 = f_1(2) \cdot f_2(0)$,
$f(2,1) = 0.36 = 0.6 \cdot 0.6 = f_1(2) \cdot f_2(1)$.
Da, X i Y su nezavisne.

Zadatak (6.6.)

Bacamo igraću kocku i promatramo slučajne varijable

$$X = \begin{cases} 0, & \text{ako je pao neparan broj} \\ 1, & \text{ako je pao paran broj} \end{cases}$$

i

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{ako je pao broj manji od tri} \\ 2, & \text{ako je pao broj veći ili jednak tri.} \end{cases}$$

a) Odredite funkciju vjerojatnosti i marginalne funkcije vjerojatnosti vektora (X, Y).
b) Izračunajte kovarijancu μ_{XY} i koeficijent korelacije ρ_{XY}.
c) Jesu li slučajne varijable X i Y međusobno nezavisne?

a) Funkcija vjerojatnosti i marginalne funkcije vjerojatnosti su dane sljedećom shemom:

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X \backslash Y & 1 & 2 & f_1(x) \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ f_2(y) & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Da bismo odredili kovarijancu najprije moramo izračunati sljedeća očekivanja:

$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

$\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ i

$\mathbb{E}(XY) = 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot 2 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.

Kovarijanca iznosi:

$\mu_{XY} = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = 0$,

a koeficijent korelacije je jednak:

$\rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = 0$.

c) Provjeravamo nezavisnost komponenti slučajnog vektora:
$f(0,1) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = f_1(0) \cdot f_2(1)$,
$f(0,2) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = f_1(0) \cdot f_2(2)$,
$f(1,1) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = f_1(1) \cdot f_2(1)$,
$f(1,2) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = f_1(1) \cdot f_2(2)$.
Da, X i Y su nezavisne.

Zadatak (6.7.)

Dvodimenzionalni slučajni vektor (X, Y) zadan je funkcijom vjerojatnosti

$$(X, Y) \sim \begin{pmatrix} X\backslash Y & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Odredite:

a) kovarijancu i koeficijent korelacije,
b) vrijednosti $\mathbb{P}(X = 0, 1 < Y \leq 3)$, $F(1, 2)$, $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1, 2 \leq Y \leq 3)$ i $F(0, 3)$,
c) očekivanje $\mathbb{E}(XY^2)$.

Rješenje: a) Funkciju vjerojatnosti slučajnog vektora dopunjavamo vrijednostima marginalnih funkcija vjerojatnosti:

$$(X, Y) \sim \begin{pmatrix} X \backslash Y & 1 & 2 & 3 & f_1(x) \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.6 \\ 1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.4 \\ f_2(y) & 0.3 & 0.3 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Određujemo očekivanja potrebna za računanje kovarijance:
$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot 0.6 + 1 \cdot 0. = 0.4,$
$\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.4 = 2.1 \quad$ i
$\mathbb{E}(XY) = 0{\cdot}1{\cdot}0.1 + 0{\cdot}2{\cdot}0.2 + 0{\cdot}3{\cdot}0.3 + 1{\cdot}1{\cdot}0.2 + 1{\cdot}2{\cdot}0.1 + 1{\cdot}3{\cdot}0.1 = 0.7.$
Kovarijanca iznosi:
$\mu_{XY} = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0.7 - 0.84 = -0.14.$
Odredimo varijance i standardne devijacije komponenti slučajnog vektora:
$\mathrm{Var}(X) = 0.4 - 0.4^2 = 0.24,$
$\mathrm{Var}(Y) = 0.3 + 4 \cdot 0.3 + 9 \cdot 0.4 - 2.1^2 = 5.1 - 4.41 = 0.69,$

$\sigma_1 = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 0.4899$ i
$\sigma_2 = \sqrt{\mathrm{Var}(Y)} = 0.8307.$
Prema tome, koeficijent korelacije je jednak:
$\rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{-0.14}{0.4899 \cdot 0.8307} = -0.344.$

b) Tražene vrijednosti iznose:
$\mathbb{P}(X = 0, 1 < Y \leq 3) = 0.2 + 0.3 = 0.5,$
$F(1, 2) = 0.1 + 0.2 + 0.2 + 0.1 = 0.6,$
$\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1, 2 \leq Y \leq 3) = 0.2 + 0.3 + 0.1 + 0.1 = 0.7$ i
$F(0, 3) = 0.1 + 0.2 + 0.3 = 0.6.$

c) Očekivanje kompozicije je jednako:
$\mathbb{E}(XY^2) =$
$0 \cdot 1^2 \cdot 0.1 + 0 \cdot 2^2 \cdot 0.2 + 0 \cdot 3^2 \cdot 0.3 + 1 \cdot 1^2 \cdot 0.2 + 1 \cdot 2^2 \cdot 0.1 + 1 \cdot 3^2 \cdot 0.1 = 1.5.$