

Dinamika konstrukcija

s uvodom u potresno inženjerstvo

Bilješke i skice s predavanja

Damir Lazarević
damir@grad.hr

Marija Demšić
mdemsic@grad.hr

Katedra za statiku, dinamiku i stabilnost konstrukcija
Zavod za tehničku mehaniku

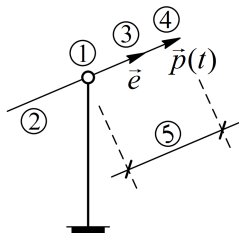
Građevinski fakultet
Kačićeva 26, Zagreb

listopad, 2020.

Dinamika konstrukcija.

Dinamika konstrukcija je dio tehničke mehanike u kojem se analizira GIBANJE konstrukcija pod utjecajem PROMJENJIVIH djelovanja.

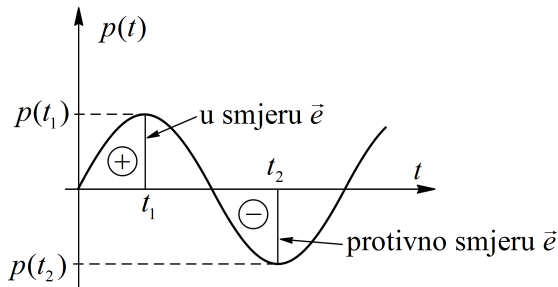
$$\vec{p}(t) \longrightarrow \underbrace{\vec{a}(t) \longrightarrow m\vec{a}(t)}_{\text{gibanje konstrukcije}} \quad \vec{p}(t) = \|\vec{p}(t)\| \vec{e}(t)$$



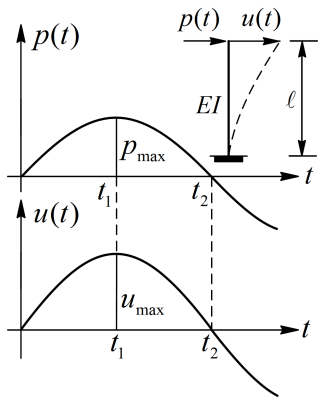
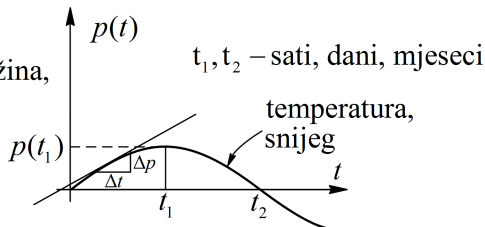
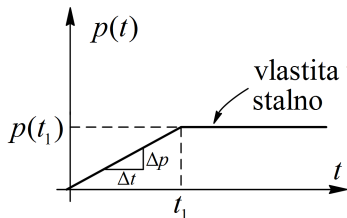
- | | |
|---------------------------------------|----------------------------|
| ① – hvatište |] određeno sa $\vec{e}(t)$ |
| ② – pravac djelovanja | |
| ③ – orijentacija pravca | |
| ④ – smjer $\vec{p}(t)$ | |
| ⑤ – iznos djelovanja $\ \vec{p}(t)\ $ | |

- dinamika konstrukcija: hvatište, pravac i orijentacija fiksni
- posljedica: jedinični vektor položaja $\vec{e}$ ($\|\vec{e}\| = 1$) ne ovisi o t

- smjer i iznos djelovanja: određeni skalarnom funkcijom $p(t)$
- prema tome: djelovanje možemo zapisati kao $\vec{p}(t) = p(t)\vec{e}$



- teorijski: sva su opterećenja promjenjiva
- vlastita težina, stalno, temperatura, snijeg, ...
- maksimalni iznos $p_{\text{maks}}(t)$ može biti prilično velik
- ali: spora promjena opterećenja — $\dot{p} = dp/dt$ malo
- $\vec{a}(t)$ i $m\vec{a}(t)$ malo: dovoljan statički pristup

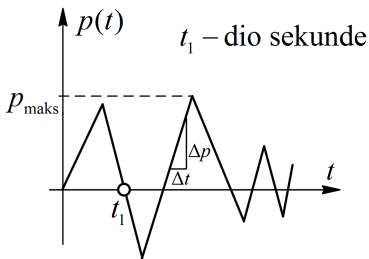


- pomak vrha: $u(t) = p(t)/k$, $k = 3EI/\ell^3$
- funkcije opterećenja i progiba oblikovno iste
- razlog: razlika do na konstantu $1/k$
- na mjestu $p_{\max}$ SIGURNO $u_{\max}$
- znači: dovoljno poznavati $p_{\max}$
- odmah odredimo $u_{\max} = p_{\max}/k$
- ovisnost o vremenu nije potrebna

- poopćenje prema metodi pomaka:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t) \rightarrow \mathbf{K}\mathbf{u}_{\text{maks}} = \mathbf{p}_{\text{maks}} \rightarrow \mathbf{u}_{\text{maks}} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}_{\text{maks}}$$

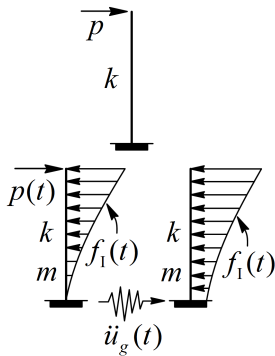
- u statici prešutno podrazumijevamo MAKS: $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}$
- pokretno, vjetar, potres, rad strojeva, udar, eksplozija, ...
- brzi prirast opterećenja ($\dot{p}$ veliko): ne nužno veliko $\vec{a}(t)$ i $m\vec{a}(t)$

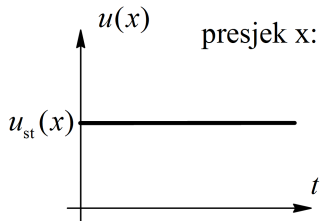
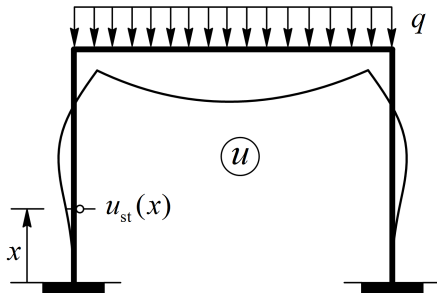


- primjer: udar puščanog zrna u zid konstrukcije (mali p_{maks})

- važno: opterećenje mora pobuditi građevinu na gibanje
- potrebna ▶ **jaka** pobuda: velike mase teško pokrenuti i ubrzati
- rezultanta dinamičkog opterećenja: više od 10% težine zgrade
- peterokatnica, $A = 620 \text{ m}^2$, vlastita težina i stalno: 42 000 kN
- znači: rezultanta iznosi priličnih 4 200 kN
- bolid formule 1: 0,7 t; Airbus: 60 t; Space Shuttle: 110 t
- uzlijetanje i povratak Space Shuttlea: 3 g
- naglo kočenje bolida formule 1: 5 g
- povratak Apolla 16: 7,2 g
- poniranje borbenog zrakoplova: 12 g
- sudari (teške ozljede ili smrt): 50 g
- jaki potresi: skromnih 0,4 g
- **VELIKA masa** $\times$ **MALO ubrzanje** = **ZNAČAJNA sila inercije**

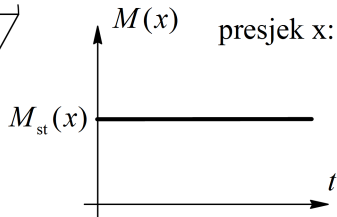
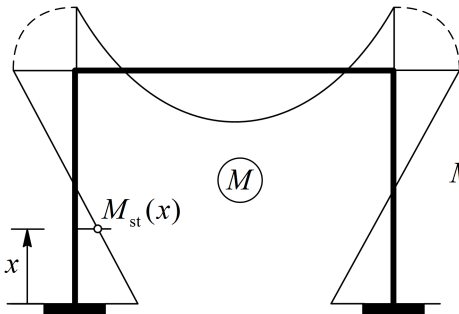
- Razlike prema statičkom proračunu:
- brzina i ubrzanje konstrukcije
- dodatne sile: inercije i prigušenja
- slabo poznata opterećenja (vjetar, potres, ...)
- nejasne pojave koje uzrokuju prigušenje
- potreban manji broj nepoznanica
- složeniji postupci proračuna
- za praktične potrebe: kvazistatički pristup
- procjena vršnih dinamičkih vrijednosti na temelju statičkih sila
- i do 15 puta veće vrijednosti od statičkih (najčešće do 3 puta)
- dinamika često nije intuitivna, interpretacija ponekad teška
- pomaci, unutarnje sile i naprezanja

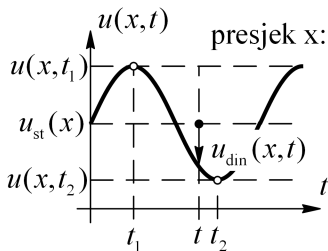
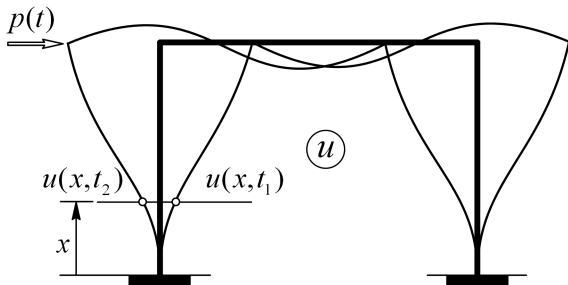




$$u(x) = u_{st}(x)$$

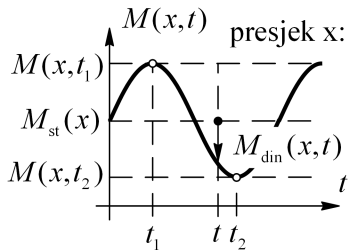
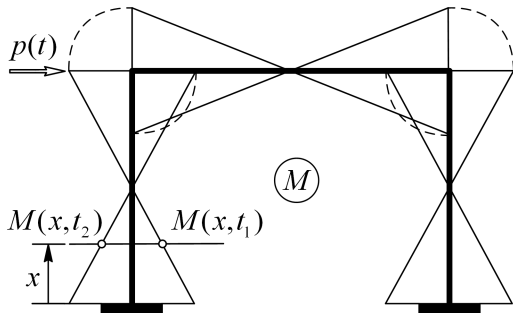
$$M(x) = M_{st}(x)$$



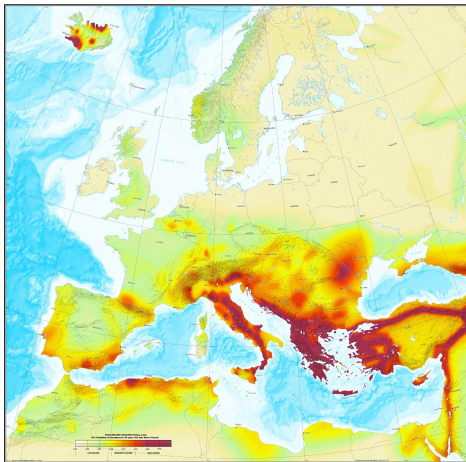


$$u(x,t) = u_{st}(x) + u_{din}(x,t)$$

$$M(x,t) = M_{st}(x) + M_{din}(x,t)$$



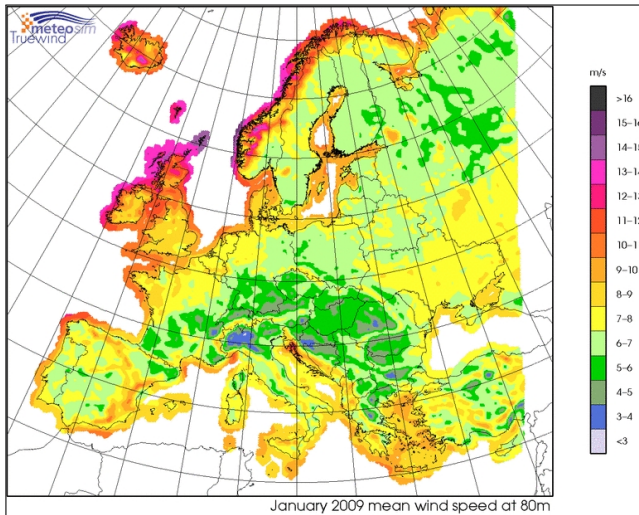
HR: mogući jaki potresi i vjetrovi (mjerodavno za dimenzioniranje!)



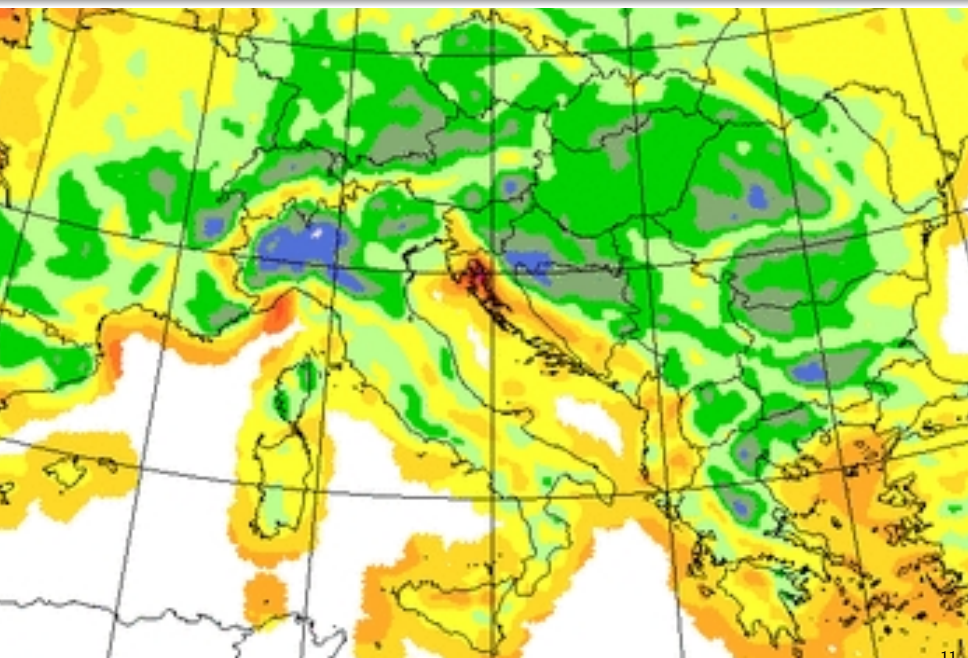
izvor: <http://wija.ija.csic.es/gt/earthquakes/>

Motivacija





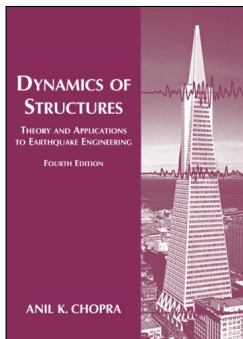
izvor: <http://windtrends.meteosimtruewind.com/>



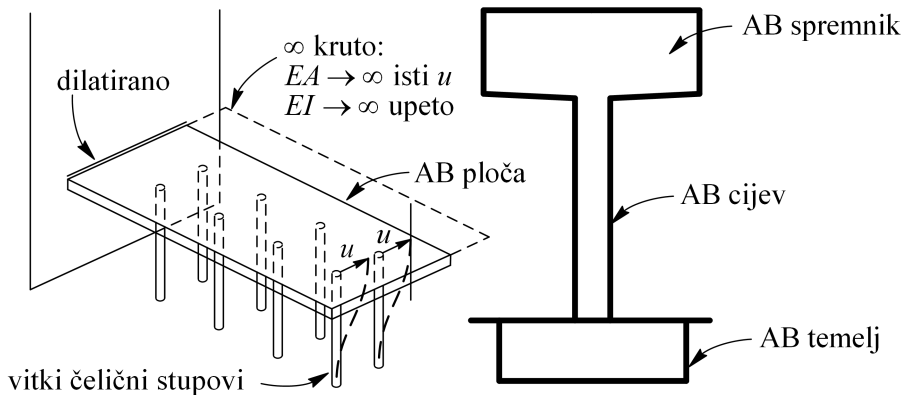
Anil K. Chopra
Dynamics of Structures

Theory and Applications to Earthquake Engineering
Fourth Edition

Prentice Hall, New Jersey, 2011.



Uvodni primjeri

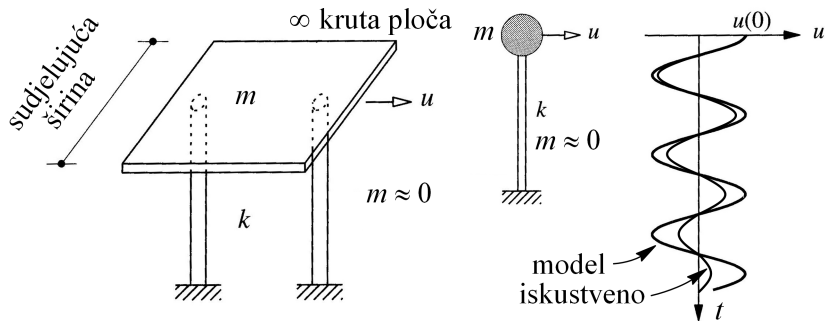


- intuitivno: zanimljiva je bočna pobuda i gibanje konstrukcije

Posljedice gibanja:

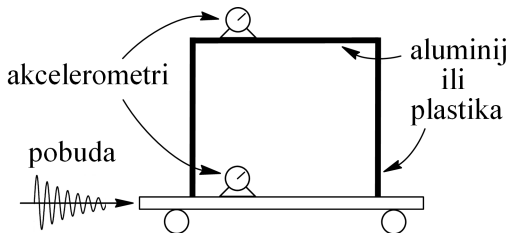
- ubrzanje $\ddot{u}$ $\rightarrow$ SILA inercije $\xrightarrow{m\ddot{u}}$ potreban položaj i iznos mase
- pomaci u $\rightarrow$ unutarnja SILA $\xrightarrow{ku}$ potrebna bočna krutost

Uvodni primjeri



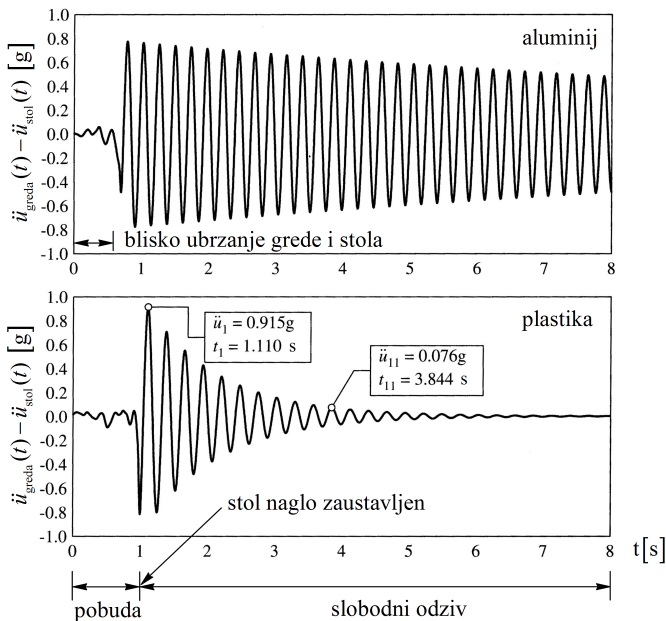
- masa m : sudjelujućeg dijela ploče ili masa spremnika
- bočna krutost k : krutost stupova prema savijanju
- pomak u i ubrzanje $\ddot{u}$: u bočnome smjeru
- pomak mase modela: DINAMIČKI STUPANJ SLOBODE
- primjeri s jednim (dinamičkim) stupnjem slobode
- zamislimo pobudu bočnim pomakom $u(0)$, bez opterećenja
- sve SILE u ravnoteži: $m\ddot{u} + ku = 0$, (m i k poznati)

- nepoznanice: u i $\ddot{u}$ (dovoljno odrediti u , derivacija $\rightarrow \ddot{u}$)
- logično rješenje: titranje¹ lijevo – desno oko uspravnog položaja
- vječno titranje (??) amplitudama jednakim početnom pomaku
- iskustvo: titranje se postupno smiruje i prestaje
- postoji PRIGUŠENJE: proces koji umiruje i zaustavlja titranje
- treba ga uključiti u matematički model



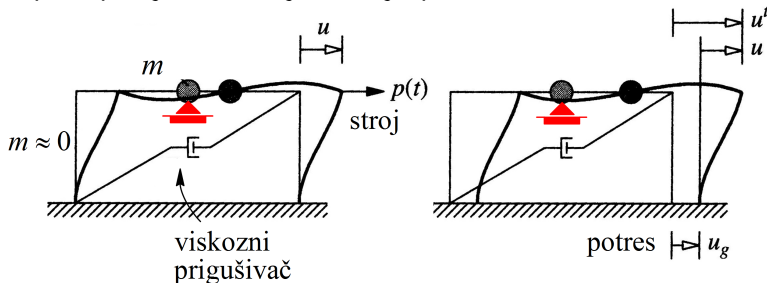
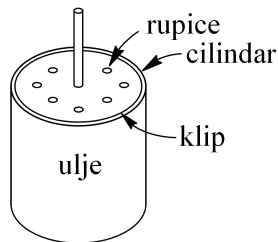
¹osciliranje, vibriranje, njihanje, periodično gibanje

Uvodni primjeri



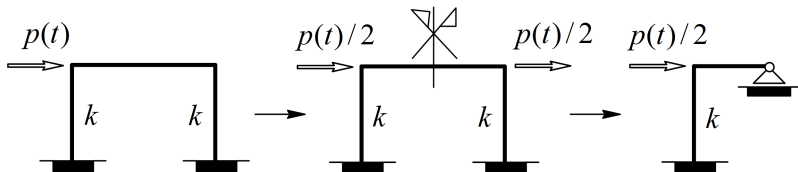
Sustav s jednim stupnjem slobode: formulacija problema

- promatramo okvir bez mase
- masa koncentrirana na sredini grede
- model prigušenja: viskozni prigušivač
- stupovi i greda nisu rastezljivi ($EA \rightarrow \infty$)
- nema vertikalne pobude
- dinamički stupanj slobode: bočni pomak u
- dvije pobude: vanjska sila i ▶ pomak tla
- tipični primjeri: vibrirajući stroj i potres

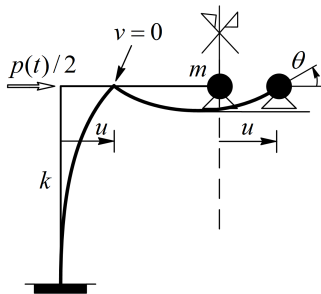


Sustav s jednim stupnjem slobode: formulacija problema

- Zašto postoji samo bočni pomak u ?
- ako $EA \rightarrow \infty$, u je u čvorovima jednak, a $v = 0$
- posljedica: svejedno, $p(t)$ u lijevom ili po $p(t)/2$ u oba čvora grede

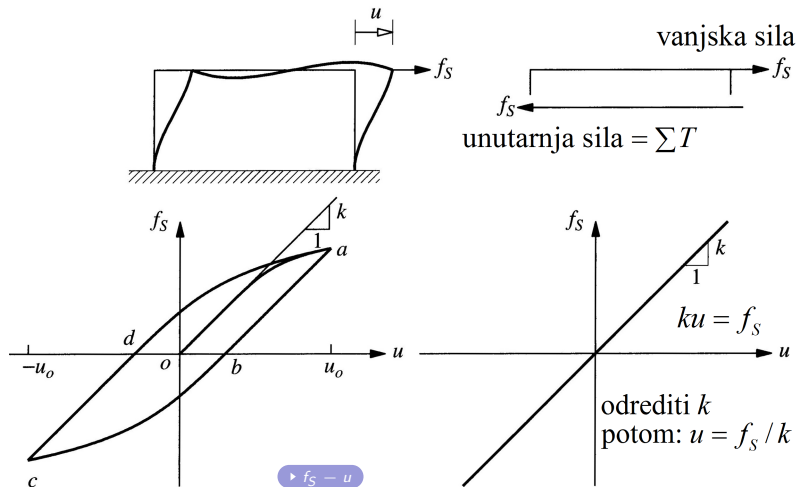


- znači: vrijedi uvjet antimetrije
- okvir istoznačan poluokviru (ostaju u i θ)
- pretpostavka: točkasta masa pa je $r = 0$
- rotacijska inercija mase: $I = mr^2/2 = 0$
- kut zaokreta θ nije dinamički stupanj slobode
- $EA \rightarrow \infty$: svuda $\varepsilon_{1,1} = 0$, $\sigma_{1,1} = 0$, $N = 0$
- ipak: iz uvjeta ravnoteže, samo u gredi $N = 0$



Sustav s jednim stupnjem slobode: odnos sile i pomaka

- vanjska sila: $f_S \rightarrow$ bočni pomak: $u \rightarrow$ unutarnja sila: ku
- STATIČKI uvjet ravnoteže vanjskih i unutarnjih sila: $ku = f_S$
- jednadžba linearna za male, nelinearna za velike pomake

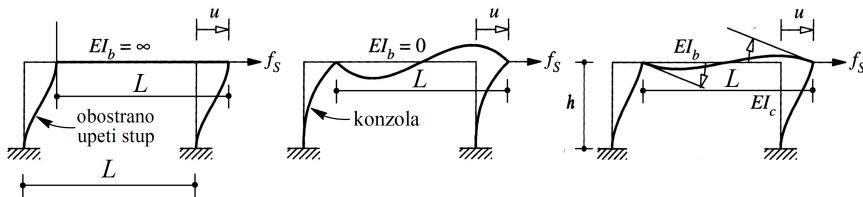


Linearna veza sile i pomaka

- krutost u bočnome smjeru: SILA za jedinični bočni pomak
- određivanje FLEKSIJSKE krutosti (EA uvijek ∞): ponavljanje²

neizmjenjano kruta greda:
$$k = \sum_{\text{stupovi}} \frac{12EI_c}{h^3} = \frac{24EI_c}{h^3}$$

neizmjenjano gipka greda:
$$k = \sum_{\text{stupovi}} \frac{3EI_c}{h^3} = \frac{6EI_c}{h^3}$$



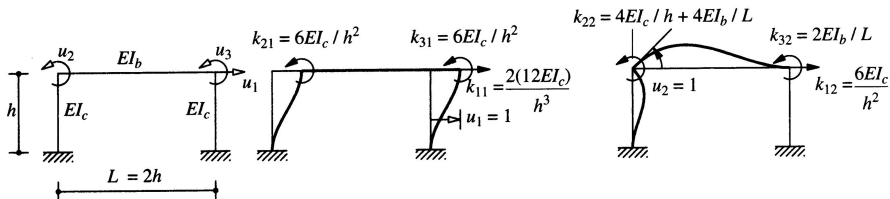
- ▶ granični slučajevi: krutosti ne ovise o rasponu grede (okvira) L

²GS 1, odjeljak 12.3.3.: <http://www.grad.hr/nastava/g1/g1/g1.pdf>

Sustav s jednim stupnjem slobode: odnos sile i pomaka

$$l_b \longrightarrow \infty \implies \frac{k|_{EI_b \rightarrow \infty}}{k|_{EI_b=0}} = 4, \quad \text{krutost raste najviše 4 puta}$$

- opći slučaj ($El_b > 0$): inženjerska metoda pomaka³



- za $k_{i,1}$, $i = 1, \dots, 3$: $u_1 = 1, u_2 = u_3 = 0$, slično za $k_{i,2}$ i $k_{i,3}$

za $l_b = l_c$, $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$ jest:

$$\frac{El_c}{h^3} \begin{bmatrix} 24 & 6h & 6h \\ 6h & 6h^2 & h^2 \\ 6h & h^2 & 6h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sustav s jednim stupnjem slobode: odnos sile i pomaka

- tri statička i jedan dinamički stupanj slobode (??)
- pomoć: statička kondenzacija⁴
- iskoristiti uvjet: nema opterećenja u smjeru u_2 i u_3

$$\begin{bmatrix} k_{1,1} & \mathbf{k}_{1,2} \\ \mathbf{k}_{2,1} & \mathbf{K}_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_S \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad k_{1,1} = 24El_c/h^3 \quad \mathbf{k}_{1,2} = El_c/h^3 \begin{bmatrix} 6h & 6h \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \end{bmatrix}^T \quad \mathbf{k}_{2,1} = El_c/h^3 \begin{bmatrix} 6h & 6h \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{K}_{2,2} = \frac{El_c}{h^3} \begin{bmatrix} 6h^2 & h^2 \\ h^2 & 6h^2 \end{bmatrix} \quad k_{1,1}u_1 + \mathbf{k}_{1,2}\mathbf{u}_2 = f_S \\ \mathbf{k}_{2,1}u_1 + \mathbf{K}_{2,2}\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \implies \mathbf{u}_2 = -\mathbf{K}_{2,2}^{-1}\mathbf{k}_{2,1}u_1$$

► kutovi zaokreta:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \left(-\frac{El_c}{h^3} \begin{bmatrix} 6h^2 & h^2 \\ h^2 & 6h^2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \frac{El_c}{h^3} \begin{bmatrix} 6h \\ 6h \end{bmatrix} u_1 = -\frac{6}{7h} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_1$$

$$f_S = k_{1,1}u_1 - \underbrace{\mathbf{k}_{1,2}\mathbf{K}_{2,2}^{-1}\mathbf{k}_{2,1}}_{\mathbf{u}_2} u_1 = \underbrace{(k_{1,1} - \mathbf{k}_{1,2}\mathbf{K}_{2,2}^{-1}\mathbf{k}_{2,1})}_{\text{bočna krutost } k} u_1$$

⁴GS 2, odjeljak 1.4.: <http://www.grad.hr/nastava/gS/gS2/gS2.pdf>

Sustav s jednim stupnjem slobode: odnos sile i pomaka

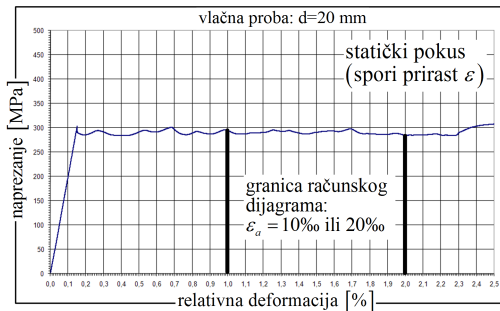
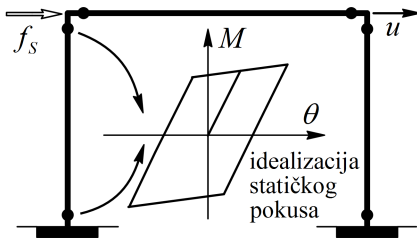
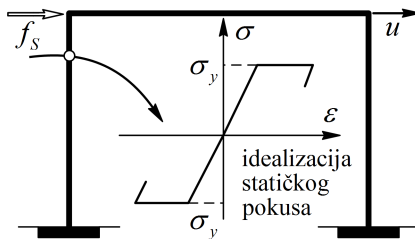
$$\mathbf{k}_{1,2} \mathbf{K}_{2,2}^{-1} \mathbf{k}_{2,1} = 1 \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{1,2} \end{bmatrix}}_2 \cdot 2 \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{2,2}^{-1} \end{bmatrix}}_2 \cdot 2 \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{2,1} \end{bmatrix}}_1 = 1 \underbrace{\quad}_1 \text{ skalar!}$$

$$f_S = \left(\frac{24El_c}{h^3} - \frac{El_c}{h^3} [6h \quad 6h] \frac{6}{7h} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) u_1 = \underbrace{\frac{96}{7} \frac{El_c}{h^3}}_k u_1 \Rightarrow u_1 = \frac{f_S}{k}$$

Nelinearna veza sile i pomaka

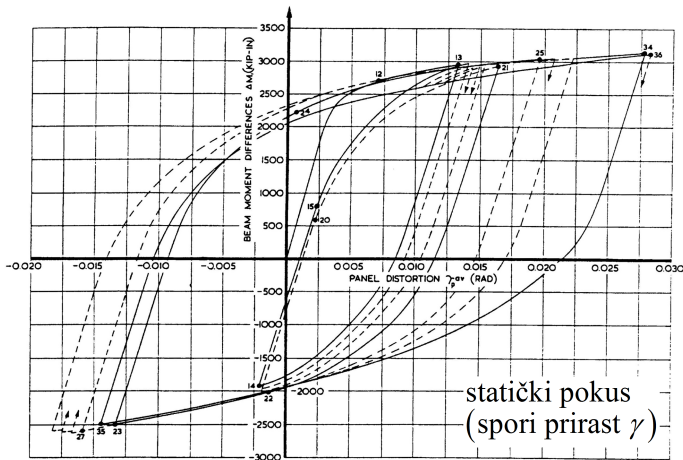
- veći pomaci: odnos sile i pomaka nije pravac 19 $\leftarrow f_S - u$
- funkcija nije jednoznačna: jedan u više f_S i obratno
- za proračun potrebna POVIJEST pomaka u , odnosno: $f_S = f_S[u(t)]$
- određivanje funkcije $f_S - u$ (u razini grede) za dinamički proračun:
 - 1 nelinearnom STATIČKOM analizom uz zadani zakon ponašanja $\sigma - \varepsilon$
 - 2 krivuljom PLANIRANOG spoja (npr. $M - \theta$) prema SPOROM cikličkom pokusu

Sustav s jednim stupnjem slobode: odnos sile i pomaka



izvor: prof. Toshihiro, Daido Institute, Nagoya →

Sustav s jednim stupnjem slobode: odnos sile i pomaka



Važnost ► nelinearnih modela:

- očekujemo raspucavanje i tečenje pri jakim potresima
- trošenje seizmičke energije pri plastičnim deformacijama
- posljedica: veća oštećenja, ali manje seizmičke sile na konstrukciju

Sustav s jednim stupnjem slobode: odnos sile i pomaka

- težak zahtjev: osigurati kontrolirana oštećenja bez ugrožavanja života

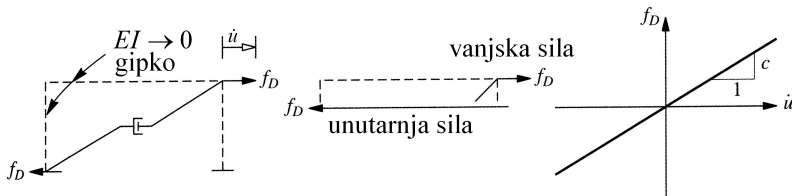


izvor: http://nees-anchor.ceas.uwm.edu/Wenchuan_earthquake/EERI_LFE_Wenchuan.html

Sustav s jednim stupnjem slobode: prigušenje

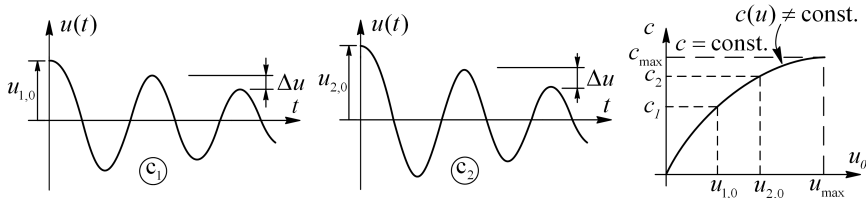
► Pojave koje uzrokuju prigušenje u elastičnom području:

- u uvjetima pokusa:
 - unutarnje trenje u materijalu
 - otpor zraka pri gibanju modela
 - radijacijsko prigušenje zbog širenja valova kroz tlo ...
- dodatno, na realnoj konstrukciji:
 - trenje u čeličnim spojevima
 - otvaranje i zatvaranje mikropukotina u betonu
 - trenje između konstruktivnih i nosivih elemenata ...
- teško definirati matematički model svake pojave
- grubi model svih pojava: linearni viskozni prigušivač (str. 17.)



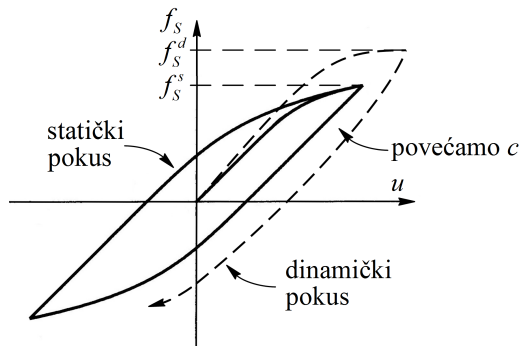
Model prigušenja u elastičnom području

- sila prigušenja: $f_D = c\dot{u}$, c [Ns/m] – koeficijent viskoznog prigušenja
- izbor c : trošenje energije prigušivačem i svim pojavama slično
- zato i naziv modela prigušenja: EKVIVALENTNO viskozno prigušenje
- ne može se odrediti iz dimenzija konstrukcije (kao krutost i masa)
- MORA se odrediti POKUSIMA iz slobodnog ili prisilnog titranja
- modelira se trošenje energije u elastičnom području
- općenito: $c \neq \text{const.}$ – ovisi o iznosu elastičnog pomaka
- smatramo: $c = \text{const.}$, uz iznos pri $u_{\max} = u_y$ (na granici tečenja)



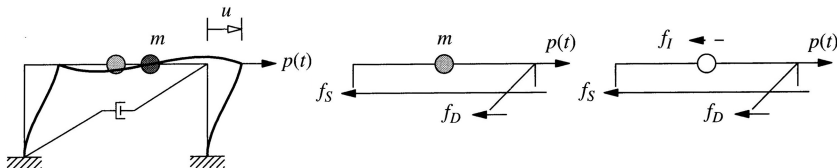
Model prigušenja u plastičnom području

- dodatni utrošak energije: jednak površini ispod krivulje $f_S - u$
- ne modelira se viskozним prigušenjem već izravno
- nelinearnim dinamičkim modelom sa $f_S - u$ krivuljom (str. 19.)
- oprez: funkcija $f_S - u$ određena na temelju ▶ statičkih pokusa (str. 23.)
- razlika u površini (prilagodba) dinamičkom pokusu: KOREKCIJOM c -a



Sustav s jednim stupnjem slobode: opterećenje (pobuda)

- vanjsko opterećenje: $p(t)$, promjenjivo i često slabo poznato!
- posljedica: sve veličine promjenjive u vremenu
- sile otpora: $f_S(t)$ i $f_D(t)$
- pomak $u(t)$, brzina $\dot{u}(t)$ i ubrzanje $\ddot{u}(t)$
- unutarnje sile: $M(t)$, $T(t)$, $N(t)$
- naprezanja: $\sigma(t)$, $\tau(t)$ i deformacije: $\varepsilon(t)$, $\gamma(t)$



Jednadžba gibanja: 2. Newtonov zakon

- sile otpora suprotne od pobude, u bilo kojem t vrijedi:
- rezultanta $f(t) = p(t) - f_S(t) - f_D(t)$ djeluje na masu m
- Newton: $f(t) = m\ddot{u}(t)$, $p(t) - f_S(t) - f_D(t) = m\ddot{u}(t)$

Sustav s jednim stupnjem slobode: jednačba gibanja

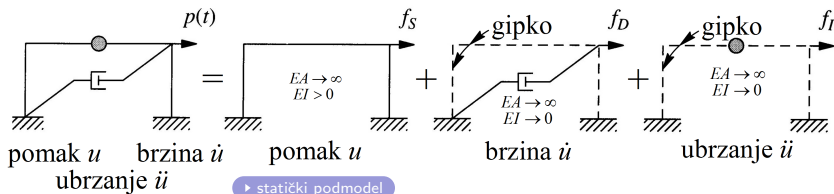
- odnosno: $m\ddot{u}(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t)$
- uz: $f_D = c\dot{u}(t)$ [str. 28.] i $f_S(t) = ku(t)$ [str. 19.] dobivamo:
$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + f_S[u(t)] = p(t)$$

D'Alembertov princip dinamičke ravnoteže

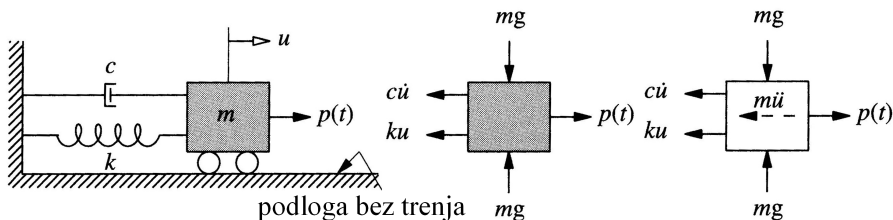
- VANJSKA fiktivna sila inercije $f_I(t) = m\ddot{u}(t)$: suprotna od $\ddot{u}(t)$
- uz $f_I(t)$, statička ravnoteža za svaki t : $f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t)$

Rastav na neovisne podmodele

- vanjsko opterećenje $p(t)$ uzrokuje $u(t)$, $\dot{u}(t)$ i $\ddot{u}(t)$
- $u(t)$ aktivira samo krutost k , $\dot{u}(t) \rightarrow c$, $\ddot{u}(t) \rightarrow m$

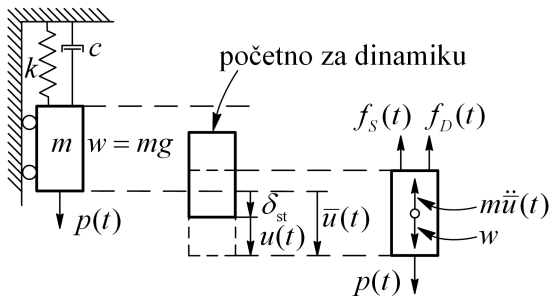


Sustav s jednim stupnjem slobode: ekvivalentni model



- model sastavljen od mase, opruge i prigušivača
- apsolutno kruta masa: jednaka masi na gredi okvira
- krutost opruge: jednaka bočnoj krutosti okvira k (str. 23)
- koeficijent prigušenja: jednak koeficijentu prigušenja okvira
- apsolutno kruta podloga bez trenja
- dinamički stupanj slobode: horizontalni pomak
- model istoznačan dinamičkom modelu okvira
- težina mase (okvira) nema utjecaja na dinamičku jednadžbu
- čak i ako djeluje u smjeru gibanja modela: sljedeći primjer

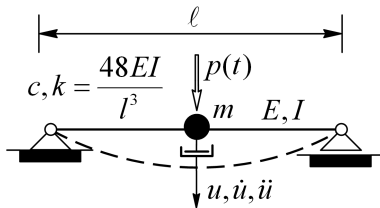
Sustav s jednim stupnjem slobode: statičko opterećenje



- uvjet ravnoteže: $m\ddot{\bar{u}}(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) + w$
- uz: $f_D(t) = c\dot{\bar{u}}(t)$ i $f_S(t) = k\bar{u}(t)$
- dobivamo: $m\ddot{\bar{u}}(t) + c\dot{\bar{u}}(t) + k\bar{u}(t) = p(t) + w$
- ukupni pomak: $\bar{u}(t) = \delta_{st} + u(t)$ i $\delta_{st} = \text{const.}$ (provjes od w)
- odnosno: $\dot{\bar{u}}(t) = \dot{u}(t)$, $\ddot{\bar{u}}(t) = \ddot{u}(t)$ jer δ_{st} ne ovisi o t
- uvjet ravnoteže postaje: $m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + k\bar{u}(t) = p(t) + w$

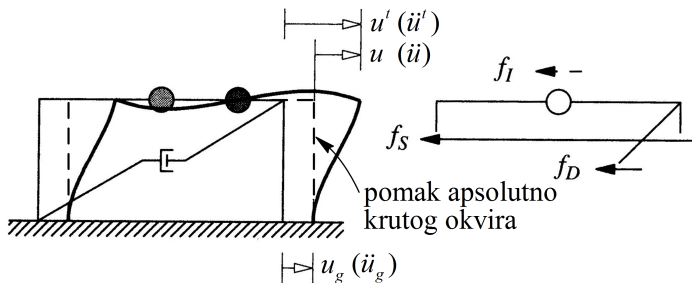
Sustav s jednim stupnjem slobode: poopćenje

- uvrstimo $\bar{u}(t)$: $m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + k[\delta_{\text{st}} + u(t)] = p(t) + w$
- uvjet statičke ravnoteže (ne ovisi o t): $k\delta_{\text{st}} = w$
- konačno: $m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$
- položaj STATIČKE ravnoteže: POČETNI za dinamički proračun
- pomak $u(t)$: udaljenost od položaja statičke ravnoteže
- za ukupni pomak ili silu u opruzi ipak trebamo zbroj
- mnoge modele možemo svesti na sustav mase, opruge i prigušivača
- Primjer: teški stroj na gredi,



- vrijedi ista dinamička jednačba: $m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$

Sustav s jednim stupnjem slobode: pobuda potresom



- djelovanje potresa uzrokuje 1 ▶ isti pomak ležaja $u_g(t)$
- pretpostavka: istodobni dolazak potresa na sve ležajeve
- razmak ležaja mali prema poluvalu širenja potresa 2 ▶ do 500 m
- pomak mase prema ležajevima: $u(t)$
- pomake mjerimo od početnog položaja okvira
- ukupni pomak: $u^t(t) = u_g(t) + u(t)$ [∞ kruti + deformabilni dio]
- D'Alembertov princip: $f_I^t(t) + f_D^t(t) + f_S^t(t) = 0$, ($p(t) = 0$)
- vrijedi (bez t): $f_D^t = f_D^g + f_D$, $f_S^t = f_S^g + f_S$

Sustav s jednim stupnjem slobode: pobuda potresom

- za $u_g(t)$ i $\dot{u}_g(t)$: $f_D^g = f_S^g = 0 \Rightarrow f_I^t(t) + f_D(t) + f_S(t) = 0$
- znači: $m\ddot{u}^t(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$, uz: $\ddot{u}^t(t) = \ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t)$
- vrijedi: $m[\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t)] + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$ 1 ▶ slično i kut zaokreta
- 2 ▶ konačno:

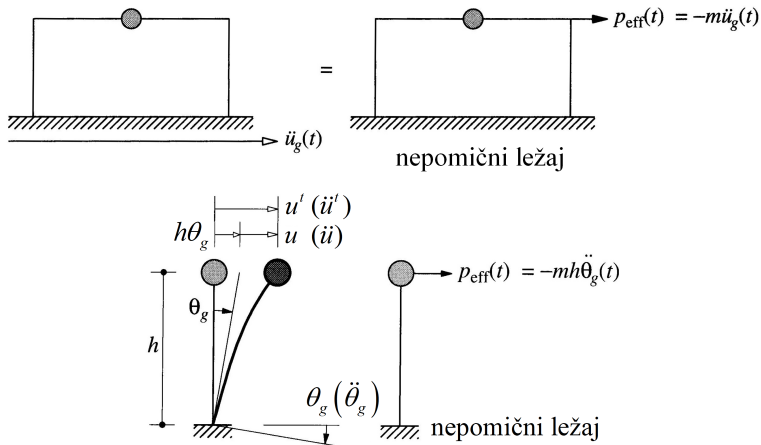
linearno: $m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{u}_g(t)$

nelinearno: $m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + f_s[u(t)] = -m\ddot{u}_g(t)$

- lijeve strane iste kao u slučaju opterećenja $p(t)$ [str. 31.]
- pa su i desne strane iste: $p(t) = p_{\text{eff}}(t) = -m\ddot{u}_g(t)$
- istoznačni model:
 - opterećen ubrzanjem tla $\ddot{u}_g(t)$ ili
 - efektivnom⁵ silom potresa $-m\ddot{u}_g(t)$ uz nepomične ležajeve
- važno: efektivna sila potresa proporcionalna masi građevine (ne tla!)
- pažnja kod projektiranja: veća masa građevine, veća sila potresa

⁵posljedičnom (jer je posljedica djelovanja potresa)

Sustav s jednim stupnjem slobode: pobuda potresom



- djelovanje potresa: kut zaokreta temelja θ_g
- malo zabilježenih podataka o rotacijskoj pobudi
- procjenjuje se iz translacijskih pobuda na poznatim dubinama
- pomak mase: $u^t(t) = h\theta_g(t) + u(t)$, (mali θ_g : $\tan \theta_g \approx \theta_g$)

Sustav s jednim stupnjem slobode: pobuda potresom

- uz: $\ddot{u}^t(t) = h\ddot{\theta}_g(t) + \ddot{u}(t)$, ($h = \text{const.}$)

- opet vrijedi:

$$m[h\ddot{\theta}_g(t) + \ddot{u}(t)] + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$$

361 ◀ poput pomaka

- konačno: $m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -mh\ddot{\theta}_g(t)$
- efektivna sila potresa: $p_{\text{eff}} = -mh\ddot{\theta}_g(t)$
- istoznačno: rotacijsko ubrzanje tla $\ddot{\theta}_g$ ili nepomični ležaj i p_{eff}
- pazite: rotacijska pobuda, ali translacijski pomak mase
- znači: translacijski i stupanj slobode i efektivna sila
- može biti značajno kod temeljenja visokih građevina
- primjer: visoka zgrada, vodotoranj ili silos na lošem tlu

Proračun pomaka, brzine i ubrzanja

- zadano: m , c , k ili $f_S[u(t)]$ i $p(t)$ ili $\ddot{u}_g(t)$
- odrediti ODZIV modela: ovisnost neke veličine u vremenu
- treba riješiti izvedene dinamičke jednadžbe: odrediti $u(t)$
- deriviramo $u(t)$: odredimo $\dot{u}(t)$ i $\ddot{u}(t)$
- za potresno opterećenje: eventualno $u(t)^t$, $\dot{u}^t(t)$ i $\ddot{u}^t(t)$
- primjerice: $u(t)^t$ potreban za iznos seizmičke dilatacije
- najvažniji podatak: dinamički pomak $u(t)$
- razlog: unutarnje sile izravno ovise o relativnom pomaku!

Proračun unutarnjih sila

- pretpostavka: napravljen dinamički proračun – poznajemo $u(t)$
- određivanje unutarnjih sila i naprezanja: statičkom analizom
- zamislimo niz statičkih proračuna u svakom trenutku t

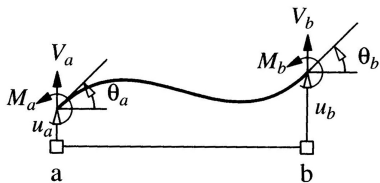
Sustav s jednim stupnjem slobode: nužnost dilatiranja



Sustav s jednim stupnjem slobode: slijed proračuna

Postoje 1 ▶ dva pristupa:

1 bočni pomak → 22 ◀ kutovi zaokreta → 2 ▶ unutarnje sile⁶ → naprezanja



$$M_a = \frac{4EI}{\ell} \theta_a + \frac{2EI}{\ell} \theta_b + \frac{6EI}{\ell^2} u_a - \frac{6EI}{\ell^2} u_b$$

$$M_b = \frac{2EI}{\ell} \theta_a + \frac{4EI}{\ell} \theta_b + \frac{6EI}{\ell^2} u_a - \frac{6EI}{\ell^2} u_b$$

$$V_a = \frac{12EI}{\ell^3} u_a - \frac{12EI}{\ell^3} u_b + \frac{6EI}{\ell^2} \theta_a + \frac{6EI}{\ell^2} \theta_b$$

$$V_b = -\frac{12EI}{\ell^3} u_a + \frac{12EI}{\ell^3} u_b - \frac{6EI}{\ell^2} \theta_a - \frac{6EI}{\ell^2} \theta_b$$

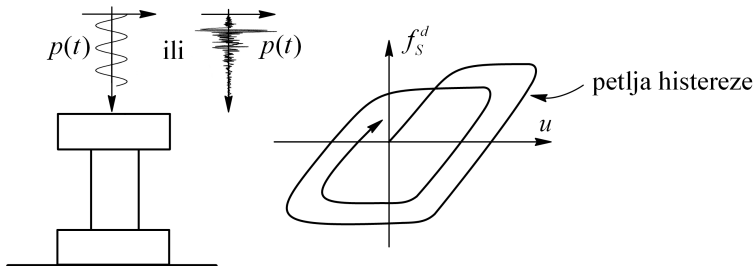
2 statičko opterećenje $f_S(t) = ku(t) \rightarrow$ unutarnje sile $\rightarrow$ naprezanja

- sporo djelovanje vanjske bočne sile: uzrokuje pomak okvira $u(t)$ ili
- djelovanje vanjske bočne sile: uzrokuje pomak 31 ◀ statičkog podmodela $u(t)$
- primijetimo: dinamički su učinci sadržani u rješenju $u(t)$

⁶GS 1, odjeljak 12.3.3.: <http://www.grad.hr/nastava/g1/g1/g1.pdf>

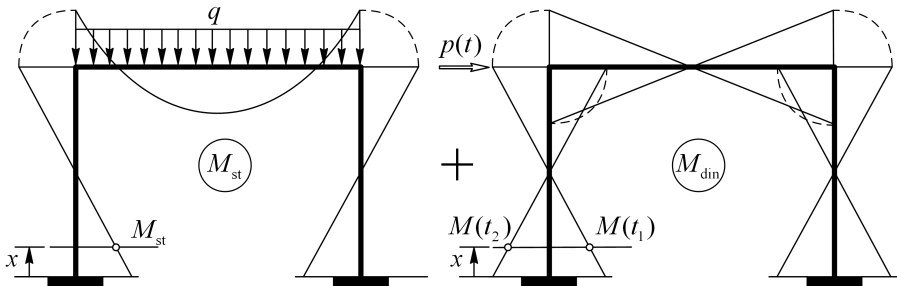
Sustav s jednim stupnjem slobode: slijed proračuna

- poznato $u(t)$: više ne treba dinamički (samo statički) račun
- vanjska bočna sila nije $f_l^t = -[f_S(t) + f_D(t)]$ (str. 36.); samo $f_S(t)$
- OTPORNOST PRESJEKA temeljena na 29 ◀ statičkim pokusima ($\dot{u} = 0$, $f_D = 0$)
- samo tada vrijedi usporedba akcije [od $f_S(t)$] i otpornosti (pokus)
- dinamički pokusi čak i pri pravilnoj sinusnoj pobudi NISU PROPISANI
- nejasno rasipanje petlji histereze (primjerice za AB, žiđe, kamen)
- potres (nepoznat, nepravilan, slučajan): puno složeniji od sinusa
- petlja histereze (pa i ekstremi) još manje jasna i pouzdana



Sustav s jednim stupnjem slobode: kombinacije djelovanja

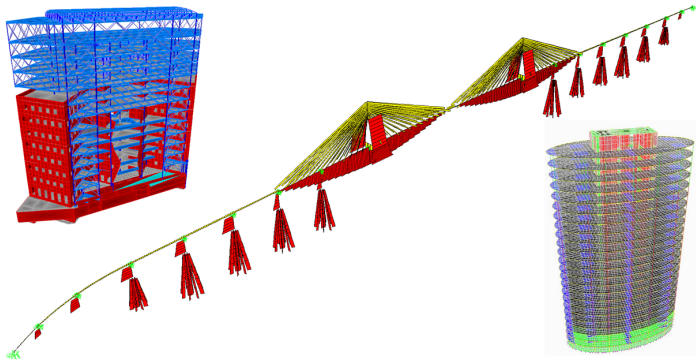
- dimenzioniranje: kombinacija statičkih i dinamičkih djelovanja
- linearni model: vrijedi princip superpozicije
- primjerice:⁷ $M_{\text{tot}}(t) = M_{\text{st}} + M_{\text{din}}(t)$, M_{tot} 7 ◀ funkcija vremena
- u praksi rabimo dinamički ekstrem: $M_{\text{tot}} = M_{\text{st}} + \max_t |M_{\text{din}}(t)|$
- ekstremna dinamička vrijednost koja povećava statički iznos
- prema slici: $M_{\text{tot}} = M_{\text{st}} + M(t_1)$ (djeluju na istu stranu)



⁷izostavimo ovisnost o položaju presjeka x : pišemo (t) , a ne (x, t)

Sustav s jednim stupnjem slobode: kombinacije djelovanja

- nelinearni model: ne vrijedi princip superpozicije
- treba NASLIJEDITI sile i pomake iz statičke kombinacije
- razlog: proračun NOVIH KRUTOSTI za početak dinamičkog proračuna
- primjer: uzdužne sile ► utječu na bočnu krutost konstrukcije
- tlačna sila smanjuje, a vlačna povećava krutost prema savijanju
- praktični slučajevi: visoka zgrada ili zavješeni most



Sustav s jednim stupnjem slobode: postupci proračuna

- glavni zadatak: odrediti $u(t)$ (potom unutarnje sile i naprezanja)
- rješenje obične linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$

- obična: sadrži obične, ne parcijalne derivacije
- linearna: nema potencija većih od jedan
- drugog reda: postoji najviše druga derivacija
- s konstantnim koeficijentima: m , c i k konstante
- jedinstveno rješenje određeno početnim uvjetima (za $t = 0$)
- jednadžba drugog reda: dva početna uvjeta – $u(0)$ i $\dot{u}(0)$
- česti slučaj: konstrukcija miruje prije dinamičke pobude,

$$u(0) = 0 \qquad \dot{u}(0) = 0$$

- poznato kao homogeni početni uvjeti

Klasično rješenje

- analitičko rješenje⁸ diferencijalne jednadžbe gibanja
- zbroj homogenog (komplementarnog) i partikularnog rješenja:

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t)$$

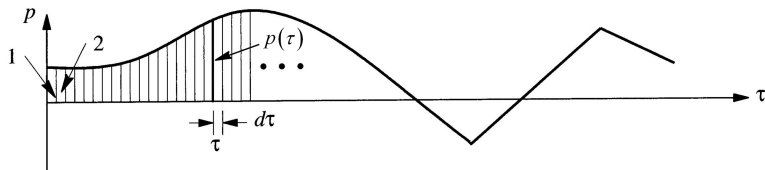
- zbroj vrijedi: linearna jednadžba – princip superpozicije
- $u_c(t)$: za $p(t) = 0$, zadovoljava početne uvjete
- $u_p(t)$: za $p(t)$, ne mora zadovoljiti početne uvjete
- postupak pogodan za:
 - proračun slobodnog titranja (za $p(t) = 0$) i
 - analitički definirane funkcije pobude $p(t)$

Duhamelov integral

- funkcija opterećenja prikazana nizom kratkih impulsa

⁸Mat. 2: <http://www.grad.hr/nastava/matematika/mat2/node29.html>

Sustav s jednim stupnjem slobode: postupci proračuna



- odziv modela jednak SUMI odziva za svaki impuls $p(\tau)$:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) \sin [\omega_n(t - \tau)] d\tau$$

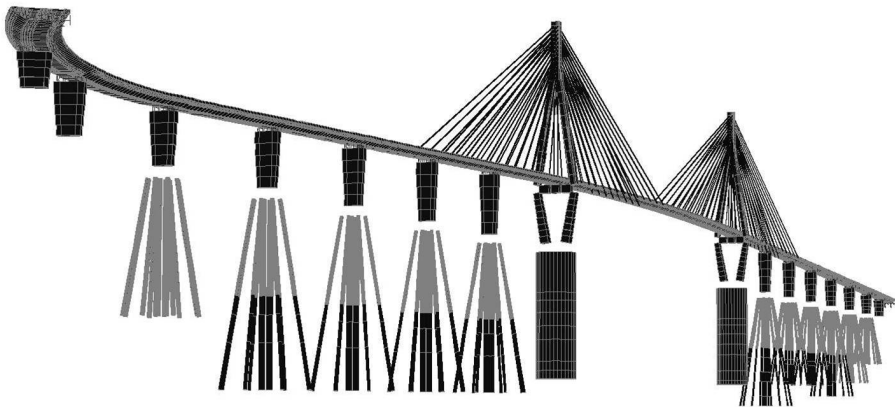
- vrijedi uz homogene početne uvjete i $\omega_n = \sqrt{k/m}$
- definicija funkcije pobude:
 - analitička: moguće analitičko rješenje integrala
 - numerička: numerička integracija (trapezna, Simpson, Gauß)
- Duhamelov integral: proračun u vremenskom području
- postoje učinkovitije numeričke metode

Rješenje u frekvencijskom području

- transformacijske metode: Laplaceova i Fourierova transformacija
- motivacija: učinkovitije rješavanje Duhamelovog integrala
- Fourierova transformacija: $p(t) \rightarrow P(\omega) \rightarrow U(\omega) \rightarrow u(t)$
- funkcija pobude prikazana nizom harmonijskih funkcija
- odziv modela jednak sumi odziva za svaku funkciju niza
- definicija funkcije pobude:
 - analitička: analitičko rješenje integrala
 - numerička: diskretna Fourierova transformacija (DFT)
 - algoritam: brza Fourierova transformacija (FFT) – vrlo učinkovita
- primjena: međudjelovanje konstrukcije i neomeđenog medija
- primjeri:
 - međudjelovanje mosta, pilota i tla (neomeđeno)
 - međudjelovanje brane i vode u velikoj akumulaciji (neomeđeno)

Sustav s jednim stupnjem slobode: postupci proračuna

35₂ ◀ most kopno – Pelješac



Sustav s jednim stupnjem slobode: postupci proračuna



izvor: <http://www.epoch-suite.com/casestudies.html>

Numeričko rješenje

- spomenute metode temeljene na principu superpozicije
- ograničenje: vrijede samo za linearne modele
- važnost nelinearnih modela: analize pri utjecaju jakih potresa
- numeričke metode: temeljene na zamisli vremenske diskretizacije
- funkcija pobude: analitički ili numerički definirana
- vrijede za linearne i nelinearne modele

Vršne vrijednosti

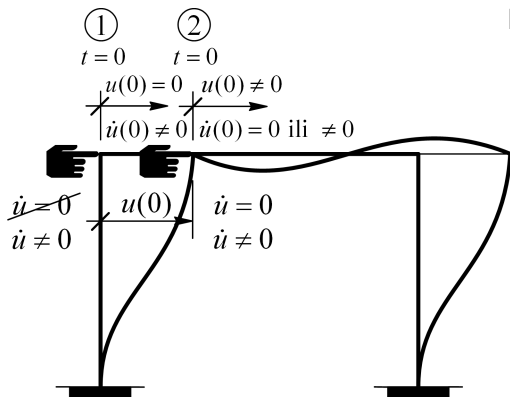
- odziv modela prema bilo kojoj metodi: u funkciji vremena
- poseban interes: vršna vrijednost odziva – AMPLITUDA
- definicija: MAKSIMUM APSOLUTNE VRIJEDNOSTI funkcije odziva,

$$r_0 = \max_t |r(t)|, \quad r(t) = u(t), \dots, M(t), \dots, \sigma(t), \dots$$

- prema definiciji uvijek ▶ pozitivna

Sustav s jednim stupnjem slobode: slobodno titranje

- slobodno titranje ($p = 0$)⁹, bez prigušenja ($c = 0$): $m\ddot{u} + ku = 0$
- jedine pobude: početni uvjeti, $u(0)$ i/ili $\dot{u}(0)$
- početak mjerenja vremena ($t = 0$): uspravni ili otklonjeni okvir



Mogući početni uvjeti:

- uspravni okvir, ①:
 - $u(0) = \dot{u}(0) = 0$:
nema gibanja ($p = 0$),
rješenje: $u = 0$
 - $u(0) = 0$ i $\dot{u}(0) \neq 0$
- otklonjeni okvir, ②:
 - $u(0) \neq 0$ i $\dot{u}(0) = 0$
 - $u(0) \neq 0$ i $\dot{u}(0) \neq 0$

⁹više nećemo dosljedno pisati funkcijsku ovisnost o t

Sustav s jednim stupnjem slobode: slobodno titranje

- možemo pisati: $m\ddot{u} = -ku$, $\ddot{u} = -(k/m)u$
- općenito: $\ddot{u} = au$, $a = -k/m$ – konstanta
- funkcija i druga derivacija iste do na konstantu
- idealan izbor: $u = e^{st}$, $\ddot{u} = s^2 e^{st}$, ($a = s^2$)
- uvrstimo u $m\ddot{u} + ku = 0$: $(ms^2 + k)e^{st} = 0$, ($e^{st} > 0$)
- izraz jednak nuli ako je: $ms^2 + k = 0$, (karakteristična jednadžba)
- rješenje: $s^2 = -k/m$, $s_{1,2} = \pm\sqrt{-k/m} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{k/m} = \pm i\omega_n$
- $s_{1,2} = \pm i\omega_n$ (karakteristični korijeni), pomaci: $e^{s_1 t}$ i $e^{s_2 t}$
- linearna jednadžba: vrijedi princip superpozicije
- znači: linearna kombinacija $e^{s_1 t}$ i $e^{s_2 t}$ također rješenje
- dakle: $u(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$ (uvrstite u $m\ddot{u} + ku = 0$)¹⁰
- ▶ konačno: $u(t) = A_1 e^{i\omega_n t} + A_2 e^{-i\omega_n t}$

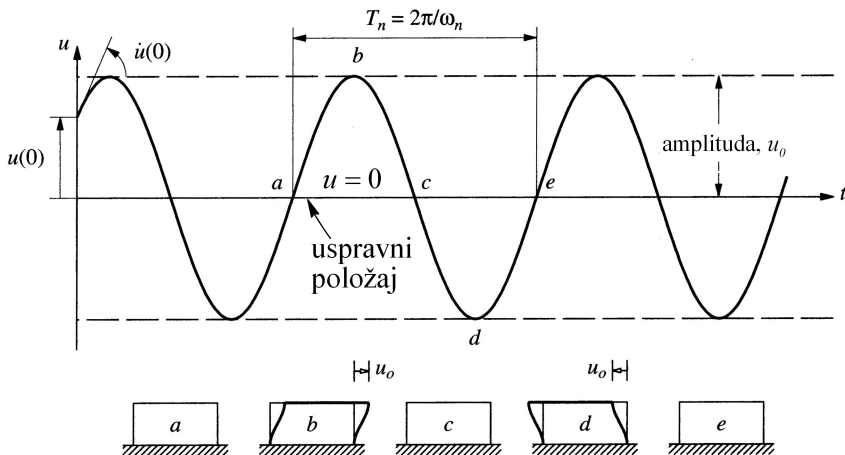
¹⁰Mat. 2: <http://www.grad.hr/nastava/matematika/mat2/node29.html>

Sustav s jednim stupnjem slobode: slobodno titranje

- rješenje u imaginarnom području: sadrži imaginarnu jedinicu
- titranje okvira: realan problem s realnim rješenjem – pomak $u(t)$
- logičan korak: prelazak u realno područje
- rabimo Eulerov obrazac: $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$
- jednostavan dokaz obrasca: Wikipedia¹¹
- uz $x = \omega_n t$: $e^{\pm i\omega_n t} = \cos \omega_n t \pm i \sin \omega_n t$ uvrstimo u $u(t)$
- fizikalni problem: konstante A_1 i A_2 konjugirano kompleksni brojevi
- $A_{1,2} = a \pm bi \Rightarrow A_1 + A_2 = 2a = A, (A_1 - A_2)i = 2bi \cdot i = -2b = B$
- rješenje u realnom području: $u(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t$
- brzina: $\dot{u}(t) = -\omega_n A \sin \omega_n t + \omega_n B \cos \omega_n t$
- iznos konstanta A i B : iz početnih uvjeta: $u(0) = A$ i $\dot{u}(0) = \omega_n B$
- ▶ konačno:
$$u(t) = u(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t$$
- funkcija gibanja: titranje oko ravnotežnog položaja $u = 0$

¹¹http://en.wikipedia.org/wiki/Euler's_formula#Using_calculus

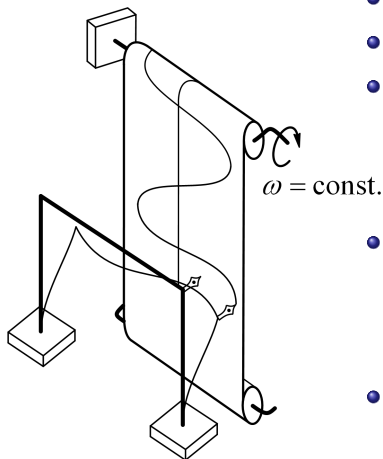
Sustav s jednim stupnjem slobode: slobodno titranje



- BILO KOJI POLOŽAJ se ponavlja svakih $2\pi/\omega_n$ sekundi (primjer: a i e)
- svakih $2\pi/\omega_n$ sekundi identičan pomak i brzina (nagib tangente)
- dio krivulje a – e: opisuje jedan slobodni titraj okvira

Sustav s jednim stupnjem slobode: slobodno titranje

- JEDNOSTAVNO HARMONIJSKO GIBANJE: opisano harmonijskom funkcijom
- prirodna kružna frekvencija titraja: konstanta $\omega_n = \sqrt{k/m}$ [rad/s]
- indeks n : od engl. NATURAL



- kružna frekvencija, translacijsko gibanje?
- analogija kružnog i harmonijskog gibanja
- prirodni period titraja (titrajno vrijeme):

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \text{ [s]} \quad \text{trajanje titraja u [s]}$$

- prirodna (ciklička) frekvencija titraja:

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} \text{ [Hz]} \quad \text{broj titraja u [s]}$$

- fizikalno pojašnjenje: trag pera na papiru koji vrtimo frekvencijom $\omega_n = \text{const.}$

Sustav s jednim stupnjem slobode: slobodno titranje

- riječ PRIRODNA: ističe slobodno titranje, bez prisile
- svojstva titranja ω_n , T_n i f_n ovise SAMO O MASI I KRUTOSTI
- ne ovise o početnim uvjetima $u(0)$ i $\dot{u}(0)$!
- dva okvira jednake m : veća k , veća f_n (manji T_n)
- dva okvira jednake k : veća m , manja f_n (veći T_n)
- pomak od težine u promatranom smjeru (str. 34.): $\delta_{\text{st}} = mg/k$
- uz $k = mg/\delta_{\text{st}}$ odredimo kružnu frekvenciju, period i frekvenciju:

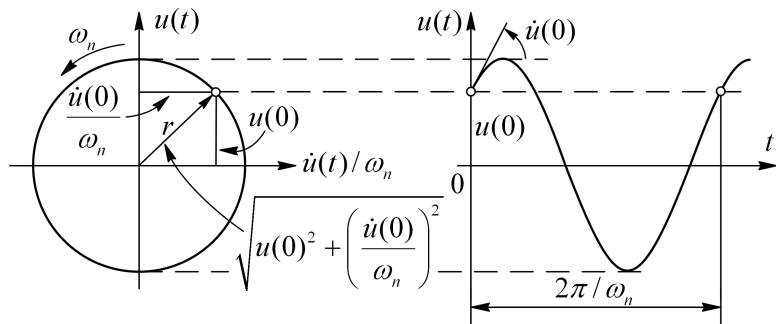
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{st}}}}, \quad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{\text{st}}}{g}}, \quad f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{st}}}}$$

- uobičajeni periodi u zgradarstvu: od 0,1 do 2,0 sekunde
- sustav titra između dvije amplitude: $\pm u_0$
- pojašnjenje amplitude: skicirajmo međuovisnost brzine i pomaka
- deriviramo 54 ◀ pomak: $\dot{u}(t) = -\omega_n u(0) \sin \omega_n t + \dot{u}(0) \cos \omega_n t / : \omega_n$

Sustav s jednim stupnjem slobode: slobodno titranje

- kvadriramo $u(t)$ i $\dot{u}(t)/\omega_n$ i zbrojimo
- grupiramo po $[u(0)]^2$ i $[\dot{u}(0)/\omega_n]^2$, uz $\sin^2 \omega_n t + \cos^2 \omega_n t = 1$
- dobivamo jednadžbu kružnice u sustavu $(\dot{u}(t)/\omega_n, u(t))$:

$$\underbrace{\left(\frac{\dot{u}(t)}{\omega_n}\right)^2}_{x^2} + \underbrace{u(t)^2}_{y^2} = \underbrace{u(0)^2 + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\right)^2}_{r^2}$$



Sustav s jednim stupnjem slobode: slobodno titranje

- prema slici: polumjer r jednak amplitudi titraja,

$$u_0 = \sqrt{u(0)^2 + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\right)^2}$$

- amplituda ovisi o početnim uvjetima (i frekvenciji – k i m)
- 20 ◀ granični slučajevi: omjer frekvencija najviše dva,

$$\omega_n|_{El_b \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{24El_c}{mh^3}}, \quad \omega_n|_{El_b=0} = \sqrt{\frac{6El_c}{mh^3}}$$

- neizmjereno kruta greda, zglobovi ležajevi: $\omega_n = \sqrt{\frac{6El_c}{mh^3}}$
- dva puta manja frekvencija od upetog okvira s istom gredom
- znači: osim o svojstvima štapova, ω_n ovisi i o rubnim uvjetima

Sustav s jednim stupnjem slobode: prigušeno titranje

- slobodno titranje ($p = 0$) s prigušenjem: $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$
- DEFINIRAMO dva važna koeficijenta: c_{kr} i ζ ,

$$c_{kr} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km} = \frac{2k}{\omega_n}, \quad \zeta = \frac{c}{c_{kr}} = \frac{c}{2m\omega_n}$$

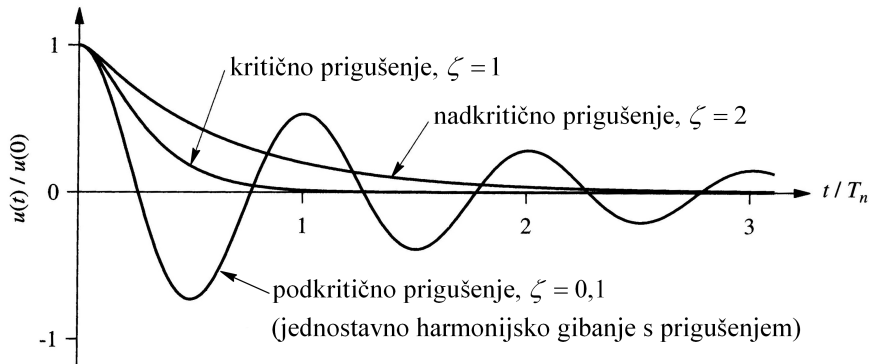
- c – mjera utrošene energije za jednog titraja
- važno: samo slobodnog ili prisilnog harmonijskog titraja
- c_{kr} – kritični koeficijent prigušenja: nema titranja
- ζ – koeficijent RELATIVNOG prigušenja: DIO kritične vrijednosti
- osim o c ovisi i o svojstvima modela: masi i krutosti
- podijelimo izvornu jednadžbu s m i uz $\omega_n = \sqrt{k/m}$ 1 ► slijedi:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

- zapis primjenom ζ i ω_n (T_n) jer ih često rabimo u praksi¹²

¹² c_{kr} i ζ definirani su tako da diskriminanta karakteristične jednadžbe novog zapisa 2 ► iščezne za $\zeta = 1$ ($c = c_{kr}$). Radi se o posebnom obliku odziva – bez titranja. Zapis (kanonski) je jednostavniji; sadrži samo dvije konstante.

Vrste prigušenog gibanja



Razlikujemo tri slučaja:

- $\zeta = 1$, ($c = c_{kr}$): vraćanje u položaj ravnoteže bez titranja
- $\zeta > 1$, ($c > c_{kr}$): isto, ali sporije (manjim prirastima)
- $\zeta < 1$, ($c < c_{kr}$): titranje sve manjim amplitudama
- c_{kr} : najmanji iznos viskoznog prigušenja koji sprječava titranje

Sustav s jednim stupnjem slobode: prigušeno titranje

- razdvaja gibanje bez i s titranjem
- $c < c_{kr}$: slabo (podkritično) prigušenje – naše područje ($\zeta < 0,1$)
- $c = c_{kr}$: granično (kritično) prigušenje
- $c > c_{kr}$: jako (nadkritično) prigušenje
- primjer: kočni mehanizam za zatvaranje vrata
- kada pustimo vrata nema titranja
- čak i amortizeri automobila imaju $\zeta < 0,5$

Slabo prigušeni sustav

- prema slici: sustav opet titra lijevo – desno, slično rješenju za $\zeta = 0$
- pretpostavimo isto rješenje: $u(t) = e^{st}$
- uvrstimo u 60₁ ◀ jednačbu: $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)e^{st} = 0, (e^{st} > 0)$
- karakteristična jednačba: $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$
- 60₂ ◀ karakteristični korijeni: $s_{1,2} = \omega_n(-\zeta \pm i\sqrt{1 - \zeta^2}), 1 - \zeta^2 > 0$
- princip superpozicije: kombinacija $e^{s_1 t}$ i $e^{s_2 t}$ također rješenje

Sustav s jednim stupnjem slobode: prigušeno titranje

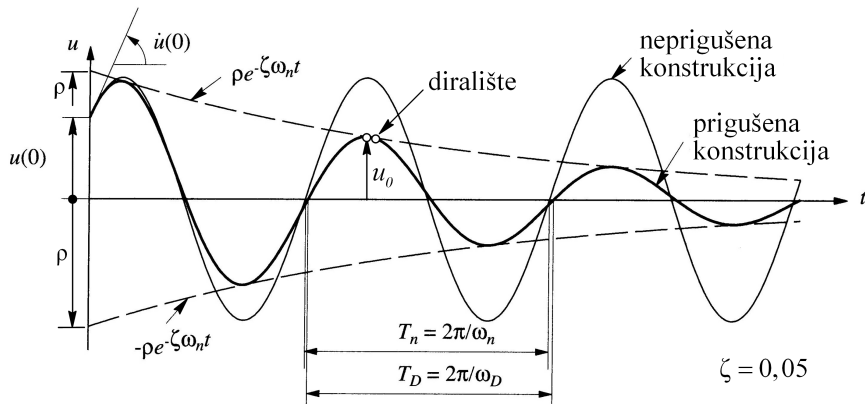
- opet vrijedi: $u(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$
- uvrstimo s_1 i s_2 : $u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} (A_1 e^{i \omega_D t} + A_2 e^{-i \omega_D t})$
- izraz u zagradi sličan rješenju 53 ◀ bez prigušenja
- samo umjesto ω_n : $\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ – frekvencija prigušenog titraja
- u zagradu uvrstimo Eulerov obrazac: $e^{\pm i \omega_D t} = \cos \omega_D t \pm i \sin \omega_D t$
- pa zagrada postaje: $A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t$
- ► ukupno: $u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t)$
- konstante A i B odredimo iz početnih uvjeta $u(0)$ i $\dot{u}(0)$:

$$A = u(0) \quad B = \frac{\dot{u}(0) + \zeta \omega_n u(0)}{\omega_D}$$

- konačno:

$$u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left[u(0) \cos \omega_D t + \frac{\dot{u}(0) + \zeta \omega_n u(0)}{\omega_D} \sin \omega_D t \right]$$

Sustav s jednim stupnjem slobode: prigušeno titranje



- za $\zeta = 0$, rješenje jednako gibanju bez prigušenja (provjerite)
- na slici isti početni uvjeti za oba modela
- iz rješenja i slike: prirodna frekvencija prigušenog titraja jest ω_D
- prirodni period prigušenog titraja: $T_D = 2\pi/\omega_D$

Sustav s jednim stupnjem slobode: prigušeno titranje

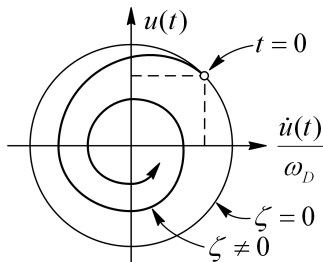
- veza T_D i T_n :

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{T_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

- amplituda opada eksponencijalno, ovojnica: $\pm \rho e^{-\zeta \omega_n t}$
- ρ iznos najveće amplitude (za $t = 0$):¹³
- dirališta ovojnice malo udesno od u_0
- utjecaj ζ : $\omega_D < \omega_n$, ($T_D > T_n$)
- za $\zeta < 0,20$: $\omega_D \approx \omega_n$, ($T_D \approx T_n$)

$$\frac{\omega_D}{\omega_n} = \sqrt{1 - \zeta^2} / 2$$

$$(\omega_D / \omega_n)^2 + \zeta^2 = 1, \text{ kružnica}$$

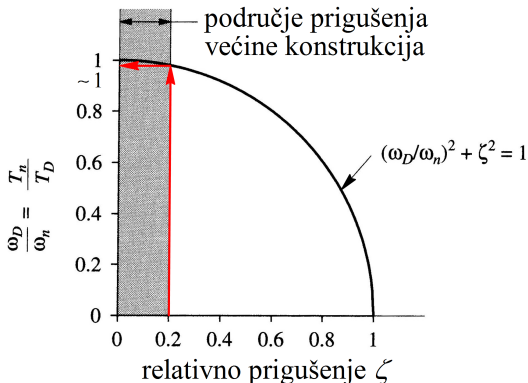


¹³bez izvoda:

$$\rho = \pm \sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0) + \zeta \omega_n u(0)}{\omega_D} \right]^2}$$

Sustav s jednim stupnjem slobode: prigušeno titranje

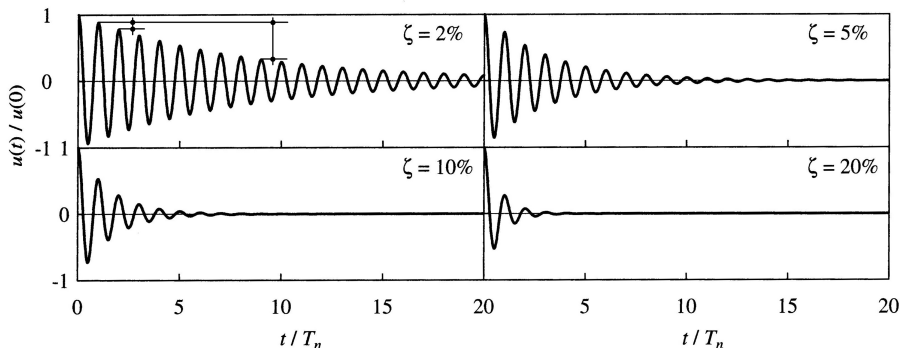
- 1. kvadrant: ω_n , ω_D i ζ pozitivni



- za mala prigušenja:
 $\omega_D \approx \omega_n$ i $T_D \approx T_n$
- za AB, $\zeta = 0,05$:
$$\omega_D = \sqrt{1 - 0,05^2} \omega_n$$
$$= 0,9987 \omega_n$$
- ako je $\zeta = 1$:
 $\omega_D = 0$, $T_D \rightarrow \infty$,
nema titranja
- ako je $\zeta = 0$:
 $\omega_D = \omega_n$, $T_n = T_D$,
slobodno titranje

Sustav s jednim stupnjem slobode: prigušeno titranje

- ▶ važan učinak: veće prigušenje, brže smirivanje titranja
- pobuda svih primjera: početni pomak $u(0)$, $[\dot{u}(0) = 0]$
- s porastom prigušenja: manji broj titraja i kraće trajanje titranja



Zakon opadanja vršnih vrijednosti

- analiziramo ▶ omjer $u(t)/u(t + T_D)$; pomaka udaljenih za T_D
- u omjer 63 ◀ uvrstimo rješenje $u(t)$:

$$\frac{u(t)}{u(t + T_D)} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t} [/]}{e^{-\zeta\omega_n t} e^{-\zeta\omega_n T_D} [/]} = e^{\zeta\omega_n T_D} = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = \text{const.}$$

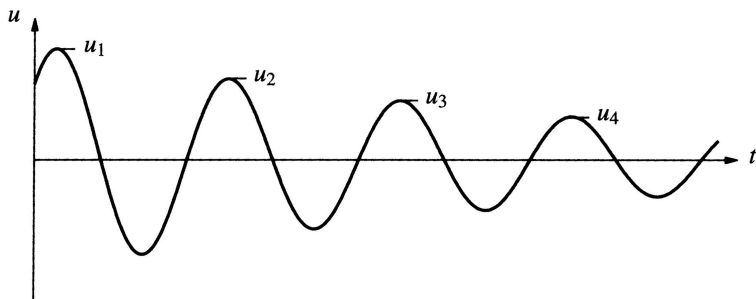
- kraćenje uglatih zagrada označeno s $[/]$ jer je,

$$\cos\omega_D(t + T_D) = \cos\omega_D\left(t + \frac{2\pi}{\omega_D}\right) = \cos(\omega_D t + 2\pi) = \cos\omega_D t$$

- na isti način: $\sin\omega_D(t + T_D) = \sin\omega_D t$
- i za uzastopne vršne vrijednosti (udaljene za T_D) također vrijedi:

$$\frac{u_i}{u_{i+1}} = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} / \ln$$

Sustav s jednim stupnjem slobode: prigušeno titranje



- prirodni logaritam omjera u_i/u_{i+1} : logaritamski dekrement ¹⁴

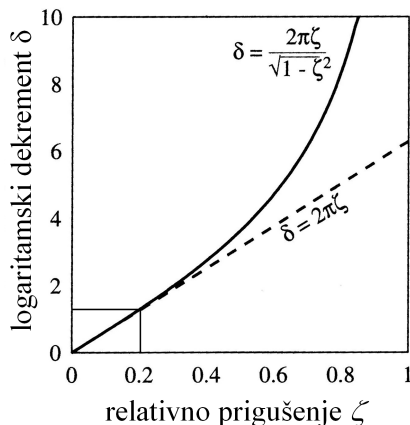
$$\delta = \ln \frac{u_i}{u_{i+1}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad (\text{odnosno: } \frac{u_i}{u_{i+1}} = e^\delta)$$

- slabo prigušenje (str. 66.): $\sqrt{1-\zeta^2} \approx 1$, pa približno vrijedi,

$$\delta \approx 2\pi\zeta$$

¹⁴logaritamsko opadanje

Sustav s jednim stupnjem slobode: prigušeno titranje



- dobro podudaranje za $\zeta < 0.2$: područje većine konstrukcija
- slabo prigušenje: mala razlika 67 uzastopnih vršnih vrijednosti
- problem mjerenja bliskih vrijednosti

Sustav s jednim stupnjem slobode: prigušeno titranje

- uspostaviti omjer udaljenih amplituda, nakon j titraja:

$$\frac{u_1}{u_{j+1}} = \frac{u_1}{u_2} \frac{u_2}{u_3} \frac{u_3}{u_4} \dots \frac{u_j}{u_{j+1}} = \underbrace{e^\delta e^\delta e^\delta \dots e^\delta}_{j \text{ puta (str. 69.)}} = e^{j\delta} / \ln$$

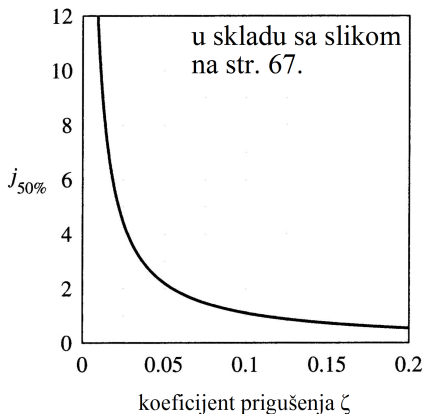
- ▶ prema tome:

$$\ln \frac{u_1}{u_{j+1}} = \ln e^{j\delta} = j\delta, \quad \delta = \frac{1}{j} \ln \frac{u_1}{u_{j+1}} \approx 2\pi\zeta$$

- primjer: broj titraja potreban za smanjenje amplitude na pola,

$$j \approx \frac{1}{2\pi\zeta} \ln \frac{u_1}{u_{j+1}} = \frac{1}{2\pi\zeta} \ln 2 \approx \frac{0,11}{\zeta}$$

Sustav s jednim stupnjem slobode: prigušeno titranje



Određivanje prigušenja i perioda pokusom

- prigušenje ζ nije moguće odrediti analitički
- mora se odrediti pokusom: titranjem građevina
- jedan način: slobodno titranje

Sustav s jednim stupnjem slobode: prigušeno titranje

- potegnemo konstrukciju užetom i naglo otpustimo
- realizacija slobodnog titranja uz $u(0)$ i $\dot{u}(0) = 0$
- za slabo prigušene sustave ▶ vrijedi:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi j} \ln \frac{u_i}{u_{i+j}} = \frac{1}{2\pi j} \ln \frac{\ddot{u}_i}{\ddot{u}_{i+j}}$$

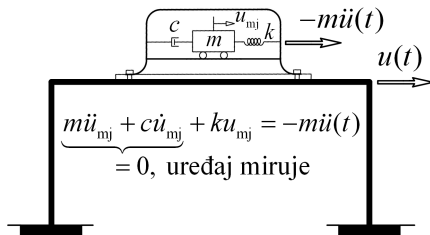
- prvi izraz: iz 71 ◀ logaritamskog dekrementa za $i = 1$
- drugi izraz: deriviranjem 68 ◀ omjera $u(t)/u(t + T_D)$

$$\frac{\ddot{u}(t)}{\ddot{u}(t + T_D)} = \frac{(-\zeta\omega_n)^2 e^{-\zeta\omega_n t} [/]}{(-\zeta\omega_n)^2 e^{-\zeta\omega_n t} e^{-\zeta\omega_n T_D} [/]} = e^{\zeta\omega_n T_D} = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

- opet imamo poništenje zagrada [/]
- druga derivacija: trigonometrijske se funkcije ne mijenjaju
- motivacija: lakše je mjeriti ubrzanje nego pomak konstrukcije
- moramo mjeriti pomake i preko 1 m (± 50 cm): nezgrapno
- ne smije nastati dodatni pomak zbog ubrzanja uređaja

Sustav s jednim stupnjem slobode: prigušeno titranje

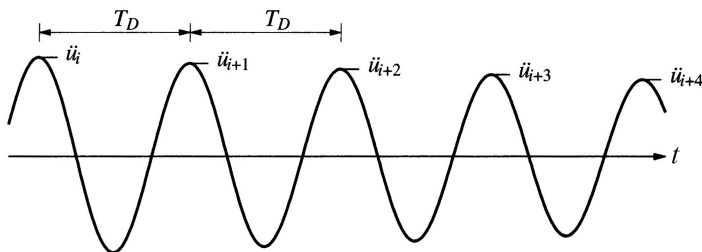
- mora reagirati statički na dinamičku pobudu: titranje građevine
- ostvarujemo velikom masom i malom krutosti uređaja: nezgrapno
- $T_D^{\text{uređaja}} \gg T_D^{\text{zgrade}}$: uređaj stoji, zgrada titra



- pobuda $u(t)$, opterećenje uređaja: $p_{\text{eff}} = -m\ddot{u}(t)$, (greda = tlo)
- ostaje samo: $ku_{mj} = -m\ddot{u} \Rightarrow u_{mj} = -(m/k)\ddot{u} = -(1/\omega_n^2)\ddot{u}$
- titranje građevine: $u = u_0 \sin \omega_D t \Rightarrow \ddot{u} = -u_0 \omega_D^2 \sin \omega_D t$
- $u_{mj} = (1/\omega_n^2)u_0 \omega_D^2 \sin \omega_D t \approx u_0 \sin \omega_D t$, ($\omega_n \approx \omega_D$)
- prema tome: $u_{mj} \approx u$, mjerimo pomak građevine

Sustav s jednim stupnjem slobode: prigušeno titranje

- određivanje T_D : MJERENJEM vremena potrebnog za titraj
- usporedba sa iznosom iz proračuna: $T_D \approx T_n = 2\pi\sqrt{m/k}$
- dokaz valjanosti usvojenog modela, računske mase i krutosti



- mjerenje ubrzanja jednostavnije
- radi pojašnjenja treba riješiti dinamičku jednadžbu za $p(t) \neq 0$
- do sada smo analizirali samo slobodno titranje ($p(t) = 0$)

Energija slobodnog titranja

- pobudimo model početnim uvjetima: $u(0)$ i $\dot{u}(0)$
- unosimo (potencijalnu i kinetičku) energiju:

$$E_I = \frac{1}{2}k[u(0)]^2 + \frac{1}{2}m[\dot{u}(0)]^2$$

- deformacija okvira (opruge): potencijalna energija $E_S(t)$
- brzina mase: kinetička energija $E_K(t)$
- nema prigušenja: ukupna je energija samo iz dva dijela,

$$E_S(t) + E_K(t) = \frac{1}{2}k[u(t)]^2 + \frac{1}{2}m[\dot{u}(t)]^2$$

- uvrstimo u i $\dot{u}$ slobodnog titranja bez prigušenja (str. 54., 57.):

$$E_S(t) = \frac{1}{2}k \left[u(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \right]^2$$

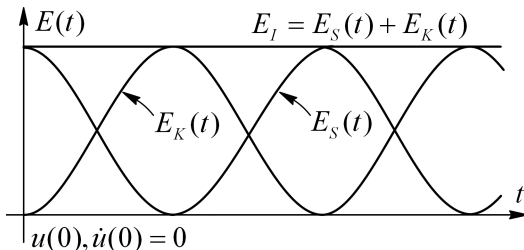
$$E_K(t) = \frac{1}{2}m\omega_n^2 \left[-u(0) \sin \omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \cos \omega_n t \right]^2$$

Energija slobodnog titranja

- vrijedi zakon očuvanja energije
- raspišemo i zbrojimo $E_S(t)$ i $E_K(t)$
- uvrstimo $\omega_n^2 = k/m$ i grupiramo po $[u(0)]^2$ i $[\dot{u}(0)/\omega_n]^2$
- upotrijebimo identitet: $\sin^2 \omega_n t + \cos^2 \omega_n t = 1$
- ostaje:

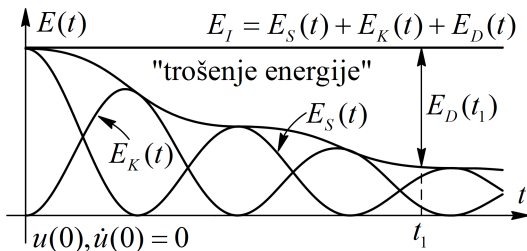
$$E_S(t) + E_K(t) = \frac{1}{2}k[u(0)]^2 + \frac{1}{2}m[\dot{u}(0)]^2 = E_I$$

- ukupna energija 1 ▶ ne ovisi o vremenu
- jednaka je početno uloženoj 2 ▶ energiji



Energija slobodnog titranja

- uz prigušenje: E_S i E_K sadrže u (str. 63.) i $\dot{u}$ za $\zeta > 0$
- pojavljuje se i energija prigušenja $E_D(t)$ (rad f_D na u)
- vrijedi: $E_I = E_S + E_K + E_D$ i $(E_S + E_K) \rightarrow 0$, $E_D \rightarrow E_I$

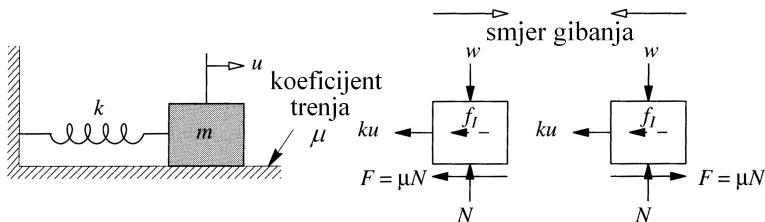


- utrošak energije (ordinata) E_D iznosi ($c = \text{const.}$, str. 28.):

$$E_D(t_1) = \int f_D du = \int_0^{t_1} (c\dot{u})\dot{u}dt = c \int_0^{t_1} \dot{u}^2 dt$$

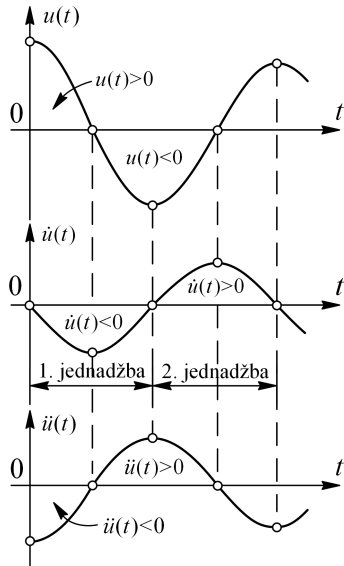
Slobodno titranje uz Coulombovo trenje

- primjena: model konstrukcije s tarnim prigušivačima
- Coulombovo trenje: trenje suhih površina, sila trenja $F = \mu N$



- μ – koeficijent trenja, N – sila okomita na tarne plohe
- F suprotna od smjera gibanja (smjera brzine, ne pomaka!)
- elastična i inercijska sila uvijek u istome smjeru
- razlozi:
 - pomak i ubrzanje suprotnog predznaka
 - sila inercije suprotna ubrzanju: u smjeru pomaka – elastične sile

Slobodno titranje uz Coulombovo trenje



- gibanje s desna na lijevo:

$$m\ddot{u} + ku - F = 0, \quad m\ddot{u} + ku = F$$

$$u(t) = A_1 \cos \omega_n t + B_1 \sin \omega_n t + u_F$$

$$u_F = F/k, \text{ (part. rješenje: uvrstite)}$$

- gibanje s lijeva na desno:

$$m\ddot{u} + ku = -F$$

$$u(t) = A_2 \cos \omega_n t + B_2 \sin \omega_n t - u_F$$

- svaka jednađžba vrijedi za pola titraja
- početak s desna, početni uvjeti:
 $u(0)$ na desno i $\dot{u}(0) = 0$
- iz prve jednađžbe: $A_1 = u(0) - u_F$
i derivacije: $B_1 = 0$

Slobodno titranje uz Coulombovo trenje

- iz mirovanja ($\dot{u} = 0$) krećemo u desno: druga jednadžba
- početni uvjeti: $u(T_n/2) = -u(0) + 2u_F$ i $\dot{u}(T_n/2) = 0$
- dobivamo: $A_2 = u(0) - 3u_F$ i $B_2 = 0$ [iz $\dot{u}(t)$]
- konačno:

$$u(t) = [u(0) - 3u_F] \cos \omega_n t - u_F \quad \pi/\omega_n \leq t \leq 2\pi/\omega_n$$

- amplituda iznosi $u(0) - 3u_F$, a pomak funkcije $-u_F$
- jednadžba vrijedi do $\dot{u} = 0$, za $2\pi/\omega_n = T_n$ (prethodna slika)
- tada je pomak: $u(T_n) = u(0) - 4u_F$
- razlika amplituda: $u_1 - u_2 = 4u_F$, (općenito, $u_i - u_{i+1} = 4u_F$)
- iz mirovanja krećemo opet u lijevo: prva jednadžba
- početni uvjeti: $u(T_n) = u(0) - 4u_F$ i $\dot{u}(T_n) = 0$
- odredimo A_1 i B_1 , pa dobivamo:

$$u(t) = [u(0) - 5u_F] \cos \omega_n t + u_F \quad 2\pi/\omega_n \leq t \leq 3\pi/\omega_n$$

- amplituda iznosi $u(0) - 5u_F$, a pomak funkcije u_F

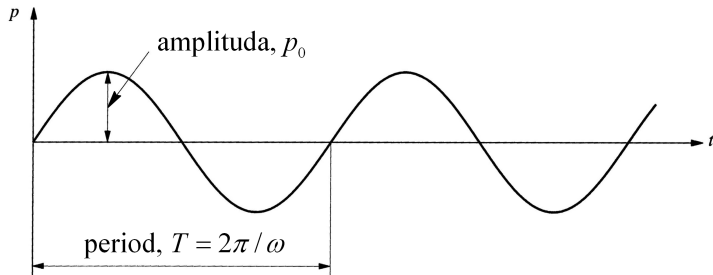
Slobodno titranje uz Coulombovo trenje

- primijetimo: pola titraja za π/ω_n , a titraj za $T_n = 2\pi/\omega_n$
- trenje NE UTJEČE na period slobodnog neprigušenog titraja
- linearni (ne eksponencijalni) zakon opadanja amplituda
- zaustavljanje gibanja: amplituda u_0 manja od granične u_F
- ravnoteža elastične sile i sile trenja: $ku_0 = F = \mu N$ ($u_0 \leq u_F$)
- laganom trešnjom vraćamo sustav u početni položaj $u = 0$
- primijetimo: viskozno prigušenje ne zaustavlja gibanje
- amplitude su sve manje ali nikada jednake nuli
- konstrukcije se ipak zaustavljaju: trenje sigurno postoji
- najčešće se ne modelira izravno
- koristi se zamjenjujuće viskozno prigušenje
- iznimka: modeliranje tarnih prigušivača

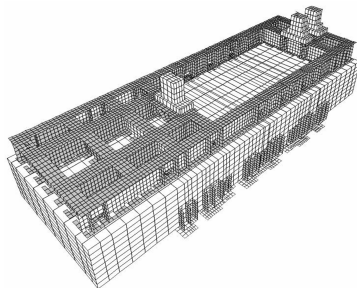
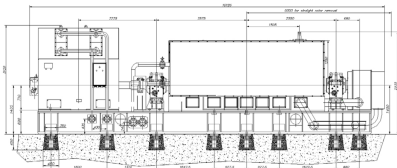
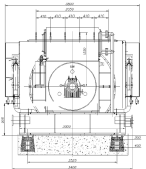
Sustav s jednim stupnjem slobode: harmonijska pobuda

Motivacija:

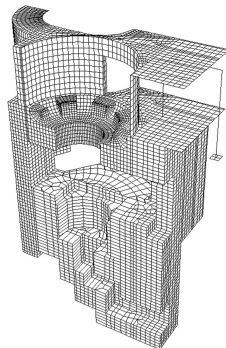
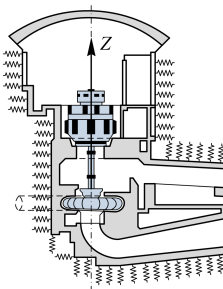
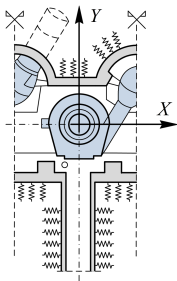
- odziv na pobudu ekscentričnom rotirajućom masom
- uvid u ponašanje prema drugim tipovima pobude
- rezultati primjenjivi i na pobudu potresom
- harmonijska pobuda: $p(t) = p_0 \sin \omega t$ ili $p(t) = p_0 \cos \omega t$
- p_0 , ω i T – amplituda, frekvencija i period pobude (prisile)



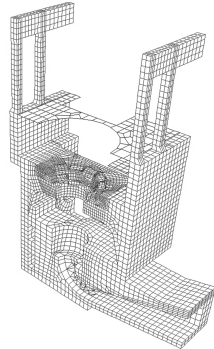
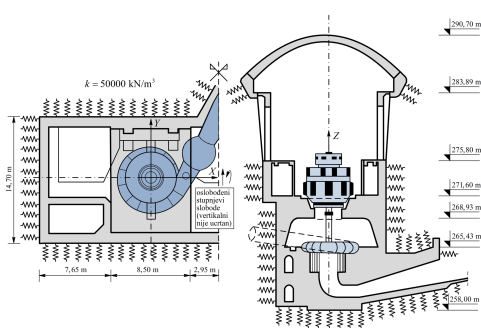
Primjer harmonijske pobude: turbogenerator Končar



Primjer harmonijske pobude: generator i turbina HE Zakučac



Primjer harmonijske pobude: generator i turbina HE Rama



Sustav s jednim stupnjem slobode: harmonijska pobuda

- za sustav bez prigušenja i pobudu u obliku funkcije sinus:

$$m\ddot{u} + ku = p_0 \sin \omega t$$

- početni uvjeti (za $t = 0$, početak opterećenja): $u(0)$ i $\dot{u}(0)$
- linearna jednačba: vrijedi princip superpozicije
- ukupno rješenje: $u(t) = u_c(t) + u_p(t)$
- homogeno rješenje (za $p = 0$, str. 54.): $u_c(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t$
- izbor partikularnog rješenja (za $p \neq 0$):
 - isti oblik funkcije pobude i odziva, ili
 - zbroj funkcije i druge derivacije jednak funkciji sinus
- pretpostavimo: $u_p(t) = C \sin \omega t$, odnosno $\ddot{u}_p(t) = -C\omega^2 \sin \omega t$
- uvrstimo u jednačbu: $C(k - m\omega^2) = p_0$ i $C = p_0/(k - m\omega^2)$
- uz $m = k/\omega_n^2$ dobivamo:

$$C = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

Sustav s jednim stupnjem slobode: harmonijska pobuda

- 1 ▶ partikularno rješenje:

$$u_p(t) = C \sin \omega t = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t, \quad \omega \neq \omega_n$$

- ukupno (homogeno i partikularno) 2 ▶ rješenje:

$$u(t) = \underbrace{A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t}_{\text{homogeno}} + \underbrace{\frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t}_{\text{partikularno}}$$

- za određivanje konstanta 3 ▶ A i B odredimo brzinu:

$$\dot{u}(t) = -A \omega_n \sin \omega_n t + B \omega_n \cos \omega_n t + \frac{p_0}{k} \frac{\omega}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \cos \omega t$$

- iz pomaka: $u(0) = A$, a iz brzine:

$$\dot{u}(0) = B \omega_n + \frac{p_0}{k} \frac{\omega}{1 - (\omega/\omega_n)^2} / : \omega_n$$

Sustav s jednim stupnjem slobode: harmonijska pobuda

- prema tome:

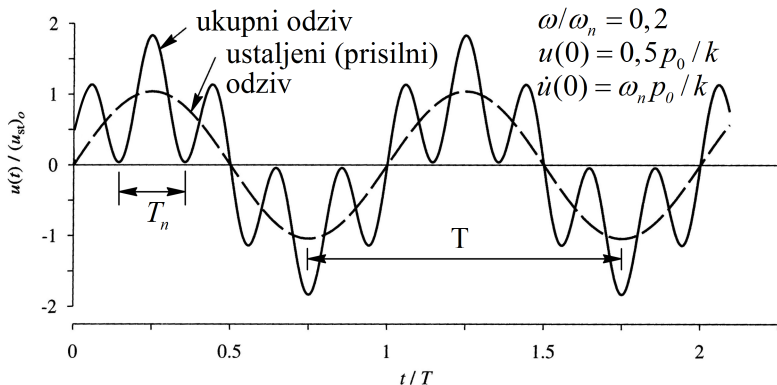
$$A = u(0), \quad B = \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{p_0}{k} \frac{\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

- A i B uvrstimo u 892 ◀ rješenje, konačno dobivamo:

$$u(t) = \underbrace{u(0) \cos \omega_n t + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{p_0}{k} \frac{\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right] \sin \omega_n t}_{\text{prolazni dio}} + \underbrace{\frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t}_{\text{▶ prisilni, ustaljeni dio}}$$

- titranje ovisi o $\sin(\cdot)$ i $\cos(\cdot)$, (funkcije od t), ostalo konstante
- prolazno titranje: sadrži članove $\sin \omega_n t$ i $\cos \omega_n t$,
- titranje frekvencijom slobodnog odziva ω_n ; ovisi o $u(0)$ i zagradi $[\cdot]$
- prisilno, ustaljeno titranje: sadrži član $\sin \omega t$,
- titranje frekvencijom pobude ω : vođeno, traje koliko i pobuda

Sustav s jednim stupnjem slobode: harmonijska pobuda



- postoji pobuda: moguće gibanje i uz ▶ homogene početne uvjete
- uvrstimo $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ u prethodnu jednadžbu:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right)$$

Sustav s jednim stupnjem slobode: harmonijska pobuda

- prolazno titranje: razlika ukupnog i prisilnog odziva
- bez prigušenja: traje vječno, konstantnom amplitudom
- realno: nakon nekog vremena iščezava – naziv PROLAZNO
- ostaje samo 90 ◀ prisilni dio (konstantne amplitude, uz $\sin \omega t$):

$$u(t) = (u_{\text{st}})_0 \left[\frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right] \sin \omega t$$

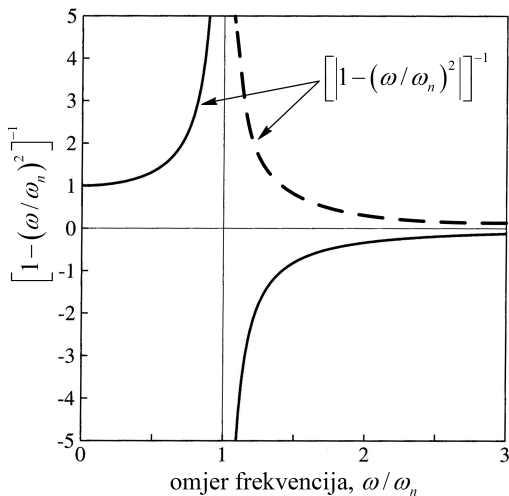
- gdje je $(u_{\text{st}})_0 = p_0/k > 0$ amplituda statičkog pomaka:¹⁵

$$\underbrace{m\ddot{u}(t)}_{\approx 0} + ku_{\text{st}}(t) = p_0 \sin \omega t, \quad u_{\text{st}}(t) = \frac{p_0}{k} \sin \omega t = \frac{p(t)}{k}$$

- zamislimo lagani okvir ($m \approx 0$): zanemariva sila inercije
- pomak jest statički, ali ovisi o vremenu: $p(t)$ je funkcija vremena
- predznak zagrade: određuje smjer odziva prema smjeru pobude

¹⁵ili kraće samo statički pomak

Sustav s jednim stupnjem slobode: harmonijska pobuda



- opći zapis prisilnog odziva:

$$u(t) = (u_{st})_0 \left[\frac{1}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \right] \sin \omega t = u_0 \sin(\omega t - \phi)$$

- odziv i pobuda istaknuti:

$$u(t) = \frac{1}{k} \left[\frac{1}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \right] p_0 \sin \omega t$$

- za $\omega / \omega_n < 1$ ($\omega < \omega_n$)
zagrada pozitivna,
 $u(t)$ i $p(t)$ istog smjera,
pomak u fazi s opterećenjem
- za $\omega / \omega_n > 1$ ($\omega > \omega_n$)
zagrada negativna,
 $u(t)$ i $p(t)$ suprotnog smjera,
pomak i opterećenje izvan faze

Sustav s jednim stupnjem slobode: harmonijska pobuda

- amplituda u_0 iznosi (prema 51 ◀ definiciji) je pozitivna):

$$u_0 = (u_{\text{st}})_0 \left[\frac{1}{|1 - (\omega/\omega_n)^2|} \right]$$

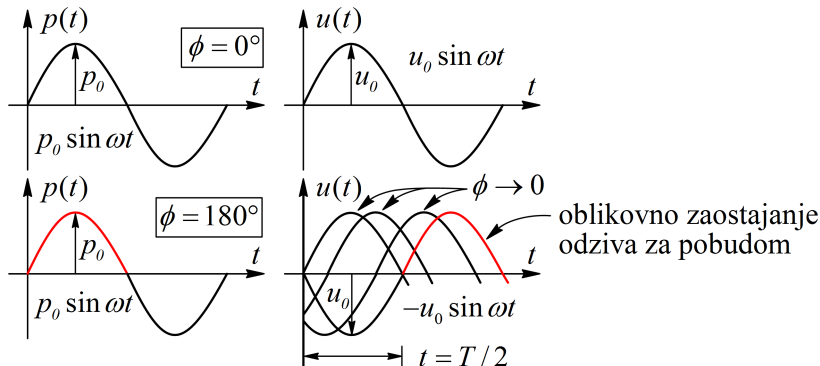
- zbog toga se pojavljuje apsolutna vrijednost nazivnika
- gubimo predznak zagrade: prebacimo ga uz funkciju $\sin \omega t$
- zato rabimo fazni kut ϕ i pišemo:

$$\sin(\omega t - \phi), \quad \phi = \begin{cases} 0^\circ & \text{za } \omega < \omega_n & \sin \omega t \\ 180^\circ & \text{za } \omega > \omega_n & -\sin \omega t \end{cases}$$

- ako je $\phi = 0^\circ$: pomak se mijenja u smjeru opterećenja
- ako je $\phi = 180^\circ$: pomak se mijenja suprotno opterećenju
- za $\phi = 180^\circ$: KAŠNJENJE odziva $u(t)$ za opterećenjem $p(t)$

$$\sin(\omega t - \phi) = 0 \Rightarrow \omega t - \phi = 0 \Rightarrow t = \frac{\phi}{\omega} = \frac{\pi}{2\pi/T} = \frac{T}{2}$$

Sustav s jednim stupnjem slobode: harmonijska pobuda



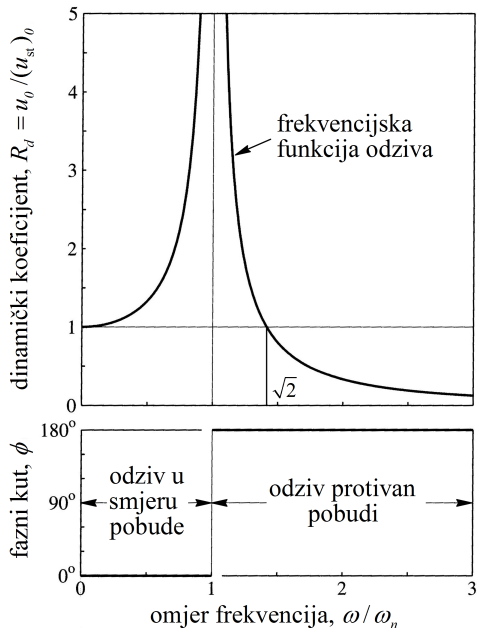
- još jedan važan zapis prisilnog odziva (uvodimo oznaku R_d):

$$u(t) = \frac{(u_{st})_0}{(u_{st})_0} u_0 \sin(\omega t - \phi) = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega t - \phi)$$

- očito je (formula, str. 94. i graf, str. 93.):

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{|1 - (\omega/\omega_n)^2|} > 0$$

Sustav s jednim stupnjem slobode: harmonijska pobuda



- dinamički koeficijent R_d ili koeficijent povećanja pomaka omjer amplitude dinamičkog i statičkog pomaka (bez dim.)
- $\omega / \omega_n \ll 1$, ($R_d \approx 1$): spora promjena opterećenja, mali dinamički utjecaj
- $\omega / \omega_n > \sqrt{2}$, ($R_d < 1$): dinamički utjecaj manji od statičkog
- $\omega / \omega_n \gg 1$, ($R_d \approx 0$): brza promjena opterećenja, zanemariv dinamički utjecaj
- $\omega / \omega_n \approx 1$, ($R_d \gg 1$): izraziti dinamički utjecaj

Pojam rezonancije

- titranje modela pri kojemu je dinamički koeficijent maksimalan
- rezonancijska frekvencija: frekvencija pobude koja uzrokuje rezonanciju
- model bez prigušenja: rezonancijska frekvencija jest ω_n
- dinamički koeficijent nije ograničen (teži prema neizmjereno)
- važno: velika amplituda ne nastupa trenutno (raste u vremenu)
- primijetimo: ako je $\omega = \omega_n$ ne vrijedi odabrano 891 ◀ partikularno rješenje
- analizirajmo, radi jednostavnosti, titranje uz 91 ◀ homogene početne uvjete
- uočimo da vrijedi:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_n} u(t) = \frac{0}{0}, \quad \text{L'Hôpitalovo pravilo:}$$

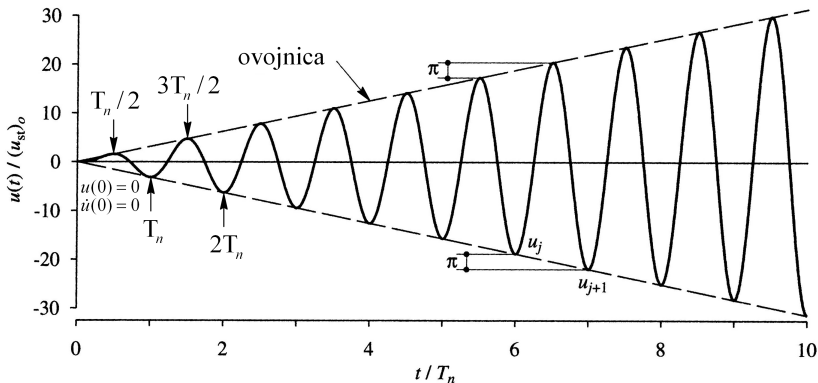
$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_n} u(t) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \frac{p_0}{k} \frac{d/d\omega [\sin \omega t - (\omega/\omega_n) \sin \omega_n t]}{d/d\omega [1 - (\omega/\omega_n)^2]}$$

Sustav s jednim stupnjem slobode: harmonijska pobuda

- deriviranjem po ω (ne po t):

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_n} u(t) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \frac{p_0}{k} \frac{t \cos \omega t - (1/\omega_n) \sin \omega_n t}{-2\omega/\omega_n^2} \frac{\omega_n}{\omega_n}$$

$$u(t) = -\frac{1}{2} \frac{p_0}{k} (\omega_n t \cos \omega_n t - \sin \omega_n t), \text{ uz uvjet: } \omega = \omega_n$$



Sustav s jednim stupnjem slobode: harmonijska pobuda

- uz $(u_{\text{st}})_0 = p_0/k$ i $\omega_n = 2\pi/T_n$:

$$\frac{u(t)}{(u_{\text{st}})_0} = -\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi t}{T_n} \cos \frac{2\pi t}{T_n} - \sin \frac{2\pi t}{T_n} \right)$$

- period iznosi T_n , ekstremi (max. pa min.) svakih $T_n/2$
- ako je j broj titraja ($j = 1, 2, \dots$), vrijeme ekstrema jest:

$$t = (j - 1/2)T_n, \text{ maksimum,} \quad t = jT_n, \text{ minimum}$$

- iznosi ekstrema (uvrstimo $t = (j - 1/2)T_n$ pa $t = jT_n$):

$$u_j = \pi(j - 1/2)(u_{\text{st}})_0, \text{ maksimum, ili } u_j = -\pi j(u_{\text{st}})_0, \text{ minimum}$$

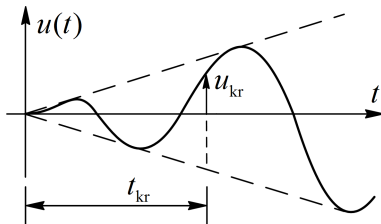
- prirast vršnog iznosa nakon svakog titraja (uzmimo minimume):

$$|u_{j+1}| - |u_j| = (u_{\text{st}})_0 [\pi(j+1) - \pi j] = \pi(u_{\text{st}})_0 = \pi p_0/k = \text{const.}$$

- prirast konstantan: ovojnica rasta pravac

Sustav s jednim stupnjem slobode: harmonijska pobuda

- amplituda (općenitije, pomak) raste prema neizmjerljivo
- pretpostavka: neograničeno važenje Hookeovog zakona
- realno: postoji iznos kritičnog pomaka $\pm u_{kr}$
- početak pucanja krhkog ili tečenja duktilnog materijala
- nastaje promjena krutosti k , pa i frekvencije $\omega_n = \sqrt{k/m}$
- posljedica: više nema rezonancije, jer je $\omega \neq \omega_n$
- primijetimo: kritični pomak ne nastaje trenutno
- postiže se nakon određenog vremena t_{kr}



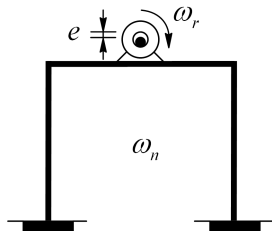
Sustav s jednim stupnjem slobode: harmonijska pobuda

- poželjno: brzi prolazak kroz rezonanciju ($t \ll t_{kr}$)
- primjer: pobuda turbinskog stola ekscentričnom masom turbine
- oblik pobude: $p(t) = p_0 \sin \omega t$, gdje je:

$$0 \leq \omega \leq \omega_r, \quad \omega_r - \text{radna frekvencija turbine}$$

- slobodno titranje stola: ω_n , u praksi je najčešće: $\omega_r > \omega_n$
- posljedica: pri pokretanju ili zaustavljanju uvijek postoji slučaj,
 $\omega = \omega_n$, prolaz kroz frekvenciju slobodnog titranja stola

- treba trajati što kraće!
- ω mora odmah dalje rasti (padati)
- ne čekati pri $\omega = \omega_n$!
- tada t teče prema t_{kr}
- a u raste prema u_{kr}



Harmonijska pobuda s prigušenjem

- ako postoji prigušenje:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \sin \omega t, \quad \text{uz: } u(0) \text{ i } \dot{u}(0)$$

- homogeno rješenje: slobodno titranje s prigušenjem (str. 63.),

$$u_c(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t)$$

- izbor partikularnog rješenja (prisilno titranje zbog pobude):
 - isti oblik pobude i odziva: logična pretpostavka – funkcija sinus
 - nije rješenje: prva derivacija funkcija kosinus – nema jednakosti
 - pretpostavka rješenja: zbroj funkcija sinus i kosinus
 - 1. razlog: također zapis funkcije sinus (poput pobude)¹⁶
 - 2. razlog: opisuje titranje lijevo – desno

- dakle: $u_p(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t$

- prikažemo osnovnu jednadžbu s pomoću ζ (podijelimo je s m):

$$^{16} p_0 \sin(\omega t - \phi) = C \sin \omega t + D \cos \omega t, \quad p_0 = \sqrt{C^2 + D^2}, \quad \tan \phi = D/C$$

Harmonijska pobuda s prigušenjem

- dobivamo (podsjetimo se: $c/m = 2\zeta\omega_n$, str. 60. i $k/m = \omega_n^2$):

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \frac{p_0}{m} \sin \omega t$$

- derviramo $u_p(t)$ i uvrstimo u jednadžbu:

$$\underbrace{-C\omega^2 \sin \omega t - D\omega^2 \cos \omega t}_{\ddot{u}_p(t)} + 2\zeta\omega_n \underbrace{(C\omega \cos \omega t - D\omega \sin \omega t)}_{\dot{u}_p(t)} + \omega_n^2 \underbrace{(C \sin \omega t + D \cos \omega t)}_{u_p(t)} = \frac{p_0}{m} \sin \omega t$$

- izmnožimo zagrade i grupiramo po $\sin \omega t$ i $\cos \omega t$:

$$\begin{aligned} & [(\omega_n^2 - \omega^2) C - 2\zeta\omega_n \omega D] \sin \omega t \\ & + [2\zeta\omega_n \omega C + (\omega_n^2 - \omega^2) D] \cos \omega t \\ & = \frac{p_0}{m} \sin \omega t \quad / \cdot \frac{1}{\omega_n^2} \end{aligned}$$

Harmonijska pobuda s prigušenjem

- jednakost važi $\forall t$ samo ako su članovi uz $\sin \omega t$ i $\cos \omega t$ jednaki:
- dobivamo dvije jednačbe: nakon djeljenja s ω_n^2 , uz $m\omega_n^2 = k$,

$$\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] C - \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right) D = \frac{p_0}{k}, \quad \text{članovi uz } \sin \omega t$$

$$\left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right) C + \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] D = 0, \quad \text{članovi uz } \cos \omega t$$

- riješimo sustav ▶ jednačbi:

$$C = \frac{p_0}{k} \frac{1 - (\omega/\omega_n)^2}{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right]^2 + \left[2\zeta (\omega/\omega_n)\right]^2} = (u_{\text{st}})_0 \frac{b_C}{n_C}$$

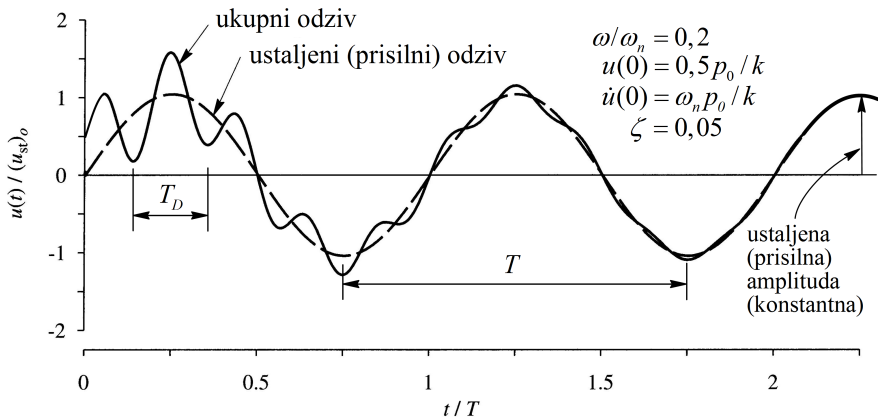
$$D = \frac{p_0}{k} \frac{-2\zeta \omega/\omega_n}{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right]^2 + \left[2\zeta (\omega/\omega_n)\right]^2} = (u_{\text{st}})_0 \frac{b_D}{n_D}$$

Harmonijska pobuda s prigušenjem

- ▶ ukupno rješenje (zbroy homogenog i partikularnog, str. 102.):

$$u(t) = \underbrace{e^{-\zeta\omega_n t}(A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t)}_{\text{prolazni dio}} + \underbrace{C \sin \omega t + D \cos \omega t}_{\text{prisilni, ustaljeni dio}}$$

- poput 89₃ ◀ A i B iz $u(t)$ i $\dot{u}(t)$, uz $u(0)$ i $\dot{u}(0)$, (nevažno, brzo iščezava)



Harmonijska pobuda s prigušenjem

- primijetimo složenost rješenja čak i za jedan stupanj slobode
- prolazno titranje: razlika ukupnog i prisilnog odziva
- jednako slobodnom titranju s prigušenjem: s vremenom iščezava
- analiziramo samo dio koji ostaje: PRISILNI dio
- poput pobude: KONSTANTNIH perioda (pobude) i amplitude
- upozorenje: mogući ekstrem prije samog prisilnog odziva

Rezonancija s prigušenjem

- uvrstimo $\omega = \omega_n$ u izraze za 104 ◀ C i D: $C = 0$ i $D = -(u_{st})_0/(2\zeta)$
- uvrstimo u ukupno rješenje (str. 105.):

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) - \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} \cos \omega_n t$$

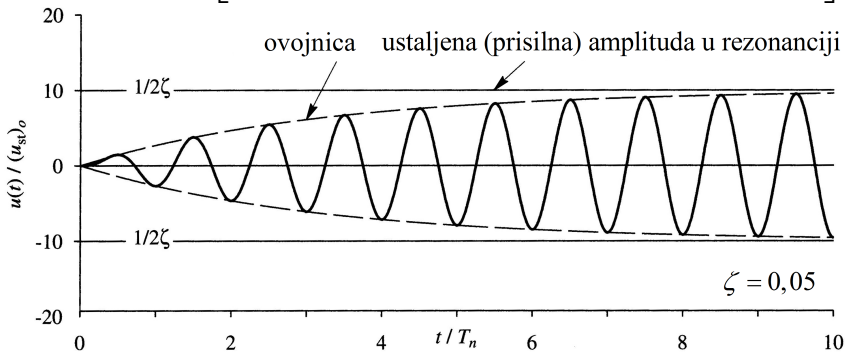
- treba odrediti i A i B (nije potrebno L'Hôpitalovo pravilo)
- zbog jednostavnosti: $u(0) = \dot{u}(0) = 0$
- deriviramo $u(t)$: iz $u(t)$ i $\dot{u}(t)$ za $t = 0$ dobivamo,

Harmonijska pobuda s prigušenjem

$$A = (u_{st})_0 / (2\zeta), \quad B = (u_{st})_0 / (2\sqrt{1 - \zeta^2})$$

- uvrstimo u ukupno rješenje (C i D određeni ranije) i sredimo:

$$u(t) = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} \left[\underbrace{e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_D t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_D t \right)}_{\text{prolazno}} - \underbrace{\cos \omega_n t}_{\text{ustaljeno}} \right]$$



Harmonijska pobuda s prigušenjem

- maksimalna je amplituda za $t \rightarrow \infty$ KONAČNA (asimptota):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = u_0 = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta}$$

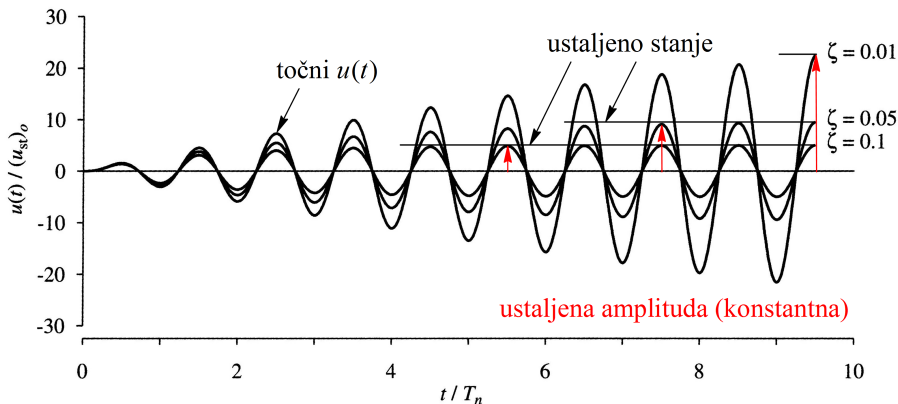
- jer $e^{-\zeta\omega_n t} \rightarrow 0$ i $\max(\cos \omega_n t) \rightarrow \pm 1$
- za slabo prigušenje: član uz sin je vrlo mali i $\omega_D \approx \omega_n$:

$$u(t) \approx \underbrace{\frac{(u_{st})_0}{2\zeta} (e^{-\zeta\omega_n t} - 1)}_{\text{amplituda}} \underbrace{\cos \omega_n t}_{\text{zakon titranja}}$$

- jer je opći zapis funkcije kosinus: $a \cos \omega_n t$ i a je amplituda
- znači: amplituda raste prema zakonu eksponenta (ne linearno)
- prigušenje smanjuje prirast amplitude: nije više konstantan
- važno: iznos amplitude značajno ovisi o prigušenju (član $e^{-\zeta\omega_n t}$)

Harmonijska pobuda s prigušenjem

- obrnuto proporcionalno ovisi i maksimalna amplituda: $u_0 = (u_{st})_0 / 2\zeta$



- s porastom ζ brže dostizanje konstantnih amplituda odziva
- zamijetimo: tada se radi o 105 ◀ stanju ustaljenog titranja
- razlog: za dovoljno veliki t prolazni dio prigušen, $e^{-\zeta\omega_n t} \rightarrow 0$
- jednake frekvencije odziva ($\cos \omega_n t \rightarrow \cos \omega t$) i pobude ($\sin \omega t$)

Harmonijska pobuda s prigušenjem

- broj titraja potreban za dostizanje ustaljenog stanja?
- ekstrem nakon j titraja (uzmimo min.: u $t = jT_n = 2\pi j/\omega_n$):

$$\underbrace{u\left(\frac{2\pi j}{\omega_n}\right)}_{u_j} \approx \underbrace{\frac{(u_{st})_0}{2\zeta}}_{u_0} \left(e^{-\zeta\omega_n \frac{2\pi j}{\omega_n}} - 1 \right) \cos \omega_n \frac{2\pi j}{\omega_n}$$

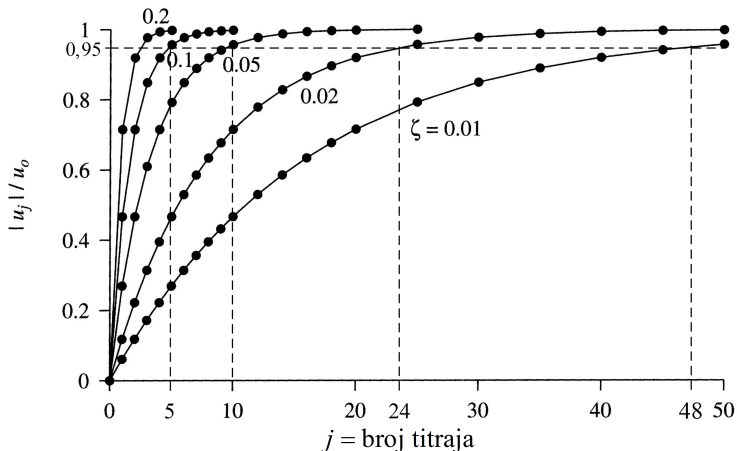
$$u_j = u_0 \underbrace{\left(\overbrace{e^{-2\pi\zeta j}}^{<1 (j>0)} - 1 \right)}_{< 0} (\pm 1)$$

- ako trebamo samo pozitivnu vrijednost (amplitudu):

$$\frac{|u_j|}{u_0} = \left(e^{-2\pi\zeta j} - 1 \right) (-1) = 1 - e^{-2\pi\zeta j}$$

- omjer nije funkcija: postiže diskretne vrijednosti za $j = 1, \dots$

Harmonijska pobuda s prigušenjem



- vrijednosti spojene pravcima: lakše uočavanje zakonitosti
- slabije prigušenje, više titraja za dostizanje ustaljene amplitude
- za $0,95u_0$: 48, 24, 10 i 5 titraja za ζ od 0,01; 0,02; 0,05 i 0,1
- zaključno: ζ kontrolira iznos u_0 i broj j do ustaljenog stanja

Vršni pomak i kašnjenje u fazi

- analiziramo prisilno (ustaljeno) titranje pri harmonijskoj pobudi
- samo partikularno rješenje: $u(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t$
- konstante C i D proizvoljne: $C = u_0 \cos \phi$ i $D = -u_0 \sin \phi$
- dobivamo: $u(t) = u_0(\sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi)$
- dakle:¹⁷

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t - \phi) \frac{(u_{\text{st}})_0}{(u_{\text{st}})_0} = (u_{\text{st}})_0 R_d \sin(\omega t - \phi)$$

- uočimo: $C^2 + D^2 = u_0^2 \cos^2 \phi + u_0^2 \sin^2 \phi = u_0^2$ i $D/C = -\tan \phi$
- konačno: $u_0 = \sqrt{C^2 + D^2}$ i $\phi = \arctan(-D/C)$
- uz (str. 104.): $C = (u_{\text{st}})_0 b_C/n_C$, $D = (u_{\text{st}})_0 b_D/n_D$ i $n_C = n_D = n$:

$$u_0 = (u_{\text{st}})_0 \sqrt{(b_C^2 + b_D^2)/n^2} = (u_{\text{st}})_0/\sqrt{n}, \text{ jer je } b_C^2 + b_D^2 = n$$

¹⁷rabimo poznati identitet: $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

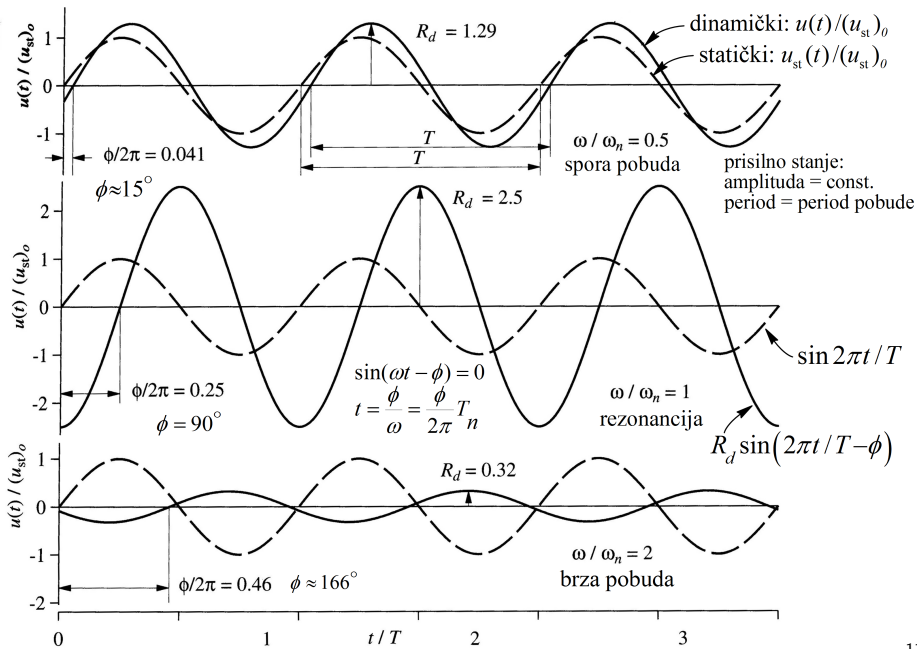
Harmonijska pobuda s prigušenjem: prisilno stanje

$$\frac{u_0}{(u_{\text{st}})_0} = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad R_d = \frac{u_0}{(u_{\text{st}})_0} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right]^2 + \left[2\zeta(\omega/\omega_n)\right]^2}}$$

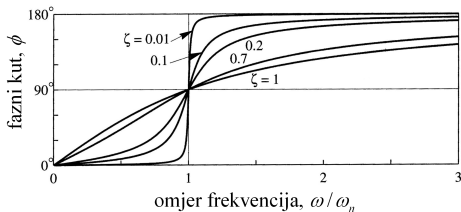
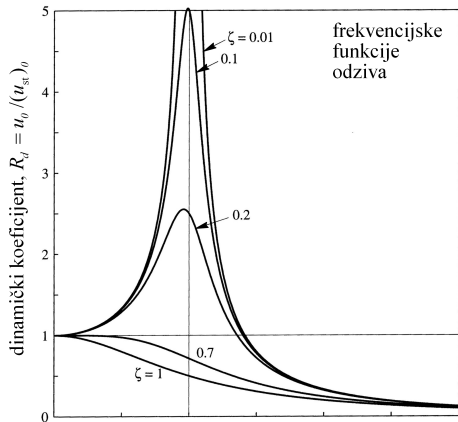
$$\phi = \arctan \left(- \frac{(u_{\text{st}})_0 b_D n_C}{(u_{\text{st}})_0 b_C n_D} \right) = \arctan \left(- \frac{b_D}{b_C} \right), \quad \phi = \arctan \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

- crtamo $u(t)/(u_{\text{st}})_0 = R_d \sin(2\pi t/T - \phi)$: trebamo R_d i ϕ
- odaberemo tri vrijednosti omjera ω/ω_n : 0,5; 1 i 2
- prigušenje za sva tri slučaja: $\zeta = 0, 2$
- odredimo R_d (1,29; 2,5; 0,32), ϕ (15° ; 90° ; 166°) i crtamo $u(t)/(u_{\text{st}})_0$
- crtanje statičkog pomaka (str. 92.): $u_{\text{st}}(t)/(u_{\text{st}})_0 = \sin 2\pi t/T$
- pomak zbog $p(t)$, ali bez dinamičkih učinaka ($m\ddot{u} = 0$, $c\dot{u} = 0$)
- mijenja se poput $p(t)$: do na konstantu $1/k$
- isti za sva tri omjera ω/ω_n (ne ovisi o ω_n)

Harmonijska pobuda s prigušenjem: prisilno stanje



Harmonijska pobuda s prigušenjem: prisilno stanje



- $R_d = f(\omega / \omega_n, \zeta)$ (str. 113.):

- 1 $\omega / \omega_n \ll 1, (R_d \approx 1):$

$$u_0 \approx (u_{st})_0 = \frac{p_0}{k}$$

- 2 $\omega / \omega_n \gg 1, (R_d \approx 0):$

$$u_0 \approx (u_{st})_0 \frac{\omega_n^2}{\omega^2} = \frac{p_0}{k} \frac{\omega_n^2}{\omega^2} = \frac{p_0}{m \omega^2}$$

- 3 $\omega / \omega_n \approx 1, (R_d \gg 1):$

$$u_0 \approx \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\zeta} = \frac{p_0}{c \omega_n}$$

- sve krivulje ispod $\zeta = 0$

- $\zeta > 0$ smanjuje R_d

Harmonijska pobuda s prigušenjem: prisilno stanje

- ① spora promjena opterećenja: $\omega/\omega_n \ll 1$
 - dinamički koeficijent blizak jedinici: $R_d \approx 1$
 - statički odziv sustava: p_0/k
 - slabi utjecaj prigušenja: sve krivulje bliske
 - p_0 zadan: pomak kontroliran KRUTOŠĆU (kao u statici)
- ② brza promjena opterećenja: $\omega/\omega_n \gg 1$
 - dinamički koeficijent blizak nuli: $R_d \approx 0$
 - odziv manji od statičkog (uvrstite $\omega_n^2/k = 1/m$)
 - slabi utjecaj prigušenja: sve krivulje bliske
 - p_0 i ω zadani: pomak kontroliran MASOM
- ③ podudaranje frekvencije pobude i odziva: $\omega/\omega_n \approx 1$
 - stanje rezonancije
 - veliki dinamički koeficijent: $R_d \gg 1$
 - odziv puno veći od statičkog [$k = \omega_n^2 m$ i $2\zeta = c/(m\omega_n)$]
 - p_0 i $\omega_n \approx \omega$ zadani: pomak kontroliran PRIGUŠENJEM

Harmonijska pobuda s prigušenjem: prisilno stanje

- fazni kut: određuje kašnjenje¹⁸ odziva za pobudom (za $t = \phi/2\pi T$)
- ovisnost $\phi = f(\omega/\omega_n, \zeta)$ za tri područja (str. 113., ζ zadan):
 - 1 $\omega/\omega_n \ll 1$, ($\phi \approx 0^\circ$):
pomak i pobuda u fazi: isto usmjereni ($R_d = 1, 29$)
 - 2 $\omega/\omega_n \gg 1$, ($\phi \approx 180^\circ$):
pomak i pobuda izvan faze: suprotno usmjereni ($R_d = 0, 32$)
 - 3 $\omega/\omega_n \approx 1$, ($\phi \approx 90^\circ$): stanje rezonancije,
pomak ekstreman, pobuda bliska nuli ($R_d = 2, 5$)
- važan je 6 ◀ iznos dinamičkog opterećenja: amplituda p_0
- sva tri područja: ako je mali p_0 , mali i u_0 (čak i u rezonanciji),
- neka je veliki R_d , a mali p_0 : mali $(u_{st})_0 = p_0/k$, pa i $u_0 = R_d (u_{st})_0$
- primjer: neprimjetno titranje AB zgrade zbog vjetrova
- uređaji ipak bilježe odziv (10^{-3} mm): rezonancija pri malim u_0

¹⁸zaostajanje

Dinamički koeficijenti odziva

- analizom $u(t)$ dobivamo R_d (str. 112.), slično: $\dot{u}(t) \rightarrow R_v$ i $\ddot{u}(t) \rightarrow R_a$
- pomak u prisilnom stanju (str. 112.): $u(t) = u_0 \sin(\omega t - \phi)$
- brzina i ubrzanje: $\dot{u}(t) = \omega u_0 \cos(\omega t - \phi)$, $\ddot{u}(t) = -\omega^2 u_0 \sin(\omega t - \phi)$
- slične funkcije: harmonijske, istih ω i ϕ , konstantnih amplituda (prisila!)
- znači: slični i dinamički koeficijenti odziva R_d , R_v i R_a
- od ranije (str. 112.): $u(t)/(p_0/k) = R_d \sin(\omega t - \phi)$, $R_d = u_0/(u_{st})_0$
- deriviramo pomak (d/dt):

$$\frac{\dot{u}(t)}{p_0/k} = R_d \omega \cos(\omega t - \phi) \frac{\omega_n}{\omega_n}, \quad \frac{\dot{u}(t)}{\omega_n p_0/k} = R_d \frac{\omega}{\omega_n} \cos(\omega t - \phi)$$

$$\frac{\dot{u}(t)}{p_0/\sqrt{km}} = R_v \cos(\omega t - \phi), \quad R_v = \frac{\omega}{\omega_n} R_d, \quad R_v = \frac{\dot{u}_0}{p_0/\sqrt{km}}$$

- R_v – dinamički koeficijent brzine (bez dimenzije)

Harmonijska pobuda s prigušenjem: prisilno stanje

- deriviranjem brzine:

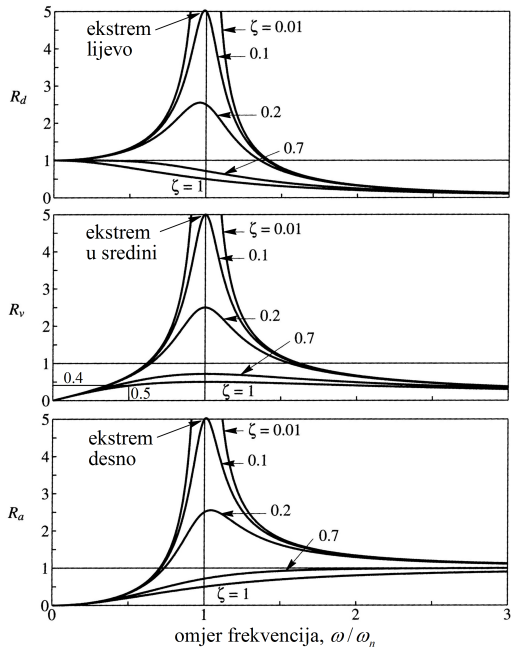
$$\frac{\ddot{u}(t)}{p_0/\sqrt{km}} = -R_v \omega \sin(\omega t - \phi) \frac{\omega_n}{\omega_n}, \quad \frac{\ddot{u}(t)}{\omega_n p_0/\sqrt{km}} = -R_v \frac{\omega}{\omega_n} \sin(\omega t - \phi)$$

$$\frac{\ddot{u}(t)}{p_0/m} = -R_d \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \sin(\omega t - \phi), \quad \frac{\ddot{u}(t)}{p_0/m} = -R_a \sin(\omega t - \phi)$$

$$R_a = \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 R_d, \quad R_a = \frac{\ddot{u}_0}{p_0/m}$$

- R_a – dinamički koeficijent ubrzanja (bez dimenzije)
- omjer amplitude ubrzanja i ubrzanja zbog (amplitude) pobude p_0
- crtamo R_d , R_v i R_a u funkciji ω/ω_n (uočimo: nemaju dimenziju)
- za R_v i R_a rabimo R_d (str. 113.) i množimo s ω/ω_n ili $(\omega/\omega_n)^2$
- R_d pozitivan: R_v i R_a pozitivni – frekvencijske funkcije odziva
- ovisnost amplituda odziva (u_0 , $\dot{u}_0$, $\ddot{u}_0$) o frekvenciji pobude (ω)

Harmonijska pobuda s prigušenjem: prisilno stanje



- din. koeficijent pomaka R_d :
 $\omega/\omega_n = 0, R_d = 1$
 $\omega/\omega_n < 1, R_d$ maksimalan
 $\omega/\omega_n \rightarrow \infty, R_d \rightarrow 0$
- din. koeficijent brzine R_v :
 $\omega/\omega_n = 0, R_v = 0$
 $\omega/\omega_n = 1, R_v$ maksimalan
 $\omega/\omega_n \rightarrow \infty, R_v \rightarrow 0$
- din. koeficijent ubrzanja R_a :
 $\omega/\omega_n = 0, R_a = 0$
 $\omega/\omega_n > 1, R_a$ maksimalan
 $\omega/\omega_n \rightarrow \infty, R_a \rightarrow 1$
- za $\zeta > 1/\sqrt{2} \approx 0,7$:
 R_d i R_a nemaju ekstrem

Harmonijska pobuda s prigušenjem: prisilno stanje

- odmah uočite: za $\zeta < 0,2$ i ω/ω_n oko 1; R_d , R_v i R_a bliski
- postoji ▶ jednoznačna veza među koeficijentima
- uočimo:

$$R_v = \frac{\omega}{\omega_n} R_d, \quad R_a = \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 R_d = \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) R_v$$

- odredimo R_v iz druge jednadžbe i izjednačimo s prvom:

$$\frac{R_a}{\omega/\omega_n} = R_v = \frac{\omega}{\omega_n} R_d$$

- dovoljno poznavati jedan dinamički koeficijent
- za neki ω/ω_n odredimo ostala dva, očito postoji mogućnost:
- ovisnosti prikazati jednom funkcijom (nisu potrebne tri)
- osnovna zamisao (uočite srednju sliku na str. 120.):
funkciju $R_v = f(\omega/\omega_n)$ prikazati u logaritamskom mjerilu

Prikaz dinamičkih koeficijenata u logaritamskom mjerilu

- druga jednakost ($R_v = \omega/\omega_n R_d$) postaje:

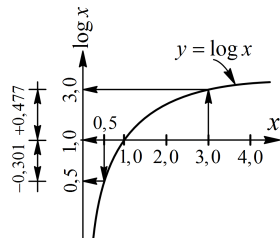
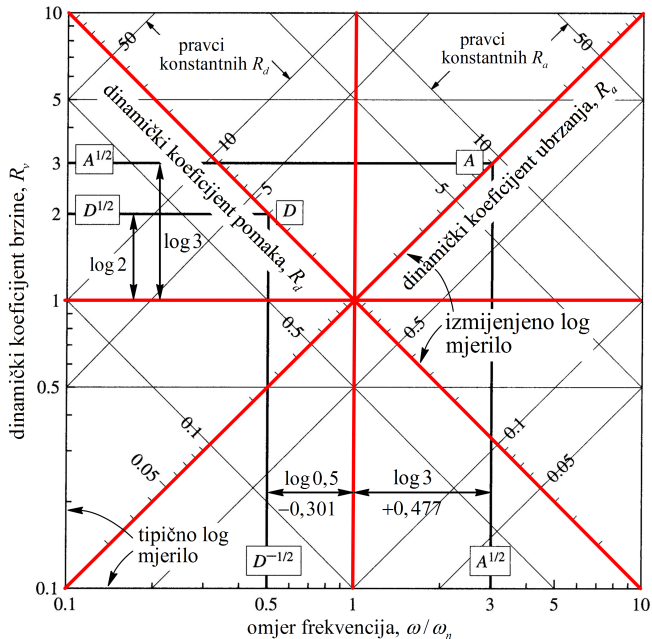
$$\log R_v = \log \frac{\omega}{\omega_n} + \log R_d, \quad \log R_v - \text{ordinata}, \quad \log \frac{\omega}{\omega_n} - \text{apcisa}$$

- za $\log R_d = \text{const.}$ jednakost je oblika $y = x + c$
- jednačba pravca nagiba 45° i odsječka $\log R_d$ na lijevoj ordinati
- sustav takvih pravaca određuje vrijednosti R_d
- očitavanje na osi R_d okomitoj (nagiba -45°) na pravce
- prva jednakost ($R_v = 1/(\omega/\omega_n) R_a$) u logaritamskom mjerilu:

$$\log R_v = -\log \frac{\omega}{\omega_n} + \log R_a, \quad \log R_a = \text{const.}$$

- jednačba pravca nagiba -45° i odsječka $\log R_a$ na desnoj ordinati
- sustav takvih pravaca određuje vrijednosti R_a
- očitavanje na osi R_a okomitoj (nagiba 45°) na pravce

Harmonijska pobuda s prigušenjem: prisilno stanje



- logaritamska funkcija:
- „razvlači” male vrijednosti
- „stišće” velike vrijednosti

Harmonijska pobuda s prigušenjem: prisilno stanje

- ishodište je $R_v = 1$ i $\omega/\omega_n = 1$ jer je $\log 1 = 0$
- kroz ishodište provučemo spomenute pravce (crveno)
- osi R_v i ω/ω_n istih log skala i osi R_a i R_d istih log skala
- ako je $R_a = A$, tada je $R_v = A^{1/2}$ i $\omega/\omega_n = A^{1/2}$ jer vrijedi:

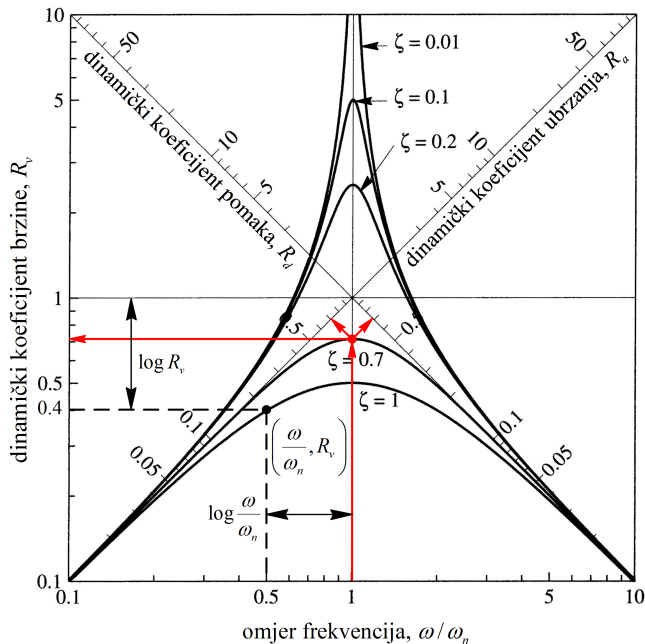
$$R_a = \frac{\omega}{\omega_n} R_v = A^{1/2} A^{1/2} = A$$

- vrijednosti R_v i ω/ω_n jednake jer je R_a pod nagibom od 45°
- primjer: $R_a = 9$, $R_v = \omega/\omega_n = 3$
- ako je $R_d = D$, tada je $R_v = D^{1/2}$ i $\omega/\omega_n = D^{-1/2}$ jer vrijedi:

$$R_d = \frac{R_v}{\omega/\omega_n} = D^{1/2} / D^{-1/2} = D$$

- vrijednost R_v recipročna vrijednosti ω/ω_n jer je R_d nagiba -45°
- primjer: $R_d = 4$, $R_v = 2$ i $\omega/\omega_n = 1/2$

Harmonijska pobuda s prigušenjem: prisilno stanje



- promatramo graf $\omega/\omega_n - R_v$ (str. 120.)
- odaberemo prigušenje ζ
- odaberemo točku $(\omega/\omega_n, R_v)$
- nacrtamo točku $(\log \omega/\omega_n, \log R_v)$
- ponovimo za puno točaka
- spojimo pravcima
- sve ponovimo za novo prigušenje

Frekvencije i dinamički koeficijenti u rezonanciji

- rezonancijska frekvencija: frekvencija POBUDE za vršnog odziva
- male razlike za vršne vrijednosti R_d , R_v i R_a (krivulje, str. 120.)
- određivanje ekstrema: $d/d(\omega/\omega_n)R_d = 0$ (isto za R_v i R_a)
- uz $r = \omega/\omega_n \geq 0$ (koeficijent poremećaja), R_d (str. 113.) postaje:

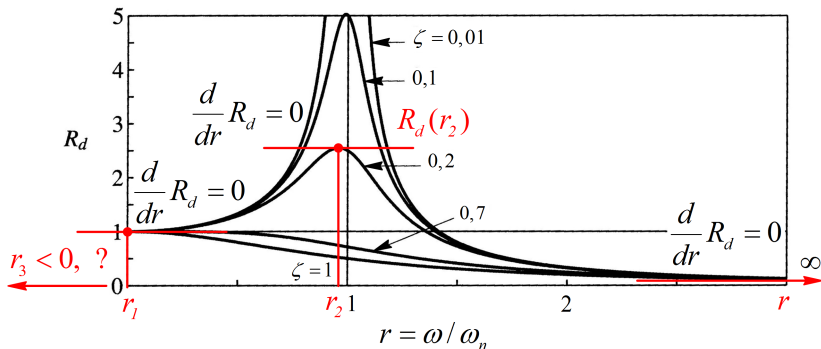
$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right]^2 + \left[2\zeta (\omega/\omega_n)\right]^2}}$$

$$= \left[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right]^{-1/2} = f(r)^{-1/2}, \quad \frac{dR_d}{dr} = \frac{f'(r)}{2\sqrt{f^3(r)}}$$

$$\frac{dR_d}{dr} = \frac{r(1 - r^2 - 2\zeta^2)}{\left[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right]^{3/2}} = 0 \Rightarrow r(1 - r^2 - 2\zeta^2) = 0$$

- rješenja: $r_1 = 0$, $r_{2,3} = \pm\sqrt{1 - 2\zeta^2}$ (horizontalne tangente)

Harmonijska pobuda s prigušenjem: prisilno stanje



- $r_3 < 0$ nema fizikalni smisao, a $r \rightarrow \infty \Rightarrow R_d \rightarrow 0$, min. jer je $R_d > 0$
- $r_1 = 0 \Rightarrow \omega = 0$, nema titranja, $R_d(r_1) = 1$
- $r_2 = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \Rightarrow R_d(r_2) = 1 / (2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2})$, maksimum
- vršna vrijednost – rezonancija: $R_d(r_2) = R_{d, \text{vrš}}$
- rezonancijska frekvencija ▶ pomaka:

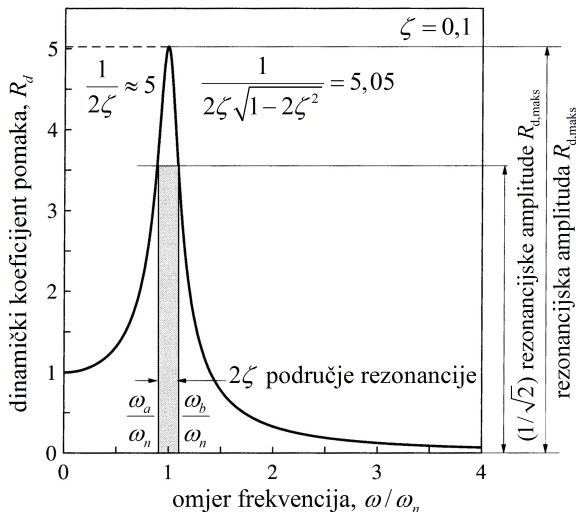
$$r_2 = \sqrt{1 - 2\zeta^2} = \omega/\omega_n \Rightarrow \omega_{\text{d,vrš}} = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

Harmonijska pobuda s prigušenjem: prisilno stanje

- sličan postupak za $R_v = (\omega/\omega_n)R_d$ i $R_a = (\omega/\omega_n)^2 R_d$
- rezonancijska frekvencija brzine: $\omega_{v,vr\check{s}} = \omega_n$
- rezonancijska frekvencija ubrzanja: $\omega_{a,vr\check{s}} = \omega_n / (1 - 2\zeta^2)$
- pripadni R_v u rezonanciji: $R_{v,vr\check{s}} = 1 / (2\zeta)$
- pripadni R_a u rezonanciji: $R_{a,vr\check{s}} = 1 / (2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2})$
- uočimo: iako je $\zeta > 0$, svi $\omega_{vr\check{s}}$ ovise o ω_n , ne o ω_D
- ako je $\zeta = 0$, svi $\omega_{vr\check{s}} = \omega_n$ i $R_{d,vr\check{s}} = R_{v,vr\check{s}} = R_{a,vr\check{s}} \rightarrow \infty$
- za $\zeta < 0,2$ razlike među svim vrijednostima zanemarive:

$$\omega_{d,vr\check{s}} = \omega_{v,vr\check{s}} = \omega_{a,vr\check{s}} \approx \omega_n, \quad R_{d,vr\check{s}} = R_{v,vr\check{s}} = R_{a,vr\check{s}} \approx \frac{1}{2\zeta}$$

Analiza područja rezonancije



- važno: postoji područje rezonancije
- razlog: opasan i okoliš vršne vrijednosti
- veliki R_d i u blizini ekstrema
- oblik područja ovisi o ζ (veći ζ šire i niže područje – prethodne slike)

- važno svojstvo frekvencijske funkcije za $R_d = 1/\sqrt{2} R_{d,vrš}$

Harmonijska pobuda s prigušenjem: prisilno stanje

- iz grafa funkcije R_d : jednakost vrijedi za dvije frekvencije (ω_a i ω_b)
- nađimo ih (str. 113.): $R_d(\omega/\omega_n) = 1/\sqrt{2} R_{d, \text{vrš}}$; raspisano:

$$\frac{1}{\sqrt{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right]^2 + \left[2\zeta (\omega/\omega_n)\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}}_{\text{str. 127.}}$$

- kvadriramo:

$$\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right]^2 + \left[2\zeta (\omega/\omega_n)\right]^2 = 8\zeta^2(1 - \zeta^2)$$

- opet kvadriramo i grupiramo po ω/ω_n :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4 - 2(1 - 2\zeta^2) \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 1 - 8\zeta^2(1 - \zeta^2) = 0$$

- kvadratna jednadžba po $(\omega/\omega_n)^2$
- koeficijenti: $a = 1$, $b = -2(1 - 2\zeta^2)$, $c = 1 - 8\zeta^2(1 - \zeta^2)$

Harmonijska pobuda s prigušenjem: prisilno stanje

- rješenja $\left[-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} / (2a) \right]$ (samo $\oplus$ jer je $\omega/\omega_n > 0$):

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 = (1 - 2\zeta^2) \pm 2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}$$

- za mala prigušenja $\zeta^2 \approx 0$ $[(\omega/\omega_n)^2 \approx 1 \pm 2\zeta]$:

$$\frac{\omega}{\omega_n} \approx \sqrt{1 \pm 2\zeta} \approx 1 \pm \zeta, \quad \text{1. i 2. član Taylorovog reda}^{19}$$

- budući da je $\omega_a < \omega_b$ (slika na str. 129.) imamo:

$$\omega_a \approx (1 - \zeta)\omega_n, \quad \omega_b \approx (1 + \zeta)\omega_n$$

- oduzimanjem $\omega_b - \omega_a$ dobivamo:

$$\frac{\omega_b - \omega_a}{\omega_n} \approx 2\zeta, \quad (\text{slika, str. 129.}), \quad \zeta \approx \frac{\omega_b - \omega_a}{2\omega_n} \bigg/ \frac{2\pi}{2\pi} = \frac{f_b - f_a}{2f_n}$$

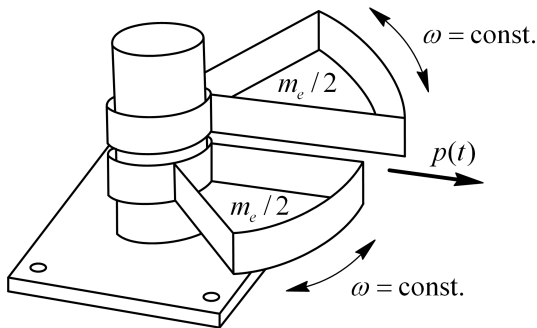
- ▶ primjena: određivanje ζ na temelju prisilnog titranja zgrade

¹⁹ $f(\zeta) \approx f(0) + f'(0)\zeta + \dots$

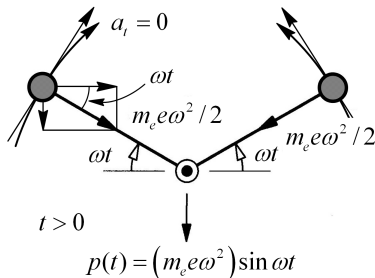
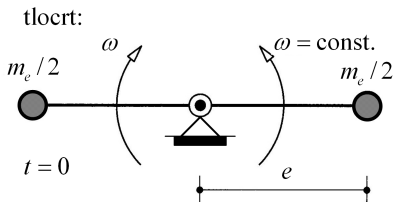
$$\sqrt{1 \pm 2\zeta} \approx \sqrt{1 \pm 2 \cdot 0} \pm 2 / (2\sqrt{1 \pm 2 \cdot 0}) \zeta + \dots = 1 \pm \zeta$$

Pobuda vibracijskim uređajem

- ▶ uređaji za harmonijsku pobudu građevina
- primjena: određivanje prirodne frekvencije i prigušenja (ω_n i ζ)
- osnovna konstrukcija: dvije košare na uspravnoj osovini
- rotiraju u suprotnim smjerovima, kutnom brzinom $\omega = \text{const.}$
- masa m_e određena brojem olovnih ploča u košari
- model: dvije ekscentrične mase $m_e/2$ na kraku e od osovine



Harmonijska pobuda s prigušenjem: primjena



- jednoliko kružno gibanje ($\omega = \text{const.}$)
- tangencijalno ubrzanje $a_t = 0$ i centripetalna sila $F_{cp} = 0$
- centrifugalna sila jest: $F_{cf} = m r \omega^2 = m_e/2 e \omega^2$
- nasuprotne se komponente $F_{cf} \cos \omega t$ poništavaju
- pobuda konstrukcije: zbroj komponenata $F_{cf} \sin \omega t$
- dobivamo: $p(t) = 2 F_{cf} \sin \omega t = 2 m_e/2 e \omega^2 \sin \omega t = (m_e e \omega^2) \sin \omega t$
- amplituda pobude: $p_0 = m_e e \omega^2$ – proporcionalna s ω^2
- $m_e \ll m$: mala sila inercije $m_e \ddot{u}$ zbog ubrzanja građevinom $\ddot{u}$

Harmonijska pobuda s prigušenjem: primjena

- uređaj uzrokuje samo pobudu građevine (ne i dodatnu silu inercije)
- odziv modela (građevine) s jednim stupnjem slobode:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = (m_e e \omega^2) \sin \omega t$$

- amplituda prisilnog pomaka [uz: $R_d = u_0/(u_{st})_0$]:

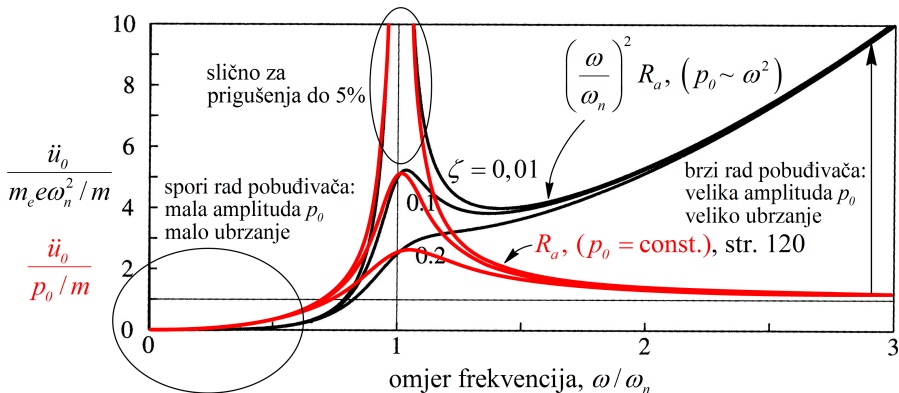
$$u_0 = \frac{p_0}{k} R_d = \frac{m_e e \omega^2}{k} R_d = \frac{m_e e}{m} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 R_d, \quad (k = m \omega_n^2)$$

- amplituda prisilnog ubrzanja [uz: $R_a = \ddot{u}_0/(p_0/m)$, str. 119.]:

$$\ddot{u}_0 = \frac{p_0}{m} R_a = \frac{m_e e \omega^2}{m} R_a \bigg/ \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = \frac{m_e e \omega_n^2}{m} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 R_a$$

- uočimo: amplitude pobude i odziva proporcionalni s ω^2
- do sada: konstantna amplituda pobude $p_0 \sin \omega t$ ($p_0 = \text{const.}$)
- pripadno vršno ubrzanje $\ddot{u}_0 = p_0/m R_a$: ne ovise dodatno o ω^2

Harmonijska pobuda s prigušenjem: primjena



Određivanje prirodne frekvencije i prigušenja pokusom

- važno: usporedba izmjerene i računske vrijednosti frekvencije
- provjera valjanosti modela: odabranih masa i krutosti ($\omega_n = \sqrt{k/m}$)
- štoviše: pokus jedini način određivanja prigušenja
- nije ga moguće odrediti iz svojstava materijala i dimenzija konstr.

Rezonancijski pokus

- temeljen na 115 ◀ rezultatu $u_0 = (u_{st})_0 / 2\zeta$, odnosno:

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{(u_{st})_0}{(u_0)_{\omega=\omega_n}} \quad [(u_{st})_0 \text{ i } u_0 \text{ određujemo pokusom}]$$

- redovito mjerimo $\ddot{u}_0$ (str. 73.), iz općeg zapisa $u(t) = u_0 \sin(\omega t - \phi)$:

$$\ddot{u}(t) = - \underbrace{u_0 \omega^2}_{\ddot{u}_0} \sin(\omega t - \phi), \quad u_0 = \frac{(\ddot{u}_0)_{\omega=\omega_n}}{(\omega^2)_{\omega=\omega_n}}$$

- uočimo: prirodna frekvencija ω_n nije poznata
- znamo: ako je $\omega = \omega_n$, fazni je kut $\phi = 90^\circ$ (str. 115. i 117.)
- titramo konstrukciju frekvencijom pobude ω i mjerimo ϕ
- postupno povećavamo ω dok ne utvrdimo $\phi = 90^\circ$, tada je: $\omega = \omega_n$
- malo pričekamo dok se amplitude ne ustale (str. 107.): očitamo $\ddot{u}_0$
- treba izmjeriti i $(u_{st})_0 = p_{0,\text{vrš}}/k$, ($p_{0,\text{vrš}}$ – ampl. pobude u rezon.)

Harmonijska pobuda s prigušenjem: primjena

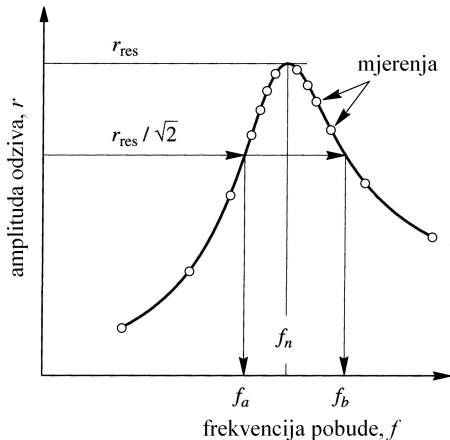
- problem: prouzročiti STATIČKI iznos $p_{0,\text{vrš}} = m_e e \omega_n^2$ (str. 133.)
- 1. pristup: sporim ($\omega \ll \omega_n$) rotiranjem većih masa (teškoća, $m_0 \gg m_e$)
- ω^2 vrlo malo: $p_0 = m_0 e \omega^2 \ll p_{0,\text{vrš}}$ premala sila (graf, str. 135.)
- 2. pristup: povlačenje konstrukcije užetom
- zahtjev: sila povlačenja jednaka amplitudi $p_{0,\text{vrš}}$
- mala sila (tada rezonancija nije opasna, str. 117.): teško MJERITI $(u_{\text{st}})_0$
- nije ispravno IZRAČUNATI $(u_{\text{st}})_0$ kao $p_{0,\text{vrš}}/k$: k nije mjereno!

Određivanje frekvencijske funkcije odziva

- 1 podesimo vibracijski uređaj na neku frekvenciju f
- 2 mjerimo $\ddot{u}$ dok prolazni dio ne iščezne (čekamo $\ddot{u}_0 = \text{const.}$, str. 105.)
- 3 očitamo amplitudu prisilnog ubrzanja $\ddot{u}_0$
- 4 određena je točka funkcije odziva $(f, \ddot{u}_0)$
- 5 ponovimo postupak za novu frekvenciju
 - ponavljamo dok ne prođemo rezonanciju (gušće oko tjemena)

Harmonijska pobuda s prigušenjem: primjena

- očitamo f_n ($\omega_n = 2\pi f_n$) i podijelimo vrijednosti $\ddot{u}_0$ s $m_e e \omega_n^2 / m$
- ① spojimo točke: dobivamo graf za $p_0 \sim \omega^2$ (str. 135.)
- ② podijelimo s ω^2 : dobivamo graf R_a za $p_0 = \text{const.}$ (str. 135., 120.)
- ③ podijelimo s ω^4 [$R_a = (\omega/\omega_n)^2 R_d$]: graf R_d za $p_0 = \text{const.}$ (129, 120)



Za bilo koju ▶ krivulju 1 – 3:

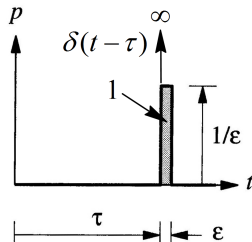
- odredimo ordinatu $r_{\text{res}}/\sqrt{2}$
- zatim frekvencije f_a i f_b
- za mali ζ : $f_n \approx f_{d,\text{vrš}}$ (u rez.)
- 127 ◀ točno: $f_n = f_{d,\text{vrš}}/\sqrt{1 - 2\zeta^2}$
- konačno: $\zeta = (f_b - f_a)/(2f_n)$
- vrijedi i za $f_{v,\text{vrš}}$, $f_{a,\text{vrš}}$ (mali ζ)
- R_d , R_v i R_a bliske oko f_n

Sustav s jednim stupnjem slobode: Duhamelov integral

- pobuda nije periodična: rješenje – Duhamelov integral (str. 47.)
- pretpostavka: model miruje prije pobude
- postavka problema: $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$, $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = 0$
- temeljna zamisao: prikazati $p(t)$ nizom neizmjereno kratkih impulsa
- tražimo odziv modela na pobudu svakim impulsom
- konačno rješenje: zbroj svih odziva

Odziv na jedinični impuls

- impuls: kratkotrajno djelovanje velike sile
- sila iznosa $1/\varepsilon$, trajanja ε , s početkom u τ
- jedinični impuls:
 $\varepsilon \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$, ali iznos impulsa uvijek 1
- matematički:
Diracova funkcija $\delta(t - \tau)$ u $t = \tau$



Sustav s jednim stupnjem slobode: Duhamelov integral

- opisno: vrlo (neizmjerno) tanka linija koja se pruža u beskraj
- djelovanje kratkotrajne sile $p(t)$ na masu m : $p(t) = m\ddot{u}(t)$
- integriramo od početka do kraja toga impulsa:

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = m \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\ddot{u}(t) dt}_{d\dot{u}} = m [\dot{u}(t_2) - \dot{u}(t_1)] = m \Delta \dot{u}$$

- zaključak: iznos impulsa ($\int$) jednak promjeni (Δ) količine gibanja
- promotrimo pobudu okvira JEDINIČNIM impulsom ($\int p dt = 1$) u $t = \tau$
- prigušivač i opruga ne „stignu reagirati”: $c\dot{u}(\tau) = 0$ i $ku(\tau) = 0$
- opet ostaje $m\ddot{u}(\tau) = p(\tau)$: vrijedi prethodni integral
- možemo uzeti $t_2 = \tau$ i $t_1 = 0$ [$\dot{u}(t_1) = 0$], pa dobivamo ▶ početne uvjete:

$$\text{zbog: } 1 = m\dot{u}(\tau) \quad \Rightarrow \quad \dot{u}(\tau) = \frac{1}{m} = \text{const.} \quad u(\tau) = 0$$

- pobuda impulsom: slobodno titranje uz početnu brzinu (str. 54.)

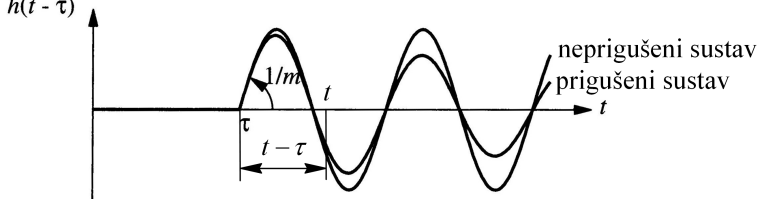
Sustav s jednim stupnjem slobode: Duhamelov integral

$$u(t) = u(\tau) \cos \omega_n t + \frac{\dot{u}(\tau)}{\omega_n} \sin \omega_n t = \frac{1}{m \omega_n} \underbrace{\sin [\omega_n(t - \tau)]}_{\substack{\text{translatirano} \\ \text{za } \tau}}, \quad t \geq \tau$$

- impuls uz prigušenje: slobodno titranje s prigušenjem (str. 63.),

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\zeta \omega_n t} \left[u(\tau) \cos \omega_D t + \frac{\dot{u}(\tau) + \zeta \omega_n u(\tau)}{\omega_D} \sin \omega_D t \right] \\ &= \frac{1}{m \omega_D} e^{-\zeta \omega_n(t-\tau)} \sin [\omega_D(t - \tau)], \quad t \geq \tau \end{aligned}$$

- funkcija $u(t) \equiv h(t - \tau)$: funkcija odziva na jedinični impuls $h(t - \tau)$



Odziv na opću pobudu

- opću pobudu $p(t)$ prikažemo nizom neizmjerljivo uskih impulsa
- nisu jedinični impulsi: imaju iznos $\int p d\tau = p(\tau) d\tau$ (površina)
- 140 ◀ početna brzina nije $1/m$ već $p(\tau) d\tau / m = p(\tau) d\tau \cdot 1/m$
- odziv na takav impuls: njegov iznos $\cdot$ rješenje za jedinični imp.
- znači: odziv na impuls iznosa $p(\tau)$ koji nastupa u τ ,

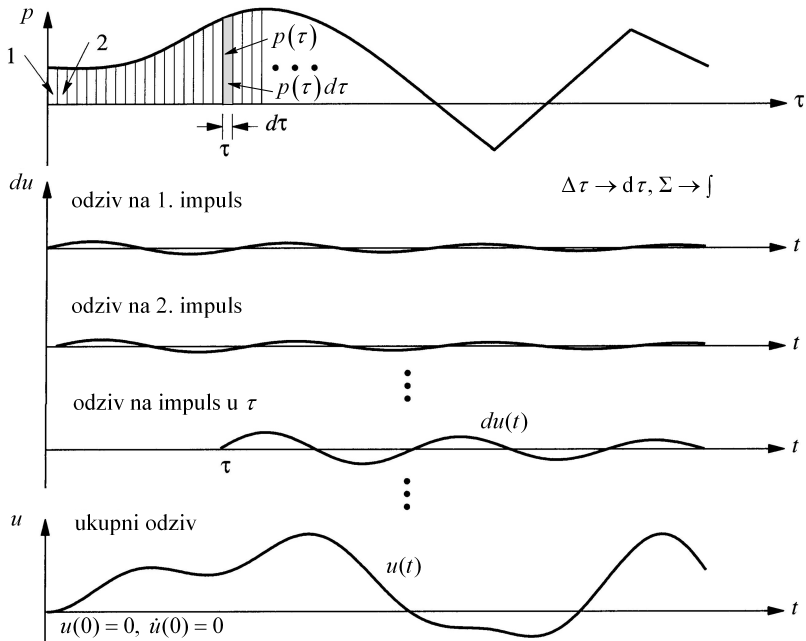
$$du(t) = \underbrace{[p(\tau) d\tau]}_{\text{iznos}} \underbrace{h(t - \tau)}_{\text{jedinični impuls}}, \quad t > \tau$$

- odziv do trenutka t : zbroj svih odziva na impulse do tada,

$$u(t) = \int_0^t du(t) d\tau = \int_0^t p(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad \text{konvolucijski integral}$$

- uvrstimo $h(t - \tau)$ za neprigušeni ili prigušeni sustav
- konvolucijski integral postaje Duhamelov integral

Sustav s jednim stupnjem slobode: Duhamelov integral



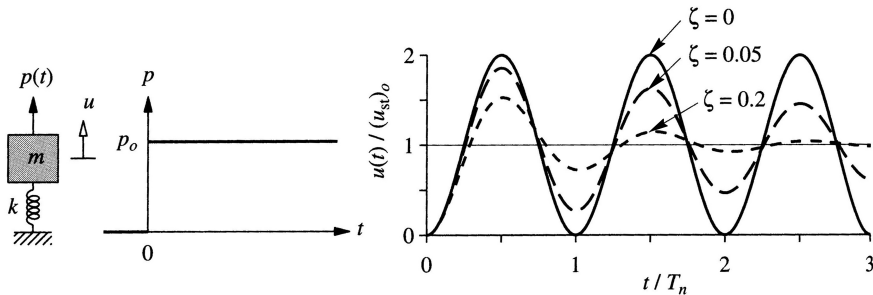
Sustav s jednim stupnjem slobode: Duhamelov integral

$$\text{za } \zeta = 0: \quad u(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) \sin [\omega_n(t - \tau)] d\tau$$

$$\text{▶ za } \zeta > 0: \quad u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin [\omega_D(t - \tau)] d\tau$$

- rješenja vrijede za: $\dot{u}(0) = 0$ i $u(0) = 0$
- za $\dot{u}(0) \neq 0$ i $u(0) \neq 0$: dodati rješenja za slobodno titranje ($\zeta \geq 0$)
- samo za linearne modele: superpozicija i impulsa i početnih uvjeta
- $p(\tau)$ jednostavna: analitičko rješenje integrala
- dobra alternativa rješavanju diferencijalne jednadžbe
- lakše integrirati nego riješiti jednadžbu
- $p(\tau)$ složena ili definirana numerički: numerička integracija
- prednost pred diferencijalnom jednadžbom
- ipak: postoje učinkovitije numeričke metode

Sustav s jednim stupnjem slobode: konstantna pobuda



- sila trenutno postigne p_0 i ostaje konstantnom: pobuda $p(t) = p_0$
- iz Duhamelovog integrala, uz transformacije:²⁰

$$u(t) = \frac{p_0}{m\omega_n} \int_0^t \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau = \frac{p_0}{m\omega_n^2} \left[\sin\omega_n t (\sin\omega_n \tau) \Big|_0^t \right. \\ \left. + \cos\omega_n t (\cos\omega_n \tau) \Big|_0^t \right] = \frac{p_0}{k} (1 - \cos\omega_n t) = (u_{st})_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{T_n} \right)$$

²⁰ $\sin[\omega_n(t-\tau)] = \sin\omega_n t \cos\omega_n \tau - \cos\omega_n t \sin\omega_n \tau$, $\sin\omega_n t$, $\cos\omega_n t$ ne ovise o τ
 $\int \cos\omega_n \tau d\tau = (1/\omega_n) \sin\omega_n \tau$, $\int \sin\omega_n \tau d\tau = -(1/\omega_n) \cos\omega_n \tau$

Sustav s jednim stupnjem slobode: konstantna pobuda

- model titra prirodnim periodom T_n oko $(u_{st})_0$
- ekstremni pomaci: $\dot{u}(t) = (u_{st})_0 \omega_n \sin \omega_n t = 0$
- maksimumi: $\omega_n t_0 = j\pi$, $(j = 1, 3, \dots) \rightarrow t_0 = j/2 T_n$
- minimumi: za $j = 0, 2, \dots$
- amplitude: $u(t_0) = (u_{st})_0 [1 - \cos(j\pi)] = 2(u_{st})_0$
- sporo, (statičko) djelovanje sile p_0 : uzrokuje $(u_{st})_0$
- trenutno djelovanje sile p_0 : uzrokuje dvostruko veći pomak
- ▶ uz prigušenje (opet rastavljanjem $\sin [\omega_D(t - \tau)]$):

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{p_0}{m \omega_D} \int_0^t e^{-\zeta \omega_n(t-\tau)} \sin [\omega_D(t - \tau)] d\tau \\ &= (u_{st})_0 \left[1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left(\cos \omega_D t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_D t \right) \right] \end{aligned}$$

- integracija složena: pomoć programa, primjerice Mathematica

Sustav s jednim stupnjem slobode: konstantna pobuda

- ovaj primjer: jednostavnije riješiti diferencijalnu jednadžbu,

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0$$

- partikularno rješenje (bilo koje za $p \neq 0$): $u_p = p_0/k$
- homogeno rješenje (slobodno titranje, za $p = 0$)
- ukupno:

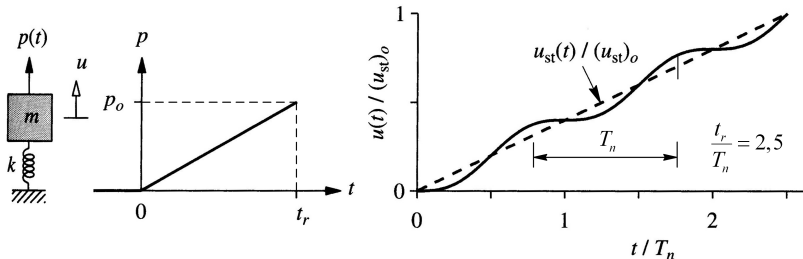
$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + \frac{p_0}{k}$$

- A i B odredimo iz početnih uvjeta: $u(0) = \dot{u}(0) = 0$,

$$\text{iz } u(0) = 0: A = -\frac{p_0}{k}, \quad \text{iz } \dot{u}(0) = 0: B = -\frac{p_0}{k} \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

- uvrstimo A i B u $u(t)$: 146 ◀ konačno rješenje, za $\zeta = 0$ – rješenje bez prig.
- premašenje statičkog iznosa: ovisi o iznosu prigušenja
- veće prigušenje: manje premašenje (isprekidano na slici)
- veće prigušenje: brže opadanje prema $(u_{\text{st}})_0$ – ustaljenom stanju

Sustav s jednim stupnjem slobode: linearna pobuda



- sila raste linearno i postiže p_0 u t_r , pobuda: $p(t) = p_0/t_r t$
- $p(t) \rightarrow \infty$, $u(t) \rightarrow \infty$, ali model vrijedi do granice elastičnosti
- iz Duhamelovog integrala, rastavljanjem $\sin [\omega_D(t - \tau)]$, uz:²¹

$$u(t) = \frac{p_0}{m \omega_n t_r} \int_0^t \tau \sin [\omega_n(t - \tau)] d\tau = \frac{p_0}{m \omega_n t_r} \left[\sin \omega_n t \int_0^t \tau \cos \omega_n \tau d\tau - \cos \omega_n t \int_0^t \tau \sin \omega_n \tau d\tau \right] = (u_{st})_0 \left(\frac{t}{t_r} - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t_r} \right), \text{ uz: } \omega_n = \frac{2\pi}{T_n}$$

²¹parcijalnom integracijom: $\int \tau \sin \omega_n \tau d\tau = \sin \omega_n \tau / \omega_n^2 - \tau \cos \omega_n \tau / \omega_n$
 $\int \tau \cos \omega_n \tau d\tau = \cos \omega_n \tau / \omega_n^2 + \tau \sin \omega_n \tau / \omega_n$

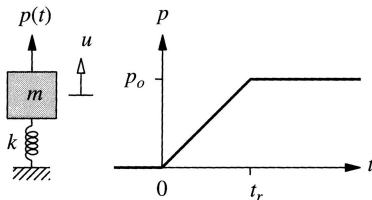
$$u(t) = (u_{\text{st}})_0 \left(\frac{t}{T_n} \frac{T_n}{t_r} - \frac{\sin 2\pi t/T_n}{2\pi t_r/T_n} \right)$$

- pomak titra oko statičke vrijednosti periodom T_n ($\zeta = 0$)

$$u_{\text{st}}(t) = \frac{p(t)}{k} = \frac{p_0}{k} \frac{t}{t_r} = (u_{\text{st}})_0 \frac{t}{t_r}$$

- statički pomak (isprekidano na slici): raste poput opterećenja
- funkcije se razlikuju samo za koeficijent $1/k$

Po dijelovima linearna pobuda



Po dijelovima linearna pobuda

- stvarno: sila uvijek raste postupno do punoga iznosa
- primjena: dinamički pristup statičkom opterećenju
- razlikujemo dva slučaja pobude:

$$p(t) = \begin{cases} p_0(t/t_r) & t \leq t_r \\ p_0 & t > t_r \end{cases}$$

- rješenje: superpozicija prethodnih rješenja
- 1 ► linearni dio (početak iz mirovanja):

$$u(t) = (u_{\text{st}})_0 \left(\frac{t}{T_n} \frac{T_n}{t_r} - \frac{\sin 2\pi t/T_n}{2\pi t_r/T_n} \right)$$

- 2 ► konstantni dio (postoji slobodni i prisilni član):

$$u(t) = u(t_r) \cos \omega_n(t - t_r) + \frac{\dot{u}(t_r)}{\omega_n} \sin \omega_n(t - t_r) \quad \text{slobodni član}$$
$$+ (u_{\text{st}})_0 [1 - \cos \omega_n(t - t_r)] \quad \text{prisilni član}$$

Po dijelovima linearna pobuda

- treći član: titranje iz mirovanja zbog konstantne pobude
- prva dva člana: slobodno titranje
- početni uvjeti $u(t_r)$ i $\dot{u}(t_r)$: kraj linearnog dijela ($t = t_r$)
- određivanje: iz jednadžbe za linearni dio uz $t = t_r$
- uvrstimo u ▶ rješenje za konstantni dio:

$$u(t) = (u_{st})_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\omega_n t_r} [(1 - \cos \omega_n t_r) \sin \omega_n (t - t_r) - \sin \omega_n t_r \cos \omega_n (t - t_r)] \right\}, \quad t \geq t_r$$

- izmnožimo zagradu i sredimo:²²

$$u(t) = (u_{st})_0 \left\{ 1 - \frac{1}{\omega_n t_r} [\sin \omega_n t - \sin \omega_n (t - t_r)] \right\}, \quad t \geq t_r$$

- uočimo: $\omega_n t = 2\pi(t/T_n)$, pa je $u(t)/(u_{st})_0 = f(t/T_n)$

²²uz: $\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha + \beta)$, $\alpha = \omega_n(t - t_r)$, $\beta = \omega_n t_r$

Po dijelovima linearna pobuda

- znači: normirani pomak funkcija normiranog vremena
- funkcija ovisi samo o t_r/T_n jer je $\omega_n t_r = 2\pi(t_r/T_n)$
- crtamo $u(t)/(u_{st})_0 = f(t/T_n)$, za različite t_r/T_n
- isprekidano: statički odziv $u_{st}(t) = p(t)/k$
- zaključci:

❶ sustav titra oko statičkog odziva periodom T_n

❷ ako je $\dot{u}(t_r) = 0$, sustav ne titra za $t \geq t_r$:

150₁ ◀ iz linearnog dijela: $u(t_r) = (u_{st})_0$, za: $t = t_r$ i $t_r/T_n = j$, (slika!)

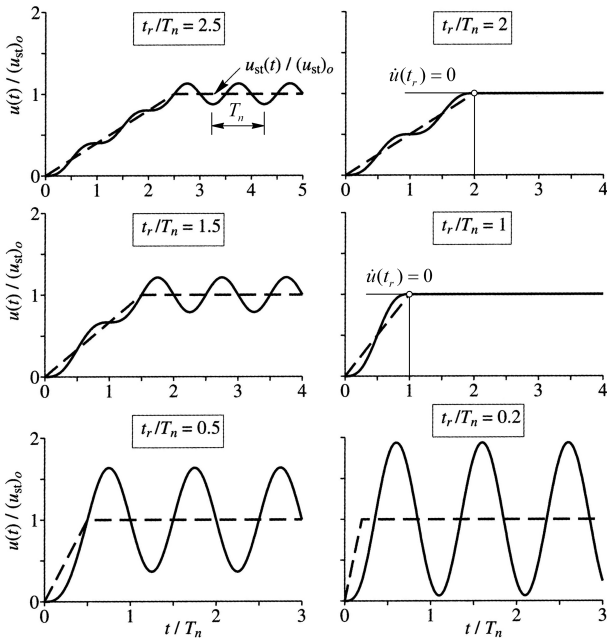
150₂ ◀ iz konstantnog dijela: $u(t) = \cos \omega_n(t - t_r)[u(t_r) - (u_{st})_0] + (u_{st})_0 = (u_{st})_0$

❸ mali t_r/T_n : odziv sličan onome za $p(t) = p_0$

❹ veliki t_r/T_n : titranje blisko statičkom odzivu

- spori rast sile: sustav slabo pobuđen
- posljedica: mali dinamički koeficijent za $t_r \gg T_n$

Po dijelovima linearna pobuda



Po dijelovima linearna pobuda: pojam spektra odziva

- najveća vrijednost pomaka: za trajanja konstantnog dijela
- tražimo ekstrem: deriviramo 151 ◀ rješenje za $p(t) = p_0$,

$$\frac{du(t)}{dt} = u_0 = (u_{st})_0 \left[1 + \frac{1}{\omega_n t_r} \sqrt{(1 - \cos \omega_n t_r)^2 + \sin^2 \omega_n t_r} \right]$$

- kvadriramo pod korijenom, pa dobivamo:²³

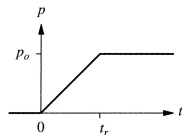
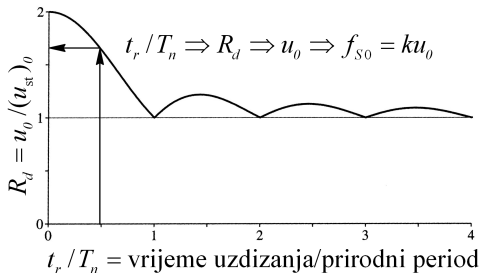
$$\begin{aligned} R_d &= \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \left[1 + \frac{1}{\omega_n t_r} \sqrt{2(1 - \cos \omega_n t_r)} \right] \\ &= 1 + \frac{1}{\omega_n t_r} 2 \sin \left| \frac{\omega_n t_r}{2} \right| = 1 + \frac{|\sin(\pi t_r / T_n)|}{\pi t_r / T_n}, \quad (\omega_n = \frac{2\pi}{T_n}) \end{aligned}$$

- dinamički koeficijent R_d ovisi samo o omjeru t_r / T_n
- spektar odziva: funkcija $R_d = f(t_r / T_n)$ za pripadnu pobudu
- potpuno određuje odziv sustava na zadanu pobudu

²³treba upotrijebiti: $\sin^2 \omega_n t_r + \cos^2 \omega_n t_r = 1$ i

$$\sin(\omega_n t_r / 2) = \sqrt{1/2(1 - \cos \omega_n t_r)} \Rightarrow \sqrt{1 - \cos \omega_n t_r} = \sqrt{2} |\sin(\omega_n t_r / 2)|$$

Po dijelovima linearna pobuda: pojam spektra odziva



- ekstremi $u_0 / (u_{st})_0$ ne ovise o p_0 i t_r , odnosno m i k
- vrijedi za SVE sustave s jednim stupnjem slobode bez prigušenja
- svojstva dobivenog spektra odziva:
 - 1 ako je $t_r < T_n/4$ (brzi rast opterećenja), tada je $u_0 \approx 2 (u_{st})_0$:
poput trenutnog djelovanja $p(t)$
 - 2 ako je $t_r > 3T_n$ (spori rast opterećenja), tada je $u_0 \approx (u_{st})_0$:
poput statičkog djelovanja $p(t)$
 - 3 ako je $t_r / T_n = 1, 2, \dots$, tada je $u_0 = (u_{st})_0$, jer je $\dot{u}(t_r) = 0$:
nema titranja za vrijeme $p(t) = p_0$

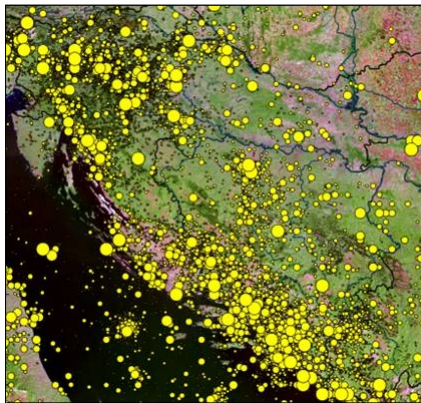
Bilježenje potresnog zapisa

- inženjerska potreba: zapis ubrzanja tla $\ddot{u}_g(t)$
- određuje opterećenje: $p_{\text{eff}}(t) = -m\ddot{u}_g(t)$ 362 ◀ efektivnu silu
- bilježenje zapisa: akceleroagrafom za jake trešnje (ne seizmografaom)
- pokretanje i zaustavljanje: okidačem ubrzanja (okida pri $\ddot{u}_{g0}$)
- težak zadatak: zabilježiti dugotrajne (≥ 15 s), jake trešnje ($\geq 0,20$ g)



- razlozi:
 - nepoznati smjer potresa
 - neispravan rad (kvare se)
 - oštećenja (udarci)
- bilježenje u tri smjera:
 - dva okomita horizontalna
 - jedan uspravni

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



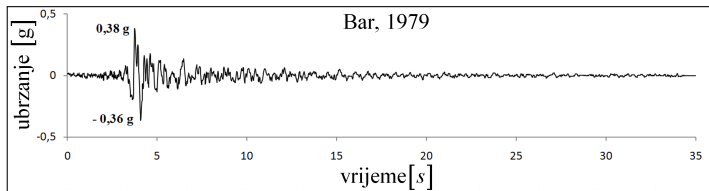
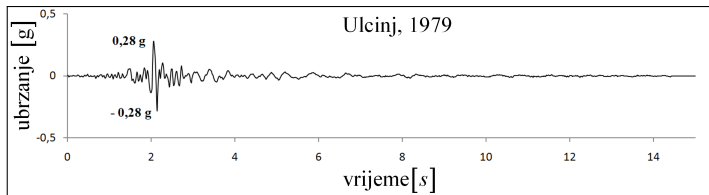
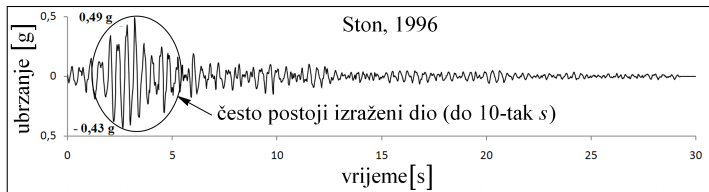
- naša zemlja: potresno aktivno područje
- od 373. g. pr. Kr. do 2005.
- najmanji kružić: $M \leq 3$
- najveći kružić: $M = 6$
- temelj seizmičkih karata RH
- propisuju se područja i iznosi vršnih ubrzanja tla a_g

izvor: http://www.gfz.hr/GO_Monografija.htm

- potresni zapisi: vrlo nepravilni po amplitudi i trajanju
- za potrebe proračuna i propisa: bilježe se na tlu (ne u/blizu zgradi)

M – magnituda potresa prema Richterovoj ljestvici (2 do 10). Poblježe:
http://hr.wikipedia.org/wiki/Richterova_ljestvica#Ljestvica

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



- MAKSIMUMI

- horizontalni:

$\ddot{u}_{g0} = 2,7 \text{ g}$
Tohoku, JP,
2011. god.

- vertikalni:

$\ddot{u}_{g0} = 2,2 \text{ g}$
Christchurch,
NZ, 2011. god.

$\ddot{u}_{g0} = 3 \text{ g} (?)$
Walau, NZ,
2016. god.

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

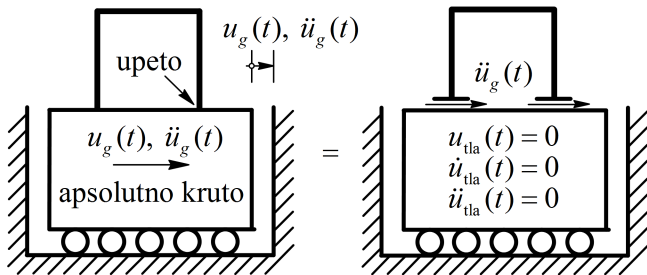
Približna povezanost Richterove magnitude, vršnog ubrzanja tla i trajanja jake trešnje za područje Kalifornije

Richterova magnituda [M]	Vršno ubrzanje [g]	Trajanje jake trešnje [s]
5,0	0,09	2
5,5	0,15	6
6,0	0,22	12
6,5	0,29	18
7,0	0,37	24
7,5	0,45	30
8,0	0,50	34
8,5	0,50	37

izvor: Lindeburg, M. R.; McMullin, K. M.:
Seismic Design of Building Structures

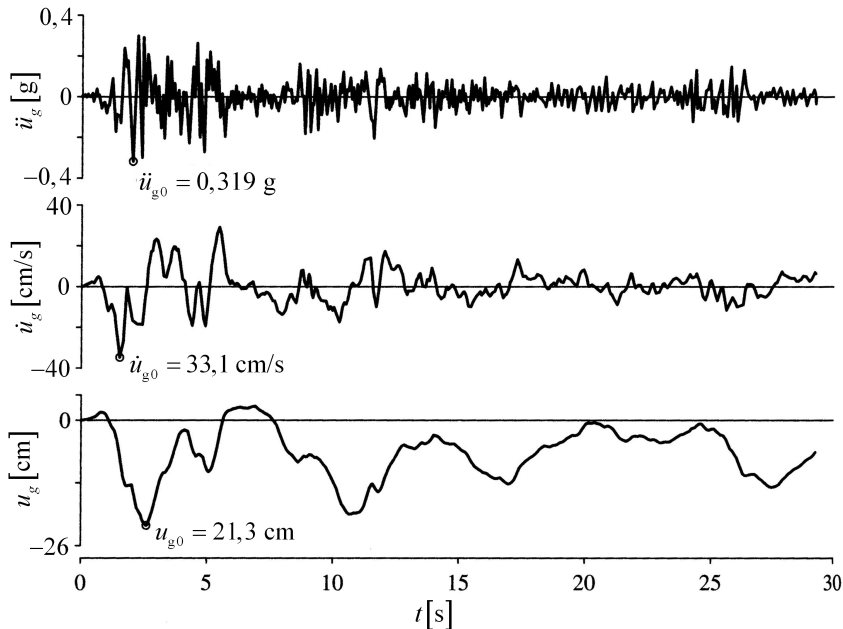
Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

- niz od 1500 do 3000 točaka na razmaku $1/50$ do $1/100$ s
- pretpostavka: isti zapis djeluje na temelje konstrukcije
- znači: zapisi neovisni o utjecaju konstrukcije na tlo
- istoznačno tvrdnji o 35₁ ◀ apsolutno krutome tlu, što stvarno ne postoji



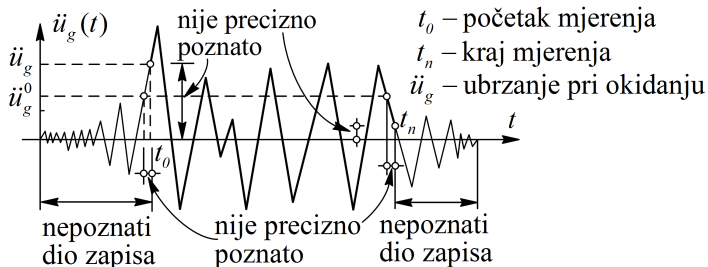
- uobičajeno: tlo se deformira od gibanja zgrade
- prihvatljivo malo: ako je konstrukcija podatljiva, a tlo kruto
- značajno: kruta konstrukcija, podatljivo tlo – izobličenje zapisa

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

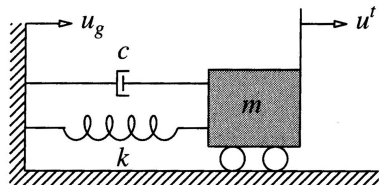
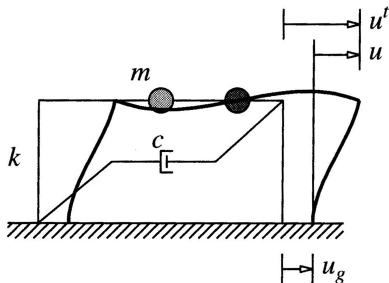
- često u uporabi: EL CENTRO, smjer sjever–jug, 18. 5. 1940.²⁴
- zapis brzine i pomaka: integriranje ubrzanja i brzine
- okidanje: ako je $\ddot{u}_g \geq \ddot{u}_g^0$, za $\ddot{u}_g < \ddot{u}_g^0$ uređaj miruje
- posljedica: nepoznat početni dio zapisa – problem integriranja



- zapise treba sravniti: popravak osnovne linije ($\dot{u}_g(t_n)$ i $u_g(t_n) \approx 0$)
- vrijedi za analogne uređaje: još uvijek veliki broj zapisa
- digitalni uređaji: postoji predmemorija (stalno rade i brišu)

²⁴http://nisee.berkeley.edu/data/strong_motion/a.k.chopra/

Jednadžba gibanja



- ▶ **jednadžba gibanja** (iz $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t)$ /: m i $c/m = 2\zeta\omega_n$, str. 60):

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = -\ddot{u}_g(t), \quad \text{rješenje: } u = f(t, T_n, \zeta)$$

- za zadano $\ddot{u}_g(t)$ odziv ovisi SAMO o ω_n (ili T_n) i ζ
- sustavi jednakih T_n i ζ imaju iste odzive ($T_n = 2\pi/\omega_n = 2\pi\sqrt{m/k}$)
- jedan može imati veću masu ili krutost (važan omjer)
- zapisi ubrzanja vrlo nepravilni: analitičko rješenje nije moguće

- postoji točno numeričko rješenje jednadžbe gibanja
- metodom ▶ vremenskog prirasta:²⁵ linearna interpolacija pobude
- pretpostavka: linearna promjena $\ddot{u}_g(t)$ kroz Δt (uzeto 1/50 s)
- točno rješenje jednadžbe gibanja u svakom prirastu vremena

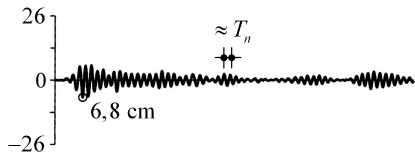
Svojstva rješenja

- odziv dvije skupine okvira na pobudu zapisom EL CENTRO
- prva skupina (tri modela): različiti T_n , ISTI ζ (2%)
- period odziva $u(t) \approx T_n$, (iz teorije slučajnih titranja)
- veći T_n , veći u_0 : često, ali nije pravilo (graf $T_n - u_0$, str. 171.)
- druga skupina (tri modela): različiti ζ , ISTI T_n (2 s)
- veći ζ , manji u_0 : pravilo (ζ djeluje povoljno, ali je izvorno malo)
- za isti T_n : sličan period odziva $u(t)$ i vrijeme nastupa u_0

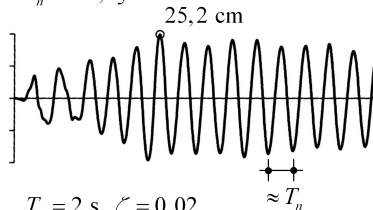
²⁵vremenske diskretizacije

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

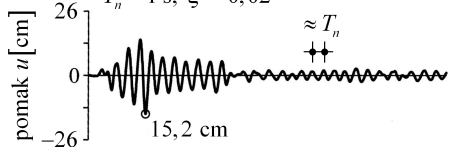
$$T_n = 0,5 \text{ s}, \zeta = 0,02$$



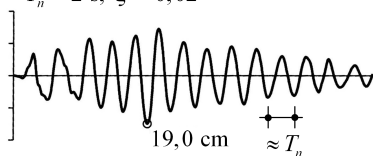
$$T_n = 2 \text{ s}, \zeta = 0$$



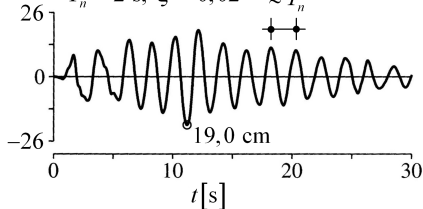
$$T_n = 1 \text{ s}, \zeta = 0,02$$



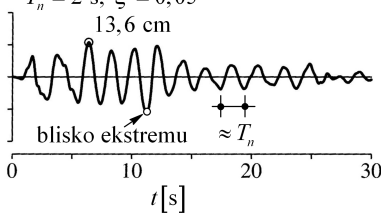
$$T_n = 2 \text{ s}, \zeta = 0,02$$



$$T_n = 2 \text{ s}, \zeta = 0,02$$



$$T_n = 2 \text{ s}, \zeta = 0,05$$

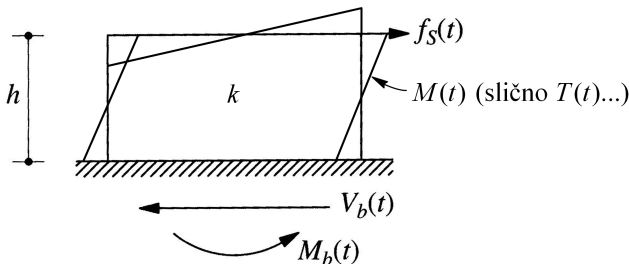


Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

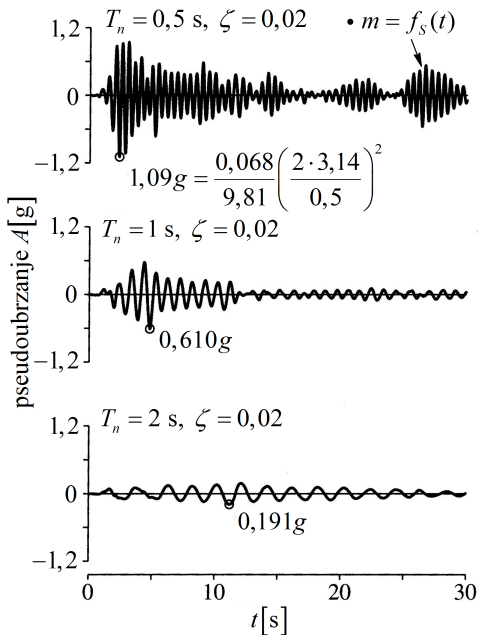
- poznato $u(t)$: unutarnje sile odredimo statički (dva načina, str. 41.)
- ekvivalentna²⁶ bočna sila: prikladna za potresnu analizu
- razlog: temelj kvazistatičkog pristupa prema propisima
- budući da je $f_S(t) = ku(t)$ i $k = m\omega_n^2$ dobivamo

$$f_S(t) = m\omega_n^2 u(t) = mA(t), \quad A(t) = \omega_n^2 u(t)$$

- bočna sila: $m \cdot A(t)$, a ne $m \cdot \ddot{u}^t(t)$, $A(t)$ – pseudoubrzanje
- primjer određivanja $A(t)$: umnožak $u(t)$ 1. skupine i $\omega_n^2 = (2\pi/T_n)^2$



Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



- proračun unutarnjih sila:
1 ▶ statika za $f_S(t)$ u nekom t
- odredimo $M(t), T(t), \dots$
- određivanje 2 ▶ reakcija:

$$V_b(t) = f_S(t) = m A(t)$$

$$M_b(t) = h f_S(t) = h V_b(t)$$

$$V_b - 3 \text{ ▶ poprečna reakcija}$$

$$M_b - 4 \text{ ▶ moment prevrtanja}$$

- ekvivalentni sustav (str. 32.):
- nepotreban pojam bočne sile
- nema $M(t), T(t), \dots$
- sila u opruzi izravno $ku(t)$

Pojam i tvorba spektra odziva

- prikaz SVIH ekstrema (amplituda) odziva okvira na potresnu pobudu
- JEDNA funkcija za SVE okvire – sustave s jednim stupnjem slobode
- jednostavnija primjena spoznaja dinamike konstrukcija (iščezava t)
- ključno za razvoj kvazistatičkog postupka proračuna
- za odabrani ζ spektar odziva ovisi samo o $T_n (\omega_n, f_n)$; $n = 1, \dots, 112$
- treba odrediti nekoliko krivulja s uobičajenim iznosima ζ
- primjerice, vršna vrijednost pomaka, brzine i ubrzanja (za jedan T_n) jest:

$$u_0(T_n, \zeta) \equiv \max_t |u(t; T_n; \zeta)|, \quad \text{spektar odziva pomaka: } u_0 = f(T_n; \zeta)$$

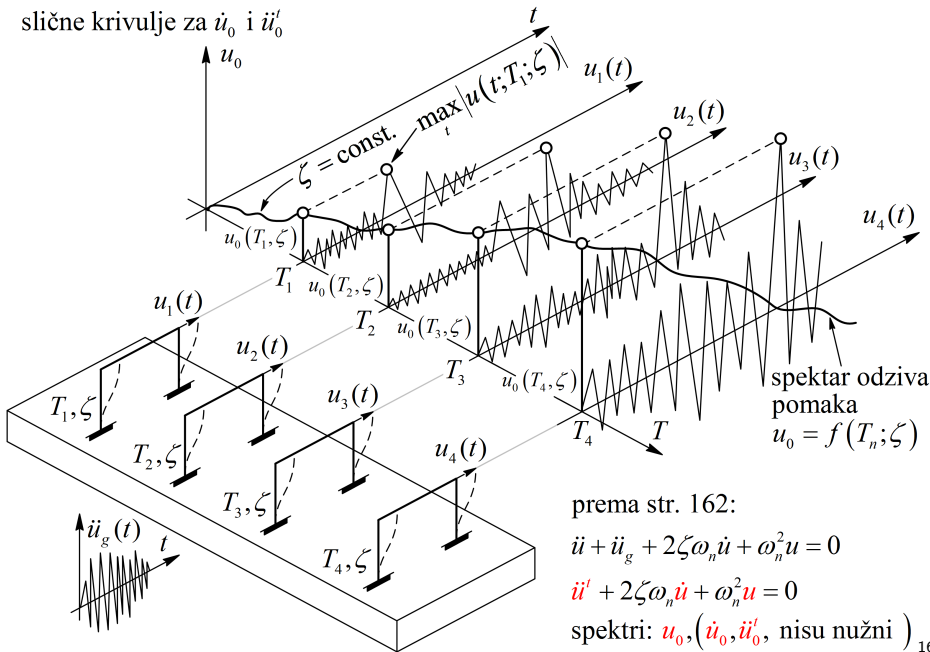
$$\dot{u}_0(T_n, \zeta) \equiv \max_t |\dot{u}(t; T_n; \zeta)|, \quad \text{relativne brzine: } \dot{u}_0 = f(T_n; \zeta)$$

$$\ddot{u}_0^t(T_n, \zeta) \equiv \max_t |\ddot{u}^t(t; T_n; \zeta)|, \quad \text{ukupnog ubrzanja: } \ddot{u}_0^t = f(T_n; \zeta)$$

- $f(T_n; \zeta)$: simbolički zapisi ovisnosti amplitude o periodu ($\zeta = \text{const.}$)
- uočite: nema ovisnosti o t i zbog $|\cdot|$ spektri prema definiciji $\oplus$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

slične krivulje za $\dot{u}_0$ i $\ddot{u}_0'$



Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

- proračun unutarnjih sila: dovoljno poznavati $u(t)$ (str. 166., 167.)
- ali iz spektra odziva pomaka odmah znamo ekstrem: $D \equiv u_0$
- pa i ekstremnu bočnu silu: $f_{S0} = ku_0 = kD$ (i ekstremne $M, T, N, \dots$)

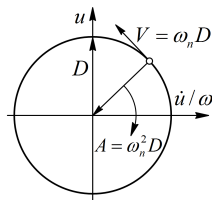
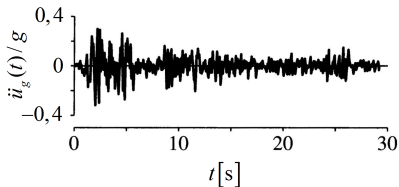
Spektar odziva pomaka

- 1 riješimo jednadžbu gibanja (uz T_n i ζ) za potresni zapis
 - 2 iz $u(t)$ odredimo ekstrem $D \equiv u_0$ (pozitivan ili negativan)
 - 3 određena točka spektra (T_n, D) za prigušenje ζ
 - 4 ponovimo postupak za niz vrijednosti T_n , uz $\zeta = \text{const.}$
 - 5 nova krivulja: izmijenimo ζ i sve ponovimo
- zbog tvorbe projektnog (glatkog) spektra DEFINIRAMO još dva spektra

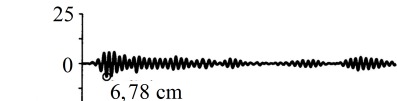
Spektar odziva pseudobrzine – aproksimacija spektra brzine

- promatramo slobodno titranje bez prigušenja pomaka D i brzine V
- maksimum potencijalne energije: $E_{S0} = ku_0^2/2 = kD^2/2$ (str. 76.)
- maksimum kinetičke energije: $E_{K0} = mV^2/2$ (str. 76.)

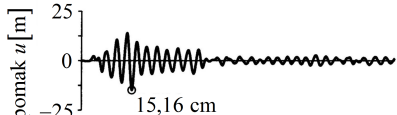
Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



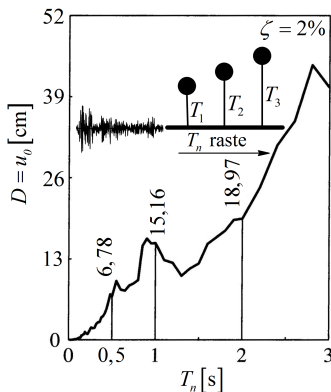
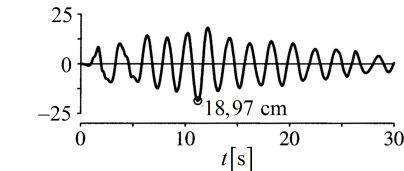
$T_n = 0,5 \text{ s}$
 $\zeta = 2\%$



$T_n = 1 \text{ s}$
 $\zeta = 2\%$



$T_n = 2 \text{ s}$
 $\zeta = 2\%$



Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

- nema prigušenja, $771 \leftarrow$ maksimumi jednaki: $E_{S0} = E_{K0}$

$$\frac{kD^2}{2} = \frac{mV^2}{2} = \frac{kV^2}{2\omega_n^2} \Rightarrow V = \omega_n D = (2\pi/T_n) D$$

- vršna relativna pseudobrzina V : određuje i E_{S0} (jednako E_{K0})
- općenito: $V \neq \dot{u}_0$ zato naziv pseudobrzina
- razlog: vrijedi za $p = 0$ i $\zeta = 0$, a ne za $p_{\text{eff}} = -m\ddot{u}_g$ i $\zeta > 0$
- spektar pseudobrzine: množenje spektra pomaka s $2\pi/T_n$

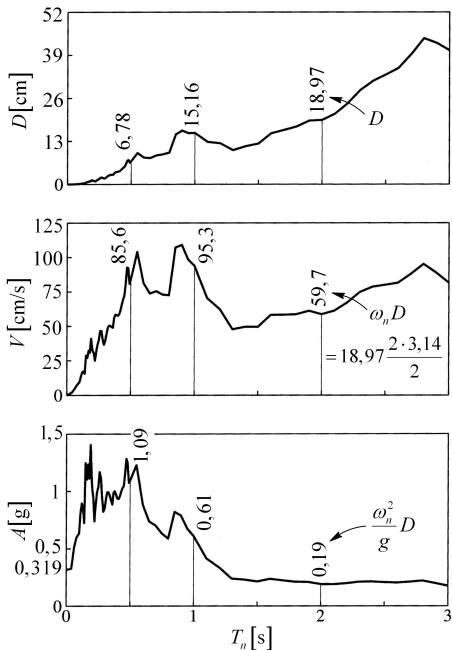
Spektar odziva pseudoubrzanja – aproksimacija spektra ubrzanja

- vršno $[D \text{ je maks. od } u(t)!]$ pseudoubrzanje: $A = \omega_n^2 D = (2\pi/T_n)^2 D$
- važno: proporcionalno s vršnom $1672 \leftarrow$ poprečnom reakcijom:

$$f_{S0} = V_{b0} = mA \frac{g}{g}, \quad V_{b0} = \frac{A}{g} w, \quad w = mg - \text{težina zgrade}$$

- veličina A/g : KOEFICIJENT POPREČNE REAKCIJE ili bočne sile
- koeficijent kojim množimo težinu zgrade = poprečna reakcija

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



- pazite: poprečna reakcija je sila inercije mA , a ne $m\ddot{u}_0^t$
- općenito $A \neq \ddot{u}_0^t$: zbog toga naziv pseudoubrzanje
- spektar pseudoubrzanja: množenje spektra pomaka s $\omega_n^2 = (2\pi/T_n)^2$
- ordinate spektra jednake 1671 ◀ ekstremu funkcije $A(t)$
- spektri sadrže iste podatke: razlika do na ω_n ili ω_n^2
- jedan dovoljan: ostale lako odredimo, čemu tri?

Zajednički $D - V - A$ spektar

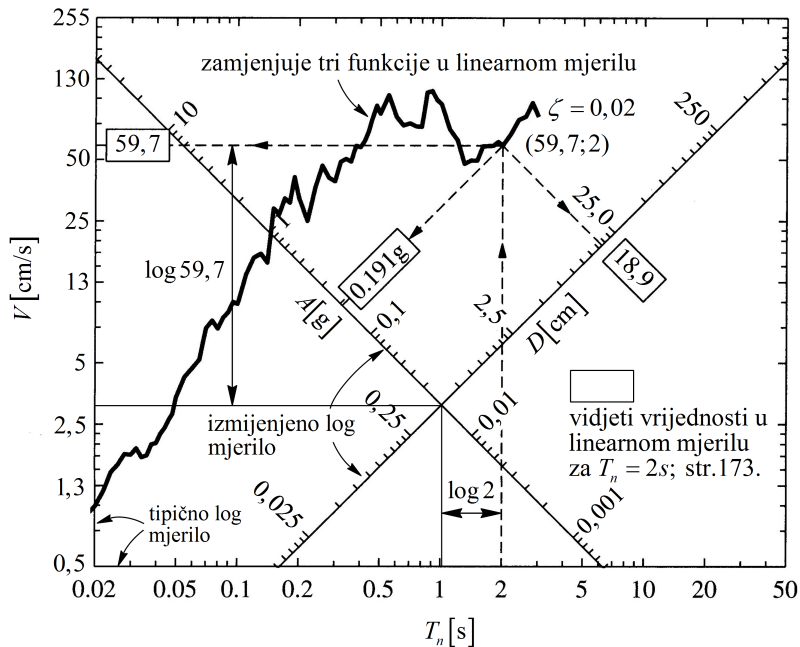
$$D \rightleftharpoons V = \omega_n D \rightleftharpoons A = \omega_n^2 D$$

- 1. razlog: svaki spektar određuje važnu fizikalnu vrijednost
 - ① spektar pomaka: vršnu vrijednosti pomaka D (str. 170.)
 - ② spektar pseudobrzine: maksimalnu potencijalnu energiju E_{S0} (str. 172.)
 - ③ spektar pseudoubrzanja: vršnu poprečnu reakciju V_{b0} (str. 172.)
- 2. razlog: potrebni u postupku tvorbe i pojašnjenja projektnog spektra
- definiramo ▶ jednoznačnu vezu između D , V i A :

$$\begin{array}{l} V = \omega_n D \\ A = \omega_n^2 D \end{array} \Rightarrow \frac{A}{\omega_n} = V = \omega_n D \quad \text{ili} \quad \frac{T_n}{2\pi} A = V = \frac{2\pi}{T_n} D$$

- slično povezani 121 ◀ dinamički koeficijenti odziva za harmonijsku pobudu
- logaritamski prikaz $V = f(T_n)$: daje zajednički (tripartitni) spektar
 $\log V = \log(T_n) + \log(A/(2\pi)), \quad \log V = -\log(T_n) + \log(2\pi D)$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

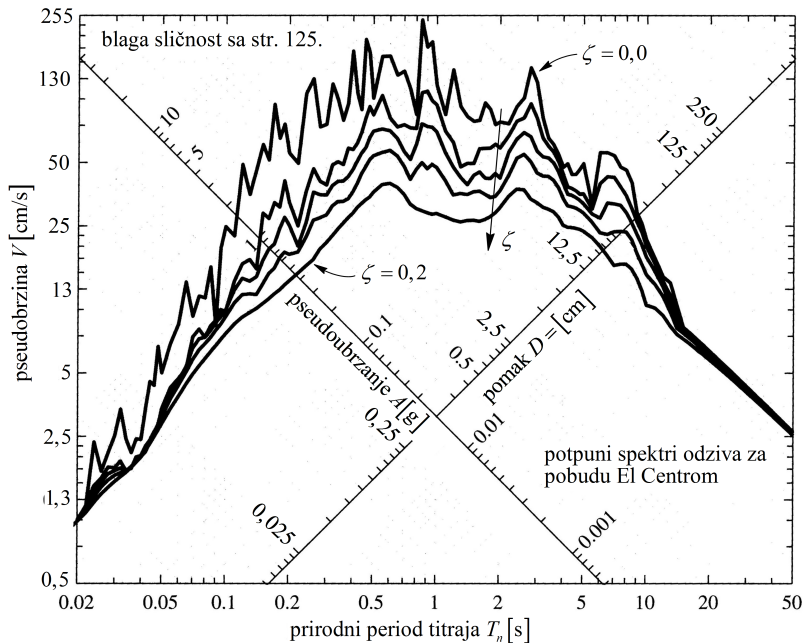


Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

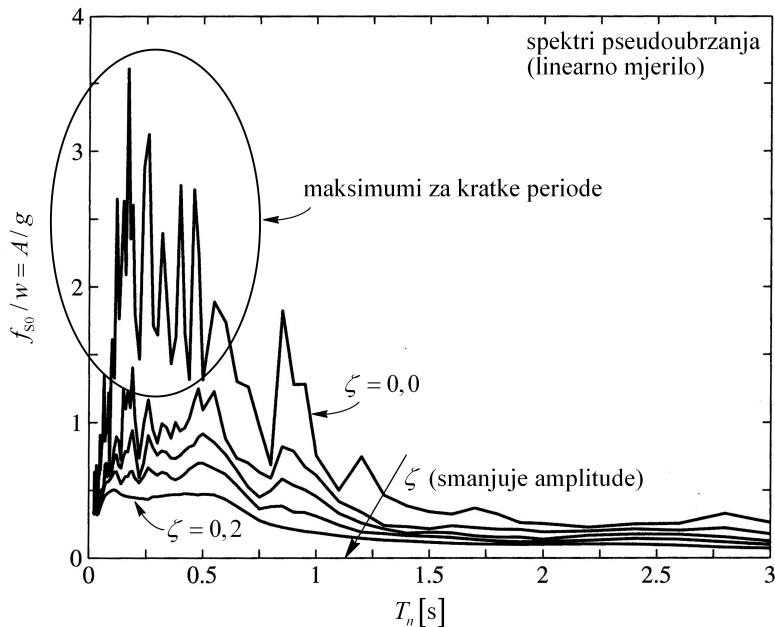
- spektar mora vrijediti za većinu konstrukcija (krutih i gipkih)
- uključuje široko područje perioda: od 0,02 do 50 s (log pogodan)
- primjer: most Golden Gate poprečno, $T_n = 18,2$ s
- određuje se za prigušenja do 20% (0, 2, 5, 10 i 20%), str. 177.
- pseudoubrzanje često prikazano normirano i izdvojeno (str. 178.)
- prema str. 172.: $V_{b0} = A/g w \Rightarrow A/g = f_{S0}/w$ (ordinata!)
- iz T_n odredimo reakciju $V_{b0} = f_{S0}$ (w poznato)
- izdvaja se i spektar pomaka (str. 179.): važan vršni pomak (dilatacije)
- izrada i objava spektara: nakon bilježenja značajnih potresa
- postoji veliki broj zapisa²⁷: uočava se promjena ▶ oblika zapisa o,
 - udaljenosti od rasjeda, geološkim svojstvima područja i lokalnim uvjetima temeljenja
- stohastička pojava: ipak moguće uočiti neke pravilnosti!
- važno za procjene ponašanja budućih potresa

²⁷Prvi zapis: Long Beach, California, 1933.; Tohoku, Japan, 2011.: 3000 zapisa.

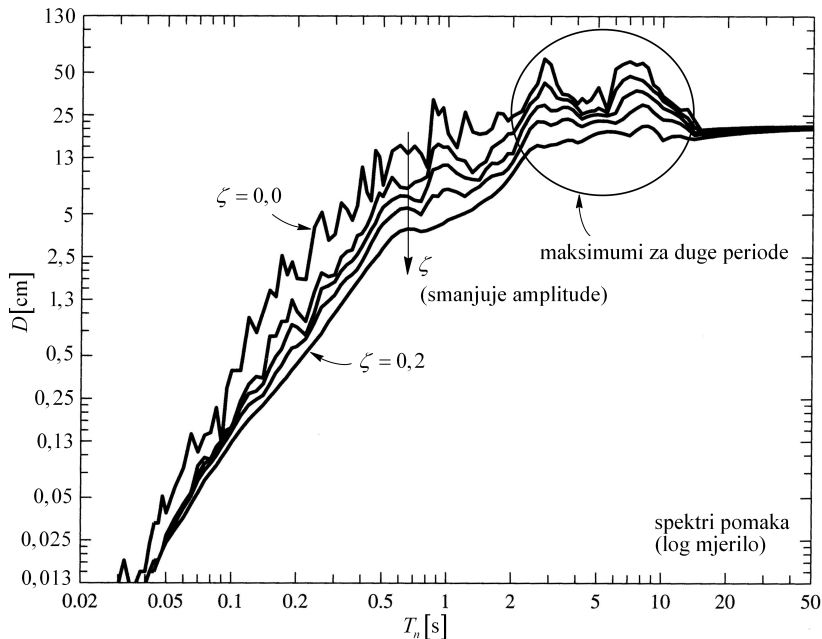
Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



Postupak tvorbe spektra odziva

- 1 numerički definirati $\ddot{u}_g(t)$, uobičajeno svakih 0,02 s
- 2 odabrati prirodni period T_n i prigušenje ζ
- 3 numerički proračunati odziv $u(t)$ na pobudu $\ddot{u}_g(t)$
- 4 pronaći amplitudu u_0 (vršnu vrijednost) odziva $u(t)$
- 5 odrediti ordinate spektra:

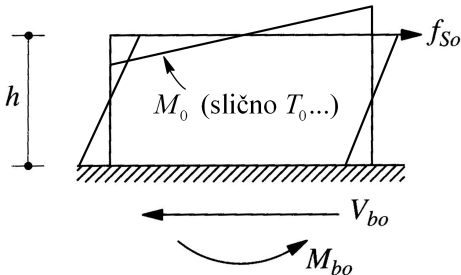
$$D = u_0, \quad V = (2\pi/T_n)D, \quad A = (2\pi/T_n)^2 D$$

- 6 ponoviti korake 2 – 5 za dovoljno vrijednosti T_n (uz $\zeta = \text{const.}$)
 - 7 prikažemo rezultate u obliku jedne (log. mj.) ili tri funkcije (lin. mj.)
 - 8 ponoviti korake 2 – 7 uz drugo prigušenje: nova funkcija
- broj perioda T_n od 0,02 do 50 s iznosi 112 (gušće za male T_n)

Vršne vrijednosti unutarnjih sila

- iz spektra izravno odredimo vršni pomak i sile
- nisu potrebni dinamički proračuni i traženje ekstrema
- obavljeno pri tvorbi spektra (sigurno max. za usvojeni model i zapis)
- za T_n i ζ statičkog sustava očitamo D , V ili A
- dovoljna jedna od tri krivulje:

$$\underbrace{u_0 = D}_{\text{str. 179.}} = \underbrace{(T_n/2\pi)V}_{\text{str. 177.}} = \underbrace{(T_n/2\pi)^2 A}_{\text{str. 178.}}$$



- vršno bočno opterećenje:

$$f_{s0} = kD = mA$$

- statički proračun (vršne sile):

$$V_{b0} = kD = mA$$

$$M_{b0} = hV_{b0}, M_0, T_0, N_0 \dots$$

Svojstva spektra odziva

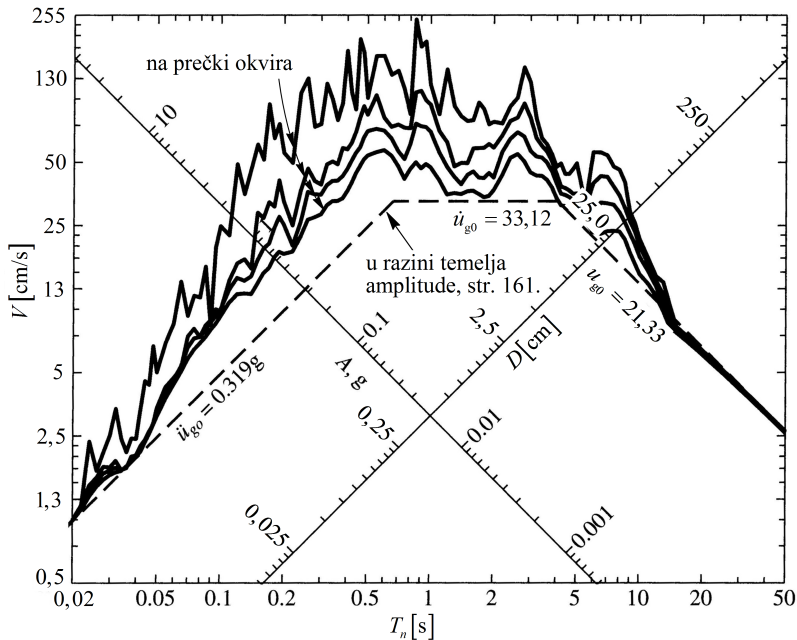
- promatramo tri oblika spektra:
 - s ucrtanim ekstremima zapisa: u_{g0} , $\dot{u}_{g0}$, $\ddot{u}_{g0}$ (str. 183.)
 - normirani oblik D/u_{g0} , $V/\dot{u}_{g0}$, $A/\ddot{u}_{g0}$ (str. 184.)
 - za $\zeta = 5\%$ s linearnom aproksimacijom (isprekidano, str. 185.)
- zbog dinamičkih učinaka: $A > \ddot{u}_{g0}$ (do $10\ddot{u}_{g0}$), inače $A = \ddot{u}_{g0}$:

$$\underbrace{\ddot{u}}_{\approx 0} + \underbrace{2\zeta\omega_n\dot{u}}_{\approx 0} + \underbrace{\omega_n^2 u}_{A(t)} = -\ddot{u}_g(t), \quad \underbrace{A(t) \approx -\ddot{u}_g(t), \quad A \approx \ddot{u}_{g0}}_{\text{iste funkcije do na predznak}}$$

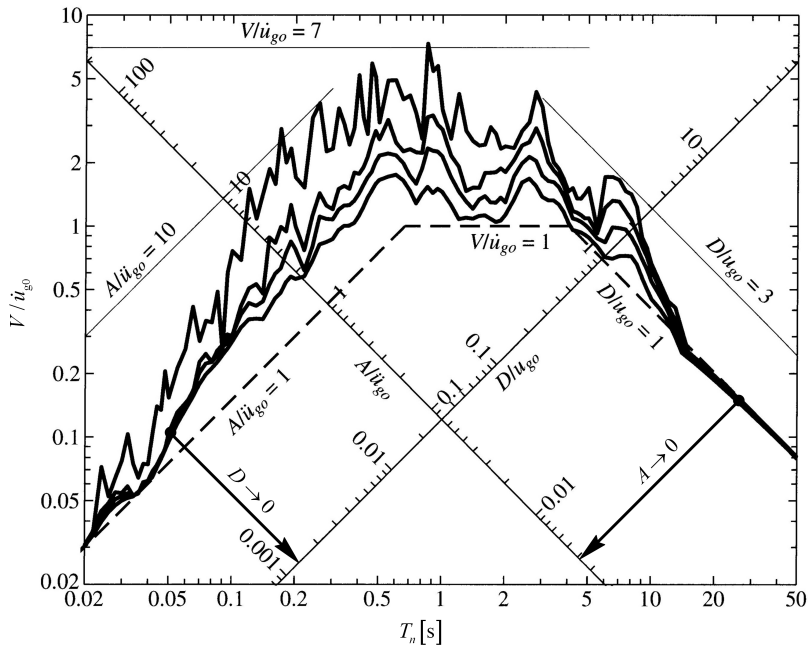
- analiziramo područja spektra među periodima $T_a - T_f$ (str. 185.)

Ordinate područja: periodi [s]					
T_a	T_b	T_c	T_d	T_e	T_f
0,035	0,125	0,5	3,0	10	15

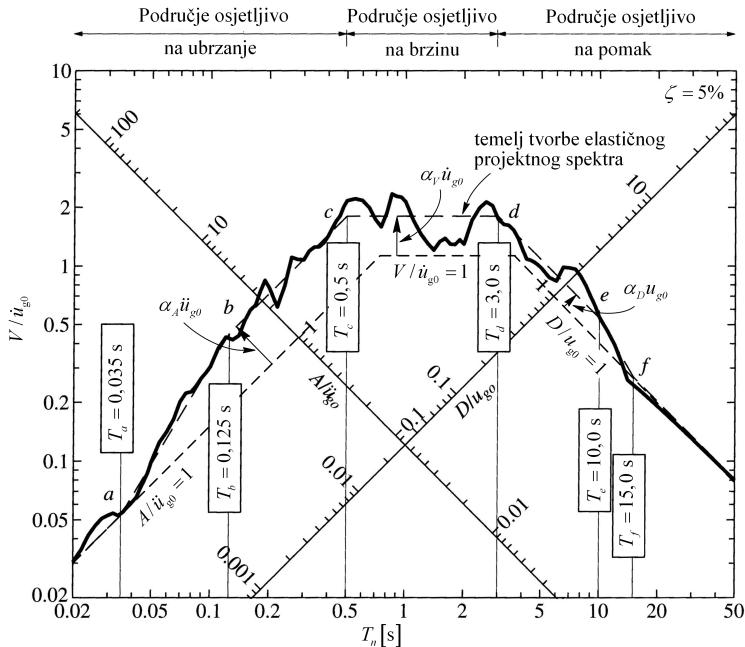
Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



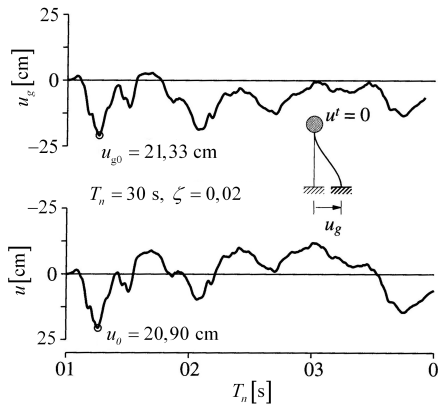
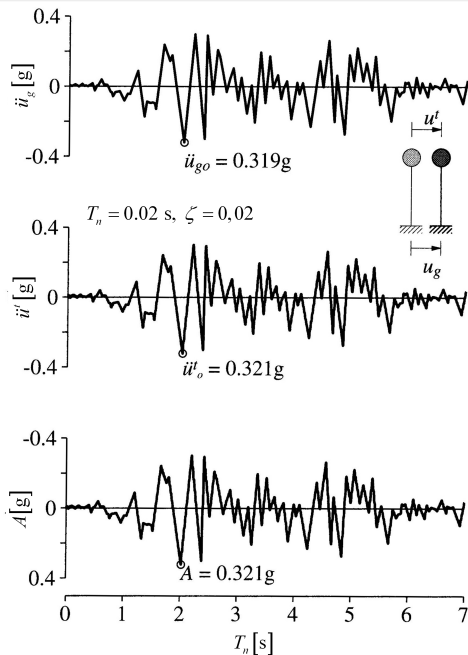
Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

- sustav VRLO KRATKOG perioda ($T_n < T_a$, str. 184.): $D \rightarrow 0$ i $A \rightarrow \ddot{u}_{g0}$
- vrlo kruti stupovi, nema relativnog pomaka mase (u , pa i $D \rightarrow 0$)
- jednako gibanje mase i tla: $u = 0$ (vidjeti za EL CENTRO, str. 187.)
- 17 ◀ dakle: $u^t = u_g + u$, $u \approx 0 \Rightarrow u^t \approx u_g \Rightarrow \ddot{u}^t \approx \ddot{u}_g \Rightarrow \ddot{u}_0^t \approx \ddot{u}_{g0}$
- 1 ▶ iz jednadžbe gibanja (str. 163., uz $\ddot{u} + \ddot{u}_g = \ddot{u}^t$): $\ddot{u}^t = -2\zeta\omega_n\dot{u} - \omega_n^2 u$
- 2 ▶ uz mali ζ : $2\zeta\omega_n\dot{u} \approx 0 \Rightarrow \ddot{u}^t \approx -\omega_n^2 u = -A(t) \Rightarrow \ddot{u}_0^t \approx A$
- iz istaknutih izraza: $A \approx \ddot{u}_{g0}$ (0,321 g na str. 187.)
- zaključak: ako $T_n \rightarrow 0$ spektri teže prema vršnom ubrzanju tla
- sustav VRLO DUGOG perioda ($T_n > T_f$, str. 184.): $A \rightarrow 0$ i $D \rightarrow u_{g0}$
- mali A i $f_{S0} = mA$ (slabo opterećen okvir): male sile (str. 181.)
- vrlo gipki stupovi, tlo se giba (zatitra), masa stoji (str. 187.)
- nema apsolutnog pomaka i ubrzanja mase: $u^t = 0$, $\ddot{u}^t = 0$ i $\ddot{u}_0^t = 0$
- pokazali smo za mali ζ : $A \approx \ddot{u}_0^t \Rightarrow A \approx 0$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

- iz $u^t \approx 0 \Rightarrow u \approx -u_g \Rightarrow D \approx u_{g0}$ (vidjeti za EL CENTRO, str. 187.)
- u zarotirani u_g : nepoznat početak i kraj zapisa [problem integracije $\ddot{u}_g(t)$]
- zaključak: ako $T_n \rightarrow \infty$ spektri teže prema vršnom pomaku tla
- sustavi KRATKIH perioda, $T_b < T_n < T_c$ (str. 185.): $A > \ddot{u}_{g0}$
- premašenje ovisi o T_n i ζ (jer odziv ovisi samo o T_n i ζ – str. 163.)
- aproksimacija spektralne krivulje pravcem $A = \alpha_A \ddot{u}_{g0}$ (str. 185.)
- $A = \text{const.}$ gubi se ovisnost o T_n , ostaje o ζ
- sustavi DUGIH perioda, $T_d < T_n < T_e$ (str. 185.): $D > u_{g0}$
- aproksimacija pravcem $D = \alpha_D u_{g0} = \text{const.}$ (str. 185.)
- sustavi SREDNJIH perioda, $T_c < T_n < T_d$ (str. 185.): $V > \dot{u}_{g0}$
- aproksimacija pravcem $V = \alpha_V \dot{u}_{g0} = \text{const.}$ (str. 185.)
- prigušenje: određuje koeficijente uvećanja α_A , α_D i α_V (veći od 1)
- područja $T_a - T_b$ i $T_e - T_f$ (str. 185.) također zamjena pravcima

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

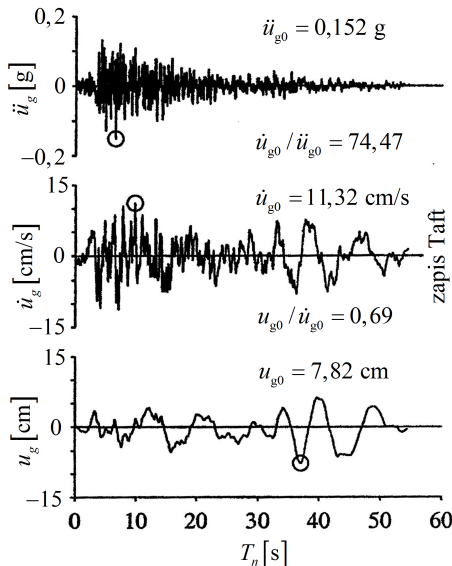
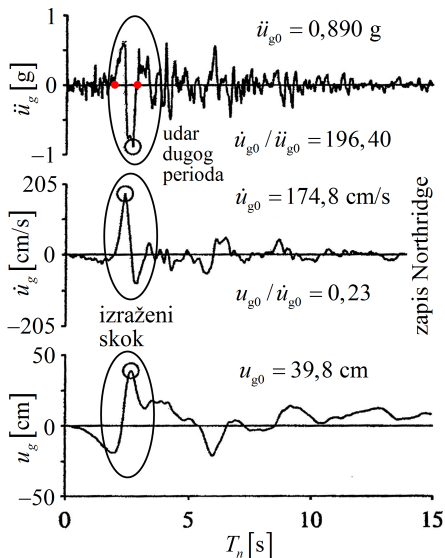
- logično: podijeliti spektar na tri dijela (str. 185.):
 - ① područje dugog perioda (na desno od točke d): za $T_n > T_d$,
 - na odziv najviše utječe pomak tla (spektar u pravcu pomaka)
 - naziv: PODRUČJE OSJETLJIVO NA POMAK
 - ② područje kratkog perioda (na lijevo od točke c): za $T_n < T_c$,
 - na odziv najviše utječe ubrzanje tla (spektar u pravcu ubrzanja)
 - naziv: PODRUČJE OSJETLJIVO NA UBRZANJE
 - ③ područje srednjeg perioda (između točaka c i d): za $T_c < T_n < T_d$,
 - na odziv najviše utječe brzina tla (spektar u pravcu brzine)
 - naziv: PODRUČJE OSJETLJIVO NA BRZINU
- iz razmaka krivulja (str. 184.): T_c i T_d jako, a ostali slabo ovise o ζ
- ove zaključke teško donijeti analizom pojedinačnog spektra
- aproksimacija pravcima $a - b - c - d - e - f$ (str. 185.) nije precizna
- velika odstupanja pravaca od ordinata spektra JEDNOG ZAPISA
- nije uočljivo na str. 185.: logaritamsko mjerilo smanjuje razlike
- ipak: pravci temelj tvorbe elastičnog projektnog (glatkog) spektra

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

- oblik spektra i iznosi T_a do T_f najviše ovise o $\dot{u}_{g0}/\ddot{u}_{g0}$ i $u_{g0}/\dot{u}_{g0}$
- omjeri ovise o udaljenosti uređaja od rasjeda
- bliski zapis (NORTHRIDGE, 1994., str. 191.): veliki $\dot{u}_{g0}/\ddot{u}_{g0}$ i mali $u_{g0}/\dot{u}_{g0}$
- posljedice: područje osjetljivo na brzinu vrlo visoko i usko (str. 192.)
- područja osjetljiva na ubrzanje i pomak vrlo široka (str. 192.)
- udaljeni zapis (TAFT, 1952., str. 191.): manje vrijednosti omjera
- područje osjetljivo na brzinu nisko i vrlo široko (str. 192.)

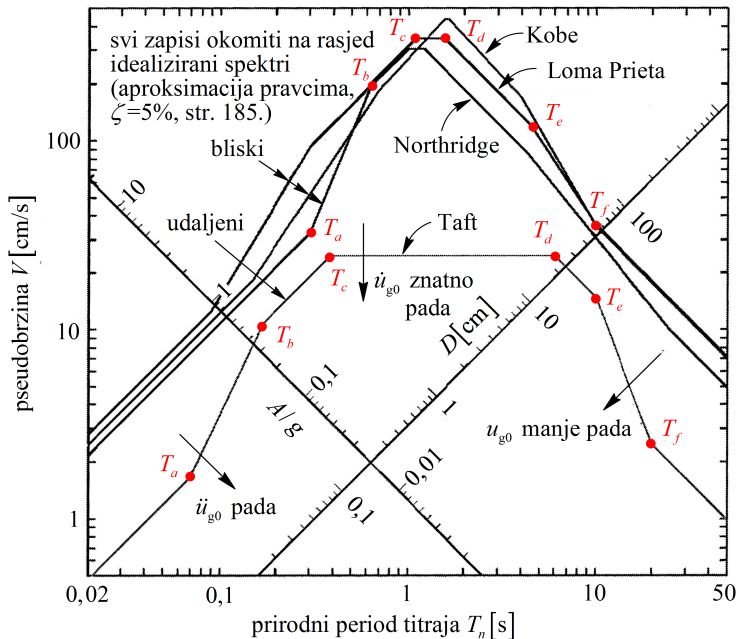
- veća nazubljenost spektra, veća ovisnost o periodu
- prigušenje izgladuje spektar: manja ovisnost o T_n (str. 184.)
- ζ smanjuje i veličinu odziva: različito za svako područje
- $T_n \approx 0$, nema rel. odziva ($u \approx 0$, $\dot{u} \approx 0$), prigušivač ne radi
- $T_n \rightarrow \infty$, $186_1 \leftarrow \ddot{u}^f \approx 0$, $\dot{u} = -\pi u / (\zeta T_n) \rightarrow 0$, prigušivač ne radi
- oba područja: utjecaj ζ zanemariv, sve krivulje bliske (str. 184.)
- najveći utjecaj u srednjem dijelu: krivulje značajno razmaknute

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



- prirodna mjesta rasjeda: ispod kanjona i korita rijeka
- svladavanje mostovima: izravni utjecaj bliskih zapisa (most Pelješac)

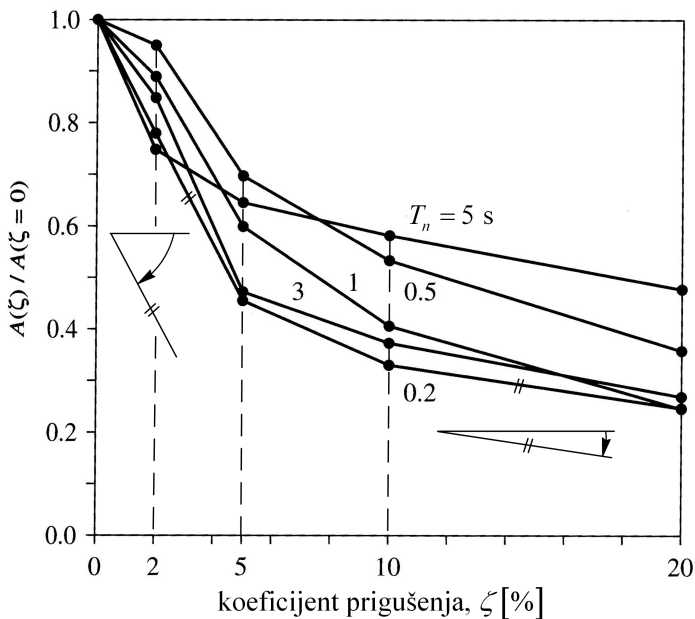
Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



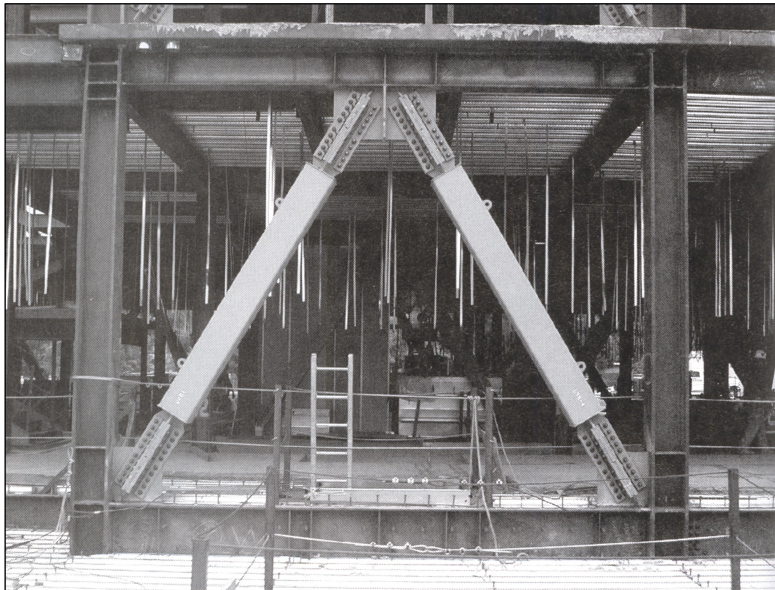
Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

- promotrimo $A(\zeta)$: pseudoubrzanje u funkciji prigušenja
- iz spektra (str. 184. ili 178.) odredimo A za nekoliko ζ i jedan T_n
- normiramo: vrijednosti podijelimo s $A(\zeta = 0)$
- spojimo pravcima: jedna krivulja
- opće svojstvo: pad pseudoubrzanja s porastom prigušenja
- veći pad za manje ζ (veći od 0 do 2%, nego od 10 do 12%)
- uočite: krivulje se presijecaju bez neke zakonitosti
- ovisnost o T_n nema pravila: potvrda složenosti dinamike
- konstrukcije: malo prigušenje (do 10%)
- težnja: povećati ζ i smanjiti A , $f_{50} = mA$ i $D = A/(2\pi/T_n)^2$
- mogućnost: ugradnja viskoznih prigušivača
- prisutno u mostogradnji, suvremeni pristup u visokogradnji
- važno: povećanje sigurnosti postojećih konstrukcija

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

