3.2 Trostruki integrali

Neka je tijelo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ zadano sljedećim uvjetima:

$$\begin{gathered} a \leq x \leq b, \\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \\ \psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y), \end{gathered} \tag{3.3}$$

gdje su a i b konstante, te φ_1, φ_2, ψ_1 i ψ_2 neprekidne funkcije definirane na odgovarajućim domenama. Neka je $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. *Trostruki integral* funkcije f po skupu Ω računamo po formuli:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx.$$

Napomenimo da za trostruki integral vrijede potpuno analogna svojstva kao za dvostruki, nabrojana na početku odjeljka 3.1, pa ih nećemo opet posebno isticati (ali ćemo ih koristiti).

Nadalje, u (3.3) možemo imati i drugačiji poredak varijabli. Bitno jest da granice prve izabrane varijable budu konstante, a granice ostalih varijabli ovise samo o prethodno izabranim varijablama.

Zadatak 3.26. Izračunajte integral $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x\,dz\,dy\,dx$, te skicirajte područje integracije.

Rješenje: Područje integracije je

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq x-y \right\}.$$

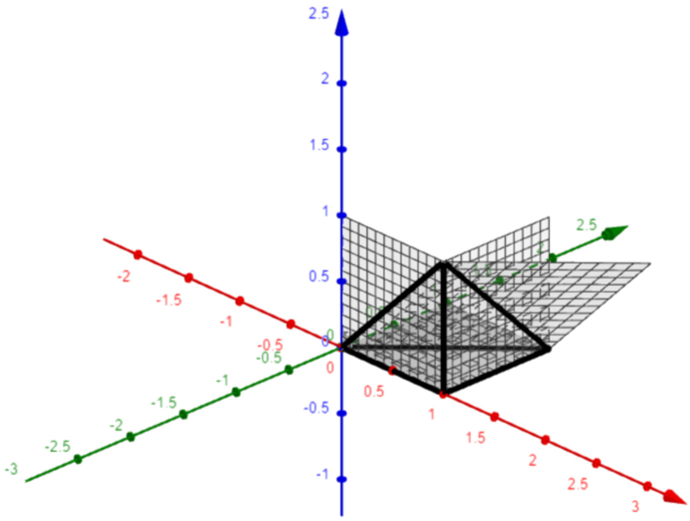
Uočimo da je

$$0 \leq z \leq x-y \Leftrightarrow y \leq y+z \leq x \Leftrightarrow (z \geq 0) \Leftrightarrow y+z \leq x.$$

Dakle, Ω je dio prostora (tetraedar) u prvom oktantu omeđen ravninom $y+z=x$.

Računamo pomoću gornje formule:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x\,dz\,dy\,dx &= \int_0^1 \int_0^x xz\Big|_{z=0}^{z=x-y} dy\,dx = \int_0^1 \int_0^x x(x-y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x (x^2 - xy)\,dy\,dx = \int_0^1 (x^2 y - x \cdot \frac{y^2}{2})\Big|_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 (x^3 - \frac{x^3}{2})\,dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$



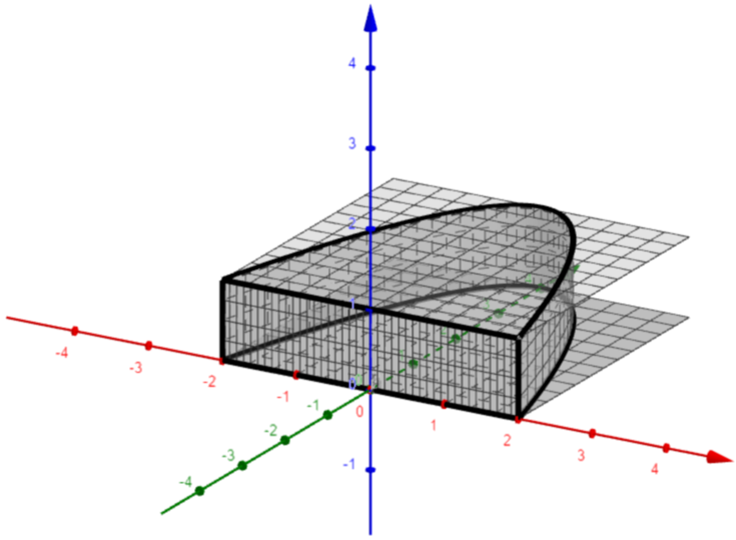
Slika 3.1: Skup Ω i plohe koje ga omeđuju

$\square$

Zadatak 3.27. Skicirajte područje integracije i odredite granice za integral $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, gdje je Ω omeđeno plohama $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $z = 1$ i $z = 0$. Riješite navedeni integral, ako je podintegralna funkcija $f(x,y,z) = xy^2 + z$.

Rješenje: Ploha $y = 4 - x^2$ je parabolički cilindar. Naime, ploha je očito drugog reda i u jednadžbi se pojavljuju samo dvije varijable, dakle radi se o cilindru, a iz jednadžbe se vidi da su vodoravni presjeci parabole.
I sada za $(x,y,z) \in \Omega$ imamo da je $0 \le z \le 1$ i $0 \le y \le 4 - x^2$. Granice za x su točke u kojima parabola $y = 4 - x^2$ u xy-ravnini siječe x-os, tj. točke za koje je $0 = 4 - x^2 \Rightarrow x = \pm 2$. Dakle, $-2 \le x \le 2$.

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega (xy^2 + z)\,dx\,dy\,dz &= \int_{-2}^{2}\int_0^{4-x^2}\int_0^1 (xy^2 + z)\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{2}\int_0^{4-x^2} (xy^2 z + \frac{z^2}{2})\Big|_{z=0}^{z=1}\,dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{2}\int_0^{4-x^2} (xy^2 + \frac{1}{2})\,dy\,dx = \int_{-2}^{2} (x\cdot\frac{y^3}{3} + \frac{1}{2}y)\Big|_{y=0}^{y=4-x^2}\,dx \\
&= \int_{-2}^{2} (x\cdot\frac{(4-x^2)^3}{3} + \frac{1}{2}(4-x^2))\,dx
\end{aligned}$$



Slika 3.2: Skup Ω i plohe koje ga omeđuju

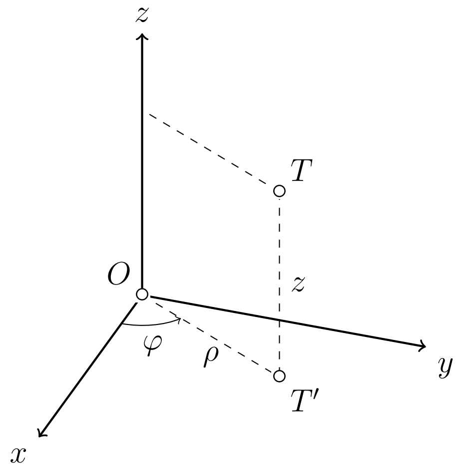
$$= \underbrace{\int_{-2}^{2} x \cdot \frac{(4-x^2)^3}{3}\, dx}_{=0} + \int_{0}^{2} (4-x^2)\, dx = (4x - \frac{x^3}{3})\Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{16}{3}$$

Prvi integral je jednak 0 zato što je podintegralna funkcija neparna ($f(-x) = -f(x)$), a područje integracije $[-2, 2]$ je simetrično oko 0. Drugi integral se može napisati kao integral po $[0, 2]$ pomnožen s 2 jer je podintegralna funkcija parna ($f(-x) = -f(x)$).

$\square$

3.2.1 Cilindrični koordinatni sustav

Neka je $T = (x, y, z)$ točka u prostoru, te $T' = (x, y, 0)$ njena projekcija na xy-ravninu. Neka su (ρ, φ) polarne koordinate točke T' u xy-ravnini.



Uređenu trojku (ρ, φ, z) zovemo *cilindričkim koordinatama* točke T. Formule pretvorbe iz cilindričkog u Kartezijev sustav i obratno glase

$$x = \rho \cos \varphi \qquad \rho^2 = x^2 + y^2$$
$$y = \rho \sin \varphi, \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x},$$

pri čemu varijabla z ostaje ista u oba sustava.

Napomena. Koristimo oznaku $\rho = |\vec{OT'}|$ umjesto r. Razlog je što oznaku r čuvamo za tzv. sferni sustav, gdje će biti $r = |\vec{OT}|$.

Što su *koordinatne plohe* u cilindričkom sustavu? Plohe $\rho =$ konstanta su plaštevi cilindara sa središnjom osi z. Plohe $\varphi =$ konstanta su poluravnine s rubom u z-osi. Plohe $z =$ konstanta su horizontalne ravnine.

Jacobijan prijelaza u cilindričke koordinate iznosi ρ, pa *teorem o zamjeni varijabli* glasi:

$$\iiint_{D(x,y,z)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{D(\rho,\varphi,z)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz.$$

Zadatak 3.28. Skicirajte područje integracije, te prebacite u cilindrički sustav integral

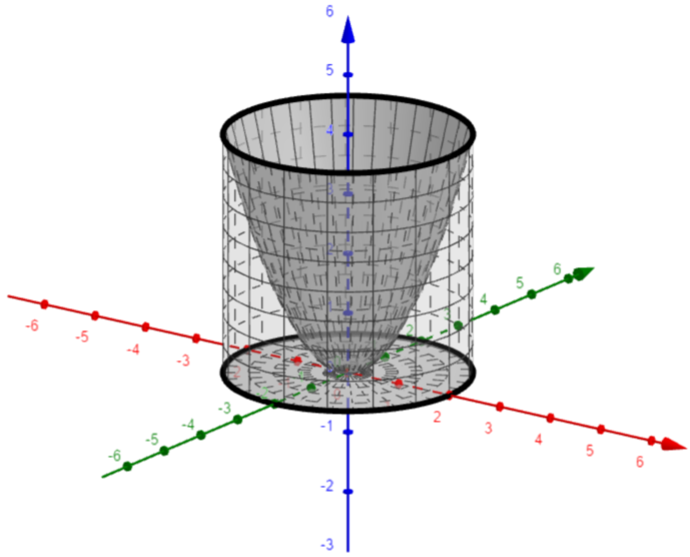
$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{0}^{x^2+y^2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

Riješite integral ako je podintegralna funkcija $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$.

Rješenje: Označimo zadani integral I. Imamo:

$$-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow y^2 \leq 4-x^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 4.$$

Iz toga slijedi da je područje integracije Ω omeđeno cilindrom $x^2+y^2=4$. Iz $0 \leq z \leq x^2+y^2$ slijedi da je područje Ω omeđeno i paraboloidom $z=x^2+y^2$ te ravninom $z=0$.



Slika 3.3: Skup Ω i plohe koje ga omeđuju

Ako stavimo $\rho^2 = x^2+y^2$, slijedi da je $0 \leq \rho \leq 2$. Nadalje, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (jer φ parametrizira kružnicu $x^2+y^2=\rho^2$) te $0 \leq z \leq \rho^2$. I sada primjenom gornje formule dobivamo:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\rho^2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\, dz\, d\rho\, d\varphi.$$

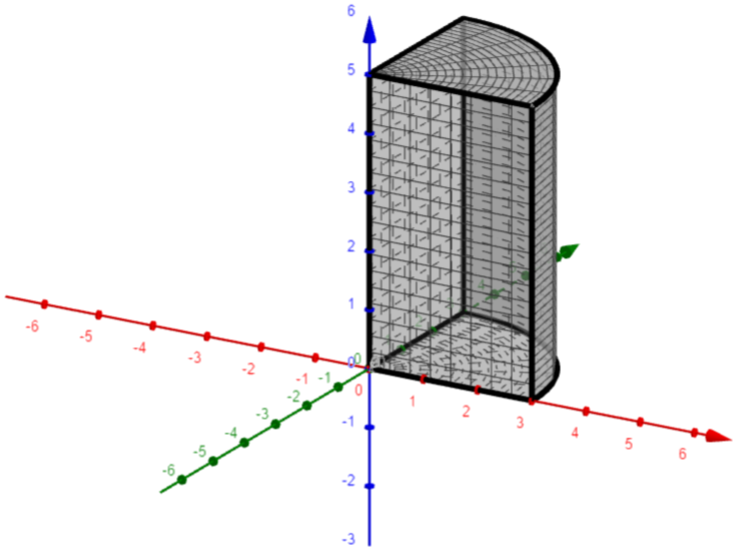
Za funkciju $f(x,y,z) = x^2+y^2+z$ imamo

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho^2} ((\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 + z)\rho\, dz\, d\varphi\, d\rho \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\rho^2} (\rho^3 + z\rho)\, dz\, d\rho\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (\rho^3 z + \frac{z^2}{2}\rho)\Big|_{z=0}^{z=\rho^2} d\rho\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (\rho^5 + \frac{1}{2}\rho^5)\, d\rho\, d\varphi = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho^2} \rho^5\, d\rho\, d\varphi \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^6}{6}\Big|_{\rho=0}^{\rho=2} d\varphi = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \frac{32}{3}\, d\varphi = \frac{3}{2}\cdot\frac{32}{3}\cdot\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 32\pi
\end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 3.29. Izračunajte $\iiint_\Omega y\,dx\,dy\,dz$, ako je Ω tijelo u I. oktantu, omeđeno plohama $x^2+y^2=9$, $z=0$ i $z=5$. Skicirajte područje integracije.

Rješenje:



Slika 3.4: Skup Ω i plohe koje ga omeđuju

- Direktno u Kartezijevim koordinatama.

  Za $(x,y,z)\in\Omega$ imamo da je $0\le z\le 5$. Budući da gledamo samo prvi oktant, imamo i $x,y\ge 0$, odakle slijedi da je

  $$x^2+y^2\le 9 \Leftrightarrow 0\le x\le 3,\ 0\le y\le \sqrt{9-y^2}.$$

  Računamo:

  $$\begin{aligned} I &= \int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^5 y\,dz\,dy\,dx = \int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}} yz\Big|_{z=0}^{z=5} dy\,dx \\ &= \int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}} 5y\,dy\,dx = 5\int_0^3 \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{9-x^2}} dx \\ &= \frac{5}{2}\int_0^3 (9-x^2)\,dx = \frac{5}{2}(9x-\frac{x^3}{3})\Big|_{x=0}^{x=3} = \frac{5}{2}(9\cdot 3-\frac{3^3}{3}) = 45 \end{aligned}$$

- Prelaskom na cilindričke koordinate.

  Ako stavimo $\rho^2 = x^2 + y^2$, onda je $0 \leq \rho \leq 3$. Još imamo $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ zato što φ parametrizira samo četvrtinu kružnice u prvom oktantu te $0 \leq z \leq 5$. Računamo:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \int_0^5 \rho \sin\varphi \cdot \rho \, dz \, d\rho \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \rho^2 (\sin\varphi) z \Big|_{z=0}^{5} d\rho \, d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 5\rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi = 5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3}{3} \sin\varphi \Big|_{\rho=0}^{\rho=3} \\
&= 5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9 \sin\varphi \, d\varphi = 45 \cdot (-\cos\varphi) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 45
\end{aligned}$$

□

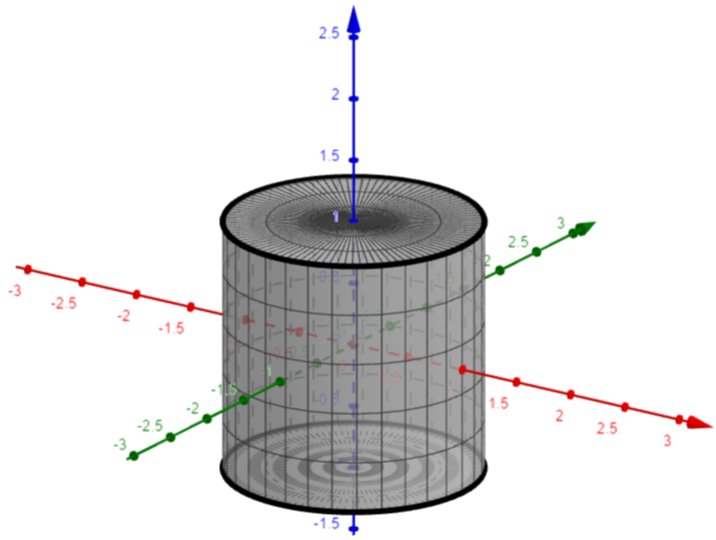
Zadatak 3.30. Izračunajte

$$\iiint_\Omega \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z+2}},$$

ako je $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 \leq 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$. Skicirajte područje integracije.

Rješenje: Skup Ω je omeđen cilindrom $x^2 + y^2 = 1$ i ravninama $z = -1$ i $z = 1$. Ako stavimo $\rho^2 = x^2 + y^2$, onda je $0 \leq \rho \leq 1$. Još imamo $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 + z + 2}} \cdot \rho \, dz \, d\rho \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z+2}} \, dz}_{t=\rho^2+z+2} \, d\varphi \, d\rho = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\rho^2+1}^{\rho^2+3} \rho t^{-\frac{1}{2}} \, dt \, d\rho \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_{t=\rho^2+1}^{t=\rho^2+3} d\rho \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^1 2\rho(\sqrt{\rho^2+3} - \sqrt{\rho^2+1}) \, d\rho}_{t=\rho^2} \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\sqrt{t+3} - \sqrt{t+1}) \, dt \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \Big(\frac{(t+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(t+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big)\Big|_{t=0}^{t=1} d\varphi \\
&= \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} (4^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}} + 1) \, d\varphi = \frac{2}{3}(9 - 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) \cdot \varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}
\end{aligned}$$



Slika 3.5: Skup Ω i plohe koje ga omeđuju

$$= \frac{4\pi}{3}(9 - 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$$

$\square$

Zadatak 3.31. Izračunajte

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz,$$

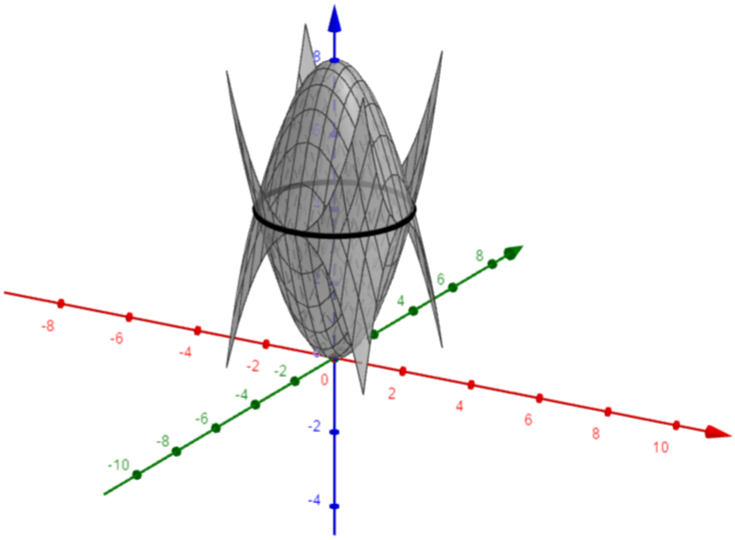
ako je $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2\}$. Skicirajte područje integracije.

Rješenje: Područje Ω je omeđeno paraboloidima $z = x^2+y^2$ i $z = 8-x^2-y^2$. Presjek tih krivulja dobijemo iz jednadžbe

$$x^2 + y^2 = 8 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

Dakle, presjek je kružnica.

Ako uvedemo cilindrične koordinate, imamo da je $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ jer φ mora opisati cijeli krug. Kružnica na presjeku ima najveći polumjer od svih poprečnih kružnica, pa je $0 \leq \rho \leq 2$. Za fiksni ρ, kružnice polumjera ρ su unutar Ω



Slika 3.6: Skup Ω i plohe koje ga omeđuju

samo na visini $\rho^2 \leq z \leq 8-\rho^2$ (zato što je $\rho^2 = x^2+y^2$). Računamo:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\rho^2}^{8-\rho^2} \sqrt{(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2}\rho\,dz\,d\rho\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\rho^2}^{8-\rho^2} \rho^2\,dz\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^2 z\Big|_{z=\rho^2}^{z=8-\rho^2}\,d\rho\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (\rho^2(8-\rho^2-\rho^2))\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (8\rho^2-2\rho^4)\,d\rho\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} (8\cdot\frac{\rho^3}{3}-2\cdot\frac{\rho^5}{5})\Big|_{\rho=0}^{\rho=2} = \int_0^{2\pi}(8\cdot\frac{8}{3}-2\cdot\frac{32}{5})\,d\varphi = \frac{128}{15}\cdot\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{256\pi}{15}
\end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 3.32. Izračunajte

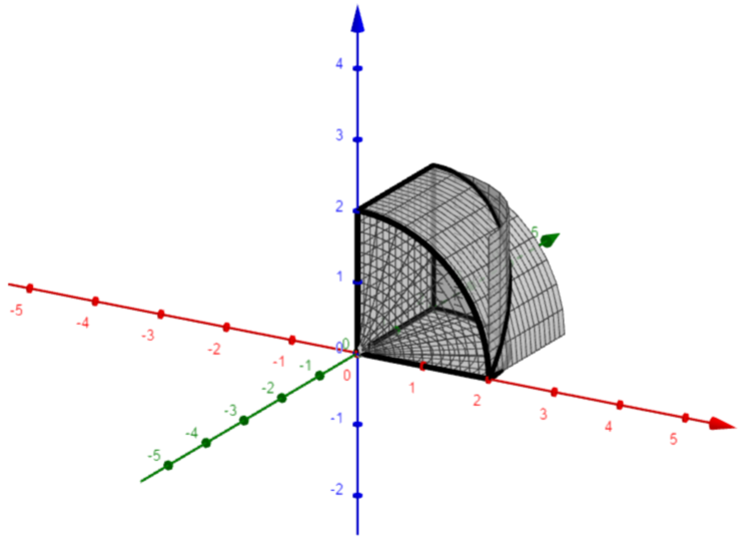
$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2}\,dz\,dy\,dx,$$

te skicirajte područje integracije.

Rješenje: Imamo da je

$$y \leq \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow y^2 \leq 4-x^2 \leq\Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 4.$$

Uočimo da to vrijedi za svaki z. Nadalje, imamo i da je $x^2 + z^2 \leq 4$ za svaki y. Dakle, područje Ω je omeđeno cilindrima $x^2 + y^2 = 4$ (oko z-osi) i $x^2 + z^2 = 4$ (oko y-osi). Zbog $x, y, z \geq 0$ gledamo samo dio u prvom oktantu.



Slika 3.7: Skup Ω i plohe koje ga omeđuju

Za cilindrične koordinate granice su $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ jer su vodoravni presjeci četvrtine kružnice, $0 \leq \rho \leq 2$ jer je $\rho^2 = x^2 + y^2$ i $0 \leq z \leq \sqrt{4 - \rho^2 \cos^2 \varphi}$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{4-\rho^2\cos^2\varphi}} \sqrt{4 - \rho^2 \cos^2 \varphi}\rho \, dz \, d\rho \, d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2} \sqrt{4 - \rho^2 \cos^2 \varphi}\rho z \Big|_{z=0}^{z=\sqrt{4-\rho^2\cos^2\varphi}} d\rho \, d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2} (4\rho - \rho^3 \cos^2 \varphi) \, d\rho \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cdot \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \cos^2 \varphi)\Big|_{\rho=0}^{\rho=2} d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8 - 4\cos^2 \varphi) \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8 - 4 \cdot \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2}) \, d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (6 - 2\cos(2\varphi)) \, d\varphi = (6\varphi - 2 \cdot \frac{1}{2} \sin(2\varphi))\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 3\pi
\end{aligned}
$$

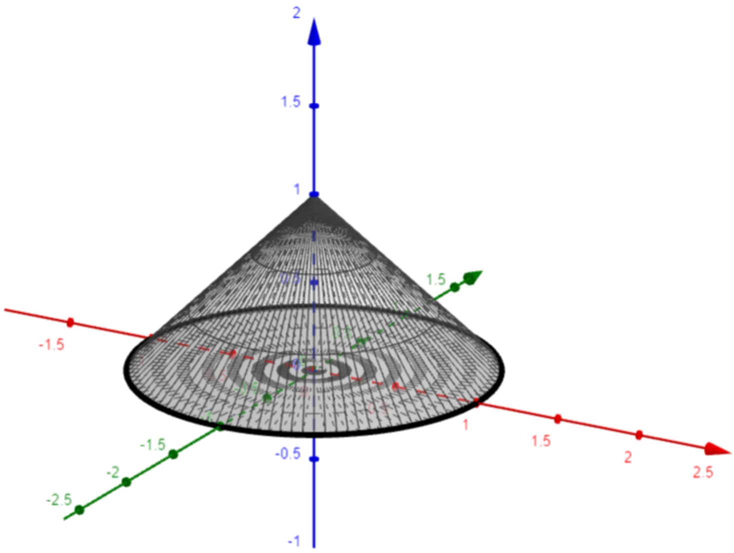
□

Zadatak 3.33. Izračunajte

$$\iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz,$$

gdje je Ω tijelo omeđeno plohama $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ i $z = 0$. Skicirajte područje integracije.

Rješenje:



Slika 3.8: Skup Ω i plohe koje ga omeđuju

Granice za cilindrične koordinate su $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le 1$ i $0 \le \rho \le 1 - z$. Računamo:

$$I = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-z} \rho\cos\varphi \cdot \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{3}\cos\varphi\Big|_{\rho=0}^{\rho=1-z} d\varphi\,dz$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-z)^3\cos\varphi\,d\varphi\,dz = \frac{1}{3}\int_0^1 (1-z)^3\sin\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dz = \frac{1}{3}\int_0^1 0\,dz = 0$$

□

3.2.2 Sferni koordinatni sustav

Neka je $T = (x, y, z)$ točka u prostoru, te $T' = (x, y, 0)$ njena projekcija na xy-ravninu. Neka je $\varphi = \measuredangle(\vec{i}, \vec{OT'})$ usmjeren kut kao i prije, te uvedimo