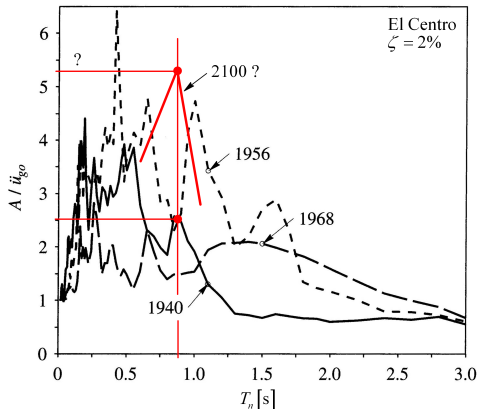


Elastični projektni spektr

- projektni spektar: sadrži procjenu djelovanja budućih potresa
- nije dovoljan spektar jednog, prošlog zapisa
- razlog: ista lokacija – izrazite razlike u obliku zapisa i spektra
- budući ekstremi: mogu se pojaviti između postojećih

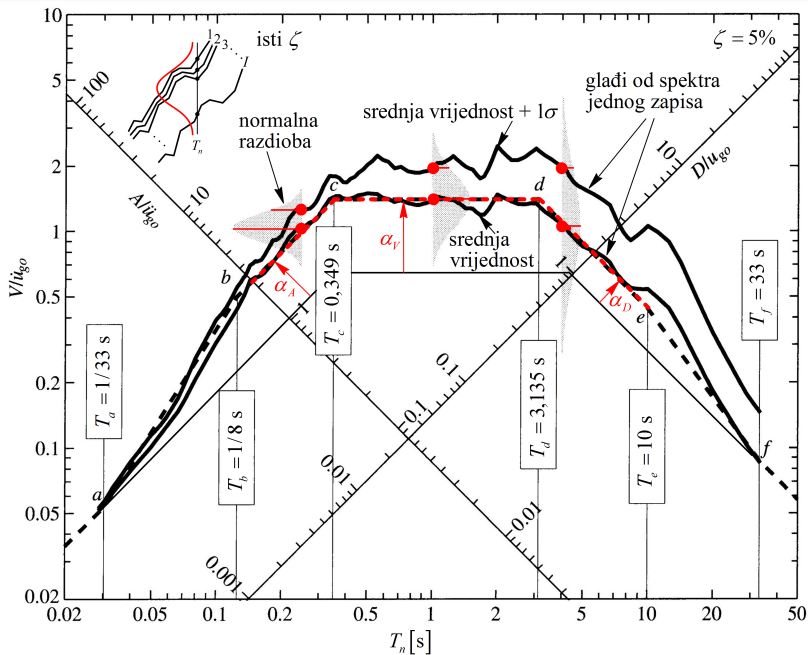


Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

- zamisao: stvoriti spektar koji zamjenjuje više potresa
- nazubljenost aproksimirati DOVOLJNO VISOKIM pravcima
- problem: nema dovoljno zapisa s područja
- zapisi sa sličnog područja: postoje 176 ◀ podudarna svojstva
- ako nema: PRILAGODBA zapisa s područja drugačijih svojstava
- projektni spektar: statistička obrada više spektralnih krivulja
- grupa zapisa: $\ddot{u}_g^i(t)$, $i = 1, \dots, I$, normirani na $\ddot{u}_{g0}$ područja (ili $1g$)
- odredimo spektre (ZA JEDAN ζ): svakom T_n pripadaju nizovi D^i , V^i i A^i
- nizovi D^i i V^i normirani na srednje vrijednosti u_{g0}^i , $\dot{u}_{g0}^i$ svih zapisa
- niz A^i normiran na $\ddot{u}_{g0}$ (područja ili $1g$)
- statistička obrada I podataka niza $V^i/\dot{u}_{g0}$ za svaki T_n
- normalna razdioba¹ za $V_i/\dot{u}_{g0}$: srednja vrijednost, standardna devijacija
- spojimo srednje vrijednosti: spektar odziva srednje vrijednosti
- slično: spektar srednje vrijednosti plus jedne standardne devijacije

¹http://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

- koeficijent varijacije (st. dev./sr. vr.): mijenja se ovisno o T_n
- primijetimo: spektri gladi od standardnih, za jedan zapis
- dobra aproksimacija pravcima: odmah određeni α_A , α_V i α_D
- seizmolozi: vrijednosti T_a , T_b , T_e i T_f slične za SVA čvrsta tla,

Odabrani periodi [s]			
T_a	T_b	T_e	T_f
1/33	1/8	10	33

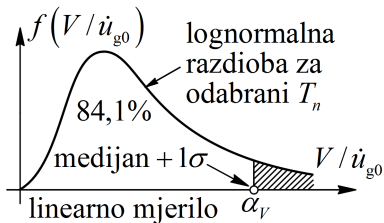
- koeficijenti uvećanja α_A , α_V i α_D za tri srednja područja
- obrada velikog broja spektara (I) za stjenovita i sedimentna tla
- ako nije log mjerilo: lognormalna razdioba² za α_V (za I spektara)
- α_A i α_D određeni za potkoračenje (fraktilu) α_V od 50% i 84,1%
- vjerojatnosti potkoračenja potresa za medijan i medijan+ 1σ ³

²http://en.wikipedia.org/wiki/Log-normal_distribution

³<http://www.grad.hr/nastava/vis/Skripta/stat1pred.pdf>

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

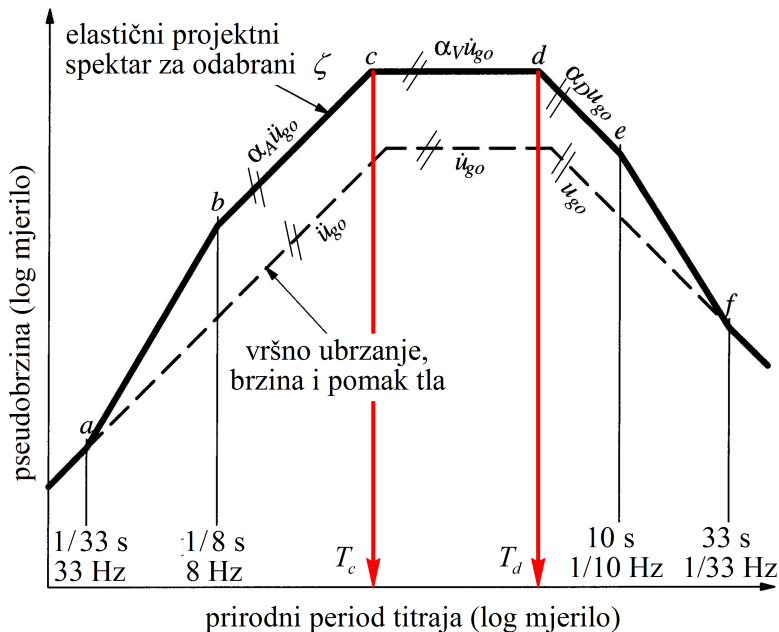
Prigušenje ζ [%]	Medijan			Medijan + 1σ		
	Potkoračenje: 50%			Potkoračenje: 84,1%		
	α_A	α_V	α_D	α_A	α_V	α_D
1	3,21	2,31	1,82	4,38	3,38	2,73
2	2,74	2,03	1,63	3,66	2,92	2,42
5	2,12	1,65	1,39	2,71	2,30	2,01
10	1,64	1,37	1,20	1,99	1,84	1,69
20	1,17	1,08	1,01	1,26	1,37	1,38



- koeficijenti α_A , α_V i α_D :
uvećavaju $\ddot{u}_{g0}$, $\dot{u}_{g0}$, u_{g0} (str. 199.)
- uvećanje ovisi o:
vjerojatnosti potkoračenja (fraktili)
i prigušenju (nizu l pripada jedan ζ)

- sjecišta $A = \alpha_A \ddot{u}_{g0}$, $V = \alpha_V \dot{u}_{g0}$ i $D = \alpha_D u_{g0}$: T_c i T_d

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



Postupak tvorbe projektnog spektra prema slici:

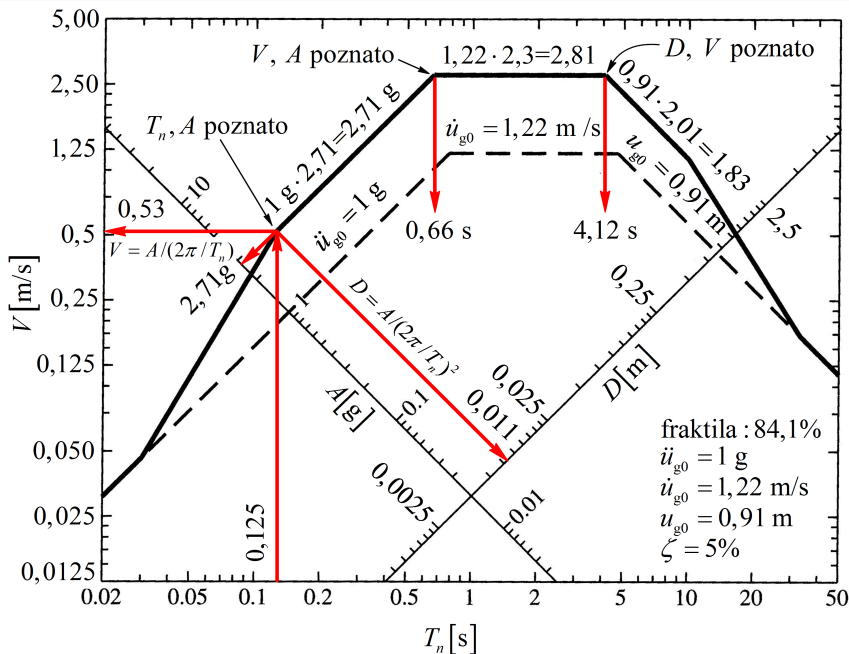
- 1 povući vertikalne pravce s periodima T_a , T_b , T_e i T_f .
- 2 ucrtati pravce vršnih vrijednosti potresa: $\ddot{u}_{g0}$, $\dot{u}_{g0}$, u_{g0}
- 3 odrediti α_A , α_V i α_D za planiranu fraktilu i ζ (str. 201.)
- 4 pomnožiti $\alpha_A \ddot{u}_{g0}$: ucrtati polupravac iz b paralelan s $\ddot{u}_{g0}$
- 5 pomnožiti $\alpha_V \dot{u}_{g0}$: ucrtati pravac paralelan s $\dot{u}_{g0}$
- 6 pomnožiti $\alpha_D u_{g0}$: ucrtati polupravac iz e paralelan s u_{g0}
- 7 označiti c i d : sjecišta pravaca određenih koracima 3 do 5
- 8 ucrtati $A = \ddot{u}_{g0}$ za $T_n < T_a$ i $D = u_{g0}$ za $T_n > T_f$ (str. 186.)
- 9 povući dužine prijelaznog područja $\overline{ab}$ i $\overline{ef}$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

Primjer: projektni spektar za fraktilu 84,1%, $\zeta = 5\%$ i $\ddot{u}_{g0} = 1g$

- množenjem spektra s η dobivamo spektar za $\eta\ddot{u}_{g0}$
 - vrijednosti $\dot{u}_{g0}$ i u_{g0} odredili seizmolozi za čvrsta tla
 - preporuka: $\dot{u}_{g0}/\ddot{u}_{g0} = 1,22 [m/s/g]$ i $\ddot{u}_{g0}u_{g0}/\dot{u}_{g0}^2 = 6$
 - za $\ddot{u}_{g0} = 1g$ dobivamo: $\dot{u}_{g0} = 1,22 m/s$ i $u_{g0} = 0,91 m$
- 1 pravci vršnih vrijednosti: $\ddot{u}_{g0} = 1g$, $\dot{u}_{g0} = 1,22 m/s$, $u_{g0} = 0,91 m$
 - 2 za fraktilu 84,1% i $\zeta = 5\%$: $\alpha_A = 2,71$, $\alpha_V = 2,30$, $\alpha_D = 2,01$
 - 3 polupravac iz b: $A = \text{const.}: 1g \cdot 2,71 = 2,71g$
 - 4 pravac $V = \text{const.}: 1,22 \cdot 2,30 = 2,81 m/s$
 - 5 polupravac iz e: $D = \text{const.}: 0,91 \cdot 2,01 = 1,83 m$
 - 6 sjecišta c i d: određuju periode T_c i T_d
 - 7 označiti $A = 1g$ za $T_a < 1/33 s$ i $D = 0,91 m$ za $T_f > 33 s$
 - 8 spojiti $(1/33 s, 1g)$, $(1/8 s, 2,71g)$ i $(10 s, 1,83 m)$, $(33 s, 0,91 m)$

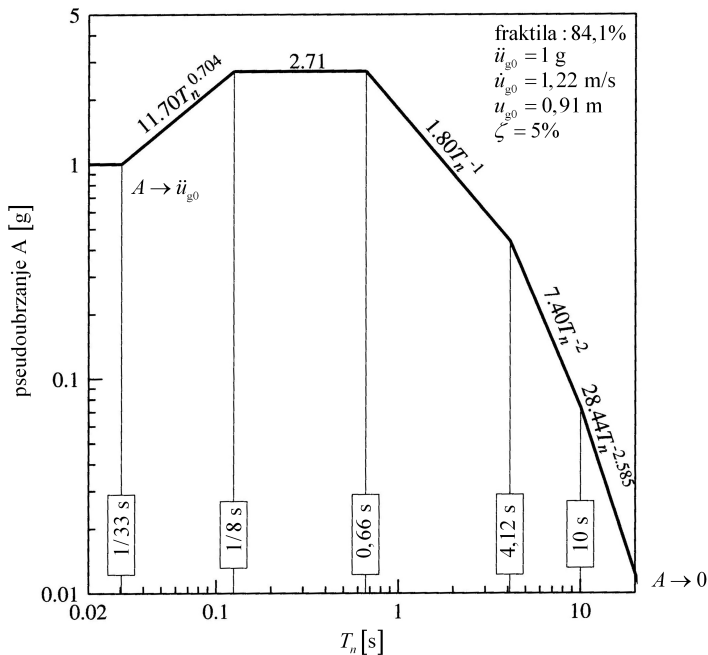
Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



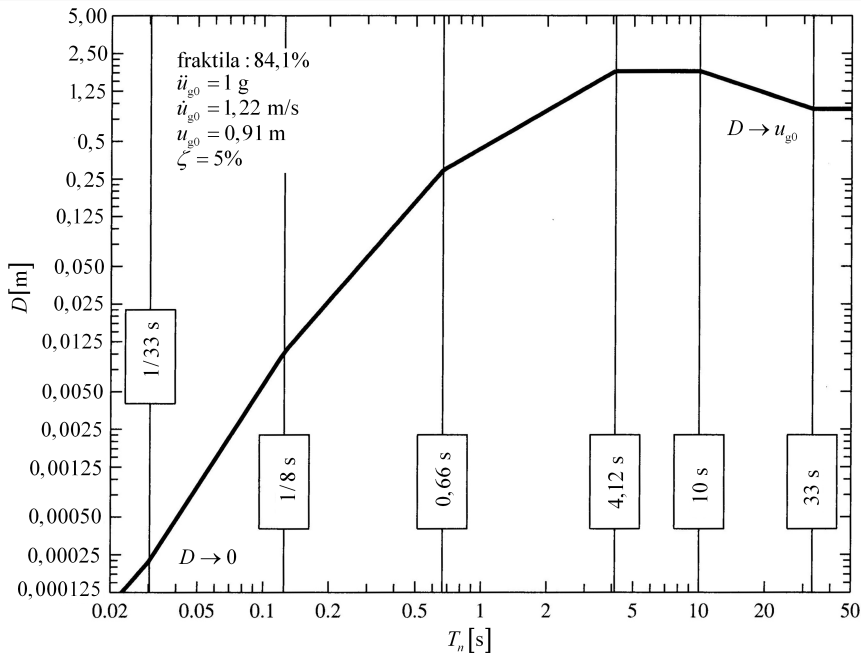
Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

- iz tripartitnog spektra odredimo spektar pseudoubrzanja i pomaka
- način: očitamo koordinate (T_n, A) i (T_n, D) svih sjecišta (a do f)
- točke od a do f spojimo pravcima (str. 207. i 208.)
- neprecizno: bolje iz [174 ◀ formula](#) za točne vrijednosti, npr. za T_n i A
- slika: $T_n = 1/8$, $A = 2,71 \text{ g}$: $D = A/(2\pi/T_n)^2$ i $V = A/(2\pi/T_n)$
- slično T_c i T_d : $T_c = 2\pi V/A = 0,66 \text{ s}$ i $T_d = 2\pi D/V = 4,12 \text{ s}$
- očitavanje za T_n između čvornih vrijednosti: također nije precizno
- pravci u log mjerilu, funkcije potencije u linearnom mjerilu (str. 211.)
- znamo čvorne točke: sustav 2×2 , odredimo a i b , pa i $A = bT_n^a$
- formule na str. 207; slično $D = dT_n^c$ (nisu priložene na str. 208.)
- novi ζ : isti postupak, samo drugi α_A , α_V i α_D (str. 201.)

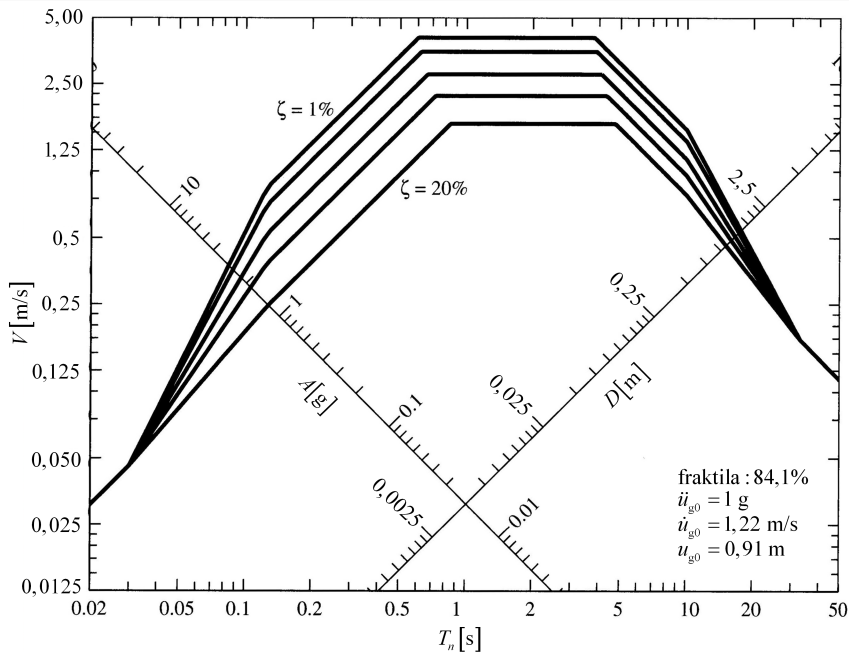
Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



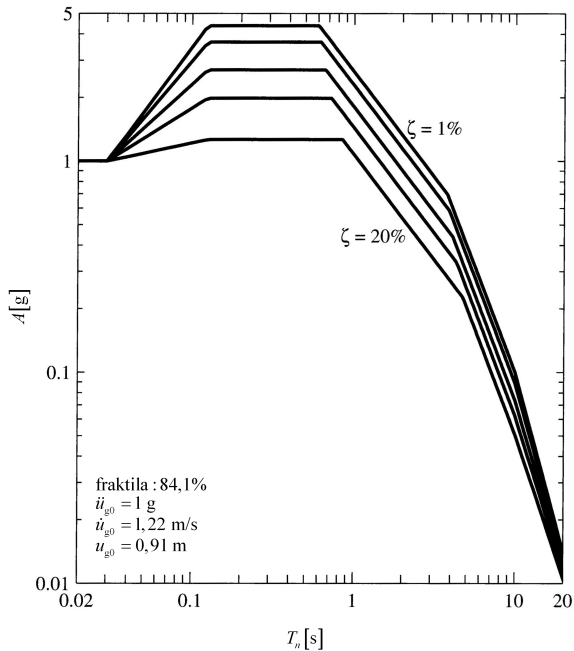
Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



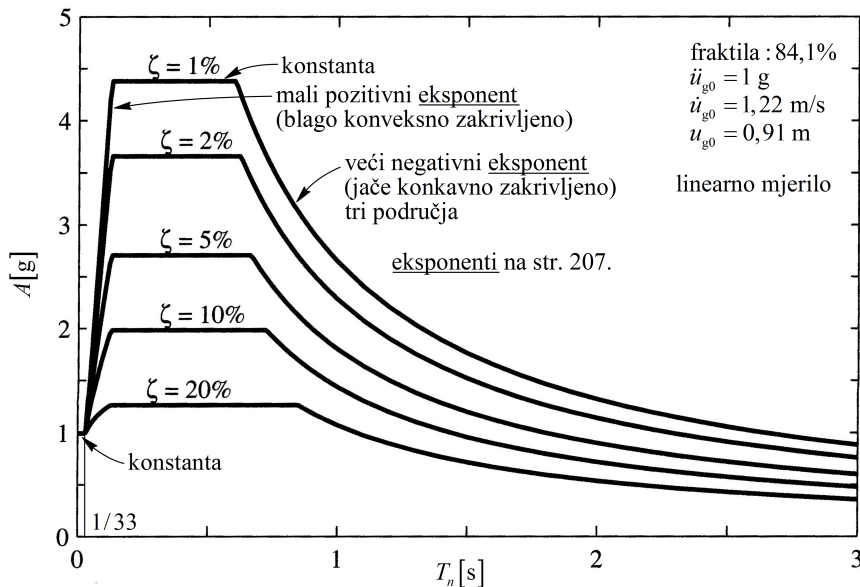
Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



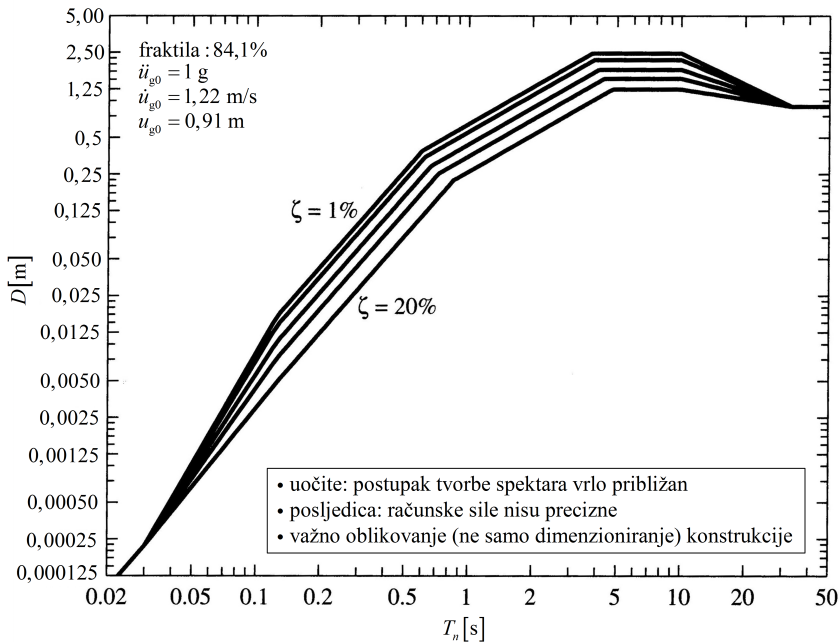
Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

- projektni spektri: $\ddot{u}_{g0} = 1 \text{ g}$, fraktila 84,1% i čvrsta tla (klasa A)
- uporaba: proračun projektnih sila i pomaka ELASTIČNOG SUSTAVA
- priloženi oblici spektara uvriježeni u svim propisima
- množe se koeficijentom η : vršnim ubrzanjem tla (NAD)⁴

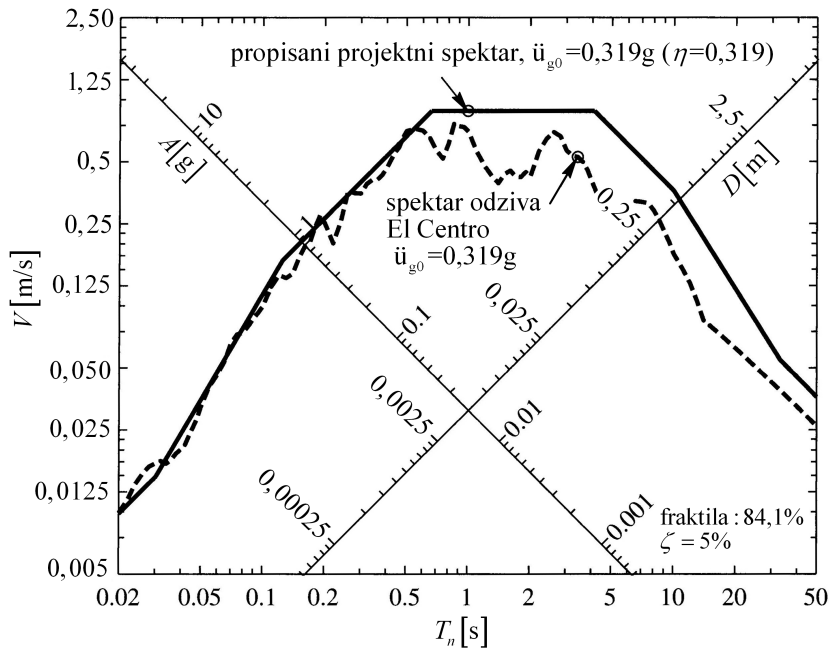
Usporedba propisanog i stvarnog spektra

Za lokaciju: čvrsto tlo i $\ddot{u}_{g0} = 0,319 \text{ g}$ ($\eta = 0,319$)

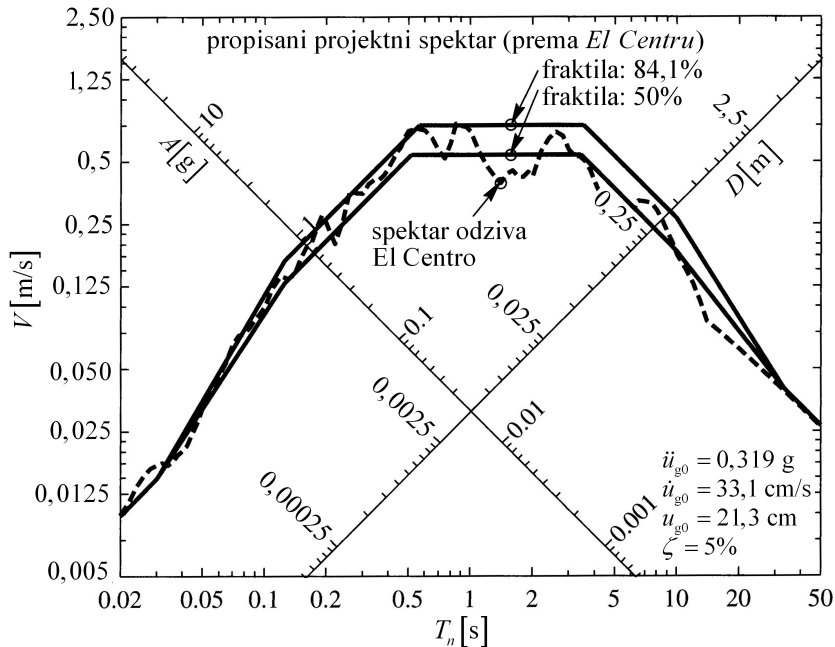
- propisani: $\ddot{u}_{g0} = 0,319 \text{ g}$, 204 ◀ preporuka: $\dot{u}_{g0} = 0,39 \text{ m/s}$, $u_{g0} = 0,29 \text{ m}$
- stvarni (str. 161.): $\ddot{u}_{g0} = 0,319 \text{ g}$, $\dot{u}_{g0} = 0,33 \text{ m/s}$, $u_{g0} = 0,21 \text{ m}$
- isti $\ddot{u}_{g0}$: dobro podudaranje u području osjetljivom na ubrzanje
- različiti $\dot{u}_{g0}$ i u_{g0} : razlike u području osjetljivom na brzinu i pomak
- odstupanja među spektrima čak i uz iste vršne vrijednosti
- i propisani: $\ddot{u}_{g0} = 0,319 \text{ g}$, $\dot{u}_{g0} = 0,33 \text{ m/s}$, $u_{g0} = 0,21 \text{ m}$ (EL CENTRO)
- fraktila 50% prenisko, fraktila 84,1% dobra procjena

⁴izvor: <http://seizkarta.gfz.hr/karta.php>

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



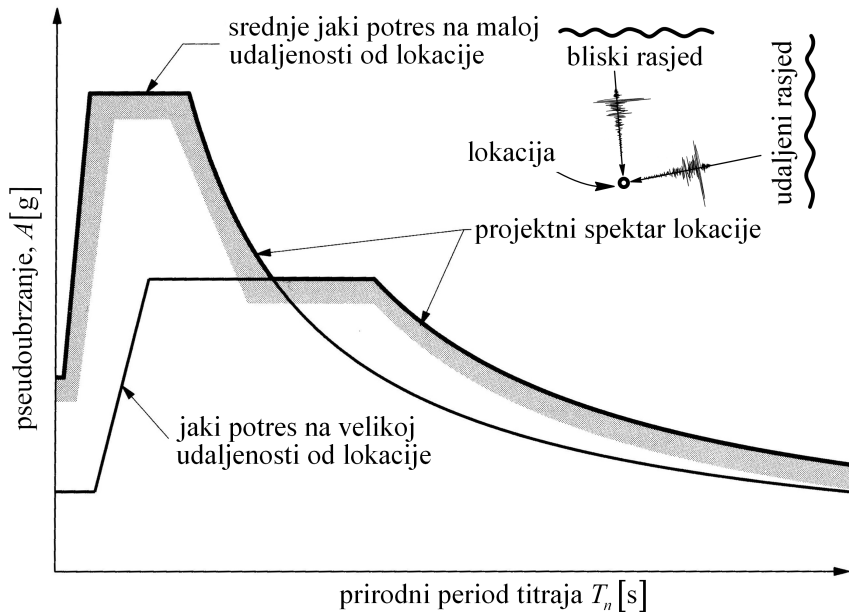
Razlozi odstupanja:

- projektni spektar (glatki) nije spektar jednog zapisa (nazubljen)
- dobiven statističkom obradom više spektara: postoji rasipanje

Razlike između projektnog i stvarnog spektra

- spektar odziva: VRŠNI iznosi za ODABRANI potresni zapis
- projektni spektar: PROPISANI iznosi vršnih vrijednosti
- ovisno o tvorbi: može biti vrlo različit od spektra odziva
- slični ako je projektni dobiven statistički iz spektara odziva
- za neke lokacije: projektni spektar ovojnica dvaju spektara
- razlog: dva rasjeda utječu na širenje potresa
- primjer: srednje jaki bliski i jaki udaljeni potresi
- svakoj grupi pripada različiti projektni spektar
- zbirno djelovanje: ovojnica spektara
- bliski potresi utječu na kratke, a udaljeni na duge periode

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



Spektri brzine i ubrzanja

- pseudovrijednosti V i A : tangencijalna brzina i radijalno ubrzanje
- amplitude jednostavnog harmonijskog titranja najvećim pomakom
- vršni odzivi: dovoljan spektar $u_0(T_n) = D(T_n)$, [ili $V(T_n)$, ili $A(T_n)$]
- spektri vrijednosti $\dot{u}_0(T_n)$ i $\ddot{u}_0^t(T_n)$ nisu potrebni
- odredimo ih radi razlikovanja prema pseudovrijednostima V i A
- 144 ◀ Duhamleov integral za $p(\tau) = p_{\text{eff}}(\tau) = -m\ddot{u}_g(\tau)$, (m se krati):

$$u(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau$$

- brzina (d/dt umnoška pod integralom, $\ddot{u}_g(\tau)$ ne ovisi o t):

$$\dot{u}(t) = \underbrace{-\zeta\omega_n \left(-\frac{1}{\omega_D}\right) \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau}_{u(t)}$$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

$$- \frac{1}{\omega_D} \omega_D \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\zeta \omega_n(t-\tau)} \cos [\omega_D(t-\tau)] d\tau$$

$$\dot{u}(t) = -\zeta \omega_n u(t) - \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\zeta \omega_n(t-\tau)} \cos [\omega_D(t-\tau)] d\tau$$

- ukupno ubrzanje $\ddot{u}^t(t)$: deriviranjem $\dot{u}(t)$ i pribrajanjem $\ddot{u}_g(t)$
- lakše pomoću ▶ jednažbe gibanja $[uz \ \ddot{u}^t(t) = \ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t)]:$

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta \omega_n \dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = -\ddot{u}_g(t), \quad \ddot{u}^t(t) = -\omega_n^2 \underline{u(t)} - 2\zeta \omega_n \underline{\dot{u}(t)}$$

- spektri: vršne vrijednosti $\dot{u}_0$ i $\ddot{u}_0^t$ pri pobudi $\ddot{u}_g(t)$ u funkciji T_n
- ordinate linearne (ne log): lakše uočavanje razlika (str. 221. i 223.)

Usporedba spektara pseudobrzine i relativne brzine

- odstupanja ovise o periodu T_n (str. 221.)
- dugi periodi: $V \ll \dot{u}_0$, jer $\dot{u}_0 \rightarrow \dot{u}_{g0}$ i $V \rightarrow 0$
- dokažimo: masa stoji, tlo se giba pa je $u^t \rightarrow 0$ i $\dot{u}^t \rightarrow 0$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

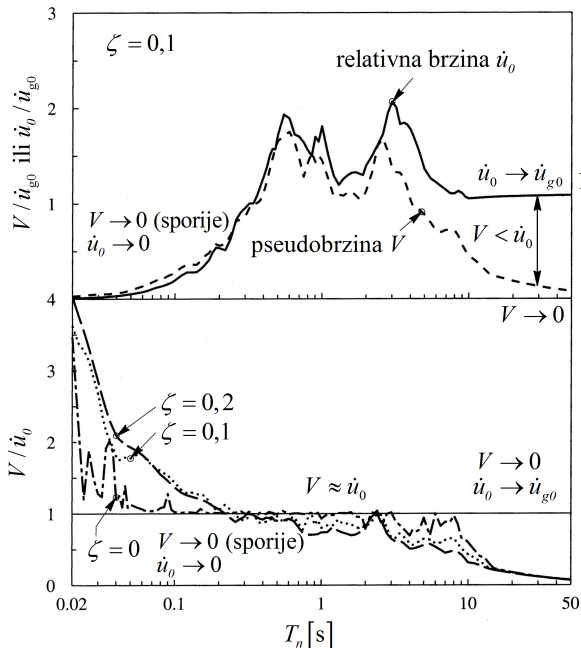
- zbog $\dot{u}^t = \dot{u}_g + \dot{u} \Rightarrow \dot{u} \rightarrow -\dot{u}_g \Rightarrow \dot{u}_0 \rightarrow \dot{u}_{g0}$
- ► zbog $u^t = u_g + u \Rightarrow u \rightarrow -u_g \Rightarrow u_0 \rightarrow u_{g0}$ ili $D \rightarrow u_{g0}$
- ako $T_n \rightarrow \infty$: $V = 2\pi/T_n D \rightarrow 2\pi/T_n u_{g0} \rightarrow 0$
- za kratke T_n , V iznad $\dot{u}_0$, za srednje i duge T_n , ispod $\dot{u}_0$
- promotrimo omjer spektara $V/\dot{u}_0$ za razne ζ (str. 221.)
- razlika među spektrima: odstupanje omjera prema jedinici
- razlika najmanja za $\zeta = 0$, raste s porastom ζ
- pojašnjenje: za $\zeta = 0$ ($\omega_D = \omega_n$ i $e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} = 1$) imamo

$$\omega_n u(t) = - \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin [\omega_n(t - \tau)] d\tau \quad (\text{str. 218.})$$

$$\dot{u}(t) = - \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \cos [\omega_n(t - \tau)] d\tau \quad (\text{str. 219.})$$

- razlika $\omega_n u(t)$ i $\dot{u}(t)$ samo za član sin i cos: amplitude iste
- dakle: $\omega_n u_0 = \dot{u}_0$, uz $D = u_0$ i $V = \omega_n D \Rightarrow V = \dot{u}_0$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



- za male vrijednosti V i $\ddot{u}_0$, primjerice:
 $V = 0,04 \text{ cm/s}$
 $\ddot{u}_0 = 0,01 \text{ cm/s}$
 (jer V pada sporije)
- i uobičajenih
 $\ddot{u}_{g0} = 40 \text{ cm/s}$
- omjeri su bliski nuli:
 $V/\ddot{u}_{g0} = 10^{-3}$
 $\ddot{u}_0/\ddot{u}_{g0} = 2,5 \cdot 10^{-4}$
- ali omjer malih vrijednosti:

$$\frac{V}{\ddot{u}_0} = \frac{0,04}{0,01} = 4$$

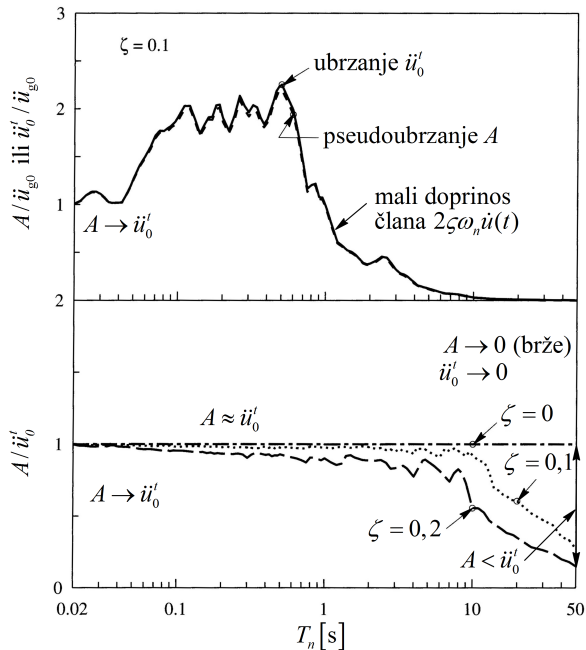
Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

- za $\zeta > 0$: $-\zeta\omega_n u(t) \neq 0$, razlika $\omega_D u(t) = V(t)$ i $\dot{u}(t)$
- veća odstupanja među amplitudama V i $\dot{u}_0$ (str. 221.)
- uobičajeni ζ : mala odstupanja za kratke i srednje periode

Usporedba spektara pseudoubrzanja i ukupnog ubrzanja

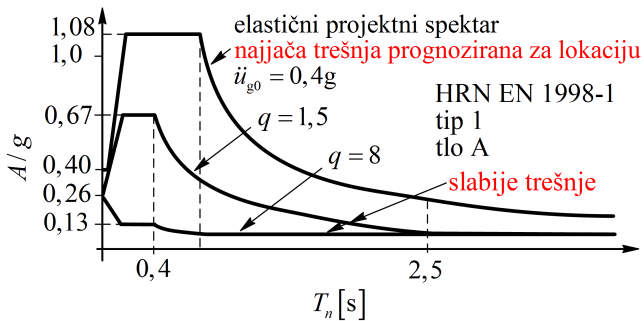
- 219 ◀ isti za $\zeta = 0$: $\ddot{u}^t(t) = -\omega_n^2 u(t)$ jer je $-2\zeta\omega_n \dot{u}(t) = 0$
- iste funkcije i amplitude: $\ddot{u}_0^t = \omega_n^2 u_0 = \omega_n^2 D = A$ (str. 223.)
- za $\zeta > 0$: $\ddot{u}^t(t) = -\omega_n^2 u(t)$ samo za t_a kada je $\dot{u}(t_a) = 0$
- tada je $u(t_a) = u_0$ (lokalni ekstrem), pa: $-\omega_n^2 u_0 = \ddot{u}^t(t_a)$
- amplituda $\ddot{u}_0^t$ funkcije $\ddot{u}^t(t)$ nije u t_a (samo za $\zeta = 0$)
- nema podudaranja A i $\ddot{u}_0^t$: veći ζ , raste $-2\zeta\omega_n \dot{u}(t)$ i odstupanje
- 186₂ ◀ kratki periodi: $A \rightarrow \ddot{u}_0^t$, dugi periodi: $A \ll \ddot{u}_0^t$ (str. 223.)
- dokažimo: masa stoji, tlo se giba pa je $u^t \rightarrow 0$ i $\ddot{u}^t \rightarrow 0$
- tada $\ddot{u}_0^t \rightarrow 0$, 220 ◀ od ranije: $D \rightarrow u_{g0}$
- ako $T_n \rightarrow \infty$: $A = (2\pi/T_n)^2 D \rightarrow (2\pi/T_n)^2 u_{g0} \rightarrow 0$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom



- $\ddot{u}_0^t \rightarrow 0$ i $A \rightarrow 0$
- A pada brže: sa T_n^2
- $mA = f_{S0}$, ali
 $m\ddot{u}_0^t = (f_S + f_D)_0$
- mora biti: $A < \ddot{u}_0^t$
- A dio $\ddot{u}_0^t$, daje f_{S0}
- zato $A/\ddot{u}_0^t < 1$
- pseudo (lažno)
- neprikladan naziv
- bolje: aproksimacije
točnih spektara
- daju potrebno:
 f_{S0} i E_{S0}

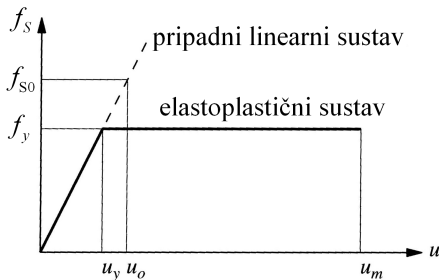
Odziv elastoplastičnog sustava na pobudu potresom



- propisi: poprečna reakcija manja od elastične
- posljedica: naprezanje iznad granice elastičnosti
- elastične računske sile (str. 172.): $f_{S0} = A/g w$, odziv bez pukotina
- nije ekonomično za jake potrese: veliki utrošak materijala
- ako su pukotine opasne: spremnici, brane, temelji i stolovi turbina
- nužno elastično ponašanje: velike sile – pomoć prigušivača

Odziv elastoplastičnog sustava na pobudu potresom

- uobičajeno: prihvaćanje RAZUMNE razine oštećenja
- posljedica: ulazak u plastično područje radnog dijagrama
- elastoplastični dijagrami: pokusi (ovise o materijalu i sustavu)

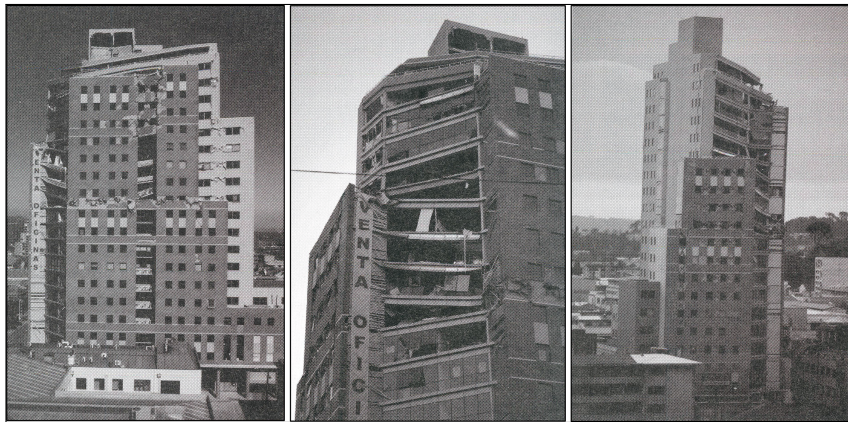


- amplitude elastičnog odziva: f_{s0} (kraće f_0) i u_0
- minimalna čvrstoća za elastično ponašanje: f_0
- normirana granica tečenja: $\bar{f}_y = f_y / f_0 \quad k/k = u_y / u_0 \leq 1$
- koef. smanjenja gr. tečenja: $R_y = 1 / \bar{f}_y = f_0 / f_y = u_0 / u_y \geq 1$
- posljedica: za $u > u_y$ svjesno dimenzioniranje na manje sile (f_y ne f_0)
- težak zadatak: PROGNOZA prihvatljivog oštećenja zbog tečenja
- važna svojstva: višestruka statička neodređenost i duktilnost⁵
- koeficijent duktilnosti: $\mu = u_m / u_y \geq 1$ – zahtjev na konstrukciju

⁵žilavost, rastezljivost

Odziv elastoplastičnog sustava na pobudu potresom

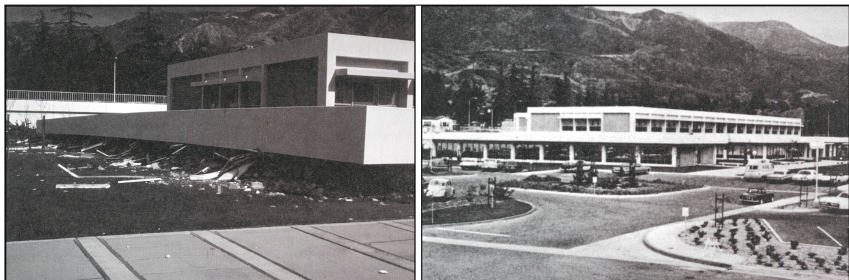
- primjera loše prognoze ima mnogo:



- neboder O'HIGGIN, CONCEPCION, Čile, 21 kat, ab, izveden 2009. god.
- bočna krutost: zidovi i okviri, NESIMETRIČAN u tlocrtu i po visini
- teško oštećen u potresu 2010. (slom 12. kata): zgrada uklonjena

Odziv elastoplastičnog sustava na pobudu potresom

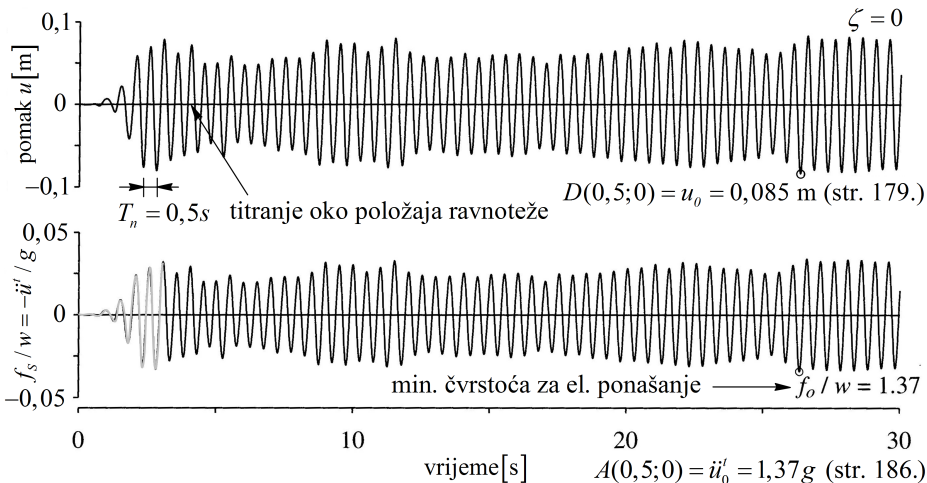
- ili primjerice:



- psihijatrijska dnevna bolnica, SAN FERNANDO, Kalifornija, 2 kata, ab
- bočna krutost: okviri sa zidanom ispunom na drugom katu
- ispuna prouzročila porast krutosti i čvrstoće drugog kata
- pojava modela slabog kata (engl. WEAK – STORY MODEL)
- srušena u potresu 1971. (slom prizemlja): uklonjena
- drugi kat ostao gotovo neoštećen

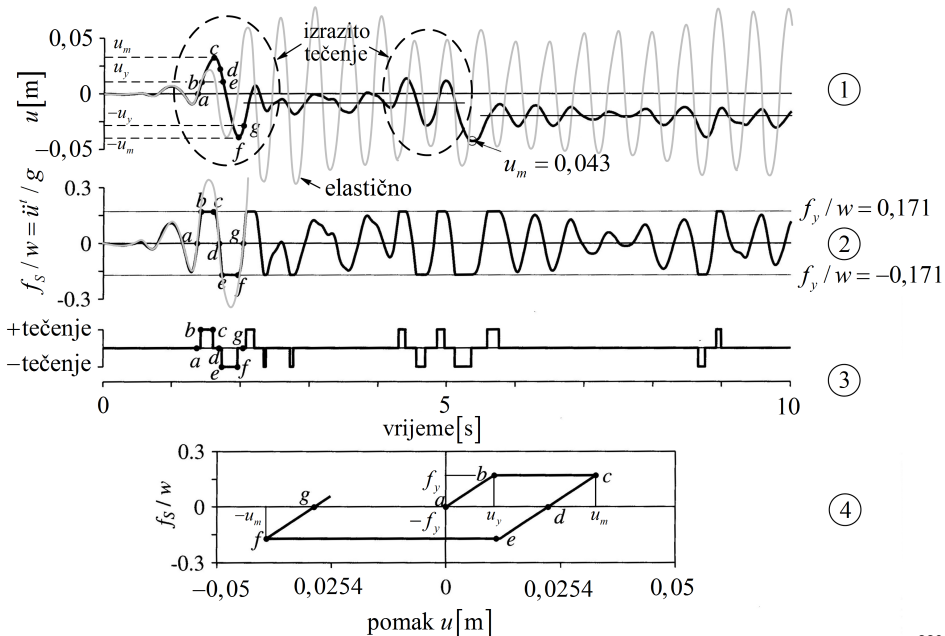
Odziv elastoplastičnog sustava na pobudu potresom

- graf 1. ($u(t)$, str. 36.): $m\ddot{u}(t) + f_S[u(t)] = -m\ddot{u}_g(t) / : (mg = w)$
- graf 2.: $f_S/w = -\ddot{u}'(t)/g$, za $f_S = ku$, linearno elastični odziv



- za $\bar{f}_y = 1/8$ ($R_y = 8$): $f_y = 1/8 f_0 = 1/8 (1,37w) = 0,171w$

Odziv elastoplastičnog sustava na pobudu potresom



Odziv elastoplastičnog sustava na pobudu potresom

a	$u = 0$	$f_S = 0$	elastično do b
b	$u = u_y$	$f_S = f_y$	početak tečenja
b-c	$u > u_y$	$f_S = f_y = \text{const.}$	tečenje, plastična grana $f_S - u$ dija.
c	$u = u_m$	$f_S = f_y$	lokalni maks. ($\dot{u} = 0$), točka vraćanja
c-d	$u < u_m$	$f_S < f_y$	elastično rasterećenje, bez tečenja
d	-	$f_S = 0$	sustav rasterećen
d-e	-	$f_S < 0$	unutarnja sila u suprotnom smjeru
e	-	$f_S = -f_y$	početak tečenja
e-f	-	$f_S = -f_y = \text{const.}$	tečenje, plastična grana $f_S - u$ dija.
f	$u = -u_m$	$f_S = -f_y$	lokalni min. ($\dot{u} = 0$), točka vraćanja
f-g	$u > -u_m$	$f_S > -f_y$	elastično rasterećenje, bez tečenja
g	-	$f_S = 0$	sustav rasterećen
g-	-	$f_S > 0$	elastično do $f_S = f_y$

Odziv elastoplastičnog sustava na pobudu potresom

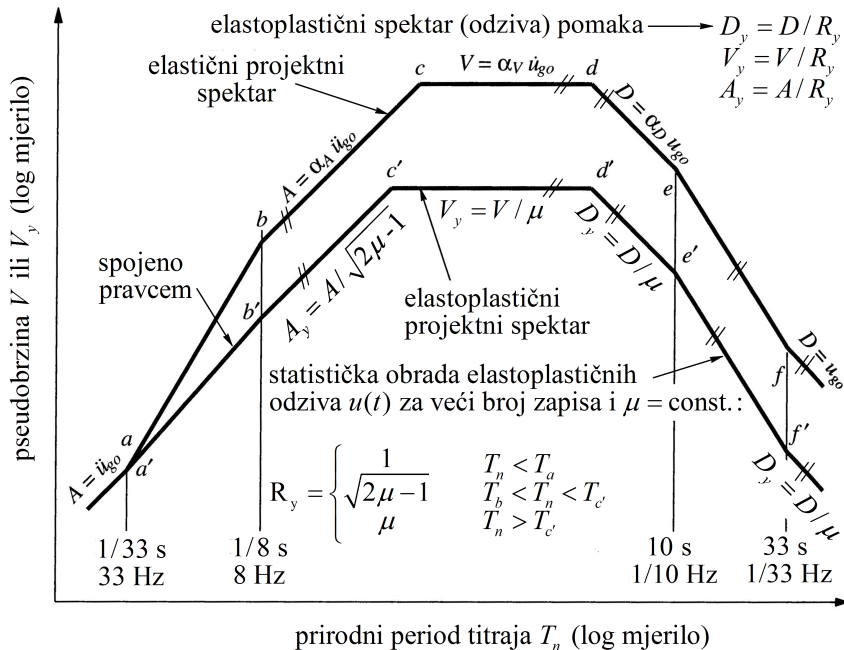
- sustav ne titra oko početnog (uspravnog) položaja ravnoteže
- manji $\bar{f}_y$ (veći R_y): više ciklusa tečenja
- nakon jednog ciklusa: titranje oko otklonjenog položaja
- posljedica: prolaskom pobude sustav ostaje otklonjen (trajne def.)
- linearni model: povratak u početni položaj
- različito t nastupa i iznos ekstrema ($u_0 = 8,5 \text{ cm}$, $u_m = 4,3 \text{ cm}$)
- koeficijent duktilnosti (uz $u_y = \bar{f}_y u_0 = u_0/R_y$, str. 225.):

$$\mu = \frac{u_m}{u_y} = \frac{1}{\bar{f}_y} \frac{u_m}{u_0} = R_y \frac{u_m}{u_0} = 8 \frac{4,3}{8,5} = 4,05$$

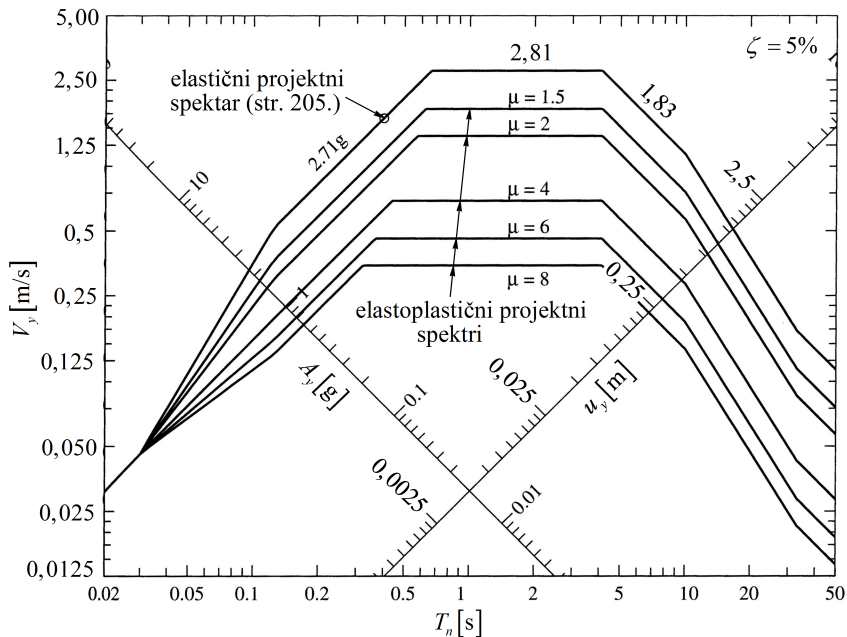
- potrebna⁶ duktilnost: duktilni odziv za pomak 4 puta veći od u_y !
- ako je manja: krhki lom za danu pobudu (opasno, teška sanacija)
- pazite na izbor STATIČKOG SISTEMA, MATERIJALA i DETALJA konstrukcije
- μ biramo unaprijed: veća vrijednost (i zahtjev!), manje sile potresa

⁶zahtijevana

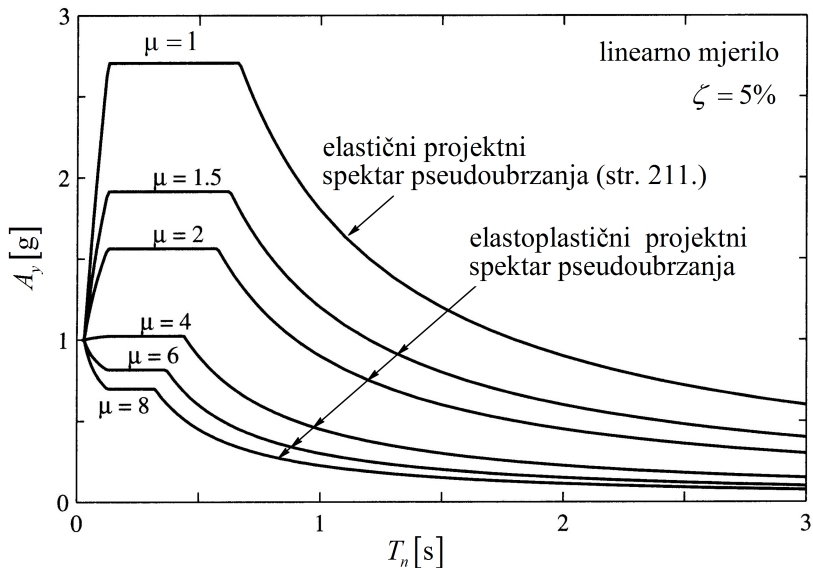
Odziv elastoplastičnog sustava na pobudu potresom



Odziv elastoplastičnog sustava na pobudu potresom



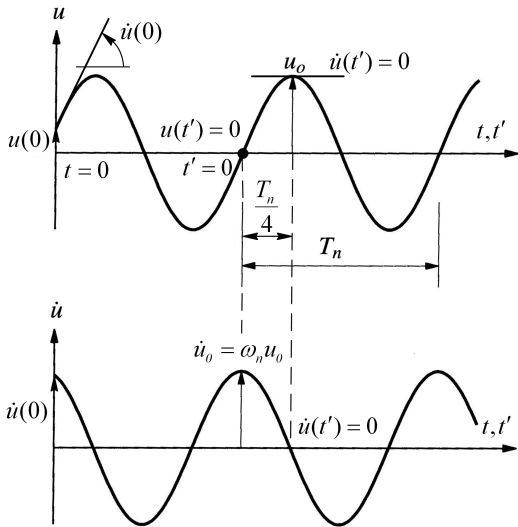
Odziv elastoplastičnog sustava na pobudu potresom



Poopćeni sustav s jednim stupnjem slobode

- poopćeni sustav: složeni sustav aproksimiran jednim st. sl.
- postoji više pristupa, bit: pretpostaviti oblik titranja

Rayleighijev postupak (kvocijent)



- 1873. lord Rayleigh: temeljeno na zakonu o očuvanju energije
- jednostavnog harmonijskog gibanja s jednim stupnjem sl.
- pobuda: $u(0)$ i $\dot{u}(0)$
- zbog jednostavnosti: početak gibanja u $t' = 0$ (isto $\forall t$)

$$u(t') = u_0 \sin \omega_n t'$$

$$\dot{u}(t') = \underbrace{u_0 \omega_n}_{\dot{u}_0} \cos \omega_n t'$$

Poopćeni sustav s jednim stupnjem slobode

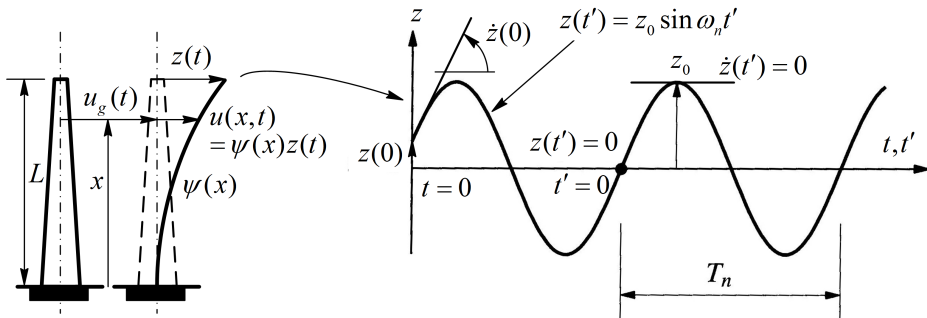
- potencijalna energija: $E_S = 1/2 ku^2$, ekstrem: $E_{S0} = 1/2 ku_0^2$
- vrijeme ekstrema $u(t') = u_0$: $t' = T_n/4, 3T_n/4, 5T_n/4, \dots$
- istodobno: $\dot{u}(t') = 0 \Rightarrow E_K = 1/2 m \dot{u}^2 = 0$
- tada je ukupna 772 ← energija: $E_I = E_S + E_K = E_{S0}$ (jer je $\zeta = 0$)
- ekstrem kinetičke energije: $E_{K0} = 1/2 m \dot{u}_0^2$
- vrijeme ekstrema $\dot{u}(t') = \dot{u}_0$: $t' = 0, T_n/2, T_n, \dots$
- istodobno: $u(t') = 0 \Rightarrow E_S = 1/2 ku^2 = 0$
- tada je ukupna energija: $E_I = E_S + E_K = E_{K0}$ (jer je $\zeta = 0$)
- znači, za ekstremne vrijednosti u_0 i $\dot{u}_0$: $E_I = E_{S0} = E_{K0}$
- odnosno: $1/2 ku_0^2 = 1/2 m \dot{u}_0^2$ i konačno,

$$ku_0^2 = m \underbrace{u_0^2 \omega_n^2}_{\dot{u}_0^2} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- poznati izraz: nema prednosti za sustav s jednim st. sl.

Poopćeni sustav s jednim stupnjem slobode

- uloga: sustav s više st. sl. $\xrightarrow{\text{aproksimacija}}$ sustav s jednim st. sl.
- složeni sustav: moguće titranje različitim oblicima
- bit aproksimacije:
 - pretpostaviti jedan oblik titranja (progiba) $\psi(x)$ – funkcija oblika
 - odabrati (značajni) pomak promjenjiv u vremenu $z(t)$ – poopćeni pomak
- posljedica: zahtijevamo titranje oblikom $u(x, t) = \psi(x) z(t) \sim \psi(x)$



Poopćeni sustav s jednim stupnjem slobode

- oblik titranja $\psi(x)$: određuje ponašanje u prostoru
- zakon titranja $z(t)$: ponašanje u vremenu

Primjena na sustav s kontinuiranom masom

- 1 ▶ titranje konzole: pretpostavka $u(x, t') = z(t)\psi(x) = z_0 \sin \omega_n t' \psi(x)$
- oblik titranja $\psi(x)$, zakon titranja $z(t') = z_0 \sin \omega_n t'$, z_0 – amplituda
- brzina titranja: $\dot{u}(x, t') = \omega_n z_0 \cos \omega_n t' \psi(x)$
- maksimalna 2 ▶ potencijalna energija⁷ konzole (za maks. pomak u_0):

$$E_{S0} = \int_0^L \frac{1}{2} EI(x) [u_0''(x)]^2 dx, \quad u_0(x) = z_0 \psi(x), \quad (\sin \omega_n t' = 1)$$

- maksimalna 3 ▶ kinetička energija konzole (za maks. brzinu $\dot{u}_0$):

$$E_{K0} = \int_0^L \frac{1}{2} m(x) [\dot{u}_0(x)]^2 dx, \quad \dot{u}_0(x) = \omega_n z_0 \psi(x) \quad (\cos \omega_n t' = 1)$$

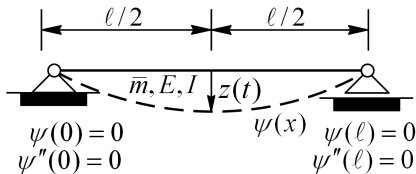
⁷<http://www.grad.unizg.hr/predmet/nmk/predavanja/>; str. 44.

Poopćeni sustav s jednim stupnjem slobode

- uvrstimo: $[u_0''(x)]^2 = z_0^2 [\psi''(x)]^2$, $[\dot{u}_0(x)]^2 = \omega_n^2 z_0^2 [\dot{\psi}(x)]^2$
- izjednaćimo energije: $E_{S0} = E_{K0}$, ($1/2$ i z_0^2 iščezavaju)

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx}{\int_0^L m(x) [\dot{\psi}(x)]^2 dx}, \quad \text{Rayleighijev kvocijent}$$

- vrijedi za bilo kakav kontinuirani statički sustav
- procjena prvog⁸ perioda titranja (u smjeru najmanje krutosti)
- pretpostavimo oblik titranja $\psi(x)$: EI i m poznato, odredimo ω (T_n)



- $\psi(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$, $\omega_n^2 = \frac{\pi^4 EI}{\bar{m} l^4}$

- $\psi(x) = \frac{x}{l} \left(\frac{x}{l} - 1 \right)$, $\omega_n^2 = \frac{120 EI}{\bar{m} l^4}$

⁸temeljnog, osnovnog, fundamentalnog (jer ih složeni sustav ima više)

Primjena na sustav s diskretnim masama

- model zgrade: apsolutno krute grede s koncentriranim masama
- titranje zgrade: vektor $\mathbf{u}(t') = z_0 \sin \omega_n t' \boldsymbol{\psi}$, funkcija oblika: vektor $\boldsymbol{\psi}$
- $\boldsymbol{\psi} = [\psi_1 \ \dots \ \psi_j \ \dots \ \psi_N]^T$, komponente određuju položaje masa
- brzina titranja: vektor $\dot{\mathbf{u}}(t') = \omega_n z_0 \cos \omega_n t' \boldsymbol{\psi}$
- E_{S0} nastupa pri maks. pomacima: $\mathbf{u}_0 = [u_{10} \ \dots \ u_{j0} \ \dots \ u_{N0}]^T$

$$E_{S0} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} k_j (u_{j,0} - u_{j-1,0})^2, \quad u_{j0} - u_{j-1,0}, \text{ maks. pomak etaže } j$$

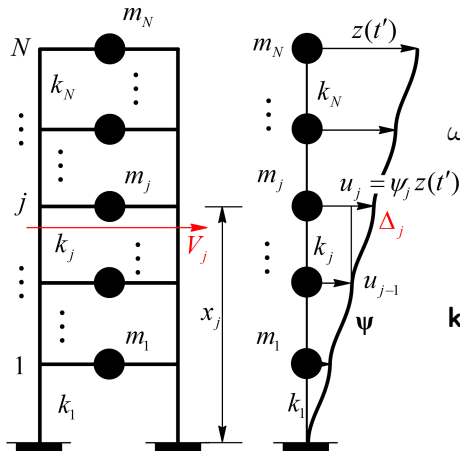
- E_{K0} nastupa pri maks. brzinama: $\dot{\mathbf{u}}_0 = [\dot{u}_{1,0} \ \dots \ \dot{u}_{j,0} \ \dots \ \dot{u}_{N,0}]^T$

$$E_{K0} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \dot{u}_{j0}^2, \quad \dot{u}_{j0}^2, \text{ maks. brzina (na mjestu!) mase } j$$

- ▶ ekstremi: $u_{j0} = z_0 \psi_j, (\sin \omega_n t' = 1), \dot{u}_{j0} = \omega_n z_0 \psi_j, (\cos \omega_n t' = 1)$

Poopćeni sustav s jednim stupnjem slobode

- uvrstimo u energije i $E_{S0} = E_{K0}$ ($1/2$ i z_0^2 iščezavaju):



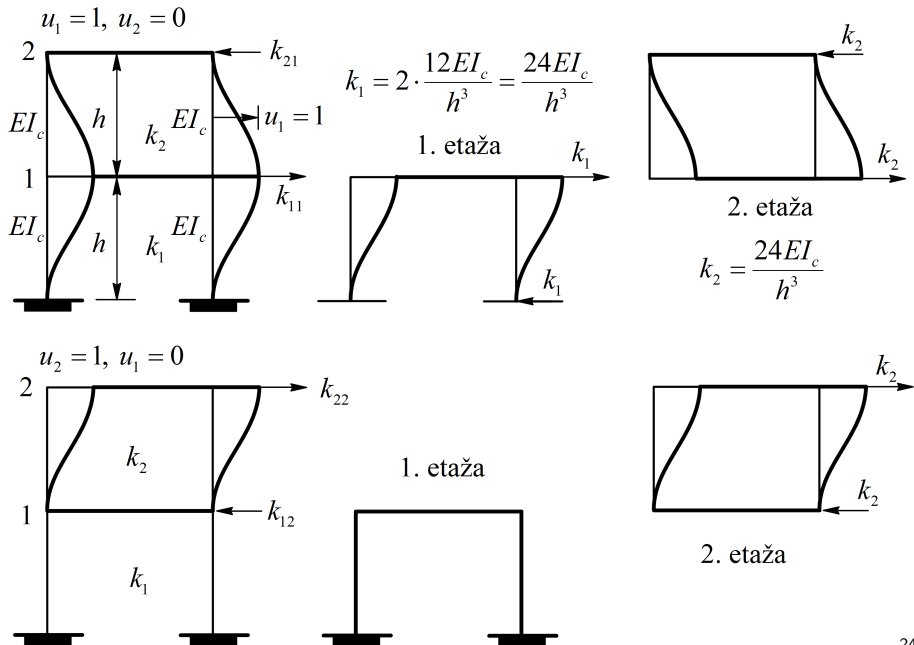
$$\omega_n^2 = \frac{\sum_{j=1}^N k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2}{\sum_{j=1}^N m_j \psi_j^2} = \frac{\psi^T \mathbf{k} \psi}{\psi^T \mathbf{m} \psi}$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & m_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & m_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

- ∞ krute grede: $EA \rightarrow \infty$, $El \rightarrow \infty$
- za etažu j : $V_j = k_j \Delta_j = k_j (u_j - u_{j-1})$
- tradicijski model: POSMIČNA ZGRADA

Poopćeni sustav s jednim stupnjem slobode

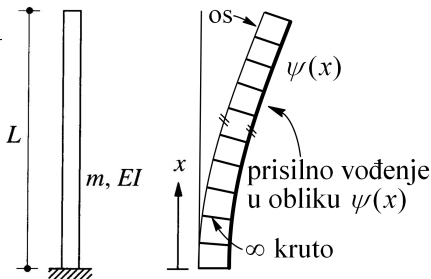


Svojstva Rayleighijevog kvocijenta

- 1. svojstvo: približna frekvencija **UVIJEK** veća od točne
- izborom $\psi(x)$ uvodimo prisilu među pomake sustava
- prisiljavamo model na gibanje drugačijim oblikom od točnog
- sustav činimo krućim (k raste): veća frekvencija ($\omega_n = \sqrt{k/m}$)

Oblik rješenja: $\omega_n = \alpha_n \sqrt{EI/(mL^4)}$ • točno: $\alpha_n = 3,516$

$\psi(x)$	α_n	greška [%]
$\frac{3x^2}{2L^2} - \frac{x^3}{2L^3}$	3,57	1,5
$1 - \cos \frac{\pi x}{L}$	3,66	4
$\frac{x^2}{L^2}$	4,47	27



Poopćeni sustav s jednim stupnjem slobode

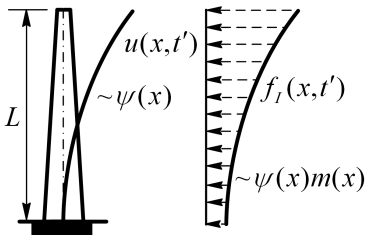
- očekivano: sve procjene α_n veće od točne vrijednosti
- treći primjer ($\psi(x) = x^2/L^2$): izrazito loša procjena α_n
- razlog: ne vrijedi rubni uvjet po silama na vrhu ($M(\ell) = 0$)
- moment konstantan duž konzole: $\psi''(x) = 2/L^2 = \text{const.}$
- pri izboru $\psi(x)$: zadovoljiti geometrijske i prirodne rubne uvjete
- 2. svojstvo: dobra aproksimacija i uz lošiji izbor funkcije oblika
- pretpostavka: poznajemo točno rješenje ψ
- odrediti vektor odstupanja (pogreške) $\Delta\psi$
- ako je $\tilde{\psi}$ oznaka približnog rješenja: $\Delta\psi = \tilde{\psi} - \psi$
- iznos odstupanja (duljina vektora pogreške): $\|\Delta\psi\| = \sqrt{\Delta\psi^T \Delta\psi}$
- bez dokaza: pogreška R. kvocijenta: $(\tilde{\omega}_n^2 - \omega_n^2)/\omega_n^2 \sim \|\Delta\psi\|^2$
- ako upotrijebimo točni ψ dobivamo točan iznos ω_n : $\Delta\psi = \mathbf{0}$
- problem: točni ψ nije poznat unaprijed – rabimo približni, $\tilde{\psi}$

Izbor funkcije oblika

- važno: točnost kvocijenta ovisi o izboru funkcije oblika $\tilde{\psi}(x)$
- velika točnost: funkcija oblika približno (prvog) oblika titranja
- sila inercije pri titranju 2381 pomakom $u(x, t') \sim \psi(x)!$

$$f_I(x, t') = -m(x) \ddot{u}(x, t') = \omega_n^2 z_0 m(x) \psi(x) \sin \omega_n t'$$

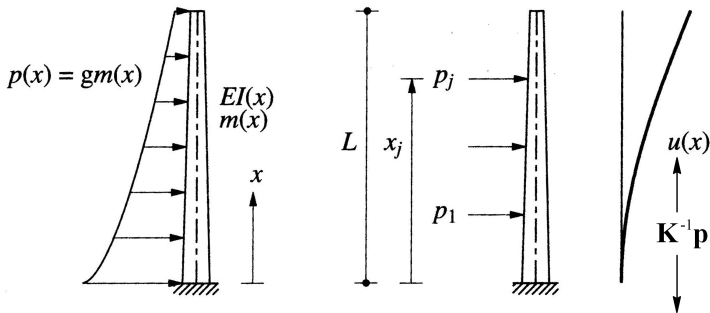
- razdioba sile $\sim m(x)\psi(x)!$ [$\omega_n^2 z_0 = \text{const.}$, $\sin \omega_n t'$ je $f(t)$]
- funkcija oblika: progib $\tilde{\psi}(x)$ zbog statičke sile $p(x) = m(x)\tilde{\psi}(x)$
- iteracija po $\tilde{\psi}(x)$: $\tilde{\psi}_i(x) = m(x)\tilde{\psi}_{i-1}(x)/k$, nije u duhu R. kvocijenta



- izbor $p(x)$: aproksimacija sile inercije
- $p(x)$ pretpostavimo izravno i vrlo približno (2. svojst.) u smjeru prvog oblika titranja
- izračunamo statički progib $u(x) = \tilde{\psi}(x)$
- iz R. kvocijenta odredimo ω_n

Poopćeni sustav s jednim stupnjem slobode

- težina u poprečnom smjeru: $p(x) = gm(x)$, $\tilde{\psi}(x) = g$, ili
- sile: $p(x) = \mathbf{p} = [p_1 \ \cdots \ p_n]^T$ (težine etaža, ali ne nužno)



- funkcije oblika zadovoljavaju rubne uvjete po silama i pomacima
- lakše odrediti potencijalnu energiju kao rad sila $p(x)$ na $u(x)$,

$$E_{S0} = \frac{1}{2} \int_0^L p(x) u(x) dx, \quad \text{nego iz } 238_2 \leftarrow \text{deformacija } u_0''(x)$$

Poopćeni sustav s jednim stupnjem slobode

- uz E_{K0} kao 238₃ ranije i $\dot{u}_0(x) = \omega_n u_0(x)$, (str. 235.), dobivamo:

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^L p(x) u(x) dx}{\int_0^L m(x) [u(x)]^2 dx}$$

- neki propisi: procjena T_n za $p(x) = p_0$ (konstantno opterećenje)
- ako je $p(x) = gm(x)$ tada je

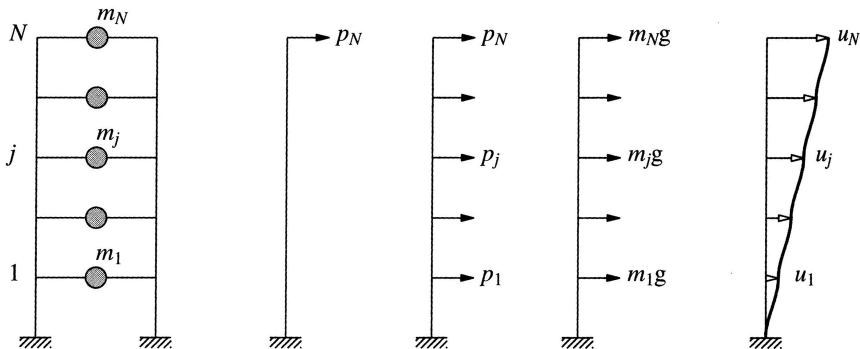
$$\omega_n^2 = g \frac{\int_0^L m(x) u(x) dx}{\int_0^L m(x) [u(x)]^2 dx}$$

- ako je $p(x) = \mathbf{p}$,

$$E_{S0} = \frac{1}{2} \sum p_j u(x_j), \quad \omega_n^2 = \frac{\sum p_j u(x_j)}{\int_0^L m(x) [u(x)]^2 dx}$$

Poopćeni sustav s jednim stupnjem slobode

- funkciju oblika za $I(x)$ zamijeniti funkcijom za $I = \text{const.}$
- ne tražite preciznu funkciju oblika i frekvenciju!
- zamisao Rayleighijevog kvocijenta: jednostavna i brza procjena
- $\tilde{\psi}(x)$: jednostavna funkcija koja zadovoljava sve rubne uvjete
- statički progib: vrijedi i za sustave s diskretnim masama ($\int \rightarrow \sum$)



Poopćeni sustav s jednim stupnjem slobode

- potencijalna energija u slučaju opterećenja i progiba sa slike:

$$E_{S0} = \frac{1}{2} p_N u_N \quad E_{S0} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N p_j u_j \quad E_{S0} = \frac{1}{2} g \sum_{j=1}^N m_j u_j$$

- kinetička energija:

$$E_{K0} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \dot{u}_{j0}^2 = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j (\omega_n u_{j0})^2, \quad \text{240} \blacktriangleleft \text{ jer je } \dot{u}_{j0} = \omega_n \underbrace{z_0 \psi_j}_{u_{j0}}$$

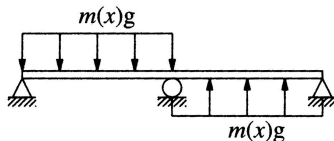
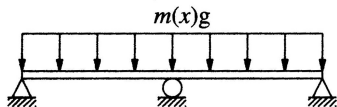
- izjednačenjem energija kao i ranije (izostavimo indeks od $\sum$ i 0):

$$\omega_n^2 = \frac{p_N u_N}{\sum m_j u_j^2} \quad \omega_n^2 = \frac{\sum p_j u_j}{\sum m_j u_j^2} \quad \omega_n^2 = g \frac{\sum m_j u_j}{\sum m_j u_j^2}$$

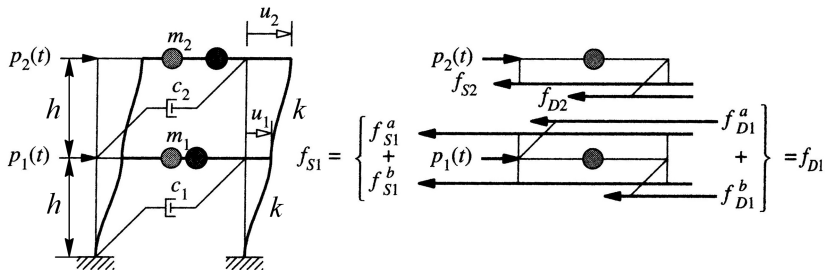
- slično 241 $\blacktriangleleft$ izrazima za posmičnu zgradu: ali brojnik oblika energije E_{S0}
- a nazivnik za $\psi_j = u_j$: funkcija oblika je progibna linija

Poopćeni sustav s jednim stupnjem slobode

- prvi je izraz prevelika (ali ipak upotrebljiva) aproksimacija
- posljednja dva izraza: u propisima za procjenu ω_n
- izrazi vrijede za bilo kakvu građevinu (ne samo posmičnu zgradu)
- uspjeh aproksimacije: predočenje prvog oblika titranja
- lako za jednostavni sustav (prosta greda, posmična zgrada)
- razlog: sve ordinate prvog oblika istog predznaka
- složeni sustav: teško predočiti prvi oblik titranja
- statički progib od težine neprikladan: potiče drugi oblik titranja
- antimetrično zadana težina: dobra procjena prvog oblika



Sustav s više stupnjeva slobode: jednostavni primjer



- horizontalni nosivi elementi: $EA \rightarrow \infty$, $EI \rightarrow \infty$
- vertikalni nosivi elementi: $EA \rightarrow \infty$, $EI > 0$
- zanemarujemo 44 ◀ utjecaj uzdužnih sila na krutost stupova
- pretpostavke posmične zgrade (str. 241.)
- masa: sudjelujuća masa koncentrirana u sredini grede
- viskozno prigušenje: proporcionalno relativnoj brzini greda
- bočna krutost etaže: zbroj krutosti stupova na savijanje
- dinamički stupnjevi slobode: horizontalni pomaci (masa) u_1 i u_2

Jednadžba gibanja: 2. Newtonov zakon

- elastična sila f_{Sj} i viskozna sila f_{Dj} suprotne pobudi
- zakon 1 ▶ gibanja mase (promatramo sve sile koje djeluju na m_j):

$$p_j - f_{Sj} - f_{Dj} = m_j \ddot{u}_j \quad \text{ili} \quad m_j \ddot{u}_j + f_{Dj} + f_{Sj} = p_j(t), \quad j = 1, 2$$

- matrično:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

- 2 ▶ skraćeno:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{p}(t)$$

- uz:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_D = \begin{bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_S = \begin{bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

- matrica $\mathbf{m}$ – 3 ▶ matrica masa (primijetite: dijagonalna)

Linearno elastične sile

- krutost (upeti krajevi), pomak i poprečna sila etaže iznose:

$$k_j = \sum_{\text{stupovi}} \frac{12EI}{h^3}, \quad \Delta_j = u_j - u_{j-1}, \quad V_j = k_j \Delta_j$$

- veza elastičnih sila i pomaka u razini greda:

$$f_{S1} = f_{S1}^b + f_{S1}^a = k_1 \Delta_1 + k_2 (-\Delta_2)$$

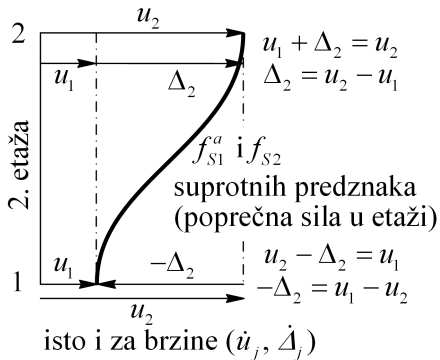
$$\Delta_1 = u_1 - u_0 = u_1, \quad (u_0 = 0, \text{ ležaj})$$

$$f_{S1} = k_1 u_1 + k_2 (u_1 - u_2)$$

$$f_{S2} = k_2 \Delta_2 = k_2 (u_2 - u_1)$$

$$\begin{bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{k} \mathbf{u}, \quad \mathbf{k} - \text{matrica krutosti}$$



Linearno viskozne sile

- uz koeficijent prigušenja c_j i brzinu $\dot{u}_j$, poprečne sile su:

$$V_j = c_j \dot{\Delta}_j, \quad f_{D1} = c_1 \dot{u}_1 + c_2 (\dot{u}_1 - \dot{u}_2), \quad f_{D2} = c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

- matrično (isti oblik kao elastične sile):

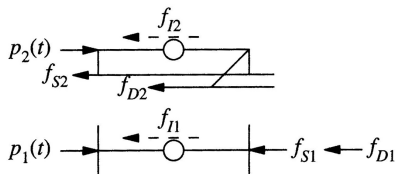
$$\begin{bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_D = \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{c} - \text{matrica prigušenja}$$

- uz $\mathbf{f}_S = \mathbf{k} \mathbf{u}$ 2522 ◀ sustav postaje:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{p}(t)$$

- matrična jednadžba: dvije obične diferencijalne jednadžbe
- svaka sadrži u_1 i u_2
- razlog: matrice $\mathbf{c}$ i $\mathbf{k}$ nisu dijagonalne
- jednadžbe međusobno ovisne: moraju se rješavati zajedno

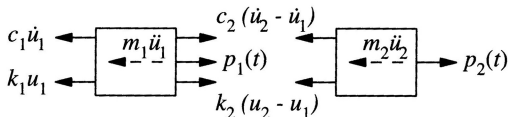
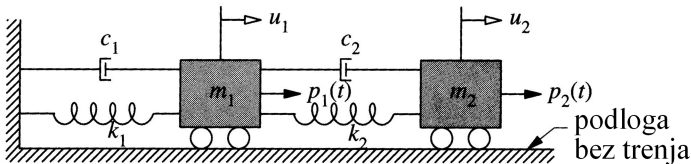
D'Alembertov princip dinamičke ravnoteže



- sile inercije $f_{Ij} = m_j \ddot{u}_j$ protivne $\ddot{u}_j$
- grede u statičkoj ravnoteži za svaki t
- iz $\sum x = 0$, jednačbe 252₁ ◀ gibanja:

$$m_j \ddot{u}_j + f_{Dj} + f_{Sj} = p_j(t), \quad j = 1, 2$$

Ekvivalentni model



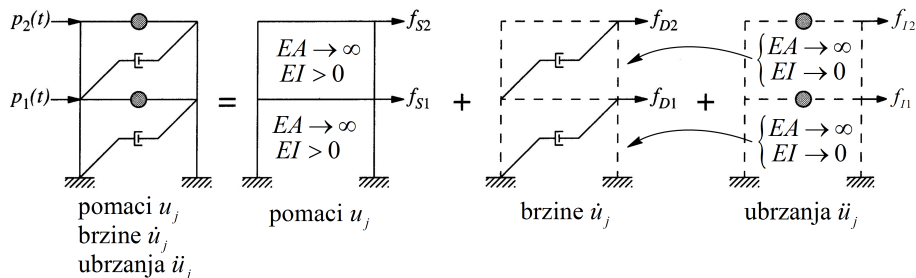
Sustav s više stupnjeva slobode: jednostavni primjer

- dvije opterećene mase spojene oprugama i prigušivačima
- svojstva elemenata jednaka istoznačnim svojstvima okvira
- D'Alembertov pr. za svaku m_i i grupiramo po $\dot{u}_i$ i u_i ($i = 1, 2$):
 - za m_1 : $m_1\ddot{u}_1 + \dot{u}_1(c_1 + c_2) - c_2\dot{u}_2 + u_1(k_1 + k_2) - k_2u_2 = p_1(t)$
 - za m_2 : $m_2\ddot{u}_2 + c_2\dot{u}_2 - c_2\dot{u}_1 + k_2u_2 - k_2u_1 = p_2(t)$
- vrijedi isti matrični zapis (str. 254.): obje jednačbe sadrže u_1 i u_2

Rastav na neovisne podmodele

- opterećenje $p_j(t)$ uzrokuje $u_j(t)$, $\dot{u}_j(t)$ i $\ddot{u}_j(t)$
- pomak djeluje samo na krutost k : nastaje elastična sila $f_{Sj} = k_j u_j(t)$
- brzina djeluje samo na prigušenje c : sila prigušenja $f_{Dj} = c_j \dot{u}_j(t)$
- ubrzanje djeluje samo na masu m : sila inercije $f_{Ij} = m_j \ddot{u}_j(t)$
- sustav rastavimo na tri podmodela (EA uvijek ∞):
 - okvir bez mase i prigušenja (zadane krutosti na savijanje)
 - okvir bez krutosti i mase (gipki okvir, samo pridržanje prigušivača)
 - okvir bez krutosti i prigušenja (gipki okvir, samo pridržanje mase)

Sustav s više stupnjeva slobode: poopćenje

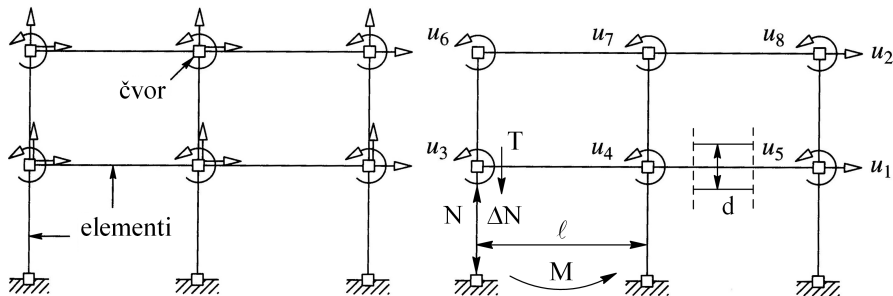


- svaki podmodel uzrokuje jednu vanjsku silu: $\mathbf{f}_S$, $\mathbf{f}_D$ i $\mathbf{f}_I = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}$
- vrijedi ravnoteža s vanjskim opterećenjem: $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{p}(t)$

Opći linearni sustav

- posmična zgrada: nije opći model (sadrži previše pretpostavaka)
- neizmjerne krutosti: u načelu nisu nužne, ali mogu biti opravdane
- opći model: treba odrediti diskretizaciju i stupnjeve slobode

Diskretizacija



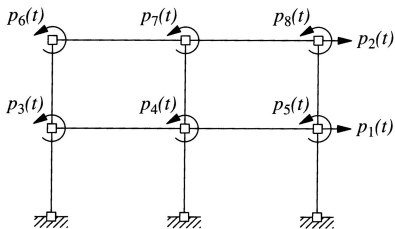
- fizikalni problem, matematički model, DISKRETIZACIJA, numerički model
- nosive dijelove aproksimiramo štapnim i/ili plošnim elementima
- elementi spojeni u čvorovima modela
- stupnjevi slobode: translacije i rotacije čvorova
- okvir u ravnini: tri stupnja slobode; dvije translacije i rotacija
- prostorni model: šest stupnjeva slobode; tri translacije i tri rotacije

Sustav s više stupnjeva slobode: poopćenje

- dvoetažni, dvobrodni okvir, $6 \cdot 3 = 18$ stupnjeva slobode
- česta pretpostavka: grede i stupovi nisu rastezljivi
- razlog: $EA \gg EI$ (velika uzdužna prema bočnoj krutosti etaže)
- nepoznanice: pomaci etaža i zaokreti čvorova (inž. m. p.)
- dvoetažni, dvobrodni okvir: 8 stupnjeva slobode (str. 258.)
- opravdano za „široke” i niske zgrade (oznake na str. 258.):
- stupovi na velikom ℓ : mali ΔN (prirast $N-a$) od M prevrtanja
- niske grede (mali d/ℓ): T u gredi malo utječe na ΔN u stupovima
- 1. i 2. ► iznimka: bliski stupovi (uske zgrade) i/ili visoke grede
- mali ℓ za preuzimanje M prevrtanja i/ili veliki d/ℓ (veliki T)
- posljedice: značajan doprinos ΔN -a zbog M i/ili T
- 3. iznimka: visoke građevine – veliki M prevrtanja, veliki ΔN
- 4. iznimka: veliki N od stalnog, pada k građevine, $P - \Delta$ učinak

Sustav s više stupnjeva slobode: poopćenje

- dinamičko opterećenje: djeluje u smjeru stupnjeva slobode
- momenti se najčešće ne zadaju kao dinamička opterećenja



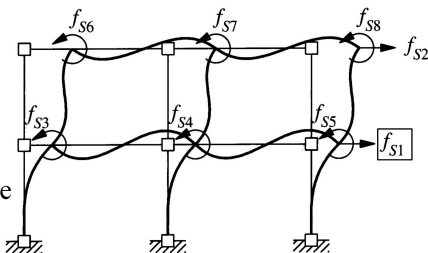
$$p_j(t), \quad j = 1, \dots, 8$$

$$p_j(t) = 0, \quad j = 3, \dots, 8$$

Analiza prvog podmodela: elastične sile

sile $\mathbf{f}_s$
pomaci $\mathbf{u}$

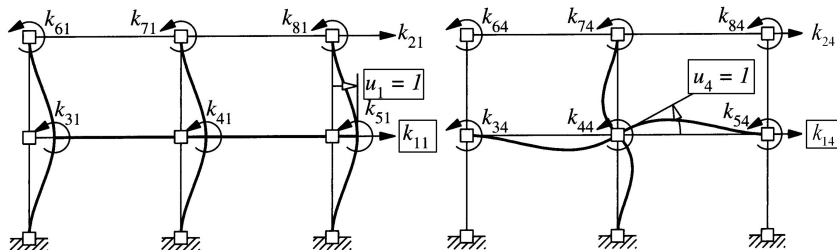
□ čvor;
bez mase



- vanjske sile f_{sj} zbog u_j
- posebno: za $u_j = 1$, ostali 0
- štapovi se deformiraju
- nastaju unutarnje sile M i T
- u ravnoteži sa silama k_{ij}
- k_{ij} drže progib od $u_j = 1$:
postoje u svim čvorovima

Sustav s više stupnjeva slobode: poopćenje

- primjerice: sile k_{i1} , ($i = 1, \dots, 8$), drže progib za $u_1 = 1$ (ostali 0)
- slično: sile k_{i4} , ($i = 1, \dots, 8$), drže progib za $u_4 = 1$ (ostali 0)



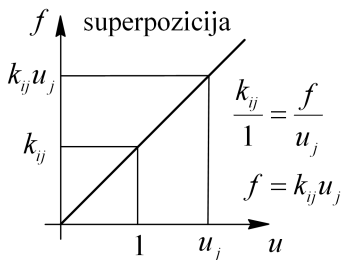
- članovi k_{ij} su $\oplus$ ili $\ominus$: ovisno o obliku progiba koji čuvaju
- sila od stvarnog pomaka = sila od jediničnog pomaka $\cdot$ stvarni pomak
- u smjeru 1 ($i = 1$): $f_{S1} = k_{11}u_1 + \dots + k_{14}u_4 + \dots + k_{1N}u_N$
- općenito, u smjeru i : $f_{Si} = k_{i1}u_1 + \dots + k_{iN}u_N$, (k_{ij} u smjeru i)
- zbroj sila u smjeru i od pomaka u_j svakog čvora ($j = 1, \dots, N$)

Sustav s više stupnjeva slobode: poopćenje

- svakom smjeru $i = 1, \dots, N$ pripada jedna jednadžba: matrično,

$$\begin{bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \\ \vdots \\ f_{SN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{14} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & \cdots & k_{24} & \cdots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{N1} & \cdots & k_{N4} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{k}\mathbf{u}, \quad (k_{ij} = k_{ji})$$

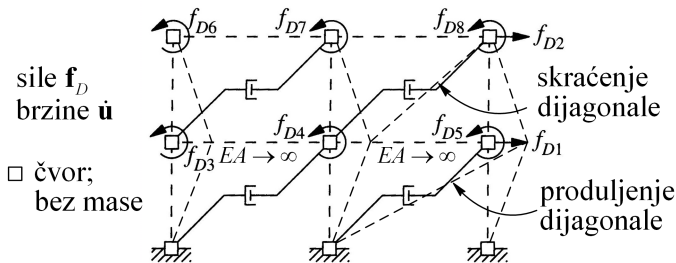


- tvorba matrice $\mathbf{k}$ (simetrična je, odnosno $k_{ij} = k_{ji}$):
- izravno, opisanim postupkom: dobivamo stupce matrice $\mathbf{k}$
- primjeri: prvi (k_{i1}) i četvrti (k_{i4}) stupac matrice, ($i = 1, \dots, N$)
- samo za jednostavnije sustave, složeni sustavi:
- zbrajanjem matrica krutosti elemenata – metoda pomaka
- opći pristup prema metodi pomaka: metoda konačnih elemenata

Analiza drugog podmodela: sile prigušenja

- model trošenja energije: viskozno prigušenje
- vanjske sile f_{Dj} : nastaju zbog brzina $\dot{u}_j$
- posebno za $\dot{u}_j = 1$, ostale 0: promjena duljine dijagonala u vremenu
- to su brzine: nastaju unutarnje sile (sile u prigušivačima)
- u ravnoteži s vanjskim čvornim silama c_{ij}
- drže brzinu okvira od $\dot{u}_j = 1$ (ostale 0): postoje u svim čvorovima
- ukupna sila u smjeru i (za c_{ij} u smjeru i):

$$f_{Di} = c_{i1}\dot{u}_1 + c_{i2}\dot{u}_2 + \dots + c_{ij}\dot{u}_j + \dots + c_{iN}\dot{u}_N$$



Sustav s više stupnjeva slobode: poopćenje

- svakom smjeru pripada jedna jednadžba: matrično,

$$\begin{bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ \vdots \\ f_{DN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_D = \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}}$$

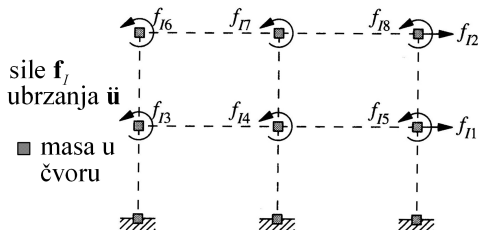
- članovi c_{ij} : ne određuju se iz svojstava i dimenzija zgrade
- pokusom se utvrđuje koeficijent prigušenja ζ
- posebni postupci: proračun matrice prigušenja $\mathbf{c}$ iz ζ

Analiza trećeg podmodela: sile inercije

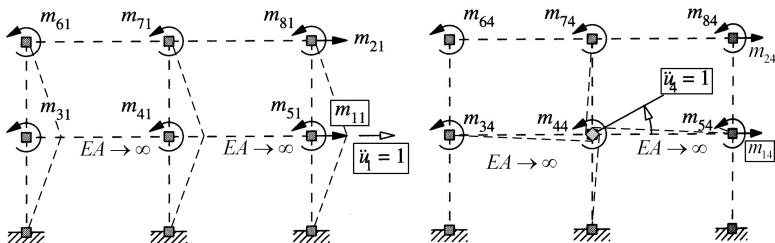
- vanjske sile $f_{ij}(t)$: nastaju zbog ubrzanja $\ddot{u}_j(t)$ masa štapova
- posebno za $\ddot{u}_j = 1$ (ostala 0): pojava sila **DUŽ** štapova⁹
- prema D'Alembertu: to su sile inercije protivne ubrzanju

⁹masa distribuirana duž štapova

Sustav s više stupnjeva slobode: poopćenje



- vanjske sile m_{ij} moraju uravnotežiti sile inercije duž štapova
- drže ubrzanje okvira od $\ddot{u}_i = 1$ (ostala 0): postoje u svim čvorovima



Sustav s više stupnjeva slobode: poopćenje

- vanjska sila m_{ij} : sila u smjeru i zbog $\ddot{u}_j = 1$, ($i = 1, \dots, N$)
- primjer: razdioba sila m_{i1} , ($i = 1, \dots, 8$)
- u ravnoteži sa silama inercije duž štapova
- slično: m_{i4} , ($i = 1, \dots, 8$) nastaju zbog $\ddot{u}_4 = 1$ (ostala 0)
- sila f_{li} u smjeru i :

$$f_{li} = m_{i1}\ddot{u}_1 + m_{i2}\ddot{u}_2 + \dots + m_{ij}\ddot{u}_j + \dots + m_{iN}\ddot{u}_N$$

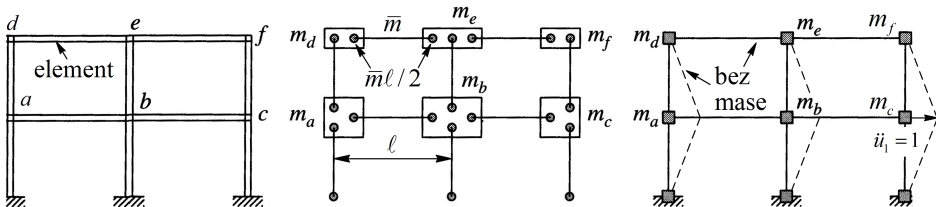
- svakom smjeru ($i = 1, \dots, N$) pripada jedna jednačnja:

$$\begin{bmatrix} f_{l1} \\ f_{l2} \\ \vdots \\ f_{lN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_l = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}$$

Sustav s više stupnjeva slobode: poopćenje

- masa uvijek distribuirana: dovoljna diskretizacija u čvorove
- aproksimacija koncentriranim (diskretnim) masama
- određene statički: prema dijelu težine koji pripada čvoru
- primjer: reakcije grede – dvije koncentrirane mase u čvorovima
- ukupna masa u čvoru: zbroj doprinosa svih elemenata
- dobivamo mase $m_a, \dots, m_f$ (nema mase duž štapova)
- tvorba matrice masa po stupcima: primjenom jediničnih ubrzanja

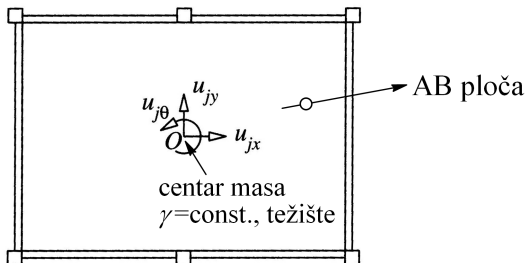


Sustav s više stupnjeva slobode: poopćenje

- vanjske sile za $\ddot{u}_1 = 1$ (translacijsko ubrzanje):
 - $m_{11} = m_a + m_b + m_c$, $m_{i1} = 0$, ($i = 2, \dots, 8$)
 - ostali čvorovi nemaju ubrzanje (nema mase duž štapova)
- slično za $\ddot{u}_4 = 1$ (rotacijsko ubrzanje):
 - $m_{44} = m_4$, rotacijska inercija mase u srednjem čvoru
 - ovisi o obliku mase: primjerice, kružni disk, $I_0 = mR^2/2$
 - mali doprinos silama inercije: redovito uzimamo $m_{44} = 0$
 - 1. razlog: translacija pokreće veću masu (cijelu etažu, vidjeti m_1)
 - 2. razlog: rijetke i slabe rotacijske pobude oko horizontalne osi
 - ostale mase nisu pomične (gipki okvir): $m_{i4} = 0$, ($i \neq 4$)
- zaključak: koncentrirane mase – dijagonalna matrica masa
$$m_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad m_{jj} = m_j \text{ ili } 0 \text{ (za rotaciju)}$$
- tvorba matrice: najčešće samo od translacijskih masa
- pridružene smjerovima x i y u ravnini, x , y i z u prostoru

Sustav s više stupnjeva slobode: poopćenje

- pojednostavnjenje za zgrade: ploča ∞ kruta u svojoj ravnini (AB)
- razlog: velika krutost prema fleksijskoj krutosti zidova i stupova
- ploča ostaje fleksibilna (zadržava krutost) prema savijanju
- posljedica: svi čvorovi u ravnini ploče – tri ista stupnja slobode



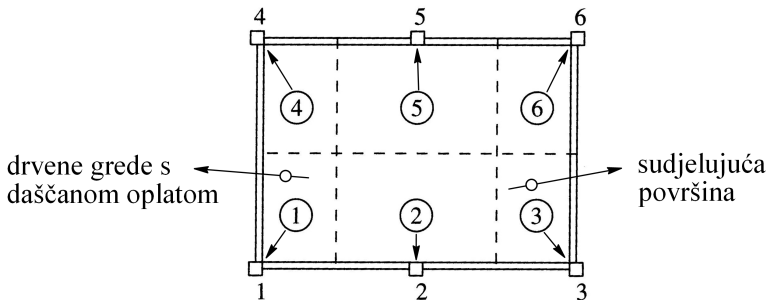
- jednaki stupnjevima slobode gibanja ploče kao krutog diska
- za ploču kata j : translacije (u_{jx} , u_{jy}) i rotacija ($u_{j\theta}$) centra masa
- mase: translacijske u smjeru x i y , rotacijska oko uspravne osi z

Sustav s više stupnjeva slobode: poopćenje

- za pravokutnu ploču površinske mase $\bar{m}$ i tlocrtnih dimenzija a , b :

$$m = m_{jx} = m_{jy} = \bar{m}ab, \quad m_{j\theta} = m \frac{a^2 + b^2}{12}$$

- masa: vlastita težina, stalno i dio pokretnog (propisi, NAD)
- dodati: sudjelujući dio stupova i zidova etaže (nosivih i pregradnih)



- uzdužno podatljivi stropovi (grednik s oplatom): $EA \rightarrow \infty$ ne vrijedi
- mase u čvorovima: prema sudjelujućim površinama ① do ⑥
- matrica krutosti: sadrži i AKSIJALNU i fleksijsku krutost ploče

Međusobna ovisnost jednačbi

- 1 ► superpozicija podmodela: $\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{p}(t)$ i

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t)$$

- 2 ► sustav od N diferencijalnih jednačbi (N – broj stupnjeva slobode)
- rješenje: vektor $\mathbf{u}(t) = [u_1 \ \cdots \ u_N]^T$, [derivacijom: $\dot{\mathbf{u}}(t)$ i $\ddot{\mathbf{u}}(t)$]
- matrični zapis ekvivalentan jednačbi za jedan stupanj slobode
- skalarne vrijednosti zamijenjene matricama i vektorima reda N :

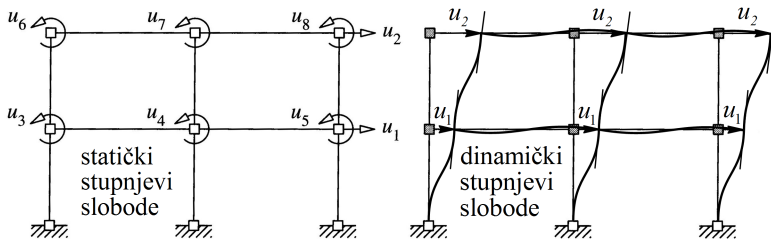
$$m \longrightarrow \mathbf{m}, \quad c \longrightarrow \mathbf{c}, \quad k \longrightarrow \mathbf{k}$$

$$\ddot{u} \longrightarrow \ddot{\mathbf{u}}, \quad \dot{u} \longrightarrow \dot{\mathbf{u}}, \quad u \longrightarrow \mathbf{u}, \quad p(t) \longrightarrow \mathbf{p}(t)$$

- općenito: matrice pune – jednačbe međusobno ovisne
- pojašnjenje: u jednoj jednačbi više nepoznanica u_j
- poseban slučaj: matrice dijagonalne – jednačbe neovisne
- jedna jednačba – jedna nepoznanica

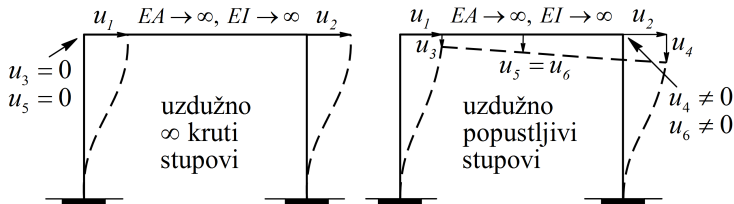
Statička kondenzacija

- eliminacija dinamičkih stupnjeva slobode za koje je $m_i = 0$
- ostaju u statičkoj analizi za tvorbu matrice **k**
- statički model: zanemarene samo uzdužne deformacije štapova
- inženjerska metoda pomaka: 8 stupnjeva slobode
- dinamički model: najčešće translacijske mase u čvorovima
- posljedice: dijagonalna **m** i $m_i = 0$ za rotacijske st. slobode
- često: pobuda ne sadrži rotacijske komponente (potres)
- stupnjevi slobode bez m_i i p_i : eliminacija iz dinamičkog proračuna



Sustav s više stupnjeva slobode: statička kondenzacija

- statički model: često sadrži i vertikalne stupnjeve slobode
- razlog: važne uzdužne deformacije stupova (u skladu s 259 ◀ 4 iznimke)
- u dinamičkom modelu: nisu potrebni za translacijsku pobudu
- razlog: mala ubrzanja u rotacijskom i vertikalnom smjeru



- 271₂ ◀ jednađbe grupiramo po statičkim $\mathbf{u}_0$ i dinamičkim $\mathbf{u}_t$ st. sl.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{tt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_t \\ \ddot{\mathbf{u}}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{tt} & \mathbf{k}_{t0} \\ \mathbf{k}_{0t} & \mathbf{k}_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_t(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

- mase u čvorovima
- $\mathbf{m}$ ($\mathbf{m}_{tt}$) dijagonalna
- nema rotacijske mase
- nema rotacijske pobude

- translacije (t) dinamički, a rotacije (0), statički st. slobode

Sustav s više stupnjeva slobode: statička kondenzacija

- statički stupnjevi slobode: bez pridružene mase

$$\mathbf{m}_{tt}\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{k}_{tt}\mathbf{u}_t + \mathbf{k}_{t0}\mathbf{u}_0 = \mathbf{p}_t(t), \quad \mathbf{k}_{0t}\mathbf{u}_t + \mathbf{k}_{00}\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$$

- druga jednadžba: nema sila inercije i pobude u smjeru $\mathbf{u}_0$
- posljedica (nakon množenja s $\mathbf{k}_{00}^{-1}$): statička ▶ ovisnost $\mathbf{u}_0$ o $\mathbf{u}_t$,

$$\mathbf{u}_0 = -\mathbf{k}_{00}^{-1}\mathbf{k}_{0t}\mathbf{u}_t$$

- uvrštavanjem u prvu jednadžbu (uz $\mathbf{k}_{t0} = \mathbf{k}_{0t}^T$, jer je $\mathbf{k}$ simetrična):

$$\mathbf{m}_{tt}\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{k}_{tt}\mathbf{u}_t - \mathbf{k}_{0t}^T\mathbf{k}_{00}^{-1}\mathbf{k}_{0t}\mathbf{u}_t = \mathbf{p}_t(t)$$

- izlučimo $\mathbf{u}_t$ (i $\hat{\mathbf{k}}_{tt} = \mathbf{k}_{tt} - \mathbf{k}_{0t}^T\mathbf{k}_{00}^{-1}\mathbf{k}_{0t}$ – kondenzirana matrica krutosti):

$$\mathbf{m}_{tt}\ddot{\mathbf{u}}_t + \hat{\mathbf{k}}_{tt}\mathbf{u}_t = \mathbf{p}_t(t)$$

- manji sustav jednadžbi od polaznoga

Sustav s više stupnjeva slobode: ravninski model

$$\mathbf{k}_{0t}^T \mathbf{k}_{00}^{-1} \mathbf{k}_{0t} = 2 \underbrace{\boxed{\mathbf{k}_{0t}^T}}_6 \cdot 6 \underbrace{\boxed{\mathbf{k}_{00}^{-1}}}_6 \cdot 6 \underbrace{\boxed{\mathbf{k}_{0t}}}_2 = 2 \underbrace{\boxed{\hat{\mathbf{k}}_{tt}}}_2 \quad \text{matrica reda } 2!$$

- rješenje problema: dinamički stupnjevi slobode $\mathbf{u}_t$
- primjer: polazni sustav 8, dinamički samo 2 stupnja slobode
- iz 274 ◀ ovisnosti: kondenzirani stupnjevi slobode $\mathbf{u}_0$ u bilo kojem t
- osnovni i konačni sustav oblikovno slični (bez prigušenja):

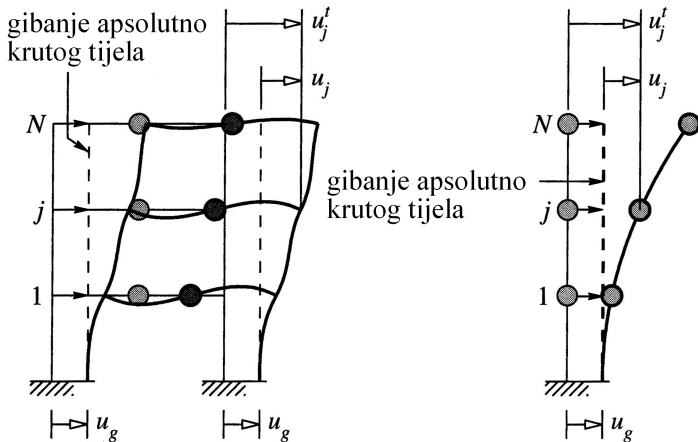
$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t), \quad \mathbf{m}_{tt}\ddot{\mathbf{u}}_t + \hat{\mathbf{k}}_{tt}\mathbf{u}_t = \mathbf{p}_t(t)$$

- smatrajmo: statička kondenzacija obavljena
- osnovni zapis sadrži samo dinamičke stupnjeve slobode

Ravninski sustav: translacijska pobuda potresom

- glavno svojstvo: dinamički stupnjevi slobode u smjeru pobude
- primjeri: model zgrade ili dimnjaka

Sustav s više stupnjeva slobode: ravninski model



- pomoci mase j : $u_j^t(t) = u_j(t) + u_g(t)$, vektorski, za sve mase,

$$\mathbf{u}^t(t) = \mathbf{u}(t) + u_g(t)\mathbf{1}, \quad \mathbf{1} = [1 \quad \cdots \quad 1]^T$$

Sustav s više stupnjeva slobode: ravninski model

- vrijedi **271₁** ◀ **dinamička ravnoteža**, ali bez vanjskog opterećenja:

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{0}$$

- gibanje krutog tijela: nema savijanja stupova i rada prigušivača
- $\mathbf{f}_S$ i $\mathbf{f}_D$ slično jednom st. sl. (str. 36.): samo od relativnog gibanja ($\mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{u}}$)
- ali sile inercije: zbog ukupnog ubrzanja ($\mathbf{f}_I = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}^t$)

$$\mathbf{m} \underbrace{[\ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}}_g \mathbf{1}]}_{\ddot{\mathbf{u}}^t} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\mathbf{1}\ddot{u}_g(t)$$

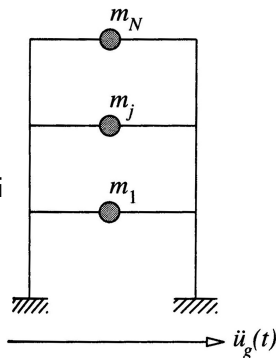
- 1** ▶ **sustav** od N **2** ▶ **diferencijalnih jednačbi** ($\mathbf{k}$ kondenzirana, reda N , $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{k}}_{tt}$)
- eliminirani vertikalni pomaci i kutovi zaokreta (str. 275.)
- odnosi se samo na dinamičke (horizontalne, bočne) pomake $\mathbf{u}$
- česti naziv: **MATRICA BOČNE KRUTOSTI**
- za opterećenje vanjskim silama (str. 271.): $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t)$
- iste lijeve strane diferencijalnih jednačbi

Sustav s više stupnjeva slobode: ravninski model

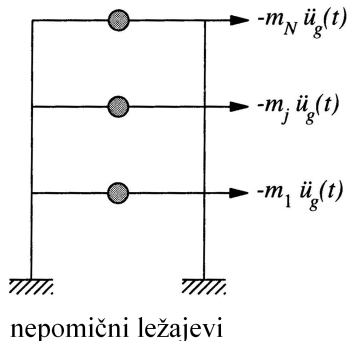
- znači, i desne strane jednake:

$$\mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -\mathbf{m}\mathbf{1}\ddot{u}_g(t), \quad \text{efektivna sila potresa}$$

ekvivalentni modeli



=



- poopćenje: stupnjevi slobode nisu u smjeru gibanja potresa,

$$u_j^t(t) = u_j^s(t) + u_j(t), \quad \mathbf{u}^t(t) = \mathbf{u}^s(t) + \mathbf{u}(t)$$

Sustav s više stupnjeva slobode: ravninski model

- kvazistatički¹⁰ pomak u_j^s : zbog statičkog (sporog) pomaka tla
- pomak u_j : dinamički, relativan prema u_j^s
- vrijedi: $\mathbf{u}^s(t) = \ell u_g(t)$, ℓ – utjecajni vektor
- sadrži pomake masa zbog statičkog (sporog) $u_g = 1$:

$$\ell = [\ell_1 \quad \cdots \quad \ell_n]^T$$

- ukupni pomak: $\mathbf{u}^t(t) = \ell u_g(t) + \mathbf{u}(t)$
- prema ranijem postupku (str. 277.):

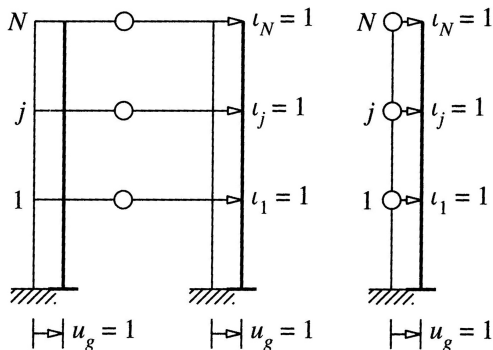
$$\underbrace{\mathbf{m} [\ddot{\mathbf{u}} + \ddot{u}_g \ell]}_{\ddot{\mathbf{u}}^t} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = -\mathbf{m} \ell \ddot{u}_g(t)$$

- ▶ efektivna sila potresa: $\mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -\mathbf{m} \ell \ddot{u}_g(t)$

¹⁰zbog statičkog djelovanja dinamičkog opterećenja

Sustav s više stupnjeva slobode: ravninski model

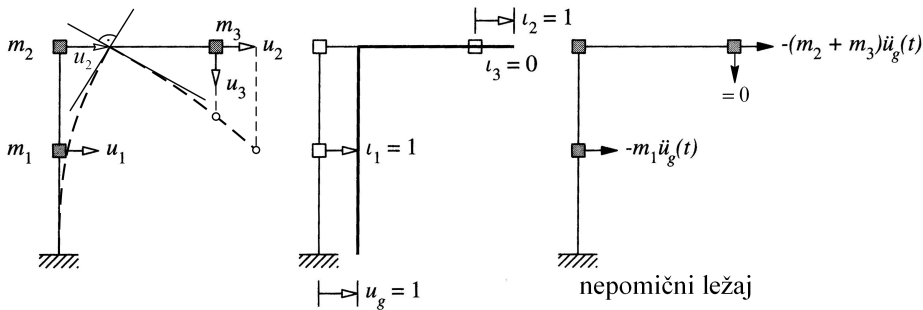
- prethodni primjer (st. sl. u smjeru pobude): za $u_g = 1$, $\ell = 1$



- pomak krutog tijela: pomak od $u_g = 1$
- statički, spori pomak tla
- nema ubrzanja masa: ○
- za $\ell = 1$: izvorni 277₁ ◀ sustav

- L okvir: dinamički stupanj slobode u_3 nije u smjeru pobude
- štapovi uzdužno apsolutno kruti: isti pomak (u_2) masa m_2 i m_3
- iz istog razloga: vertikalni pomaci m_1 i m_2 jednaki nuli
- dinamički stupnjevi slobode (slika): $\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T$

Sustav s više stupnjeva slobode: ravninski model



- za $u_g = 1$ dobivamo (slika): $\ell = [1 \quad 1 \quad 0]^T$, pa je

$$\mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -\mathbf{m} \ell \ddot{u}_g(t) = -\ddot{u}_g(t) \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

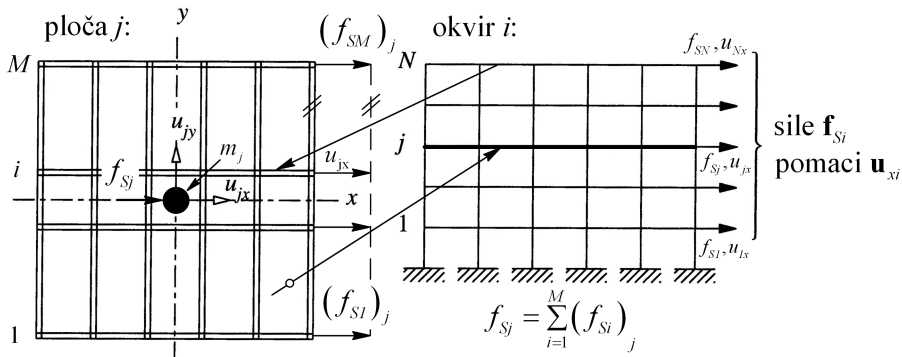
$$\mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -\ddot{u}_g(t) \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 + m_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sustav s više stupnjeva slobode: tlocrtno simetrični sustav

- primijetimo: greda uzdužno kruta, m_2 i m_3 istog ubrzanja
- posljedica: za $\ddot{u}_2 = 1$ pripadajuća masa $m_2 + m_3$
- horizontalna pobuda: nema efektivne sile u vertikalnom smjeru

Tlocrtno simetrična zgrada: translacijska pobuda potresom

- **model:** prostorni okvir – stupovi, grede i ploče, $EA \rightarrow \infty$



Sustav s više stupnjeva slobode: tlocrtno simetrični sustav

- simetrična, tlocrtna razdioba masa i krutosti
- neovisna analiza u bočnim smjerovima x i y
- smjer x : vrijedi jednadžba $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\mathbf{1}\ddot{u}_g(t)$
- matrica $\mathbf{m}$: dijagonalna, m_j etaže u centru masa ploče j (str. 269.)
- matrica $\mathbf{k}$: sadrži bočne krutosti zgrade u smjeru x
- još jednom: ZBROJ bočnih krutosti okvira smjera x
- bočna krutost okvira i (str. 277.): određena matricom $\mathbf{k}_{xi}$
- kondenzirana: bez rotacija i vertikalnih pomaka čvorova
- veza bočnih sila i pomaka jednog okvira (str. 282.): $\mathbf{f}_{Si} = \mathbf{k}_{xi}\mathbf{u}_{xi}$
- apsolutno krute ploče: jednak bočni pomak svih okvira,

$$\mathbf{u}_{xi} = \mathbf{u}_x, \quad \mathbf{u}_x = [u_{1x} \quad \cdots \quad u_{jx} \quad \cdots \quad u_{Nx}]^T$$

- pomak u_{jx} : bočni (horizontalni) pomak ploče j u centru masa

Sustav s više stupnjeva slobode: rotacijska pobuda

- ukupna bočna sila na zgradu (zbroy bočnih sila u okvirima):

$$\mathbf{f}_S = \sum_{i=1}^M \mathbf{f}_{Si} = \sum_{i=1}^M \mathbf{k}_{xi} \mathbf{u}_{xi} = \mathbf{u}_x \sum_{i=1}^M \mathbf{k}_{xi} = \underbrace{(\mathbf{k}_{x1} + \cdots + \mathbf{k}_{xM})}_{\mathbf{k}_x} \mathbf{u}_x$$

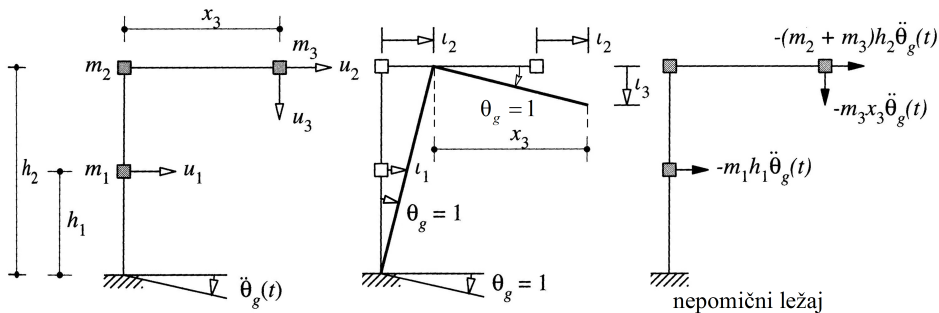
$$\mathbf{f}_S = \mathbf{k}_x \mathbf{u}_x, \quad \mathbf{k}_x = \sum_{i=1}^M \mathbf{k}_{xi}, \quad (\text{komponente } f_{Sj} \text{ djeluju u c. m.})$$

- bočna krutost zgrade: matrica $\mathbf{k}_x$ reda N (N etaža – pomaka)
- tvorba: zbroj matrica $\mathbf{k}_{xi}$ pojedinih okvira (reda N)
- u osnovnoj jednadžbi za smjer x : $\mathbf{k} = \mathbf{k}_x$
- sličan postupak za okvire u smjeru y : $\mathbf{k} = \mathbf{k}_y$, ista matrica $\mathbf{m}$

Ravninski sustav: rotacijska pobuda potresom

- rotacijska pobuda: ne mjeri se izravno, mali broj zapisa
- procjena iz translacijskih pobuda na poznatim dubinama

Sustav s više stupnjeva slobode: rotacijska pobuda



- ukupni pomak: $\mathbf{u}^t(t) = \mathbf{u}(t) + \ell \theta_g(t)$
- pomak $\mathbf{u}(t)$: povezan s deformacijom modela (poput str. 279.)
- pomak $\mathbf{u}^s(t) = \ell \theta_g(t)$: apsolutno kruti pomak sustava
- nastaje zbog statičkog djelovanja θ_g
- pomaci zbog $\theta_g = 1$: utjecajni vektor, $\ell = \tan \theta_g [h_1 \quad h_2 \quad x_3]^T$
- mali kutovi: vrijedi $\tan \theta_g \approx \theta_g = 1$, pa je $\ell = [h_1 \quad h_2 \quad x_3]^T$

Sustav s više stupnjeva slobode: rotacijska pobuda

- deriviranjem ukupnog pomaka ▶ dobivamo:

$$\underbrace{\mathbf{m} [\ddot{\mathbf{u}} + \ell \ddot{\theta}_g]}_{\ddot{\mathbf{u}}^t} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\ell \ddot{\theta}_g(t)$$

- efektivna sila potresa:

$$\mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -\mathbf{m}\ell \ddot{\theta}_g(t) = -\ddot{\theta}_g(t) \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- odnosno:

$$\mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -\ddot{\theta}_g(t) \begin{bmatrix} m_1 h_1 \\ (m_2 + m_3) h_2 \\ m_3 x_3 \end{bmatrix}$$

- rotacijska pobuda ali translacija masa: $\mathbf{m}$ kao za translaciju (str. 281.)
- greda uzdužno kruta: m_2 i m_3 istog horizontalnog ubrzanja
- rotacijska pobuda: postoji efektivna sila u vertikalnom smjeru

Sustav s više stupnjeva slobode: neelastični sustav

- funkcija $f_S - u$ 25 ◀ nije linearna:
 - veći iznosi sile: krivljenje početnog dijela
 - pri rasterećenju (opterećenju): krivulje se ne podudaraju
 - funkcija nije jednoznačna: važna povijest pomaka
- simbolički zapis ovisnosti (petlje histereze): $\mathbf{f}_S = \mathbf{f}_S(\mathbf{u})$
- uvijek (za svaki t) vrijedi jednačba (ravnoteža!) gibanja:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \underbrace{\mathbf{f}_S(\mathbf{u})}_{\neq \mathbf{k}\mathbf{u}} = -\mathbf{m}\ell\ddot{\mathbf{u}}_g(t)$$

- pretpostavka: istodobna pobuda svih ležajeva (∞ kruto tlo)
- model energijskih gubitaka: određen matricom prigušenja $\mathbf{c}$,
 - u elastičnom području (str. 27.): različiti oblici trenja, otpor zraka, ...
 - u plastičnom području (str. 29.): razlika prema dinamičkom pokusu
- dodatni gubitci u plastičnom području: izravno, zadavanjem $\mathbf{f}_S$
- rješavanje: numerički, metodama vremenskog prirasta

Proračun pomaka, brzina i ubrzanja

- zadano: $\mathbf{m}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{k}$ ili $\mathbf{f}_S(\mathbf{u})$, $\mathbf{p}(t)$ ili $\ddot{\mathbf{u}}_g(t)$
- odrediti odziv: ponašanje neke veličine u vremenu
- važne relativne vrijednosti: $\mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{u}}$ i $\ddot{\mathbf{u}}$
- za potres i ukupne vrijednosti: $\mathbf{u}^t$, $\dot{\mathbf{u}}^t$ i $\ddot{\mathbf{u}}^t$
- najvažnije: $\mathbf{u}(t)$ – unutarnje sile izravno ovise o pomacima

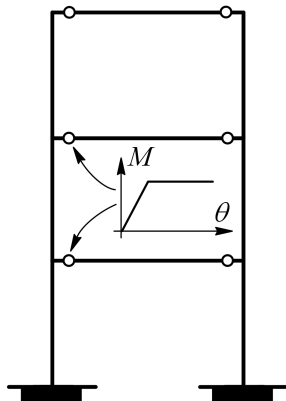
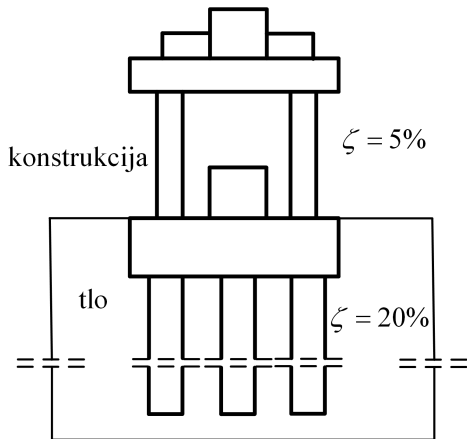
Proračun unutarnjih sila

- dinamička analiza (tri pristupa, str. 289.–291.): određen $\mathbf{u}(t)$
- statička analiza: odrediti unutarnje sile i naprezanja
- dva pristupa (za svaki t):
 - 1 $\mathbf{u}_t(t) \rightarrow \mathbf{u}_0 = -\mathbf{k}_{00}^{-1} \mathbf{k}_{0t} \mathbf{u}_t \rightarrow$ 412 ◀ unutarnje sile $\rightarrow$ naprezanja
bez kondenzacije: $\mathbf{u}(t) \rightarrow$ unutarnje sile $\rightarrow$ naprezanja
 - 2 ekvivalentne statičke sile: $\mathbf{f}_S(t) = \mathbf{k} \mathbf{u}(t)$ – vanjsko opterećenje
statička analiza za $\mathbf{f}_S(t)$ u bilo kojem t : unutarnje sile, naprezanja

Klasična modalna analiza: dijagonalizacija izvornog sustava

- široka primjena: linearni sustavi s klasičnim prigušenjem
- postoje klasični prirodni periodi i oblici titranja
- transformacija sustava iz izvornih u modalne koordinate
- posljedica: niz neovisnih jednačbi s jednim stupnjem slobode
- svaka jednačba: jedan oblik, period i prigušenje titranja
- pobuda: jednostavna (formula) ili složena (niz podataka)
- proračun pojedine jednačbe: analitički ili numerički
- ukupni odziv sustava: zbroj odziva za svaku jednačbu
- ne vrijedi ako ne postoji rastav na niz neovisnih jednačbi, npr.:
 - sustavi s izrazito različitim prigušenjima pojedinih dijelova
primjer: model konstrukcije ($\zeta = 5\%$) i okolnog tla ($\zeta = 20\%$)
 - neelastični sustavi, bez obzira na oblik prigušenja
primjer: elastoplastična ovisnost sile i pomaka

Sustav s više stupnjeva slobode: postupci proračuna



Kompleksni problem vlastitih vrijednosti

- također transformacija iz izvornih u modalne koordinate
- čak i za opću (ne samo klasičnu) matricu prigušenja
- prednost: niz neovisnih jednažbi bez obzira na tip prigušenja

Izravno rješavanje izvornog sustava

- numerički, metodama vremenskog prirasta
- rješenje nije analitičko, čak i za jednostavnu pobudu
- opći pristup: vrijedi za linearne i nelinearne modele

Analiza sustava s više stupnjeva slobode

Klasična modalna analiza

- rastav na neovisne jednadžbe

Vrijedi za:

- linearni sustav
- klasično prigušenje

Rješenje:

- analitičko (jednostavna pobuda)
- numeričko (složena pobuda)

Izravna analiza

- polaznih, ovisnih jednadžbi

Vrijedi za:

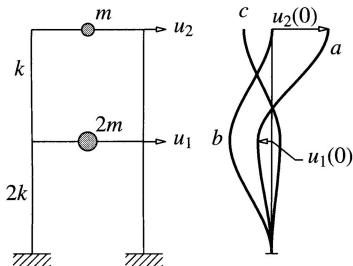
- linearni ili nelinearni sustav
- klasično ili opće prigušenje

Rješenje:

- isključivo numeričko

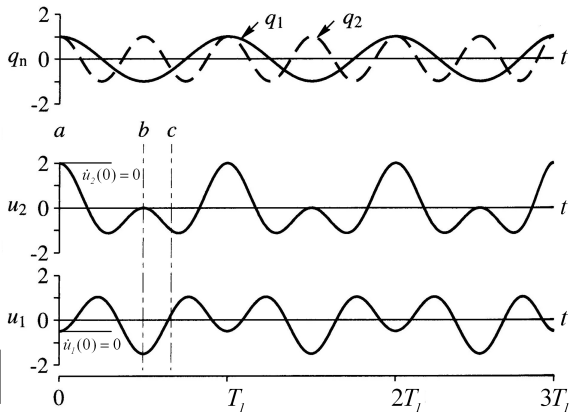
Sustav s više stupnjeva slobode: slobodno titranje

- 1 ► slobodno titranje ($\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$), bez prigušenja ($\mathbf{c} = \mathbf{0}$): $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- sustav od N homogenih, povezanih diferencijalnih jednačbi
- razlog povezanosti: u općem slučaju $\mathbf{m}$, češće $\mathbf{k}$ nisu dijagonalne
- 2 ► rješenje $\mathbf{u}(t)$: zadovoljava 3 ► početne uvjete $\mathbf{u}(0)$ i $\dot{\mathbf{u}}(0)$ (jedine pobude)



$$\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{u}}(0) = \begin{bmatrix} \dot{u}_1(0) \\ \dot{u}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Sustav s više stupnjeva slobode: slobodno titranje

- promatramo slobodno titranje 1 ► dvoetažnog posmičnog okvira
- krutosti etaža: $2k$ i k ; mase u razini greda: $2m$ i m
- pobuda: početni oblik pomaka a (nije jedini mogući!)
- protivno slobodnom titranju jednog stupnja slobode:
 - pomaci u_1 i u_2 nisu jednostavna harmonijska gibanja masa
 - periodi titranja masa nisu definirani
- omjer u_1/u_2 nije sačuvan (oblici a , b i c nisu slični):

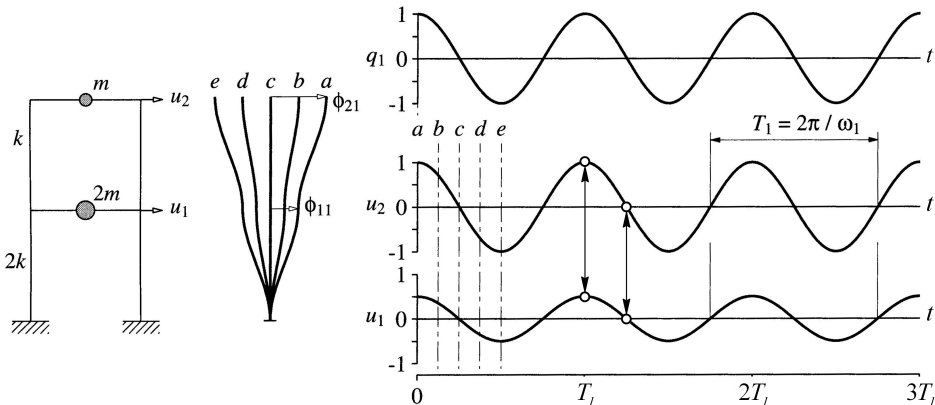
$$u_1(a)/u_2(a) \neq u_1(b)/u_2(b) \neq u_1(c)/u_2(c)$$

- pojašnjenje: oblici a , b i c nisu povezani DO NA KOEFICIJENT
- pitanje: Kako pobuditi okvir na harmonijsko gibanje?
- odgovor: prikladnom razdiobom početnih pomaka okvira
- oblik pomaka (omjer u_1/u_2) ostaje sačuvan prilikom titranja
- sustav s dva stupnja slobode: postoje dva takva oblika
- 2 ► naziv: PRIRODNI OBLICI TITRANJA (vektori ϕ_1 i ϕ_2)

Sustav s više stupnjeva slobode: slobodno titranje

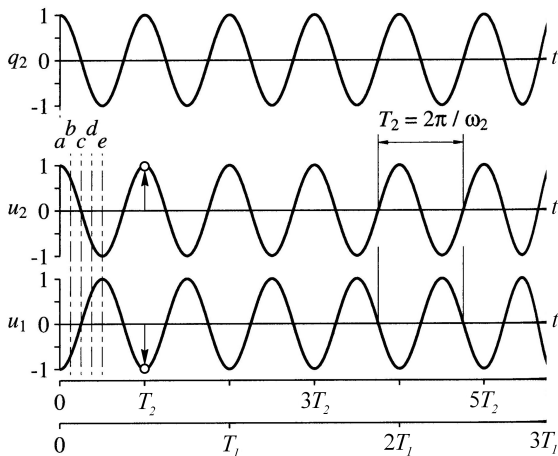
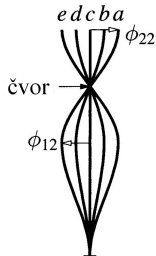
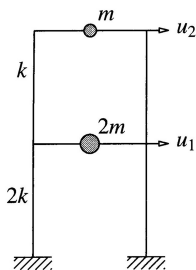
$$\mathbf{u}(0) = \boldsymbol{\phi}_1 = [\phi_{11} \quad \phi_{21}]^T \text{ ili } \mathbf{u}(0) = \boldsymbol{\phi}_2 = [\phi_{12} \quad \phi_{22}]^T, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}$$

- mase titraju istim periodom i istodobno dostižu ekstremne pomake
- istodobno prolaze kroz uspravni položaj okvira ($u_1 = 0$ i $u_2 = 0$)
- prvi oblik titranja: $u_1/u_2 = \text{const.}$ i pomaci masa u istom smjeru



Sustav s više stupnjeva slobode: slobodno titranje

- drugi oblik titranja: $u_1/u_2 = \text{const.}$ i nasuprotni pomaci masa
- postoji nultočka (čvor): nepomična točka pri titranju
- broj nultočaka raste s porastom rednog broja oblika titranja



Sustav s više stupnjeva slobode: slobodno titranje

- prirodni period titraja: vrijeme potrebno za jedan titraj ($a \rightleftharpoons e$),

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} [\text{s}]$$

- prirodna (ciklička) frekvencija titraja:

$$f_n = \frac{1}{T_n} [\text{Hz}]$$

- indeks n : označava redni broj¹¹ oblika titranja ($n = 1, 2$)
- za oblike titranja obično vrijedi:

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n, \quad (T_1 > T_2 > \dots > T_n)$$

- sjetimo se: sustav s jednim st. sl. izravno pobudimo harmonijski
- razlog: nakon otpuštanja titra jedinim, prirodnim oblikom titranja
- sustav s više stupnjeva slobode: možemo pobuditi na različite načine
- za harmonijsko gibanje: početni pomaci – prirodni oblik titranja

¹¹ipak i dalje nas podsjeća na engleski NATURAL

Proračun prirodnih frekvencija i oblika titranja

- 1 ► zapis slobodnog titranja u obliku JEDNOG ϕ_n (str. 294. ili 295.):

$$\mathbf{u}(t) = q_n(t)\phi_n, \quad (\text{u primjeru: } n = 1 \text{ ili } 2)$$

- OBLIK (prostorna razdioba) titranja: određen s $\phi_n = [\phi_{1n} \ \phi_{2n}]^T$
- sadrži ekstremne ordinate ϕ_{jn} (u primjeru: $j = 1, 2$)
- ordinate nisu promjenjive u vremenu (ne ovise o t)
- VREMENSKA PROMJENA ORDINATA: harmonijska funkcija (str. 294., 295.)

$$q_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t, \quad (\text{kao za jedan st. sl.})$$

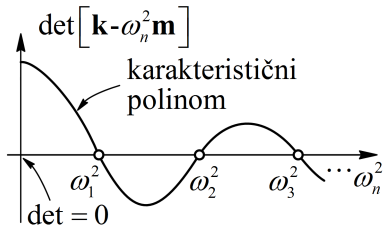
- logično rješenje: jer mase titraju lijevo – desno nakon otpuštanja
- određivanje konstanta A_n i B_n : jednoznačno, iz dva početna uvjeta
- primijetite: sve mase titraju prema istom zakonu $q_n(t)$
- 2 ► konačno: $\mathbf{u}(t) = \phi_n(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)$
- nepoznanice problema: ω_n i ϕ_n

Sustav s više stupnjeva slobode: slobodno titranje

- uvrstimo rješenje u polaznu jednadžbu: $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- uz: $\ddot{\mathbf{u}}(t) = -\omega_n^2 \phi_n (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) = -\omega_n^2 \phi_n q_n(t)$
- dobivamo: $[-\omega_n^2 \mathbf{m} \phi_n + \mathbf{k} \phi_n] q_n(t) = \mathbf{0}$
- trivijalno rješenje: $q_n(t) = 0$, $\mathbf{u}(t) = q_n(t) \phi_n = \mathbf{0}$, bez gibanja
- netrivijalno rješenje: izraz u zagradi jednak nuli
- nepoznanice ω_n i ϕ_n zadovoljavaju $\mathbf{k} \phi_n = \omega_n^2 \mathbf{m} \phi_n$
- poznato kao MATRIČNI PROBLEM VLASTITIH VRIJEDNOSTI
- preciznije: realni problem ▶ vlastitih vrijednosti
- razlog: ω_n^2 i komponente vektora ϕ_n realni brojevi
- matrice $\mathbf{m}$ i $\mathbf{k}$ poznate: treba odrediti ω_n^2 i ϕ_n
- drugi zapis problema vlastitih vrijednosti: $[\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m}] \phi_n = \mathbf{0}$
- sustav od N homogenih (jer je $\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$) algebarskih jednadžbi
- nepoznato: ω_n i N komponenata vektora $\phi_n = [\phi_{1n} \ \cdots \ \phi_{Nn}]^T$

Sustav s više stupnjeva slobode: slobodno titranje

- trivijalno rješenje: nulvektor $\phi_n = \mathbf{0}$, nema titranja
- netrivialno rješenje homogenog sustava: $\det [\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m}] = 0$
- raspis determinante: polinom reda N po ω_n^2
- naziv polinoma: KARAKTERISTIČNI ili FREKVENCIJSKI POLINOM



- npr. za dva stupnja slobode:

$$a\omega_n^4 + b\omega_n^2 + c = 0$$

- kvadratna jednačba po ω_n^2
- dvije nultočke: ω_1^2 i ω_2^2

- korijeni (nultočke – det. nula) polinoma: ω_n^2 – realni i pozitivni brojevi
- razlog: matrice $\mathbf{m}$ i $\mathbf{k}$ simetrične i pozitivno definitne
- postoje uvjeti za pozitivnu definitnost u građevinarstvu
- za matricu $\mathbf{k}$: ispravna mreža, broj i raspored ležajeva

Sustav s više stupnjeva slobode: slobodno titranje

- spriječeni pomaci krutog tijela
- za matricu $\mathbf{m}$: statička kondenzacija
- eliminacija st. sl. bez pridružene koncentrirane mase (rotacije)
- postoji N korijena ω_n^2 : određuju frekvencije ω_n ($n = 1, \dots, N$)
- korijeni karakterističnog polinoma: VLASTITE VRIJEDNOSTI
- poznato ω_n : iz $[\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m}] \phi_n = \mathbf{0}$ odredimo ϕ_n
- vektor ϕ_n određen do na konstantu a : i $a\phi_n$ rješenje problema
- zapamtite: APSOLUTNI iznosi ordinata nisu određeni
- definiran samo OBLIK titranja ϕ_n , preciznije,
- relativni odnosi (omjeri) među ordinatama (komponentama) ϕ_{jn}
- svakoj frekvenciji ω_n pripada jedan prirodni oblik titranja ϕ_n
- riječ PRIRODNI: naglašava titranje bez pobude, ovisi samo o $\mathbf{m}$ i $\mathbf{k}$
- 293₂ ◀ drugi naziv za ϕ_n : VLASTITI (SVOJSTVENI) VEKTORI
- prvi oblik titranja ϕ_1 : TEMELJNI (OSNOVNI) OBLIK TITRANJA

Matrični zapis problema: modalna i spektralna matrica

- matrični pristup: skraćeni zapis svih ω_n i ϕ_n
- oblici titranja: vektori $\phi_n = [\phi_{1n} \ \cdots \ \phi_{Nn}]^T$, $n = 1, \dots, N$
- stupci MODALNE MATRICE problema vlastitih vrijednosti:

$$\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_N], \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix}$$

- članovi SPEKTRALNE MATRICE problema vlastitih vrijednosti:

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

Sustav s više stupnjeva slobode: slobodno titranje

- dijagonalna matrica: vlastite vrijednosti ω_n^2 na dijagonali
- prepíšimo $\mathbf{k}\phi_n = \omega_n^2 \mathbf{m}\phi_n$: $\mathbf{k}\phi_n = \mathbf{m}\phi_n \omega_n^2$, $n = 1, \dots, N$
- desna strana: umnožak skalara i vektora – vrijedi komutacija
- zapis svih N jednadžbi jednom formulom ($\phi_n \rightarrow \Phi$, $\omega_n^2 \rightarrow \Omega^2$):

$$\mathbf{k}\Phi = \mathbf{m}\Phi\Omega^2$$

- raspisano za dvoetažni okvir ($N = 2$):

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c|c} k_{11}\phi_{11} + k_{12}\phi_{21} & k_{11}\phi_{12} + k_{12}\phi_{22} \\ k_{21}\phi_{11} + k_{22}\phi_{21} & k_{21}\phi_{12} + k_{22}\phi_{22} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} m_{11}\phi_{11} + m_{12}\phi_{21} & m_{11}\phi_{12} + m_{12}\phi_{22} \\ m_{21}\phi_{11} + m_{22}\phi_{21} & m_{21}\phi_{12} + m_{22}\phi_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \omega_1^2(m_{11}\phi_{11} + m_{12}\phi_{21}) & \omega_2^2(m_{11}\phi_{12} + m_{12}\phi_{22}) \\ \omega_1^2(m_{21}\phi_{11} + m_{22}\phi_{21}) & \omega_2^2(m_{21}\phi_{12} + m_{22}\phi_{22}) \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\left[\mathbf{k}\phi_1 \mid \mathbf{k}\phi_2 \right] = \left[\omega_1^2 \mathbf{m}\phi_1 \mid \omega_2^2 \mathbf{m}\phi_2 \right]$$

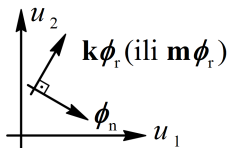
Ortogonalnost vlastitih vektora

- oblici titranja zadovoljavaju ▶ uvjete ortogonalnosti:

$$\phi_n^T \mathbf{k} \phi_r = 0$$

$$\phi_n^T \mathbf{m} \phi_r = 0$$

$$\text{za: } \omega_n \neq \omega_r$$



komponente od ϕ_n i ϕ_r
u smjeru pomaka:

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad \cdots \quad u_N]^T$$

- skalarni produkt vektora ϕ_n i $\mathbf{k}\phi_r$ (ili $\mathbf{m}\phi_r$) jednak nuli
- za ω_n i ϕ_n vrijedi problem vlastitih vrijednosti:

$$\mathbf{k}\phi_n = \omega_n^2 \mathbf{m}\phi_n / \cdot \phi_r^T, \quad \phi_r^T \mathbf{k}\phi_n = \omega_n^2 \phi_r^T \mathbf{m}\phi_n$$

- slično vrijedi za ω_r i ϕ_r (množimo s ϕ_n^T): $\phi_n^T \mathbf{k}\phi_r = \omega_r^2 \phi_n^T \mathbf{m}\phi_r$
- transponiramo izraz za ω_n i ϕ_n : $\phi_r^T \mathbf{k}\phi_n = \omega_n^2 \phi_r^T \mathbf{m}\phi_n / ^T$
- uz $(\mathbf{a}^T)^T = \mathbf{a}$ i $(\mathbf{a}^T \mathbf{b})^T = \mathbf{b}^T \mathbf{a}$: $(\phi_r^T \mathbf{k}\phi_n)^T = \phi_n^T \mathbf{k}^T (\phi_r^T)^T = \underline{\phi_n^T \mathbf{k}\phi_r}$
- jer je $\mathbf{k}^T = \mathbf{k}$ (simetrična matrica)

Sustav s više stupnjeva slobode: slobodno titranje

- slično i za desnu stranu izraza za ω_n i ϕ_n (i $\mathbf{m}$ je simetrična):

$$(\omega_n^2 \phi_r^T \mathbf{m} \phi_n)^T = \omega_n^2 \phi_n^T \mathbf{m}^T (\phi_r^T)^T = \underline{\omega_n^2 \phi_n^T \mathbf{m} \phi_r}$$

- konačno (podcrtani izrazi):

$$\phi_n^T \mathbf{k} \phi_r = \omega_n^2 \phi_n^T \mathbf{m} \phi_r$$

- oduzimanjem od izraza za ω_r i ϕ_r (iste lijeve strane):

$$(\omega_n^2 - \omega_r^2) \phi_n^T \mathbf{m} \phi_r = 0$$

- vrijedi: $\phi_n^T \mathbf{m} \phi_r = 0$ ako je $\omega_n^2 \neq \omega_r^2$ (ili $\omega_n \neq \omega_r$ jer su > 0)
- ako je $\omega_n \neq \omega_r$ iz izraza za ω_r i ϕ_r vrijedi i:

$$\phi_n^T \mathbf{k} \phi_r = \omega_r^2 \underbrace{\phi_n^T \mathbf{m} \phi_r}_0 = 0$$

- ortogonalnost dokazana ako su frekvencije različite

Sustav s više stupnjeva slobode: slobodno titranje

- česti slučaj: jednoj frekvenciji pripada više (j) oblika titranja
- osnosimetrične građevine (kupola, vodosprema, silos, dimnjak)
- zgrade: grozdovi oblika titranja s istom (bliskom) frekvencijom

$$\begin{array}{cccc|cccc|cc} \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_i & \omega_i & \cdots & \omega_i & \cdots & \omega_N \\ \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_i & \phi_{i+1} & \cdots & \phi_{i+j} & \cdots & \phi_N \end{array}$$

- nisu međusobno ortogonalni ($\omega_n = \omega_r$): moguća ortogonalizacija
- odaberemo prvi (ϕ_i): drugi (ϕ_{i+1}) ortogonaliziramo na prvi
- treći (ϕ_{i+2}): ortogonaliziramo na prethodna dva, itd.
- ortogonaliziramo svih j oblika titranja s istom frekvencijom
- s preostalim oblicima: N ortogonalnih oblika (stupci matrice Φ)
- realizacija: inačice Gramm–Schmidtova postupka ortogonalizacije

Sustav s više stupnjeva slobode: slobodno titranje

- 1 ► posljedice ortogonalnosti: KVADRATNE matrice $\mathbf{K}$ i $\mathbf{M}$ dijagonalne,

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{k} \boldsymbol{\Phi}, \quad (K_{nr} = \phi_n^T \mathbf{k} \phi_r), \quad \mathbf{M} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{m} \boldsymbol{\Phi}, \quad (M_{nr} = \phi_n^T \mathbf{m} \phi_r)$$

- članovi izvan dijagonale ($n \neq r$): $K_{nr} = 0$ i $M_{nr} = 0$
- 2 ► članovi na dijagonali ($n = r$): $K_n = \phi_n^T \mathbf{k} \phi_n$, $M_n = \phi_n^T \mathbf{m} \phi_n$
- K_n i M_n kvadratne forme: strogo pozitivni dijagonalni članovi
- razlog: $\mathbf{k}$ i $\mathbf{m}$ pozitivno definitne matrice
- veza među dijagonalnim članovima matrica $\mathbf{K}$ i $\mathbf{M}$: $K_n = \omega_n^2 M_n$
- dokaz (rabimo $\mathbf{k}\phi_n = \omega_n^2 \mathbf{m}\phi_n$, str. 298.):

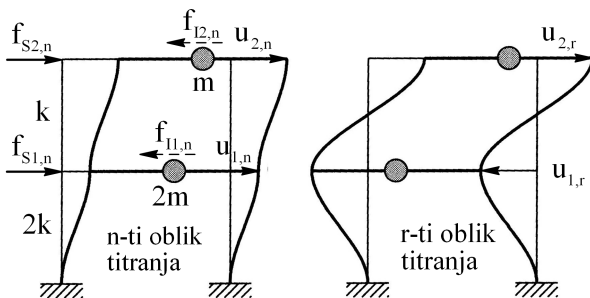
$$K_n = \phi_n^T \mathbf{k} \phi_n = \phi_n^T \underbrace{(\omega_n^2 \mathbf{m} \phi_n)}_{\mathbf{k} \phi_n} = \omega_n^2 \underbrace{(\phi_n^T \mathbf{m} \phi_n)}_{M_n} = \omega_n^2 M_n$$

- Pobliže o problemu vlastitih vrijednosti:
- Matematika 3 i skripta Numerička analiza (PMF):

<http://www.grad.hr/nastava/matematika/mat3/node39.html>

http://web.math.hr/~rogina/2001096/num_anal.pdf (str. 42–50)

Fizikalne posljedice uvjeta ortogonalnosti



- 2971 pomaci konstrukcije pri gibanju u obliku ϕ_n : $\mathbf{u}_n(t) = q_n(t)\phi_n$
- pripadajuća ubrzanja i ► sile inercije:

$$\ddot{\mathbf{u}}_n(t) = \ddot{q}_n(t)\phi_n, \quad (\mathbf{f}_l)_n = -\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_n(t) = -\mathbf{m}\phi_n\ddot{q}_n(t)$$

- pomaci pri gibanju u drugom obliku, ϕ_r : $\mathbf{u}_r(t) = q_r(t)\phi_r$

Sustav s više stupnjeva slobode: slobodno titranje

- ❶ rad sila inercije n -tog oblika na pomacima r -tog oblika:

$$(\mathbf{f}_I)_n^T \mathbf{u}_r = - \underbrace{(\phi_n^T \mathbf{m} \phi_r)}_0 \ddot{q}_n(t) q_r(t) = 0, \quad [\text{uz } (\mathbf{f}_I)_n^T = \phi_n^T \mathbf{m} \ddot{q}_n(t)]$$

– ekvivalentne statičke sile pri gibanju u obliku ϕ_n :

$$(\mathbf{f}_S)_n = \mathbf{k} \mathbf{u}_n(t) = \mathbf{k} \phi_n q_n(t)$$

- ❷ rad statičkih sila n -tog oblika na pomacima r -tog oblika:

$$(\mathbf{f}_S)_n^T \mathbf{u}_r = \underbrace{(\phi_n^T \mathbf{k} \phi_r)}_0 q_n(t) q_r(t) = 0, \quad [\text{uz } (\mathbf{f}_S)_n^T = \phi_n^T \mathbf{k} q_n(t)]$$

- ❸ potvrda Bettijevog stavka¹² $[(\mathbf{f}_I)_n^T \mathbf{u}_r = (\mathbf{f}_I)_r^T \mathbf{u}_n, \text{ uz: } \ddot{q}_n = -\omega_n^2 q_n]$

Normiranje vlastitih vektora

- vlastiti vektori ϕ_n određeni do na konstantu
- proporcionalni (kolinearni) vektor $a\phi_n$ – također vlastiti vektor

¹²V.Šimić: Otpornost materijala 2, Školska knjiga, Zagreb, str. 197

Sustav s više stupnjeva slobode: slobodno titranje

- jednostavan dokaz:

$$\mathbf{k}\underline{\phi}_n = \omega_n^2 \mathbf{m}\underline{\phi}_n$$

$$\mathbf{k}(\underline{a\phi}_n) = a(\mathbf{k}\underline{\phi}_n) = a(\omega_n^2 \mathbf{m}\underline{\phi}_n) = \omega_n^2 \mathbf{m}(\underline{a\phi}_n)$$

- primjena konstante a : prikladno ▶ normiranje komponentata
- 1. primjer: najveća komponenta jednaka jedinici
- 2. primjer: važna komponenta (pomak vrha) jednaka jedinici
- računalni programi: najčešće $M_n = 1$ (jer je numerički učinkovito),

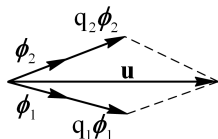
$$\text{član (str. 306.): } M_n = \underline{\phi}_n^T \mathbf{m} \underline{\phi}_n = 1, \quad \text{matrica: } \mathbf{M} = \underline{\Phi}^T \mathbf{m} \underline{\Phi} = \mathbf{I}$$

- oblici titranja ortogonalni (str. 303.) i normirani s obzirom na masu
- matematički: ortonormirani skup (baza) normiran na masu
- za tako normirane oblike vrijedi (prema str. 306. i 301.):

$$\text{član: } K_n = \underline{\phi}_n^T \mathbf{k} \underline{\phi}_n = \omega_n^2 M_n = \omega_n^2, \quad \text{matrica: } \mathbf{K} = \underline{\Phi}^T \mathbf{k} \underline{\Phi} = \mathbf{\Omega}^2$$

Raspis vektora pomaka po vlastitim vektorima

- ključna ► zamisao:



$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^N q_r \phi_r, \quad \text{raspisano:}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = q_1 \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{N1} \end{bmatrix} + q_2 \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \vdots \\ \phi_{N2} \end{bmatrix} + \cdots + q_N \begin{bmatrix} \phi_{1N} \\ \phi_{2N} \\ \vdots \\ \phi_{NN} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_1 \phi_{11} + q_2 \phi_{12} + \cdots + q_N \phi_{1N} \\ q_1 \phi_{21} + q_2 \phi_{22} + \cdots + q_N \phi_{2N} \\ \vdots \\ q_1 \phi_{N1} + q_2 \phi_{N2} + \cdots + q_N \phi_{NN} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}}$$

Sustav s više stupnjeva slobode: slobodno titranje

- prema tome, 1 ► vrijedi:

$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^N q_r \phi_r = \Phi \mathbf{q}$$

- skalarni članovi (komponente) q_r : MODALNE (NORMALNE) KOORDINATE
- poznato ϕ_r za zadani $\mathbf{u}$: odredimo q_r – množimo $\mathbf{u}$ sa $\phi_n^T \mathbf{m}$

$$\phi_n^T \mathbf{m} \mathbf{u} = \sum_{r=1}^N (\phi_n^T \mathbf{m} \phi_r) q_r$$

- zbog ortogonalnosti (str. 303.) iščezavaju svi članovi osim za $r = n$:

$$\underbrace{\phi_n^T \mathbf{m} \mathbf{u}}_{\text{skalar}} = \underbrace{(\phi_n^T \mathbf{m} \phi_n)}_{\text{skalar}} q_n, \quad 2 \text{ ► odnosno: } q_n = \frac{\phi_n^T \mathbf{m} \mathbf{u}}{\phi_n^T \mathbf{m} \phi_n} = \frac{\phi_n^T \mathbf{m} \mathbf{u}}{M_n}$$

Sustav s više stupnjeva slobode: slobodno titranje

- široka uporaba rastava u dinamici konstrukcija
- određivanje rješenja za slobodno titranje, vanjsku pobudu i potres
- primjer: raspis vektora pomaka $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ dvoetažnog okvira
- poznajemo matricu masa i oblike titranja (slika, str. 307.):

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

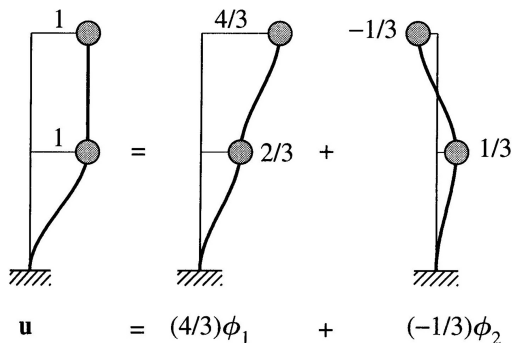
- pripadni skalari (ovise o načinu normiranja ϕ_i !):

$$q_1 = \frac{\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{2m}{3/2m} = 4/3$$

$$q_2 = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{-m}{3m} = -1/3$$

Sustav s više stupnjeva slobode: slobodno titranje

- konačni raspis: $\mathbf{u} = q_1\phi_1 + q_2\phi_2 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 4/3 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} - 1/3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$



- SVE ordinate ϕ_{jn} jednog ϕ_n
- množimo ISTIM brojem q_n
- ordinate prvog oblika s $\frac{4}{3}$
- ordinate drugog oblika s $-\frac{1}{3}$

Rješenje problema slobodnog titranja bez prigušenja

- treba riješiti [2921 ◀ jednažbu gibanja](#) uz zadane [2923 ◀ početne uvjete](#)
- primjer: [2922 ◀ rješenje](#) posmičnog okvira (q_i, u_i) za $u_i(0)$, $(i = 1, 2)$

Sustav s više stupnjeva slobode: slobodno titranje

- dio postupka: realni problem 298 ◀ vlastitih vrijednosti
- pretpostavka: riješen – poznajemo ω_n i ϕ_n ($n = 1, \dots, N$)
- opće rješenje: superpozicija (zbroj) odziva za 297₂ ◀ pojedini oblik,

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n \underbrace{(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)}_{q_n}$$

- vrijedi princip superpozicije: problem linearan
- brzina slobodnog titranja (ϕ_n ne ovisi o vremenu):

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n \omega_n (-A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t)$$

- za $t = 0$: $\mathbf{u}(0) = \sum_{n=1}^N \phi_n A_n$, $\dot{\mathbf{u}}(0) = \sum_{n=1}^N \phi_n \omega_n B_n$ ①

- dva sustava od N jednačbi po A_n i B_n [$\mathbf{u}(0)$ i $\dot{\mathbf{u}}(0)$ poznato]

Sustav s više stupnjeva slobode: slobodno titranje

- ne rješavaju se izravno: rabimo 310 ◀ razvoj $\mathbf{u}(0)$ po ϕ_n (vrijedi i u $t = 0$)

$$\mathbf{u}(0) = \sum_{n=1}^N \phi_n q_n(0), \quad \text{derivacijom:} \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \sum_{n=1}^N \phi_n \dot{q}_n(0) \quad (2)$$

- 311₂ ◀ izraz za q_n vrijedi za bilo koji t $[\mathbf{u}(t)]$, pa i za $t = 0$ $[\mathbf{u}(0)]$:

$$q_n(0) = \frac{\phi_n^T \mathbf{m} \mathbf{u}(0)}{M_n}, \quad \text{derivacijom:} \quad \dot{q}_n(0) = \frac{\phi_n^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}(0)}{M_n}$$

- izrazi (1) i (2) za $\mathbf{u}$ i $\dot{\mathbf{u}}$ ekvivalentni: $A_n = q_n(0)$ i $B_n = \dot{q}_n(0)/\omega_n$
- uvrstimo u opće rješenje:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n \left[q_n(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \right]$$

- poznamo ω_n i ϕ_n : odredimo $q_n(0)$, $\dot{q}_n(0)$ i pomak $\mathbf{u}(t)$
- rješenje zbog početne pobude $\mathbf{u}(0)$ i/ili $\dot{\mathbf{u}}(0)$: str. 292.
- ako je $\mathbf{u}(0) = \phi_n$ i $\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}$: $q_n(0) = 1$, ostalo 0 (str. 294. i 295.)

Sustav s više stupnjeva slobode: prigušeno titranje

- ▶ skraćeni zapis rješenja:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n q_n(t), \quad \text{zapravo } 311_1 \leftarrow \text{poznati raspis} \text{ vrijedi za svaki } t$$

- vremenska promjena modalne koordinate nekog oblika titranja:

$$q_n(t) = q_n(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (\text{str. 54., uz } u \rightarrow q)$$

- poput slobodnog titranja sustava s jednim stupnjem slobode

Slobodno titranje s prigušenjem

- slobodno titranje ($\mathbf{p} = \mathbf{0}$) s prigušenjem ($\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$):

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \text{uz početne uvjete: } \mathbf{u} = \mathbf{u}(0), \quad \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}(0)$$

- uvrstimo raspis $\mathbf{u} = \Phi \mathbf{q}$ (problem vl. vr. pa i Φ ne ovise o c):

$$\mathbf{m}\Phi\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}\Phi\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}\Phi\mathbf{q} = \mathbf{0} / \Phi^T, \quad \underbrace{\Phi^T \mathbf{m} \Phi}_{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\Phi^T \mathbf{c} \Phi}_{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\Phi^T \mathbf{k} \Phi}_{\mathbf{K}} \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Sustav s više stupnjeva slobode: prigušeno titranje

- odnosno:

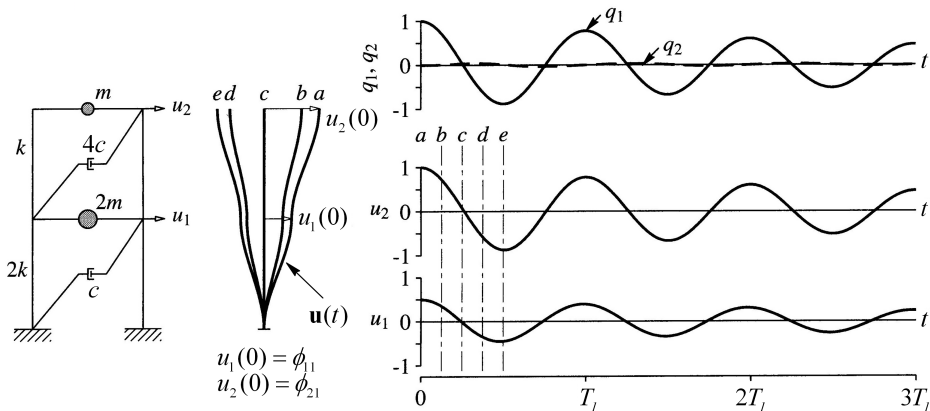
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

- matrice $\mathbf{M}$ i $\mathbf{K}$ zbog 306₁ ◀ uvjeta ortogonalnosti dijagonalne
- KVADRATNA matrica $\mathbf{C} = \Phi^T \mathbf{c} \Phi$: može i ne mora biti dijagonalna
- oblik matrice $\mathbf{C}$: ovisi o razdiobi $\mathbf{c}$ unutar sustava
- $\mathbf{C}$ dijagonalna: N neovisnih jednadžbi po modalnim koordinatama
- sustav s KLASIČNIM prigušenjem: vrijedi klasična modalna analiza
- važno: oblici titranja isti kao za sustav bez prigušenja
- $\mathbf{C}$ nije dijagonalna: sustav s OPĆIM prigušenjem
- ne vrijedi klasična modalna analiza
- oblici titranja različiti u odnosu na sustav bez prigušenja

Sustav s više stupnjeva slobode: prigušeno titranje

Sustav s općim oblikom prigušenja

- 293₁ ◀ primjer: kao za sustav bez prigušenja, uz $c_1 = c$ i $c_2 = 4c$



Sustav s više stupnjeva slobode: prigušeno titranje

- od ranije: matrica 252₃ ◀ masa, 253 ◀ krutosti i 254 ◀ prigušenja

$$\mathbf{m} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = k \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = c \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

- oblici titranja (za sustav bez prigušenja, str. 318. i 320.):

$$\phi_1 = [1/2 \quad 1]^T, \quad \phi_2 = [-1 \quad 1]^T$$

- odredimo $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{K}$ (str. 316.): dobivamo,

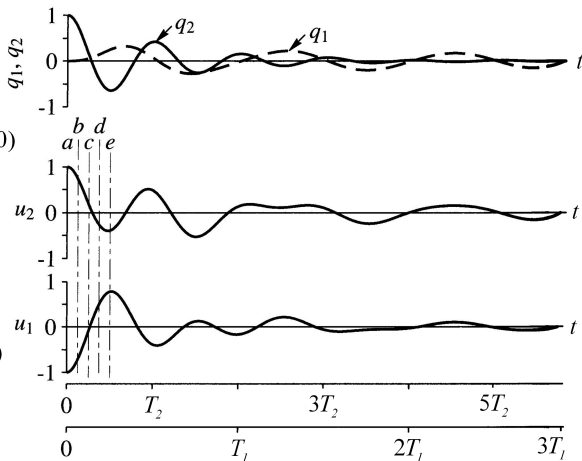
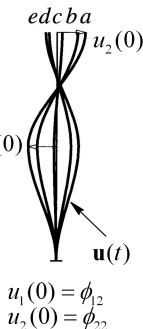
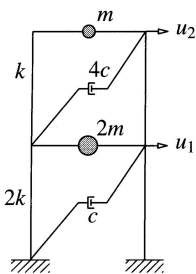
$$m \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 3,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1,25 & 3,50 \\ 3,50 & 17,00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0,75 & 0 \\ 0 & 6,00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- primijetite: $\mathbf{C}$ nije dijagonalna matrica
- diferencijalne jednadžbe po $q_1(t)$ i $q_2(t)$ međusobno povezane
- rješavanje: izravnom analizom sustava – isključivo numerički
- zadano: $c = \sqrt{km/200}$ i $\mathbf{u}(0)$ u obliku vlastitih vektora:

Sustav s više stupnjeva slobode: prigušeno titranje

$$\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \text{zatim} \quad \mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

- rješenja: $q_1(t)$, $q_2(t)$ i $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) \end{bmatrix}^T = \sum_{r=1}^2 \phi_r q_r(t)$,



Sustav s više stupnjeva slobode: prigušeno titranje

- svojstva rješenja:

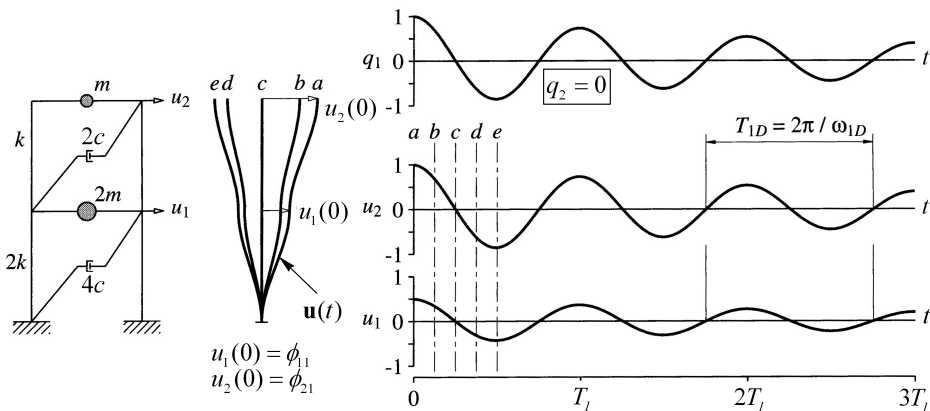
- 1 $q_2 \neq 0$ u prvom (str. 318.) i $q_1 \neq 0$ u drugom primjeru (str. 320.)
- 2 početni oblik pomaka nije sačuvan prilikom titranja
- 3 titranje nije jednostavno harmonijsko gibanje s prigušenjem (periodi titranja masa T_D nisu definirani)

Sustav s klasičnim oblikom prigušenja

- primjer: kao prethodni, ali $c_1 = 4c$ i $c_2 = 2c$, ($c = \sqrt{km/200}$)
- matrice $\mathbf{m}$ i $\mathbf{k}$ kao u prethodnom primjeru (str. 319.),
- a matrica $\mathbf{c}$ jest (str. 254.): $\mathbf{c} = c \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$
- sustav jednadžbi po modalnim koordinatama (uz $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{K}$):

$$m \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 3,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 12,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0,75 & 0 \\ 0 & 6,00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sustav s više stupnjeva slobode: prigušeno titranje



- i matrica $\mathbf{C}$ dijagonalna: jednačbe po $q_1(t)$ i $q_2(t)$ neovisne
- simbolički zapis svih jednačbi sustava $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$:

$$M_n \ddot{q}_n + C_n \dot{q}_n + K_n q_n = 0 / : M_n, \quad \ddot{q}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0, \quad n = 1, \dots, N$$

- skalari K_n i M_n : 3062 članovi na dijagonali i $C_n = \phi_n^T \mathbf{c} \phi_n$

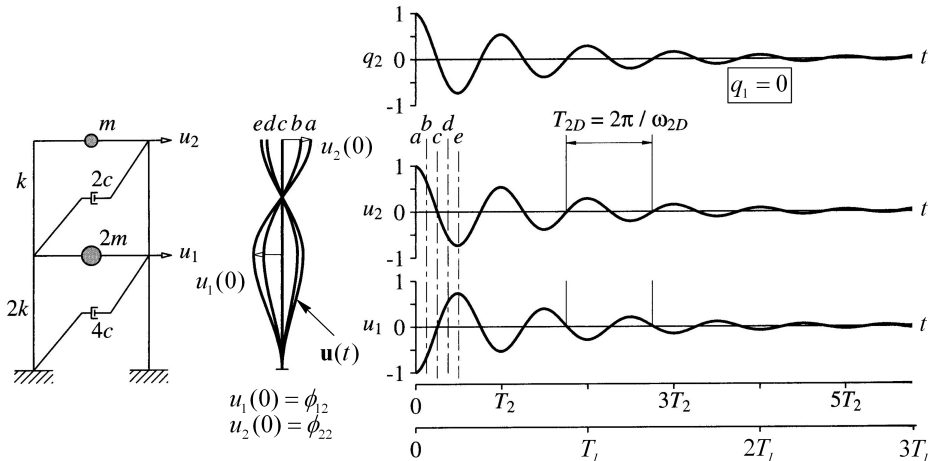
Sustav s više stupnjeva slobode: prigušeno titranje

- oblik jednadžbi: kao za jedan st. sl. s prigušenjem ($u \rightarrow q_n$, str. 60.)
- MODALNI koeficijent relativnog prigušenja: ista analogija,

$$\zeta_n = \frac{C_n}{2M_n\omega_n}, \quad \left(\text{za jedan st. sl. (str. 60.): } \zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \right)$$

- postupak rješavanja: kao za jedan stupanj slobode
- za 1. jednadžbu: $M_1 = 1,5m$, $C_1 = 1,5c$, $K_1 = 0,75k$
- $\omega_1 = \sqrt{K_1/M_1} = \sqrt{k/(2m)}$, $\zeta_1 = C_1/(2M_1\omega_1) = 0,05$
- slično odredimo M_2 , C_2 , K_2 , ω_2 i ζ_2 za 2. jednadžbu
- pobuda $\mathbf{u}(0)$: u obliku ϕ_n – kao u primjeru bez prigušenja
- rješenja (str. 322. i 324.): $q_1(t)$ i $q_2(t)$, $\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2]^T = \phi_n q_n$

Sustav s više stupnjeva slobode: prigušeno titranje



- ① nema doprinosa drugih oblika titranja: $q_r = 0, r \neq n$
- ② sačuvan početni oblik pomaka: samo $q_n \neq 0$ (kao bez prigušenja)
- ③ posljedica: ϕ_n prirodni oblik titranja i za sustav s prigušenjem
- ④ gibanje svake mase: kao za jedan st. sl. s prigušenjem

Sustav s više stupnjeva slobode: prigušeno titranje

- amplitude opadaju zbog utjecaja prigušenja
- gibanje greda: jednostavna harmonijska gibanje s prigušenjem
- isti period gibanja svake mase: T_{1D} ili T_{2D} (vidjeti slike)

Rješenje problema slobodnog titranja s prigušenjem

- promatramo klasično prigušenje: ne utječe na oblike titranja
- vrijede ω_n i ϕ_n za sustav bez prigušenja
- utjecaj ζ na ω_n : kao u slučaju jednog stupnja slobode
- podijelimo jednadžbu po q_n , $M_n\ddot{q}_n + C_n\dot{q}_n + K_nq_n = 0$, s M_n :

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2q_n = 0 \quad (C_n/M_n = 2\zeta_n\omega_n, \omega_n = \sqrt{K_n/M_n}, \text{ str. 60.})$$

- kao u slučaju jednog stupnja slobode s prigušenjem ($q_n \rightarrow u$)
- prema analogiji s rješenjem za jedan stupanj slobode (str. 63.):

$$q_n(t) = e^{-\zeta_n\omega_n t} \left[q_n(0) \cos \omega_{nD} t + \frac{\dot{q}_n(0) + \zeta_n\omega_n q_n(0)}{\omega_{nD}} \sin \omega_{nD} t \right]$$

Sustav s više stupnjeva slobode: prigušeno titranje

- prema istoj analogiji vrijedi: $\omega_{nD} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}$
- 316 ◀ ukupno rješenje: superpozicija odziva za pojedini oblik titranja,

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n e^{-\zeta_n \omega_n t} \left[q_n(0) \cos \omega_{nD} t + \frac{\dot{q}_n(0) + \zeta_n \omega_n q_n(0)}{\omega_{nD}} \sin \omega_{nD} t \right]$$

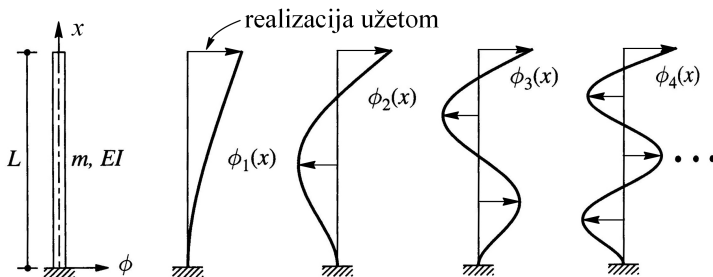
- riješene vl. vrijednosti: poznajemo ω_n i ϕ_n sustava bez prigušenja
- ζ_n iz pokusa [ne iz $C_n/(2M_n \omega_n)$]: $\mathbf{c}$, pa i $C_n = \phi_n^T \mathbf{c} \phi_n$ nepoznati
- odredimo ω_{nD} i $q_n(0)$, $\dot{q}_n(0)$ zbog $\mathbf{u}(0)$ i/ili $\dot{\mathbf{u}}(0)$, (str. 315.):

$$q_n(0) = \frac{\phi_n^T \mathbf{m} \mathbf{u}(0)}{M_n}, \quad \text{derivacijom:} \quad \dot{q}_n(0) = \frac{\phi_n^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}(0)}{M_n}$$

- odredimo pomak $\mathbf{u}(t)$: rješenje zbog $\mathbf{u}(0)$ i/ili $\dot{\mathbf{u}}(0)$
- prema obliku formule: isti utjecaj ζ_n kao u slučaju jednog st. sl.
- za $\zeta_n < 20\%$: mali utjecaj na prirodne frekvencije i periode (str. 66.)
- opadanje u_0 pri titranju nekim ϕ_n : veći ζ_n , brže opadanje (str. 67.)

Sustav s više stupnjeva slobode: prigušeno titranje

- zakon opadanja: definiran $69 \leftarrow \text{logaritamskim dekrementom}$ δ_n
- jedan način $73 \leftarrow \text{određivanja}$ ζ_n : slobodnim titranjem građevine
- pobuda: građevinu potegnemo užetom i pustimo
- problem: pobuditi titranje u samo jednom obliku
- razlog: praktična realizacija $\mathbf{u}(0)$ u obliku vlastitog vektora



- uočite: najlakše pobuditi temeljni oblik titranja
- čekamo dok (zbog ζ_n) ne iščeznu (mali) utjecaji viših oblika
- ostaje titranje samo temeljnim oblikom: iz δ_n odredimo T_1 i ζ_1

- poznate 27 ◀ pojave koje uzrokuju prigušenje u konstrukcijama
- teško se računa iz dimenzija konstrukcije i prigušenja u materijalu
- određuje se pokusom: u obliku koeficijenta relativnog prigušenja

Eksperimentalne vrijednosti prigušenja: praktični primjer

- primjer: deveteroetažna AB zgrada knjižnice Millikan – CALTECH



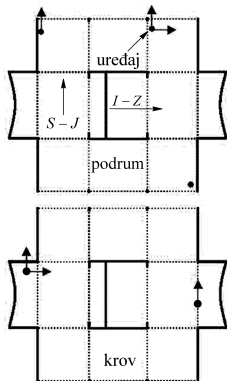
- tlocrtne dimenzije: 21 na 23 m
- visina: 44 m iznad razine tla,
48 m od razine temeljne ploče
- posljednja etaža: krovna konstrukcija s postrojenjem za klimatizaciju
- bočna stabilizacija u smjeru sjever – jug: AB zidovi na krajevima zgrade, $d = 30$ cm
- u smjeru istok – zapad: AB zidovi stubišne i liftne jezgre, $d = 30$ cm

Prigušenje u građevinskim konstrukcijama

- poznate 27 ◀ pojave koje uzrokuju prigušenje u konstrukcijama
- teško se računa iz dimenzija konstrukcije i prigušenja u materijalu
- određuje se pokusom: u obliku koeficijenta relativnog prigušenja

Eksperimentalne vrijednosti prigušenja: praktični primjer

- primjer: deveteroetažna AB zgrada knjižnice Millikan – CALTECH



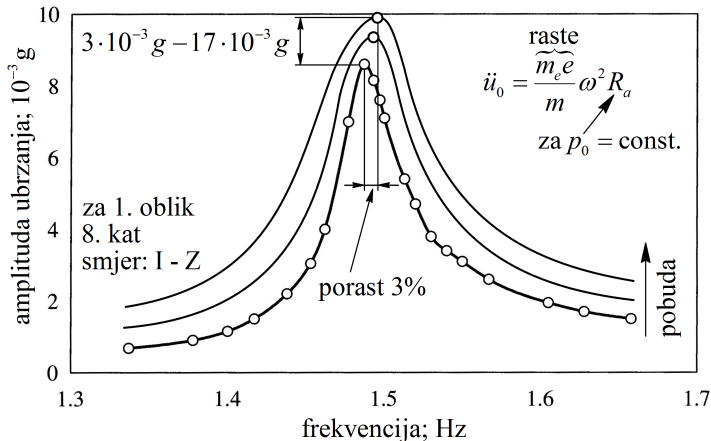
- tlocrtne dimenzije: 21 na 23 m
- visina: 44 m iznad razine tla,
48 m od razine temeljne ploče
- posljednja etaža: krovna konstrukcija s postrojenjem za klimatizaciju
- bočna stabilizacija u smjeru sjever – jug: AB zidovi na krajevima zgrade, $d = 30$ cm
- u smjeru istok – zapad: AB zidovi stubišne i liftne jezgre, $d = 30$ cm

Prigušenje u građevinskim konstrukcijama

- krajnji zidovi s otvorima: predgotovljene AB zidne ploče (paneli)
- doprinose arhitektonskom učinku: ne smatraju se nosivima
- za male amplitude doprinose krutosti u smjeru istok – zapad
- zgrada izvedena tijekom 1966. – 1967. godine
- važan primjer: dinamička svojstva utvrđena pri raznim pobudama
- 132 ◀ vibracijskim pobuđivačem: prisilno harmonijsko titranje zgrade
- određena 138 ◀ frekvencijska funkcija odziva, period i relativno prigušenje
- period (frekvencija): $\omega_n = \omega$, jer je rezonancija ($\phi = 90^\circ$)
- relativno prigušenje: iz analize 131 ◀ područja rezonancije
- oblik titranja: mjerenjem horizontalnih pomaka po katnim pločama
- temeljni period u smjeru I – Z: $T_1 \approx 0,66$ s (sa slike, $f_1 = 1,49$ Hz)
- porast amplituda rezonancije: povećanjem m_e i/ili e pobuđivača
- područje amplituda rezonancije krova: $3 \cdot 10^{-3} g - 17 \cdot 10^{-3} g$
- f_1 raste ($T_1 = 1/f_1$ pada) 3% kroz područje amplituda

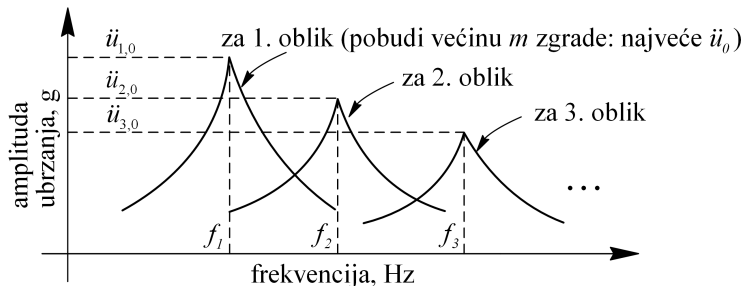
Prigušenje u građevinskim konstrukcijama

- pripadno prigušenje ζ_1 : od 0,7 do 1,5%, raste s amplitudom



- smjer S – J: $T_1 \approx 0,51 s$, pada 4% kroz područje amplituda
- područje amplituda rezonancije krova: $5 \cdot 10^{-3} g - 20 \cdot 10^{-3} g$
- prigušenje ζ_1 : od 1,2 do 1,8%, raste s amplitudom

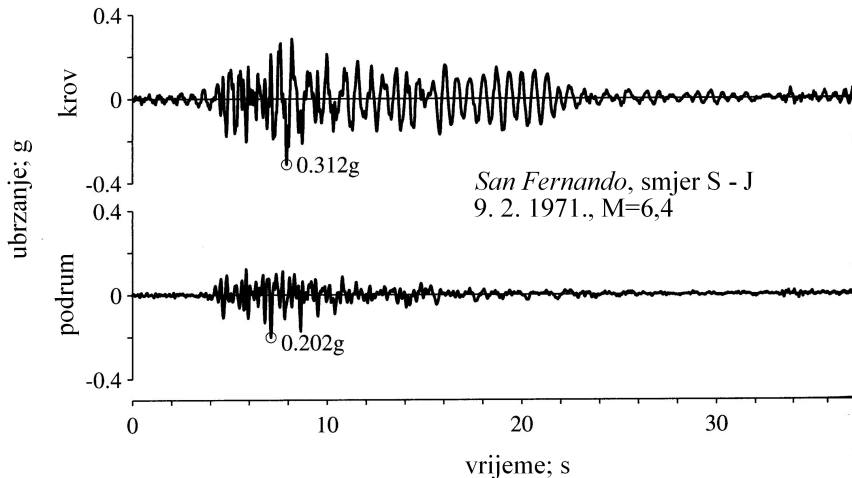
- teorijski: jedna frekventijska funkcija, jedan period i oblik titranja



- teško pobuditi zgradu na čisto titranje višim oblikom (str. 327.)
- na temeljnoj i krovnoj ploči postavljeni akcelerometri
- zabilježena ubrzanja zgrade za nekoliko potresa (vrlo rijetko)
- potres SAN FERNANDO: udaljenost 31 km, $M = 6,4$
- potres LYTLE CREEK: udaljenost 64 km, $M = 5,4$
- oštećenja nosivih elemenata: $M \geq 5$ ($\ddot{u}_g(t) \geq 0,09 g$)

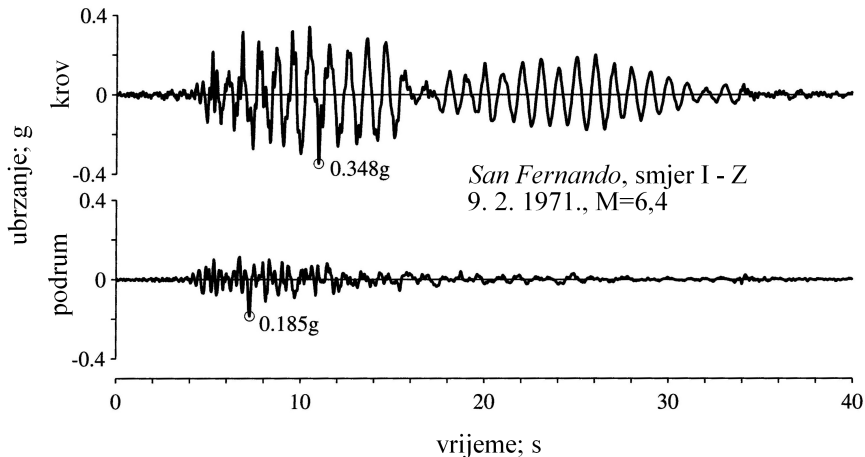
Prigušenje u građevinskim konstrukcijama

- zapis S – J: vršno ubrzanje temeljne ploče 0,202 g
- povećano na vršnu vrijednost od 0,312 g na krovnoj ploči



Prigušenje u građevinskim konstrukcijama

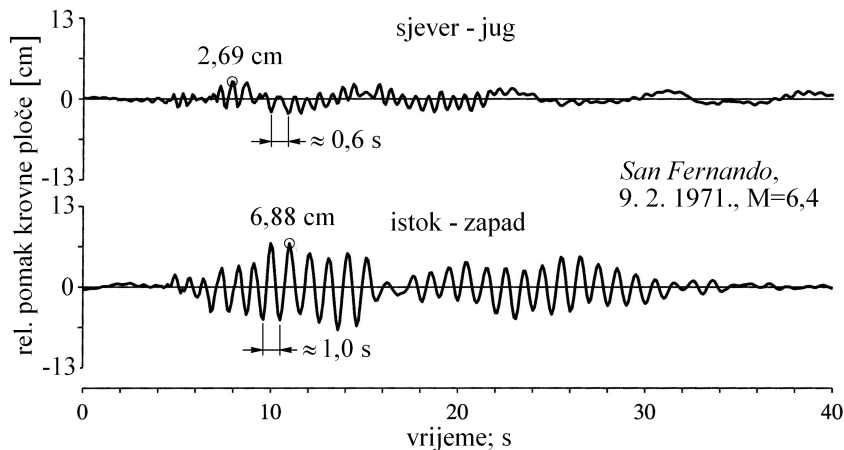
- zapis I – Z: temeljna ploča 0,185 g, krovna ploča 0,348 g



- mjereno ubrzanje krovne ploče: 276 ◀ ukupno ubrzanje $\ddot{u}^t(t)$
- ukupni pomak krovne ploče $u^t(t)$: dvostruka integracija $\ddot{u}^t(t)$

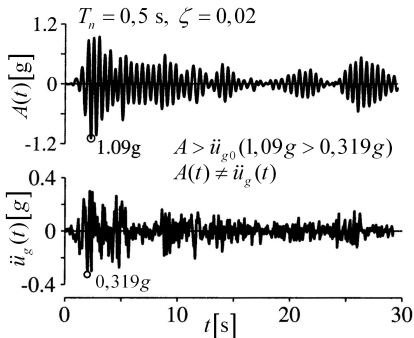
Prigušenje u građevinskim konstrukcijama

- mjereno ubrzanje temeljne ploče: jednako ubrzanju tla $\ddot{u}_g(t)$
- razlog: relativno ubrzanje u razini temelja jednako nuli $[\ddot{u}(t) = 0]$
- pomak tla $u_g(t)$: dvostruka integracija $\ddot{u}_g(t)$
- relativni pomak krovne ploče $u(t)$: $u^t(t) - u_g(t)$

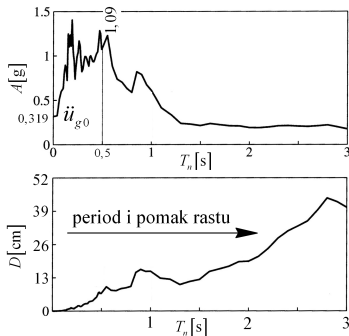


Prigušenje u građevinskim konstrukcijama

- konstrukcija je fleksibilna (nije apsolutno kruta)
- veće ubrzanje krovne nego temeljne ploče: $A > \ddot{u}_{g0}$
- različite funkcije ubrzanja ploča u vremenu: $A(t) \neq \ddot{u}_g(t)$
- smjer S – J: relativni pomak 2,69 cm, period oko 0,6 s
- smjer I – Z: relativni pomak 6,88 cm, period oko 1,0 s
- smjer S – J krući (zidovi): manji pomak i period titranja



analogija s El Centrom



Prigušenje u građevinskim konstrukcijama

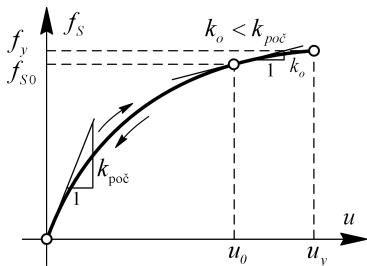
Periodi i koeficijenti relativnog prigušenja knjižnice Millikan					
Izvor pobude	Ubrzanje krova [g]	Temeljni oblik titranja		2. oblik titranja	
		T_1 [s]	ζ_1 [%]	T_2 [s]	ζ_2 [%]
Smjer sjever – jug					
Pobuđivač	$5 \cdot 10^{-3}$ do $20 \cdot 10^{-3}$	0,51 – 0,53	1,2 – 1,8	nije mjereno	
Potres <i>Lytle Creek</i>	0,05	0,52	2,9	0,12	1,0
Potres <i>San Fernando</i>	0,312	0,62	6,4	0,13	4,7
Smjer istok – zapad					
Pobuđivač	$3 \cdot 10^{-3}$ do $17 \cdot 10^{-3}$	0,66 – 0,68	0,7 – 1,5	nije pouzdano	
Potres <i>Lytle Creek</i>	0,035	0,71	2,2	0,18	3,6
Potres <i>San Fernando</i>	0,348	0,98	7,0	0,20	5,9

Prigušenje u građevinskim konstrukcijama

- potres LYTLE CREEK: slab, $\ddot{u}_{g0} = 0,02 \text{ g}$, na krovu, $\ddot{u}_0 = 0,05 \text{ g}$
- nešto jači od najveće pobude uređajem, na krovu, $\ddot{u}_0 = 0,02 \text{ g}$
- temeljni periodi: $0,52 \text{ s}$ i $0,71 \text{ s}$, malo veći od utvrđenih pokusom
- koeficijenti prigušenja: $2,9\%$ i $2,2\%$, veći od utvrđenih pokusom
- potres SAN FERNANDO: jak, $\ddot{u}_{g0} = 0,202 \text{ g}$, na krovu, $\ddot{u}_0 = 0,348 \text{ g}$
- značajno povećanje perioda i prigušenja u odnosu na pokus
- smjer S – J: porast T_1 sa $0,51 \text{ s}$ na $0,62 \text{ s}$ i prigušenja na $6,4\%$
- smjer I – Z: porast T_1 sa $0,66 \text{ s}$ na $0,98 \text{ s}$ i prigušenja na 7%
- uočimo: porast perioda pri većim amplitudama gibanja
- razlog: smanjena krutost k zgrade ($T = 2\pi\sqrt{m/k}$)
- primarni uzrok: NELINEARNO ELASTIČNO ponašanje (ne pukotine!)
- dokaz: nosiva konstrukcija bez vidljivih oštećenja
- pucanje polica i otpadanje žbuke pri potresu SAN FERNANDO
- mjerenje perioda nakon potresa: kraći nego pri potresu

Prigušenje u građevinskim konstrukcijama

- zaključak: veliki povratak k , male plastične deformacije



- krutost nije konstanta
- opada s porastom amplituda
- ali jest idealno povratna
- povratak po istoj krivulji
- nema petlje histereze
- materijal BEZ MEMORIJE

- potpuni ili djelomični povratak k : ovisi o iznosu amplituda
- porast T_D nije mali za $\zeta < 20\%$ (nije $T_D \approx T_n$)
- ne vrijedi linearni model i odnos: $T_D = T_n / \sqrt{1 - \zeta^2}$
- razlozi: NEVISKOZNO prigušenje i nelinearno elastični odziv
- veće amplitude, izraženiji uzroci prigušenja (str. 28.): raste i ζ
- SAN FERNANDO vrijedan: ζ određen za odziv pri granici tečenja
- važno: ne sadrži učinke plastičnog popuštanja konstrukcije

Preporučene vrijednosti koeficijenta relativnog prigušenja

- za postojeće zgrade: skupa i spora primjena opisanog postupka
- za buduće zgrade: procjena ζ na temelju pokusa na sličnim zgradama
- postoji mnogo podataka: nisu svi prikladni za seizmički proračun
- slabe pobude (pobuđivač ili slabi potres): premali iznosi prigušenja
- snažne pobude (potres): ζ sadrži i trošenje energije zbog tečenja
- najkorisniji podatci: iz jakih trešnji pri granici tečenja
- utjecaj tečenja uzima se posebno: radnim dijagramom $f_S - u$
- nemamo dovoljno ζ za različite konstrukcije i materijale
- razlog: malo postavljenih uređaja i prikladnih potresa
- rabimo postojeće iznose i procjene stručnjaka (tablica)
- od nedavno: nearmirano ziđe 3%, armirano ziđe 7%
- mnogi propisi ne razlikuju materijale: za spektre uvijek 5%

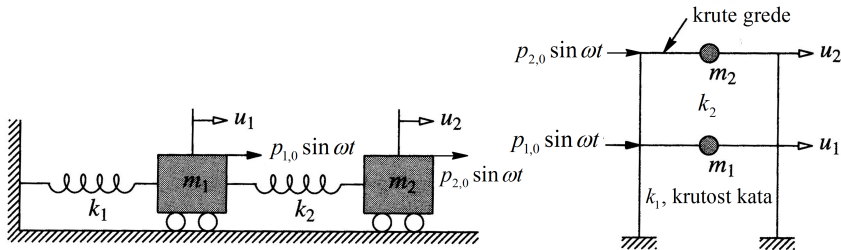
Prigušenje u građevinskim konstrukcijama

Preporučeni iznosi koeficijenta relativnog prigušenja		
Razina naprezanja	Vrsta i stanje konstrukcije	ζ [%]
radno naprezanje: ne više od polovine granice tečenja (za posebne konstrukcije)	vareni čelik, prednapeti beton, dobro armirani beton sa sitnim pukotinama	2 – 3
	armirani beton sa značajnim pukotinama	3 – 5
	vijčani i/ili zakovani spojevi u čeliku, vijčani ili čavlani spojevi u drvetu	5 – 7
malo ispod ili na granici tečenja (za uobičajene konstrukcije)	vareni čelik, prednapeti beton (bez potpunog gubitka prednapona)	5 – 7
	prednapeti beton s potpunim gubitkom prednapona, armirani beton	7 – 10
	vijčani i/ili zakovani spojevi u čeliku, vijčani spojevi u drvetu	10 – 15
	čavlani spojevi u drvetu	15 – 20

- treba riješiti sustav bez prigušenja uz zadanu pobudu:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t)$$

Harmonijska pobuda



- pobuda oblika $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 \sin \omega t$, općenito: $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 \sin(\omega t - \phi)$
- amplitude pobude: $\mathbf{p}_0 = [p_{1,0} \ \cdots \ p_{N,0}]^T$
- logično pretpostaviti rješenje istog oblika: $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 \sin \omega t$
- amplitude titranja (pomaka): $\mathbf{u}_0 = [u_{1,0} \ \cdots \ u_{N,0}]^T$

Dinamička analiza i odziv linearnog sustava: pobuda silama

- ubrzanje sustava: $\ddot{\mathbf{u}}(t) = -\omega^2 \mathbf{u}_0 \sin \omega t$
- uvrstimo $\mathbf{u}$ i $\ddot{\mathbf{u}}$ u polaznu jednadžbu (svi članovi sadrže $\sin \omega t$):

$$(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}) \mathbf{u}_0 = \mathbf{p}_0 \quad \text{ili} \quad \bar{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0 = \mathbf{p}_0 \quad (\text{uz: } \bar{\mathbf{k}} = \underbrace{\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}}_{\text{poznato}})$$

- statički problem prema metodi pomaka: odredimo $\mathbf{u}_0 = \bar{\mathbf{k}}^{(-1)} \mathbf{p}_0$
- jednim od dva pristupa (str. 41.) odredimo unutarnje sile
- primjerice, ekvivalentna bočna sila: $\mathbf{f}_S = \mathbf{k} \mathbf{u}_0$, (pazite, ne $\bar{\mathbf{k}}$)
- rješenja za opterećenje $\mathbf{f}_S$: amplitude odziva $\mathbf{M}_0, \mathbf{T}_0, \sigma_0, \dots$
- vremenska promjena: isto $\sin \omega t$, primjerice $\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}_0 \sin \omega t$
- nije potreban problem vlastitih vrijednosti: ω_n i ϕ_n
- rješenje: prisilni (ustaljeni) dio (analogija s jednim st. sl., str. 92.)
- prolazni dio najčešće nije važan: brzo iščezava s prigušenjem
- podsjetite se: ukupno rješenje može biti mjerodavno (str. 105.)
- opći pristup određivanju ukupnog rješenja: modalna analiza

Modalna analiza

- opći pristup linearnom modelu za proizvoljnu pobudu $\mathbf{p}(t)$
- rabimo **1 ▶ raspis** vektora pomaka po **2 ▶ vlastitim vektorima** (str. 311.):

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{r=1}^N \phi_r q_r(t) = \mathbf{\Phi} \mathbf{q}(t)$$

- uvrstimo u jednadžbu gibanja [uz: $\ddot{\mathbf{u}}(t) = \sum_{r=1}^N \phi_r \ddot{q}_r(t)$]:

$$\sum_{r=1}^N \mathbf{m} \phi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \mathbf{k} \phi_r q_r(t) = \mathbf{p}(t) \quad / \cdot \phi_n^T$$

$$\sum_{r=1}^N \phi_n^T \mathbf{m} \phi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \phi_n^T \mathbf{k} \phi_r q_r(t) = \phi_n^T \mathbf{p}(t)$$

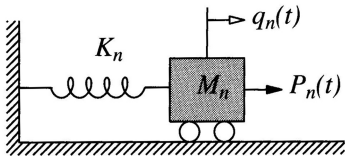
- zbog 303 ◀ uvjeta ortogonalnosti: ostaju samo članovi za $r = n$,

$$(\phi_n^T \mathbf{m} \phi_n) \ddot{q}_n(t) + (\phi_n^T \mathbf{k} \phi_n) q_n(t) = \phi_n^T \mathbf{p}(t)$$

- od ranije: $M_n = \phi_n^T \mathbf{m} \phi_n$, $K_n = \phi_n^T \mathbf{k} \phi_n$ i ▶ dodatno $P_n(t) = \phi_n^T \mathbf{p}(t)$

$$M_n \ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n(t), \quad n = 1, \dots, N$$

- jednadžba gibanja sustava s jednim stupnjem slobode po $q_n(t)$
- skalari M_n , K_n i $P_n(t)$: masa, krutost i opterećenje sustava
- nazivi: POOPĆENA masa, krutost i opterećenje za n -ti oblik titranja



- prostorna promjena pomaka: zgrada titra u obliku ϕ_n
- vremenska promjena pomaka: pomaci $q_n(t)$ jednog st. sl.

Dinamička analiza i odziv linearnog sustava: pobuda silama

- poopćene vrijednosti: konstante za odabrani oblik titranja ϕ_n
- poznajemo ϕ_n : odredimo M_n , K_n , $P_n(t)$, jednadžbu gibanja i $q_n(t)$
- primijetimo: za n -tu jednadžbu ne trebamo ostale oblike titranja
- podijelimo jednadžbu s M_n [uz: $\omega_n^2 = K_n/M_n$],

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{P_n(t)}{M_n}, \quad n = 1, \dots, N$$

- važno: jedna jednadžba – jedna nepoznanica $q_n(t)$
- postoji N jednadžbi: po jedna za svaki oblik titranja ϕ_n
- bit [3431](#) [raspisa](#) $\mathbf{u}(t)$: transformacija,

N međusobno OVISNIH jednadžbi po pomacima $u_j(t)$, ($j = 1, \dots, N$)



N NEOVISNIH jednadžbi po modalnim koordinatama $q_j(t)$, ($j = 1, \dots, N$)

- matrični zapis svih N (neovisnih!) jednažbi:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}(t)$$

- dijagonalne matrice $\mathbf{M}$ i $\mathbf{K}$ poznate:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_1 \quad \cdots \quad q_N]^T, \quad \mathbf{P}(t) = [P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_N]^T$$

Modalna analiza za sustav s prigušenjem

- treba riješiti sustav s prigušenjem uz zadanu pobudu:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t)$$

- uvrstimo raspis $\mathbf{u}(t) = \sum_{r=1}^N \phi_r q_r(t)$ u jednadžbu gibanja:

$$\sum_{r=1}^N \mathbf{m} \phi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \mathbf{c} \phi_r \dot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \mathbf{k} \phi_r q_r(t) = \mathbf{p}(t) \quad / \cdot \phi_n^T$$

$$\sum_{r=1}^N \phi_n^T \mathbf{m} \phi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \phi_n^T \mathbf{c} \phi_r \dot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \phi_n^T \mathbf{k} \phi_r q_r(t) = \phi_n^T \mathbf{p}(t)$$

- uz ranije uvedene izraze za M_n , K_n i $P_n(t)$ dobivamo:

$$M_n \ddot{q}_n(t) + \sum_{r=1}^N C_{nr} \dot{q}_r(t) + K_n q_n(t) = P_n(t), \quad n = 1, \dots, N$$

- općenito prigušenje: $C_{nr} = \phi_n^T \mathbf{c} \phi_r \neq 0$, za $n \neq r$

- matrični zapis sustava $[\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{q}$ i $\mathbf{P}(t)$ poznati od ranije]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}(t)$$

- matrica $\mathbf{C}$ nije dijagonalna ($C_{nr} \neq 0$)
- svaka jednačba sadrži više brzina $\dot{q}_r(t)$: srednji član jest suma
- jednačbe nisu neovisne: međusobno povezane brzinama
- klasično prigušenje: $C_{nr} = 0$ za $n \neq r$, $\mathbf{C}$ dijagonalna ($C_n = \phi_n^T \mathbf{c} \phi_n$)
- od sume preostaje jedan član – C_n : nastaje niz neovisnih jednačbi,

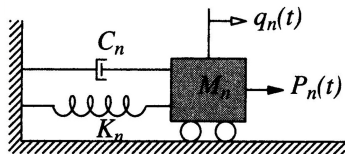
$$M_n \ddot{q}_n(t) + C_n \dot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n(t), \quad n = 1, \dots, N$$

- ▶ dijeljenjem s M_n uz ($C_n/M_n = 2\zeta_n\omega_n$, $\omega_n = \sqrt{K_n/M_n}$, str. 60.)

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{P_n(t)}{M_n}, \quad n = 1, \dots, N$$

Dinamička analiza i odziv linearnog sustava: pobuda silama

- gibanje sustava s jednim stupnjem slobode $q_n(t)$ uz ζ_n
- ζ_n – koeficijent prigušenja za titranje u n -tom obliku
- ne određuje se iz $\zeta_n = C_n/(2M_n\omega_n)$ nego pokusom
- razlog: složene pojave, ne možemo IZRAČUNATI matricu $\mathbf{c}$ (pa ni C_n)
- skalari M_n , C_n , K_n i $P_n(t)$: ovise o jednom obliku titranja ϕ_n
- ϕ_n određuje OBLIK gibanja (pomaka) zgrade
- svakoj jednadžbi pripada jedan takav oblik
- vremenska promjena gibanja (pomaka): određena rješenjem $q_n(t)$
- ISTA promjena za sve komponente ϕ_{jn} jednog oblika titranja ϕ_n



Proračun pomaka

- za zadano $\mathbf{p}(t)$ treba riješiti MODALNU JEDNADŽBU po $q_n(t)$
- oblik svake jednadžbe: kao za jedan stupanj slobode
- postupci rješavanja: analitički ili numerički
- pomak (odziv) zbog gibanja u obliku ϕ_n : $\mathbf{u}_n(t) = \phi_n q_n(t)$
- ukupni pomak: superpozicija MODALNIH POMAKA $\mathbf{u}_n(t)$,

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n q_n(t)$$

- postupak poznat kao KLASIČNA MODALNA ANALIZA
- drugi naziv: METODA KLASIČNE MODALNE SUPERPOZICIJE
- razlog: neovisni pomaci združeni u ukupni odziv
- puni naziv: METODA KLASIČNE SUPERPOZICIJE MODALNIH POMAKA
- skraćeni (i uvriježeni) naziv: MODALNA ANALIZA

- vrijedi za klasično prigušenje i linearne sustave
- razlozi: rabimo neovisne jednačbe i princip superpozicije (zbroy)

Proračun unutarnjih sila

- iz dinamičkog proračuna znamo $\mathbf{u}_n(t)$: treba odrediti $r(t)$
- vremenska promjena unutarnje sile: $r(t) = M(t), T(t), \dots$
- položaj: bilo gdje na konstrukciji (najčešće mjesta ekstrema)
- proračun $r(t)$: iz pomaka čvorova ili ekvivalentnih statičkih sila
- uobičajeno odrediti doprinos svakog oblika titranja ukupnom $r(t)$
- prvi način: primjenom krutosti elementa iz $\mathbf{u}_n(t)$ odredimo silu $r_n(t)$
- ukupne sile: zbroj sila $r_n(t)$ od doprinosa modalnih pomaka,

$$r(t) = \sum_{n=1}^N r_n(t)$$

- drugi način: statičkom analizom za ekvivalentno opterećenje,¹³

$$\mathbf{f}_n(t) = \mathbf{k}\mathbf{u}_n(t) = \mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n q_n(t) = \omega_n^2 \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n q_n(t), \quad (\text{uz: } \mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2 \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n)$$

- modalne pomake $\mathbf{u}_n(t)$ uzrokuje opterećenje $\mathbf{f}_n(t)$
- sjetite se neovisnih podmodela: prvi podmodel (str. 257.)
- statičkim proračunom za $\mathbf{f}_n(t)$ dobivamo unutarnju silu $r_n(t)$
- ukupne sile: ista formula – zbroj $r_n(t)$ od svakog opterećenja
- opisani postupak sličan i za potresno opterećenje
- jedina razlika: desna strana nije $\mathbf{p}(t)$, nego $\mathbf{p}_{\text{eff}}(t)$
- prema tome, polazna jednačba jest:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}_{\text{eff}}(t)$$

- efektivna sila potresa: $\mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -\mathbf{m}\ell\ddot{u}_g(t)$

¹³ne pišemo $\mathbf{f}_{S_n}$, izostavljamo indeks S

Sažetak modalne analize

Postupak proračuna sustava opterećenog vanjskom pobudom $\mathbf{p}(t)$:

- ① utvrdimo svojstva dinamičkog sustava:
 - a) odredimo matricu masa $\mathbf{m}$ i krutosti $\mathbf{k}$
 - b) procijenimo koeficijent relativnog prigušenja ζ_n
- ② izračunamo prirodne frekvencije ω_n i oblike titranja ϕ_n
(treba riješiti problem vlastitih vrijednosti $\mathbf{k}\phi_n = \omega_n^2 \mathbf{m}\phi_n$)
- ③ za svaki oblik titranja treba:
 - a) postaviti jednadžbu gibanja i izračunati $q_n(t)$
$$[\text{riješiti } \ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n(t) + \omega_n^2q_n(t) = P_n(t)/M_n]$$
 - b) izračunati modalne pomake $\mathbf{u}_n(t) = \phi_n q_n(t)$
 - c) jednim od dva načina odrediti $r_n(t)$ zbog $\mathbf{u}_n(t)$
- ④ zbrojimo doprinos svih oblika titranja u ukupne pomake i sile
$$[\mathbf{u}(t) = \sum \mathbf{u}_n(t) \text{ i } r(t) = \sum r_n(t)]$$

Jednadžbe gibanja

- promatramo translacijsku pobudu zapisom ubrzanja tla $\ddot{u}_g(t)$
- tlo apsolutno kruto: istodobna pobuda svih ležajeva istim zapisom
- treba riješiti ▶ sustav jednadžbi: $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}_{\text{eff}}(t)$
- 279 ◀ efektivna sila potresa: $\mathbf{p}_{\text{eff}} = -\mathbf{m}\ell\ddot{u}_g(t)$
- matrice $\mathbf{m}$, $\mathbf{k}$ i utjecajni vektor ℓ određujemo kao i ranije
- matrica prigušenja $\mathbf{c}$ nije potrebna
- dovoljan modalni koeficijent relativnog prigušenja ζ_n (pokusi)

Raspis pomaka i opterećenja po vlastitim vektorima

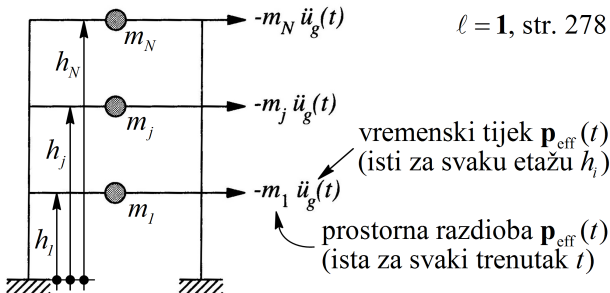
- vrijedi modalna analiza: rabimo superpoziciju 3432 ◀ modalnih doprinosa

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n q_n(t)$$

- i uvodimo zapis: $\mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -\mathbf{s}\ddot{u}_g(t)$, (očito je $\mathbf{s} = \mathbf{m}\ell$)

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

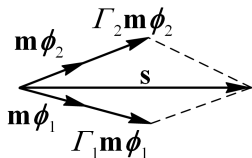
- vektor prostorne razdiobe opterećenja $\mathbf{s}$ (ne ovisi o vremenu)
- označava prostornu razdiobu $\mathbf{p}_{\text{eff}}(t)$
- radi se o prostornoj razdiobi mase (određenoj sa ℓ)
- skalarna funkcija $\ddot{u}_g(t)$ (ne ovisi o prostornim koordinatama)
- označava promjenu $\mathbf{p}_{\text{eff}}(t)$ u vremenu
- radi se o vremenskom tijeku potresa



Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

- uvodimo

1 ▶ rastav:



$$\mathbf{m}\ell = \sum_{n=1}^N \mathbf{s}_n = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \mathbf{m}\phi_n$$

- vektor $\mathbf{m}\phi_n$: prostorna razdioba 307 ▶ sila inercije $[(\mathbf{f}_I)_n = -\mathbf{m}\phi_n \ddot{q}_n(t)]$
- indeks n : pri titranju n -tim oblikom
- suma: rastav prostorne razdiobe opterećenja 4 ▶ po silama inercije
- skalar Γ_n : dio toga opterećenja u smjeru n -te sile inercije,

$$\mathbf{m}\ell = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \mathbf{m}\phi_n / \cdot \phi_r^T, \quad \underbrace{\phi_n^T \mathbf{m}\ell}_{L_n} = \Gamma_n \underbrace{\phi_n^T \mathbf{m}\phi_n}_{M_n}, \quad \Gamma_n = \frac{L_n}{M_n}$$

- primijetite: zbog ortogonalnosti preostaje samo član za $r = n$
- ovisi o obliku 2 ▶ vlastitog vektora: $L_n = \phi_n^T \mathbf{m}\ell$, $M_n = \phi_n^T \mathbf{m}\phi_n$, $\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{m}\phi_n$
- 3 ▶ član $\mathbf{s}_n$: doprinos n -tog oblika titranja ukupnom opterećenju $\mathbf{m}\ell$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

- ne ovisi o 309 ◀ normiranju oblika titranja: br. i naz. sadrže ϕ_n^T i ϕ_n
- normiranje: ϕ_n i $a\phi_n$ isto, skalar a^2 pokratimo (raspišite $\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{m} \phi_n$)
- primjer (poznamo matricu masa i oblike titranja):

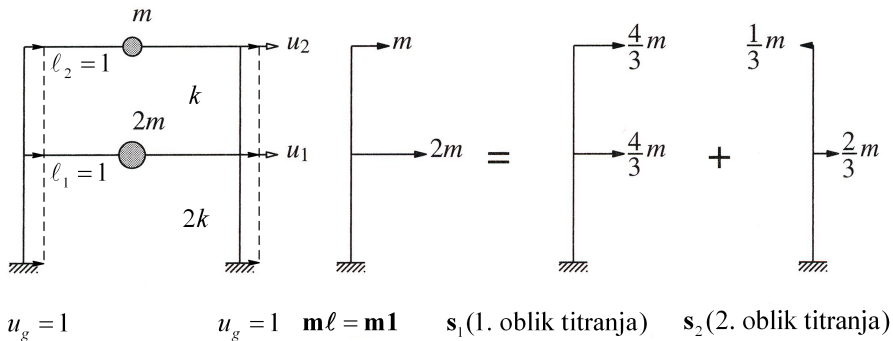
$$\text{raspis } \mathbf{m} \ell = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dvoetažnog okvira}$$

- oblici titranja: $\phi_1 = [1/2 \quad 1]^T$ i $\phi_2 = [-1 \quad 1]^T$

$$\Gamma_1 = \frac{\phi_1^T \mathbf{m} \ell}{\phi_1^T \mathbf{m} \phi_1} = \frac{[1/2 \quad 1] \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{[1/2 \quad 1] \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{4}{3}, \quad \Gamma_2 = \frac{\phi_2^T \mathbf{m} \ell}{\phi_2^T \mathbf{m} \phi_2} = -\frac{1}{3}$$

$$\mathbf{s}_1 = \Gamma_1 \mathbf{m} \phi_1 = \frac{4}{3} m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{3} m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \Gamma_2 \mathbf{m} \phi_2 = -\frac{1}{3} m \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji



Modalne jednadžbe

- 344 ◀ vrijedi ista jednadžba ali $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_{\text{eff}}(t)$ jer djeluje potres:

$$P_n(t) = \phi_n^T \mathbf{p}(t) = \phi_n^T \mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -\phi_n^T \underbrace{\mathbf{m}\ell \ddot{u}_g(t)}_{\mathbf{p}_{\text{eff}}(t)} = -L_n \ddot{u}_g(t)$$

- desna strana 348 ◀ modalne jednadžbe: $P_n(t)/M_n = -L_n/M_n \ddot{u}_g(t)$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

- modalna jednađba (uz $L_n/M_n = \Gamma_n$, str. 356.):

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2q_n = -\Gamma_n\ddot{u}_g(t), \quad n = 1, \dots, N$$

- usporedimo s [163](#) ◀ jednađbom gibanja za jedan stupanj slobode:

$$\ddot{D}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{D}_n + \omega_n^2D_n = -\ddot{u}_g(t)$$

- smjena $u = D_n$: naglašava titranje n -tim oblikom
- ne $u = u_n$: ne radi se o modalnom pomaku nego o mod. koordinati
- pomnožimo jednađbu sa Γ_n i usporedimo je s prethodnom:

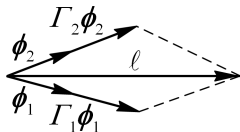
$$\underbrace{\Gamma_n\ddot{D}_n}_{\ddot{q}_n} + 2\zeta_n\omega_n\underbrace{\Gamma_n\dot{D}_n}_{\dot{q}_n} + \omega_n^2\underbrace{\Gamma_nD_n}_{q_n} = -\Gamma_n\ddot{u}_g(t)$$

- iste desne pa i lijeve strane jednađbi: $q_n(t) = \Gamma_nD_n(t)$
- pobuda $\ddot{u}_g(t)$ definirana numerički (niz točaka spojenih pravcima)
- posljedica: [164](#) ◀ numerički pristup jednađbi po $D_n(t)$, nakon toga:

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

- uz ϕ_n (riješene vl. vr.), $\mathbf{m}$ i ℓ : izračunamo $\Gamma_n = L_n/M_n$ i $q_n(t)$
- drugi prikaz Γ_n : dio utjecajnog vektora u smjeru n -tog oblika titranja

$$\mathbf{m}\ell = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \mathbf{m} \phi_n / \cdot \mathbf{m}^{-1} \Rightarrow \ell = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \phi_n$$



- česti naziv za Γ_n : KOEFICIJENT MODALNOG DOPRINOSA (učešća, udjela)
- mjera doprinosa oblika titranja statičkom odzivu (za $u_g = 1$)
- netočno: koeficijent ovisi o načinu normiranja oblika titranja
- nije neovisna mjera doprinosa nekom odzivu (pomaku, momentu,...)
- razlog: L_n sadrži ϕ_n^T , a M_n još i ϕ_n (u L_n/M_n ostaje jedan a)

Modalni odzivi

- doprinos n -tog oblika titranja vektoru pomaka $\mathbf{u}(t)$:

$$\mathbf{u}_n(t) = \phi_n q_n(t) = \Gamma_n \phi_n D_n(t), \quad (q_n(t), \text{ str. 359.})$$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

- poznato $\mathbf{u}_n(t)$: [411](#) ◀ dva pristupa proračunu unutarnjih sila
- ekvivalentne statičke sile: $\mathbf{f}_n(t) = \mathbf{k}\mathbf{u}_n(t) = \Gamma_n \mathbf{k} \phi_n D_n(t)$
- bit proračuna seizmičkih sila prema većini propisa
- u $\mathbf{f}_n(t)$ uvrstimo problem vlastitih vrijednosti $\mathbf{k} \phi_n = \omega_n^2 \mathbf{m} \phi_n$
- uz: [3563](#) ◀ član $\mathbf{s}_n$ i [166](#) ◀ pseudoubrzanje $A(t)$ dobivamo:

$$\mathbf{f}_n(t) = \underbrace{\Gamma_n \mathbf{m} \phi_n}_{\mathbf{s}_n} \omega_n^2 D_n(t) = \mathbf{s}_n \underbrace{\omega_n^2 D_n(t)}_{A_n(t)} = \mathbf{s}_n A_n(t)$$

- ekvivalentne statičke sile produkt dva člana:
 - $\mathbf{s}_n$: doprinosa n -tog oblika titranja prostornoj razdiobi $\mathbf{m}\ell$ pobude $\mathbf{p}_{\text{eff}}(t)$
 - $A_n(t)$: pseudoubrzanja sustava pri pobudi $\ddot{u}_g(t)$ i titranju n -tim oblikom (problem s jednim stupnjem slobode)
- proračun doprinosa $r_n(t)$ n -tog oblika titranja ukupnom odzivu $r(t)$
- statički proračun konstrukcije opterećene silama $\mathbf{f}_n(t)$
- primijetimo: $\mathbf{f}_n(t)$ umnožak vektora $\mathbf{s}_n$ i skalarne funkcije $A_n(t)$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

- linearni model: vrijedi princip superpozicije
- napravimo statički proračun za opterećenje $\mathbf{s}_n$
- rezultat r_n^{st} (M_n^{st} , T_n^{st} , ... u nekom presjeku) množimo s $A_n(t)$:

$$r_n(t) = r_n^{\text{st}} A_n(t)$$

Ukupni odziv

- ukupni pomaci: superpozicija modalnih doprinosa $\mathbf{u}_n(t)$ (str. 360.),

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n(t) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \phi_n D_n(t)$$

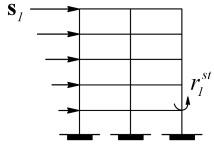
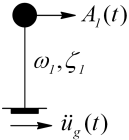
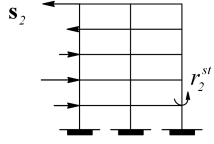
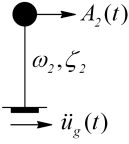
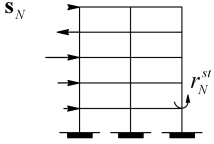
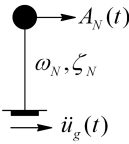
- ukupni odziv promatrane unutarnje sile ($M(t)$, $T(t)$, ...):

$$r(t) = \sum_{n=1}^N r_n(t) = \sum_{n=1}^N r_n^{\text{st}} A_n(t)$$

Pojašnjenje modalne analize

- riješimo problem vlastitih vrijednosti (trebamo ϕ_n i ω_n)
- odredimo statička opterećenja: raspišemo $\mathbf{m} \ell = \sum \mathbf{s}_n = \frac{L_n}{M_n} \mathbf{m} \phi_n$
- doprinos n -tog oblika titranja dinamičkom odzivu:
 - r_n^{st} : statička analiza konstrukcije pri opterećenju $\mathbf{s}_n$
 - $A_n(t)$: dinamička analiza jednog stupnja slobode pri pobudi $\ddot{u}_g(t)$
- statička analiza ISTE konstrukcije za N opterećenja $\mathbf{s}_n$ ($n = 1, \dots, N$)
- dinamička analiza N RAZLIČITIH sustava s jednim stupnjem slobode
- različiti: svakome pripada drugačiji ω_n (T_n), ζ_n i Γ_n
- množimo dva rezultata [primjerice M dijagram $\times A(t)$] za svaki n
- prvim određena prostorna, a drugim vremenska razdioba odziva
- zbrojimo N umnožaka $r_n^{\text{st}} A_n(t)$ u ukupni dinamički odziv zgrade

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

oblik titranja	statička analiza konstrukcije	dinamička analiza sustava s jednim stupnjem slobode	modalni doprinos ukupnom odzivu
1			$r_1(t) = r_1^{st} A_1(t)$
2			$r_2(t) = r_2^{st} A_2(t)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N			$r_N(t) = r_N^{st} A_N(t)$
ukupni odziv			$r(t) = \sum_{n=1}^N r_N(t)$

Analiza odziva na rotacijsku pobudu

- 286 ◀ **jednadžba gibanja** pri pobudi rotacijskim ubrzanjem $\ddot{\theta}_g(t)$:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\ell\ddot{\theta}_g(t), \quad \mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -\mathbf{m}\ell\ddot{\theta}_g(t)$$

- 285 ◀ **primjer:** utjecajni vektor $\ell = [h_1 \ h_2 \ x_3]^T$ (translacija: $\ell = \mathbf{1}$)
- statički pomaci u smjeru svih stupnjeva slobode zbog $\theta_g = 1$
- odredimo ℓ : proračun kao za translaciju, ali $\ddot{\mathbf{u}}_g(t) \rightarrow \ddot{\theta}_g(t)$

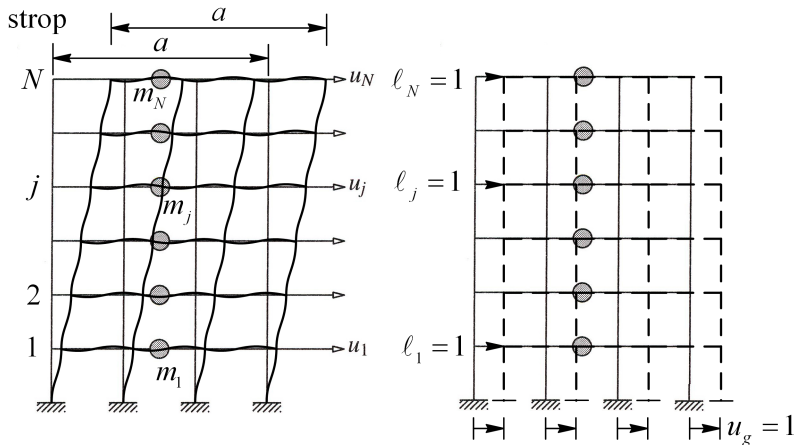
Tlocrtno simetrične zgrade: translacijska pobuda

- višeetažne, simetrične, s uzdužno apsolutno krutim pločama
- pobuda djeluje horizontalno duž jedne osi simetrije
- 277₂ ◀ **diferencijalne jednadžbe** gibanja sustava:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\mathbf{1}\ddot{u}_g(t)$$

- vektor $\mathbf{u}$: bočni pomaci katnih ploča (relativno prema tlu)

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji



- matrica **m**: dijagonalna matrica masa
- član m_j : masa etaže koncentrirana u centru masa ploče j
- matrica **k**: matrica bočne krutosti: zbroj bočnih krutosti okvira
- vektor $\mathbf{1} = [1 \ 1 \cdots 1]^T$; podsjećanje na pojmove: [282 ◀ primjer](#)

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

- isti **354 ◀ sustav jednažbi** kao za modalnu analizu
- pokažimo postupak na jednom okviru

Raspis efektivnih sila potresa po vlastitim vektorima

- rabimo **356₁ ◀ raspis** za $\ell = 1$, pa **1 ▶ vrijedi:**

$$\mathbf{m} \mathbf{1} = \sum_{n=1}^N \mathbf{s}_n = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \mathbf{m} \phi_n$$

- svojstva n -tog **356₂ ◀ oblika titranja:** $\Gamma_n = L_n^h / M_n$ (**2 ▶ skalari**):

$$L_n^h = \phi_n^T \mathbf{m} \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \phi_{1n} & \phi_{2n} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots \\ 0 & m_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}$$

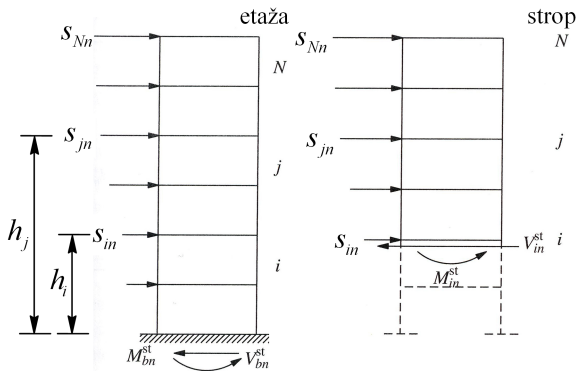
$$M_n = \phi_n^T \mathbf{m} \phi_n = \begin{bmatrix} \phi_{1n} & \phi_{2n} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots \\ 0 & m_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \\ \vdots \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}^2$$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

- dio opterećenja $\mathbf{m1}$ u smjeru n -tog oblika titranja (vektor):

$$\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{m} \phi_n = \Gamma_n \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots \\ 0 & m_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \\ \vdots \end{bmatrix} = \Gamma_n \begin{bmatrix} m_1 \phi_{1n} \\ m_2 \phi_{2n} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

- komponente $s_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn}$: bočne sile u razinama katnih ploča



Modalni odzivi zgrade

- numerički riješimo ▶ jednažbu za n -ti oblik titranja:

$$\ddot{D}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{D}_n + \omega_n^2 D_n = -\ddot{u}_g(t)$$

- poznati ϕ_n i ω_n : odredimo skalare L_n^h , M_n , Γ_n i
- doprinos n -tog oblika titranja bočnim pomacima $\mathbf{u}(t)$:

$$\mathbf{u}_n(t) = \Gamma_n \phi_n D_n(t), \quad \left[\text{podsjetimo se: } \mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n(t) \right]$$

- komponenta $u_{jn}(t)$: bočni pomak stropa j ,

$$\begin{bmatrix} u_{1n}(t) \\ \vdots \\ u_{Nn}(t) \end{bmatrix} = \Gamma_n \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \vdots \\ \phi_{Nn} \end{bmatrix} D_n(t) \implies u_{jn}(t) = \Gamma_n \phi_{jn} D_n(t)$$

- pomak stropa ako pri potresu zgrada titra samo n -tim oblikom

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

- relativni pomak etaže j (engl. STORY DRIFT):

$$\Delta_{jn}(t) = u_{jn}(t) - u_{j-1,n}(t) = \Gamma_n(\phi_{jn} - \phi_{j-1,n})D_n(t)$$

- razlika bočnih pomaka susjednih ploča ($j - 1$ i j)
- ekvivalentne statičke (bočne) sile:

$$\mathbf{f}_n(t) = \mathbf{s}_n A_n(t), \quad [\text{podsjetimo se: } A_n(t) = \omega_n^2 D_n(t)]$$

- komponenta $f_{jn}(t)$: sila u razini stropa j ,

$$\begin{bmatrix} f_{1n}(t) \\ \vdots \\ f_{Nn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1n} \\ \vdots \\ s_{Nn} \end{bmatrix} A_n(t) \implies f_{jn}(t) = s_{jn} A_n(t)$$

- opterećenje stropa ako pri potresu zgrada titra samo n -tim oblikom
- odzivi ($M(t)$, $T(t)$, ...) zbog opterećenja $\mathbf{f}_n(t)$: $r_n(t) = r_n^{\text{st}} A_n(t)$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

- statičkom analizom za opterećenje $\mathbf{s}_n$ odredimo r_n^{st}
- predznak opterećenja određen predznakom ϕ_n
- za temeljni (prvi) oblik titranja: s_{j1} djeluju u istome smjeru
- za ostale oblike: mijenjaju smjer po visini zgrade
- promotrimo šest ▶ odziva važnih za zgrade opterećene potresom

Važni statički odzivi zgrade pri djelovanju potresa

Promatrani odziv r	Oznaka	Statički dio za n -ti oblik (r_n^{st})
poprečne sile u etažama	V_i	$V_{in}^{\text{st}} = \sum_{j=i}^N s_{jn}$
momenti u etažama	M_i	$M_{in}^{\text{st}} = \sum_{j=i}^N (h_j - h_i) s_{jn}$
poprečna reakcija	V_b	$V_{bn}^{\text{st}} = \sum_{j=1}^N s_{jn} = \Gamma_n L_n^h \equiv M_n^*$
moment prevrtanja	M_b	$M_{bn}^{\text{st}} = \sum_{j=1}^N h_j s_{jn} = \Gamma_n L_n^\theta \equiv h_n^* M_n^*$
pomaci stropova	u_j	$u_{jn}^{\text{st}} = (\Gamma_n / \omega_n^2) \phi_{jn}$
relativni pomaci etaža	Δ_j	$\Delta_{jn}^{\text{st}} = (\Gamma_n / \omega_n^2) (\phi_{jn} - \phi_{j-1,n})$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

- V_{in}^{st} : suma katnih opterećenja s_{jn} od krova do i -tog kata
- M_{in}^{st} : moment tih opterećenja na i -ti kat (krak $h_j - h_i$)
- prve četiri veličine: statički proračun zgrade za opterećenje s_n
- posljednje dvije veličine: nastale usporedbom $r_n(t) = r_n^{st} A_n(t)$ sa

$$u_{jn}(t) = \Gamma_n \phi_{jn} \underbrace{\frac{A_n(t)}{\omega_n^2}}_{D_n(t)} \quad \text{i} \quad \Delta_{jn}(t) = \Gamma_n (\phi_{jn} - \phi_{j-1,n}) \underbrace{\frac{A_n(t)}{\omega_n^2}}_{D_n(t)}$$

- dobivamo: $r_{jn}^{st} = u_{jn}^{st} = \Gamma_n \phi_{jn} / \omega_n^2$ i $r_{jn}^{st} = \Delta_{jn}^{st} = \Gamma_n (\phi_{jn} - \phi_{j-1,n}) / \omega_n^2$
- DEFINIRANJE veličina M_n^* i h_n^* (Γ_n ne ovisi o sumi po etažama):

$$V_{bn}^{st} = \sum_{j=1}^N s_{jn} = \sum_{j=1}^N \Gamma_n m_j \phi_{jn} = \Gamma_n \underbrace{\sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}}_{L_n^h} = \underbrace{\Gamma_n}_{\frac{L_n^h}{M_n}} L_n^h = \frac{(L_n^h)^2}{M_n} = M_n^*$$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

$$h_n^* = \frac{L_n^\theta}{L_n^h}, \quad \text{uz:} \quad L_n^\theta = \sum_{j=1}^N h_j m_j \phi_{jn} \quad (\text{▶ skalar})$$

- prema tome, vrijedi:

$$\begin{aligned} M_{bn}^{\text{st}} &= \sum_{j=1}^N h_j s_{jn} = \sum_{j=1}^N h_j \underbrace{\Gamma_n m_j \phi_{jn}}_{s_{jn}} = \Gamma_n \underbrace{\sum_{j=1}^N h_j m_j \phi_{jn}}_{L_n^\theta} \\ &= \Gamma_n \underbrace{L_n^\theta}_{h_n^* L_n^h} = h_n^* \underbrace{\Gamma_n L_n^h}_{M_n^*} = h_n^* M_n^* \end{aligned}$$

- veličine M_n^* i h_n^* ne ovise o načinu normiranja vlastitih vektora:

$$M_n^* = \frac{(L_n^h)^2}{M_n} = \frac{(\sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn})^2}{\sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}^2}, \quad h_n^* = \frac{L_n^\theta}{L_n^h} = \frac{\sum_{j=1}^N h_j m_j \phi_{jn}}{\sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}}$$

- br. i naz. sadrže ϕ_{jn}^2 , odnosno ϕ_{jn} (svejedno ϕ_{jn} ili $a\phi_{jn}$)

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

- koeficijenti M_n , L_n^h , L_n^θ i Γ_n sadrže samo ϕ_{jn} pa ovise o normiranju

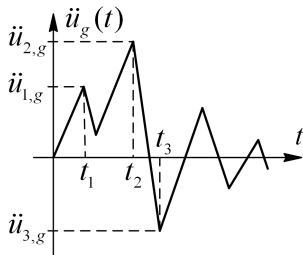
Ukupni odziv

- superpozicija doprinosa svih oblika titranja (st. dio iz tablice):

$$r(t) = \sum_{n=1}^N r_n(t) = \sum_{n=1}^N r_n^{\text{st}} A(t)$$

Sažetak modalne analize u primjeni na zgrade

- zgrada s dvije tlocrtne osi simetrije
- potresni zapis djeluje u smjeru jedne osi
- nepravilan: određen nizom točaka $(t_i, \ddot{u}_{i,g})$
- spojene pravcima: postoji točno rješ. za Δt
- rezultat: odziv (neke veličine) u vremenu
- u točki konstrukcije imamo: $M(t)$, $T(t), \dots$



Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

- ❶ odaberemo potresni zapis $\ddot{u}_g(t)$ definiran nizom točaka $(t_i, \ddot{u}_{g,i})$
- ❷ odredimo svojstva konstrukcije:
 - a) matricu masa $\mathbf{m}$ i bočne krutosti $\mathbf{k}$
 - b) procijenimo koeficijent relativnog prigušenja ζ
- ❸ izračunamo prirodne frekvencije ω_n i oblike titranja ϕ_n
(treba riješiti problem vlastitih vrijednosti $\mathbf{k}\phi_n = \omega_n^2 \mathbf{m}\phi_n$)
- ❹ odredimo modalne komponente $\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{m}\phi_n$ efektivnih sila potresa
- ❺ izračunamo doprinos n -tog oblika titranja ukupnom odzivu:
 - a) provedemo statički proračun za opterećenje $\mathbf{s}_n$
[odredimo statički doprinos r_n^{st} odzivu $r_n(t)$]
 - b) izračunamo pseudoubrzanje sustava s jednim st. sl.
[odredimo dinamički doprinos $A_n(t)$ odzivu $r_n(t)$]
 - c) odredimo odziv $r_n(t) = r_n^{\text{st}} A_n(t)$
- ❻ zbrojimo doprinos svih oblika titranja u ukupni odziv $[r(t) = \sum r_n(t)]$
 - uobičajeno: prvih nekoliko oblika najviše doprinosi odzivu
 - korake 3–6 dovoljno napraviti za manji broj oblika titranja

Efektivna modalna masa i efektivna modalna visina

- koeficijenti M_n^* i h_n^* imaju fizikalno značenje
- poprečna reakcija pri titranju n -tim oblikom:

$$V_{bn}(t) = V_{bn}^{\text{st}} A_n(t)$$

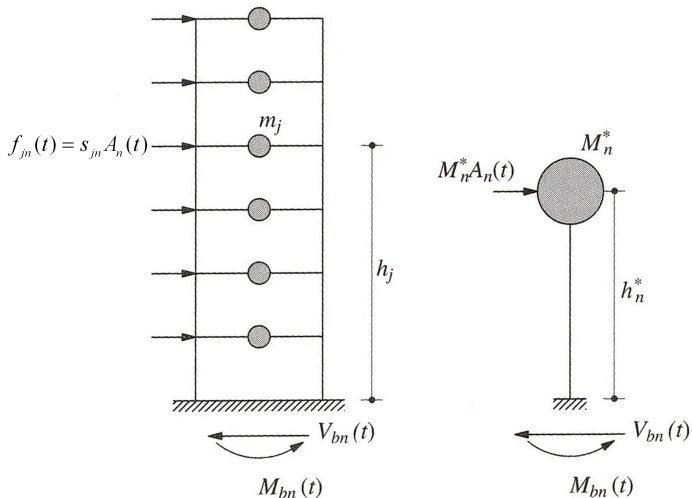
- izraz u skladu s općim zapisom: $r_n(t) = r_n^{\text{st}} A_n(t)$
- prema prethodnoj tablici: $V_{bn}^{\text{st}} = M_n^*$, pa je

$$V_{bn}(t) = M_n^* A_n(t)$$

- za model s 1673 ◀ jednim stupnjem slobode: $V_b(t) = mA(t)$
- ako su svojstva modela s jednim stupnjem slobode ω_n i ζ_n (jednaka svojstvima zgrade pri titranju n -tim oblikom)
- pripadni spektar pseudoubrzanja označimo s $A_n(t)$
- poprečna reakcija za takva svojstva: $V_b(t) = mA_n(t)$
- uočite: ako je $m = M_n^*$ ISTA poprečna reakcija za oba modela

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

- sustava s jednim stupnjem slobode (koncentrirane mase M_n^*) i
- višeetažne zgrade s masama m_j distribuiranim po etažama
- zato M_n^* zovemo EFEKTIVNA MODALNA MASA (poprečne reakcije)



Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

- efektivni¹⁴ DIO ukupne mase koji uzrokuje $V_{bn}(t)$
- poprečnu silu u n -tom obliku titranja
- općenito: efektivna modalna masa nije masa zgrade!
- ukupna masa aktivna samo za model s jednim stupnjem sl.
- razlog: masa i ekvivalentna bočna sila na istom mjestu
- iz ravnoteže: bočna reakcija V_b jednaka bočnoj sili f_S
- višetažna zgrada: mase m_j distribuirane po visini i
- ekvivalentne bočne sile s_{jn} promjenjive po visini
- oblik promjene: $m_j \phi_{jn}$ (zbog $s_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn}$, Γ_n skalar)
- iz ravnoteže: bočna reakcija V_{bn}^{st} jednaka sumi bočnih sila s_{jn}
- znači: i V_{bn}^{st} ovisi o razdiobi masa m_j i komponentata ϕ_{jn}
- budući da vrijedi: $M_n^* = V_{bn}^{\text{st}}$ (M_n^* – rezultanta sila s_{jn})
- M_n^* mora ovisiti o razdiobi masa i obliku vlastitog vektora

¹⁴ djelotvorni, aktivni

potvrda:
$$M_n^* = \frac{(L_n^h)^2}{M_n} = \frac{(\sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn})^2}{\sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}^2}$$

- važno: suma efektivnih modalnih masa jednaka masi konstrukcije,

$$\sum_{n=1}^N M_n^* = \sum_{j=1}^N m_j$$

- ▶ dokaz: množimo 367₁ ◀ raspis $\mathbf{m} \mathbf{1}$ sa $\mathbf{1}^T \Rightarrow \mathbf{1}^T \mathbf{m} \mathbf{1} = \sum_{n=1}^N \Gamma_n (\mathbf{1}^T \mathbf{m} \phi_n)$
- matrica $\mathbf{m}$ dijagonalna, pa množenjem dobivamo:

$$\sum_{n=1}^N m_j = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \underbrace{\sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}}_{L_n^h} = \sum_{n=1}^N \underbrace{\Gamma_n L_n^h}_{M_n^*} = \sum_{n=1}^N M_n^*$$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

- moment prevrtanja pri titranju n -tim oblikom:

$$M_{bn}(t) = M_{bn}^{\text{st}} A_n(t) \quad [\text{u obliku } r_n(t) = r_n^{\text{st}} A_n(t)]$$

- prema tablici: $M_{bn}^{\text{st}} = h_n^* M_n^*$, pa je

$$M_{bn}(t) = h_n^* \underbrace{M_n^* A_n(t)}_{V_{bn}(t)} = h_n^* V_{bn}(t)$$

- za model s 1674 ◀ jednim stupnjem slobode: $M_b(t) = h V_b(t) = h m A(t)$
- ako je masa modela s jednim stupnjem slobode M_n^* , na visini h_n^*
- moment prevrtanja je jednak M_{bn}
- momentu prevrtanja zgrade pri titranju n -tim oblikom
- s masom distribuiranom po etažama
- zato h_n^* zovemo EFEKTIVNA MODALNA VISINA (momenta prevrtanja)
- pojašnjenje: visina hvatišta rezultante bočnih sila s_{jn} (ili f_{jn})

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

- općenito: efektivna modalna visina nije visina građevine!
- ukupna visina aktivna samo za model s jednim stupnjem sl.
- razlog: ukupna masa i ekvivalentna bočna sila na vrhu
- zgrada: mase m_j i bočne sile s_{jn} distribuirane po visini
- očito: hvatište h_n^* bočnih sila niže od ukupne visine h
- razdioba s_{jn} jest $m_j \phi_{jn}$: ovisi o masi i obliku titranja
- razdioba utječe na hvatište – efektivnu modalnu visinu
- znači: i h_n^* ovisi o razdiobi masa i obliku vlastitog vektora

$$\text{potvrda: } h_n^* = \frac{L_n^\theta}{L_n^h} = \frac{\sum_{j=1}^N h_j m_j \phi_{jn}}{\sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}}$$

- važno: jednaka suma momenata masa M_n^* i m_j oko temelja
- krakovi h_n^* i h , a sume po vl. vektorima, odnosno etažama

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

$$\sum_{n=1}^N h_n^* M_n^* = \sum_{j=1}^N h_j m_j$$

- ▶ dokaz: uvodimo vektor $\mathbf{mh}$, gdje je $\mathbf{h} = [h_1 \ \dots \ h_N]^T$
- raspišemo ga 3564 po silama inercije (uz $\ell = \mathbf{h}$):

$$\mathbf{mh} = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \mathbf{m} \phi_n = \sum_{n=1}^N \underbrace{\frac{\Gamma_n}{M_n}}_{\frac{L_n}{M_n}} \mathbf{m} \phi_n = \sum_{n=1}^N \underbrace{\frac{\phi_n^T \mathbf{mh}}{M_n}}_{\frac{L_n^\theta}{M_n}} \mathbf{m} \phi_n = \sum_{n=1}^N \frac{L_n^\theta}{M_n} \mathbf{m} \phi_n$$

- primijetite: matrica $\mathbf{m}$ dijagonalna, pa je $\phi_n^T \mathbf{mh} = \sum_{j=1}^N \phi_{jn} m_j h_j = L_n^\theta$
- množenjem raspisa s $\mathbf{1}^T$ dobivamo: $\mathbf{1}^T \mathbf{mh} = \sum_{n=1}^N \frac{L_n^\theta}{M_n} \mathbf{1}^T \mathbf{m} \phi_n$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

- raspisano (uz dijagonalnu matricu $\mathbf{m}$):

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^N m_j h_j &= \sum_{n=1}^N \frac{L_n^\theta}{M_n} \underbrace{\sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}}_{L_n^h} = \sum_{n=1}^N \frac{L_n^\theta}{M_n} L_n^h \frac{L_n^h}{L_n^h} \\ &= \sum_{n=1}^N \underbrace{\frac{(L_n^h)^2}{M_n}}_{M_n^*} \underbrace{\frac{L_n^\theta}{L_n^h}}_{h_n^*} = \sum_{n=1}^N M_n^* h_n^*\end{aligned}$$

- za više oblike titranja (drugi, treći, ...): h_n^* može biti negativan
- razlog: V_{bn}^{st} i M_{bn}^{st} suprotnih predznaka,

$$h_n^* = \frac{M_{bn}(t)}{V_{bn}(t)} = \frac{M_{bn}^{\text{st}} A_n(t)}{V_{bn}^{\text{st}} A_n(t)} = \frac{M_{bn}^{\text{st}}}{V_{bn}^{\text{st}}}$$

- za temeljni oblik titranja: V_{b1}^{st} i M_{b1}^{st} prema definiciji pozitivni

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

- prema tablici (str. 371.):

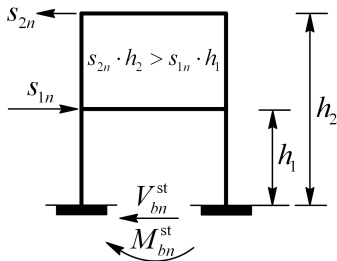
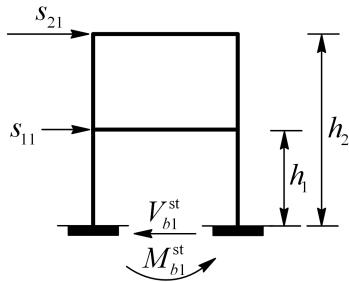
$$V_{b1}^{st} = \sum_{j=1}^N s_{j1} > 0, \quad (\text{sile } s_{j1} > 0)$$

$$M_{b1}^{st} = \sum_{j=1}^N h_j s_{j1} > 0, \quad (\text{visine } h_j > 0)$$

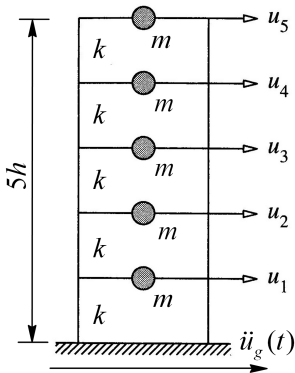
- ili: sve komponente $\phi_{j1} > 0$, pa je

$$h_1^* = \frac{L_1^\theta}{L_1^h} = \frac{\sum_{j=1}^N h_j m_j \phi_{j1}}{\sum_{j=1}^N m_j \phi_{j1}} > 0,$$

$$(h_j > 0 \text{ i } m_j > 0)$$



Primjer proračuna: peteroetažna posmična zgrada



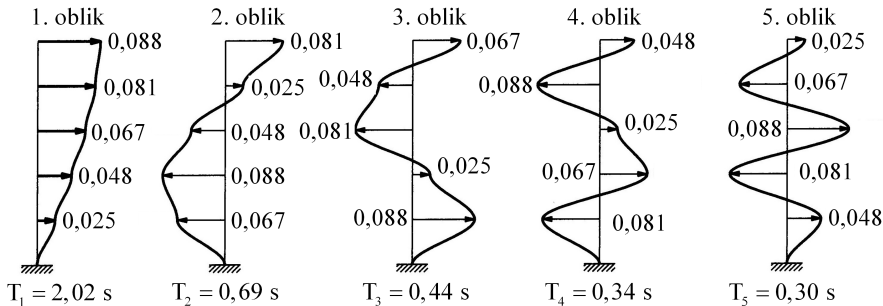
- masa etaže: $m = 450 \text{ kN/g}$,
tlocrt: $9 \times 5 = 45 \text{ m}^2$, težina: 10 kN/m^2
- visina etaže: $h = 3,7 \text{ m}$
- krutost etaže: $k = 5500 \text{ kN/m}$,
za 6 stupova kvadratnog poprečnog presjeka:
 $k = 6 \cdot 12EI_c/h^3$, $I_c = a^4/12$, $a = (\frac{1}{6}kh^3/E)^{1/4}$
- ab stupovi: $E = 30 \text{ GPa}$, pa je $a = 0,2 \text{ m}$
- opterećenje: $\ddot{u}_g(t)$ – zapis ubrzanja (ElCentro)
- prigušenje: $\zeta = 5\%$ (uobičajeno za ab zgradu)

$$\mathbf{m} = m \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{k} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(izvod na
str. 241. i
242.)

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: primjer

- problem vlastitih vrijednosti: $\det [\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m}] = 0$
- raspis determinante: karakteristični polinom 5. stupnja po ω_n^2
- rješenja: nultočke $\omega_1, \dots, \omega_5$ ($T_1 = 2\pi/\omega_1, \dots, T_5 = 2\pi/\omega_5$)
- poznati ω_n : iz $[\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m}] \phi_n = \mathbf{0} \Rightarrow \phi_n$, normiramo ($M_n = 1$)



- dulji prvi period: stupovi (20/20) vitkiji od uobičajenih
- tada su veći doprinosi ostalih perioda odzivu zgrade
- završena prva tri koraka proračuna (prema sažetku na str. 375.)

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: primjer

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0,025 \\ 0,048 \\ 0,067 \\ 0,081 \\ 0,088 \end{bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} -0,067 \\ -0,088 \\ -0,048 \\ 0,025 \\ 0,081 \end{bmatrix} \quad \phi_3 = \begin{bmatrix} 0,088 \\ 0,025 \\ -0,081 \\ -0,048 \\ 0,067 \end{bmatrix} \quad \phi_4 = \begin{bmatrix} -0,081 \\ 0,067 \\ 0,025 \\ -0,088 \\ 0,048 \end{bmatrix} \quad \phi_5 = \begin{bmatrix} 0,048 \\ -0,081 \\ 0,088 \\ -0,067 \\ 0,025 \end{bmatrix}$$

- četvrti korak proračuna (raspis **m1** po vlastitim vektorima):

3672 ◀ skalari:

$$L_n^h = \sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn},$$

$$M_n = \sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}^2 \quad \text{i}$$

373 ◀ skalar:

$$L_n^\theta = \sum_{j=1}^N h_j m_j \phi_{jn}$$

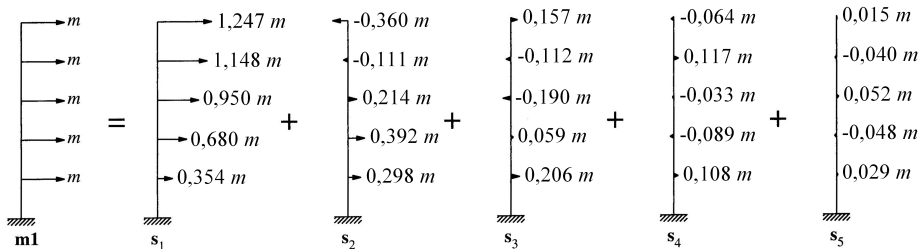
Svojstva oblika titranja

Oblik	M_n	L_n^h/m	$L_n^\theta/(hm)$
1.	1,000	0,309	1,086
2.	1,000	-0,097	0,118
3.	1,000	0,051	0,038
4.	1,000	-0,029	0,016
5.	1,000	0,013	0,007

- primijetite: $m_j = m$ i $h_j = jh$, pa m u L_n^h i hm u L_n^θ ispred $\sum$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: primjer

- prema tablici odredimo $\Gamma_n = L_n^h / M_n = L_n^h$, ($M_n = 1$) i
- bočne sile $\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{m} \phi_n$, ($s_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn}$ 368 ◀ komponente po katovima)



- promjena smjera $\mathbf{s}_n$ po visini: određena promjenom ϕ_n po visini
- komponente prvog oblika titranja i katne sile $\mathbf{s}_1$ u istome smjeru
- komponente ostalih oblika i katne sile: mijenjaju smjer po visini
- skalar Γ_n : mijenja predznak svih sila, ne uzrokuje promjenu po visini
- uočite: najveći doprinos prvog oblika titranja rastavu $\mathbf{s} = \mathbf{m1}$
- postupno smanjenje doprinosa ostalih oblika tome rastavu

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: primjer

- 5. korak proračuna – pod a) (određivanje važnih statičkih 371 ◀ odziva):
- i dalje vrijedi $\Gamma_n = L_n^h$, jer je $M_n = 1$

$$V_{bn}^{\text{st}} = \sum_{j=1}^5 s_{jn} = (L_n^h)^2$$

$$V_{5n}^{\text{st}} = \sum_{j=5}^5 s_{jn} = s_{5n}$$

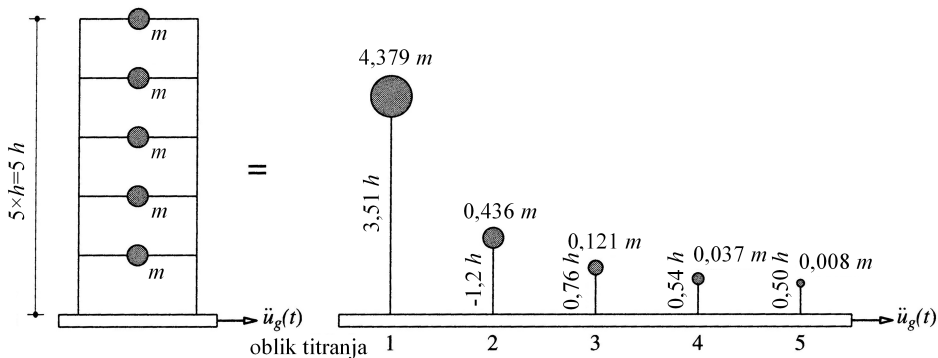
$$M_{bn}^{\text{st}} = \sum_{j=1}^5 h_j s_{jn} = L_n^h L_n^\theta$$

Promatrani statički odzivi				
Oblik	V_{bn}^{st}/m	V_{5n}^{st}/m	$M_{bn}^{\text{st}}/(mh)$	u_{5n}^{st}
1.	4,379	1,247	15,391	0,129
2.	0,433	-0,360	-0,520	-0,004
3.	0,120	0,157	0,091	0,0008
4.	0,039	-0,064	-0,021	-0,0002
5.	0,008	0,015	0,004	0,00003

$$u_{5n}^{\text{st}} = (\Gamma_n / \omega_n^2) \phi_{5n} = [L_n^h / (2\pi / T_n)^2] \phi_{5n}$$

- statički odzivi najveći za prvi oblik titranja
- postupno smanjenje odziva za ostale oblike
- efektivne modalne mase i visine: $M_n^* = V_{bn}^{\text{st}}$ i $h_n^* = M_{bn}^{\text{st}} / V_{bn}^{\text{st}}$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: primjer



- vrijednosti h_n^* risane na istu stranu (bez promjene predznaka)
- uočite: $\sum M_n^* = 5m = \sum m_j$ i $\sum h_n^* M_n^* = 15mh = \sum h_j m_j$
- ranije dokazano: $\sum M_n^* = \sum m_j$ i $\sum h_n^* M_n^* = \sum h_j m_j$
- usput, suma članova 2. stupca: ukupna statička poprečna sila,

$$V_{bn}^{st} = M_n^* / \sum_{n=1}^5 \quad V_b^{st} = \sum_{n=1}^5 V_{bn}^{st} = \sum_{n=1}^5 M_n^* = 5m$$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: primjer

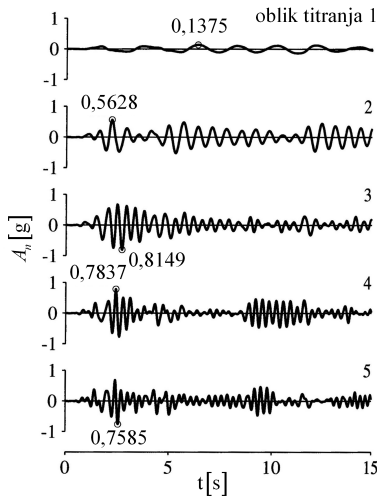
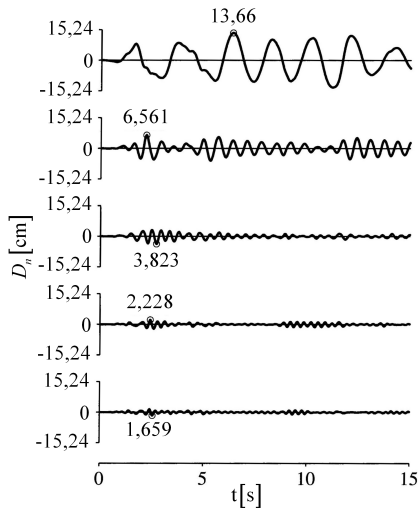
- suma članova 4. stupca: ukupni statički moment prevrtanja,

$$M_{bn}^{\text{st}} = h_n^* M_n^* / \sum_{n=1}^5 \quad M_b = \sum_{n=1}^5 M_{bn}^{\text{st}} = \sum_{n=1}^5 h_n^* M_n^* = 15mh$$

- potresni zapis određen nizom točaka $(t_i, \ddot{u}_{g,i})$, vrijedi: $t_{i+1} = t_i + \Delta t$
- prirast $\Delta t = 0,01$ i trajanje zapisa od 30 s: potrebno 3000 točaka
- zahtjev: Δt dovoljno mali za precizno definiranje zapisa i odziva
- 5. korak proračuna – pod b) (odrediti $A_n(t)$ sustava s jednim st. sl.)
- svakoj konzoli (za svaki oblik titranja) pripadaju T_n i ζ_n
- numerički proračun odziva: metodama vremenskog prirasta
- na kraju svakog Δt izračunamo D_n [diskretna vrijednost od $D_n(t)$]
- zatim prema formuli odredimo $A_n(t) = \omega_n^2 D_n(t)$
- napredujemo po prirastima do kraja potresnog zapisa
- točke (njih 3000) spojimo pravcima
- aproksimacija krivulja odziva $D_n(t)$ i $A_n(t)$ polinomom

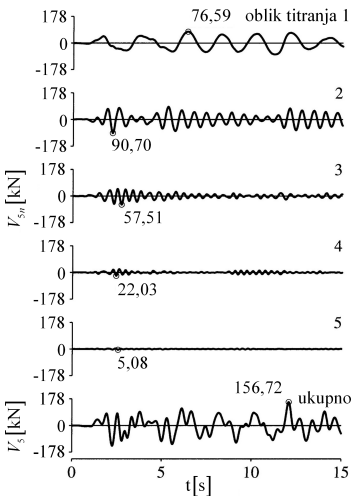
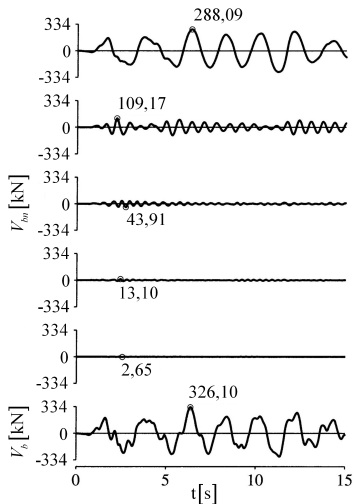
Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: primjer

- točke vrlo bliske: poligon vizualno poput krivulje
- provedemo za svaki od pet sustava s jednim st. sl. ($n = 1, \dots, 5$)
- prikazan samo dio odziva koji sadrži ekstreme (prvih 15 s)

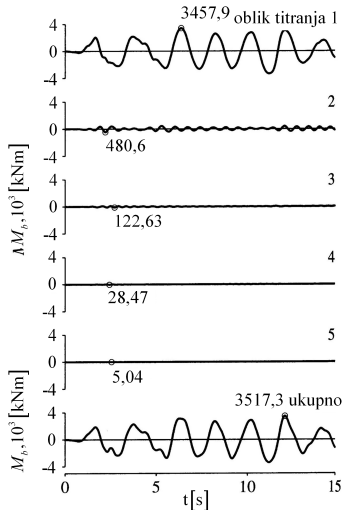
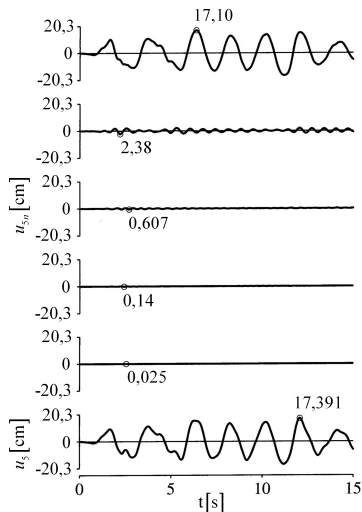


Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: primjer

- 5. korak proračuna – pod c) [ukupni modalni odzivi: $r_n(t) = r_n^{\text{st}} A_n(t)$]
- u svakom t_i : statičke vrijednosti (tablica, str. 389.) množimo s A_n
- dobivamo ukupne modalne odzive: V_{bn} , V_{5n} , u_{5n} i M_{bn}



Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: primjer



- uočite relativne doprinose pojedinih oblika titranja
- prema tablici statičkih odziva: doprinos 1. oblika titranja najveći
- često dobra procjena, ali ne uvijek: pogledajte V_{bn} i V_{5n}

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: primjer

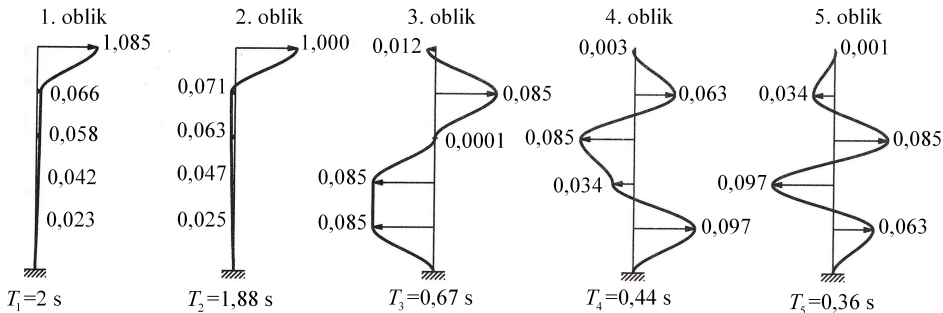
- 6. korak proračuna [ukupni odziv: $r(t) = \sum_{n=1}^5 r_n(t)$]
- zbrojimo pet funkcija u ukupnu funkciju odziva
- rezultat: posljednja funkcija na str. 393. i 394. (V_b , V_5 , u_5 i M_b)
- uočite: nisu potrebni doprinosi svih oblika titranja
- ovaj primjer: doprinosi četvrtog i petog oblika zanemarivi

Završne napomene

- 1 važno: ekstreme od $D_n(t)$ i $A_n(t)$ odredimo izravno iz spektra
 - za pripadni T_n i ζ_n očitamo ih sa spektralne krivulje
 - znači: vršne vrijednosti odredimo bez dinamičkog proračuna
- 2 ekstremi od $A_n(t)$ i $r_n(t)$ nastupaju istodobno
 - dokaz: vrijedi formula $r_n(t) = r_n^{\text{st}} A_n(t)$ (r_n^{st} ne ovisi o vremenu)
- 3 ne nastupaju istodobno ekstremi:
 - ukupnog i modalnih odziva neke veličine (npr. V_b i V_{bn})
 - ukupnog odziva nekih veličina (npr. V_b i V_5); iako su isti $A_n(t)$

Primjer proračuna: podatljivi (slabi) peti kat

- peteroetažna zgrada: posljednji kat manje krutosti i mase od ostalih
- namjena: strojarnica za smještaj pogona (za liftove, klimatizaciju, ...)
- posljedica: postoje BLISKI PERIODI titranja zgrade (ovdje T_1 i T_2)
- krutost: $k_5 = 0,0012k$, $k = 4000 \text{ kN/m}$; masa: $m_5 = 0,01m$
- masa m , visina h , prigušenje ζ i pobuda $\ddot{u}_g(t)$: kao prethodni primjer

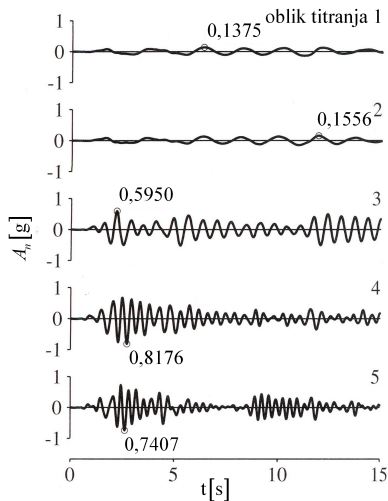
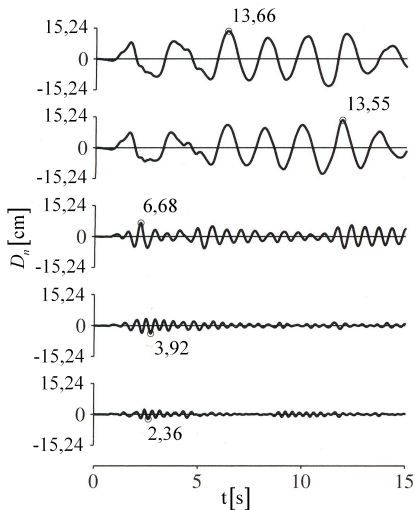


Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: primjer

Odzivi	Promatrani statički odzivi				
	Oblik titranja				
	1.	2.	3.	4.	5.
V_{bn}^{st}/m	1,951	1,633	0,333	0,078	0,015
V_{5n}^{st}/m_5	9,938	-8,979	0,046	-0,007	0,0001

- 1. i 2. oblik titranja: T_1 , T_2 bliski i VELIKA IZOBLIČENJA petog kata
- oba oblika uzrokuju statičke odzive sličnih iznosa,
- poprečnu reakciju V_{bn}^{st} istog predznaka i
- poprečnu silu u slabom katu V_{5n}^{st} suprotnog predznaka
- slični su i dinamički odzivi $D_n(t)$ za oba oblika (praktički su u fazi)
- jer im pripada slična dinamička 369 ◀ jednačžba
- razlog: T_n (pa i ω_n) slični, a početni uvjeti (mirovanje), ζ i $\ddot{u}_g(t)$ isti
- zbog sličnih D_n : $A_n(t) = \omega_n^2 D_n(t) = (2\pi/T_n)^2 D_n(t)$ također u fazi

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: primjer

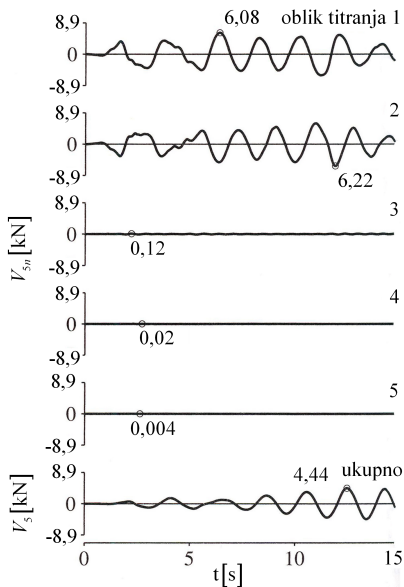
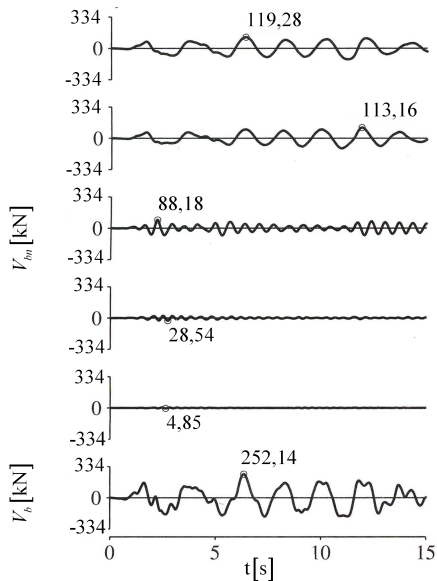


- doprinosi prvih dvaju oblika: slični po iznosu (str. 400.), jer
- statički doprinosi r_n^{st} (V_{bn}^{st} i V_{5n}^{st}) sličnih iznosa (tablica, str. 397.)
- slične i funkcije dinamičkih odziva $A_n(t)$

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: primjer

- za poprečnu reakciju $V_b(t)$:
- statički doprinosi V_{bn}^{st} istog predznaka (tablica)
- dinamički odzivi $A_n(t)$ u fazi
- znači: slični doprinosi $V_{bn}^{\text{st}}A_n(t)$ prvih dvaju oblika (str. 400.)
- PUNIM IZNOSIMA doprinose sumi $\sum V_{bn}^{\text{st}}A_n(t)$
- poprečna reakcija puno veća od pojedinog doprinosa (str. 400.)
- za poprečnu silu u petom (slabom) katu $V_5(t)$:
- statički doprinosi različitih predznaka (tablica)
- vrijede isti dinamički odzivi $A_n(t)$: u fazi su
- znači: doprinosi $V_{5n}^{\text{st}}A_n(t)$ različitih predznaka (str. 400.)
- u ukupnoj sumi teže međusobnom poništenju
- važno: preostala poprečna sila može biti velika
- ovdje: približno jednaka težini kata ($V_5 = 4,44 \text{ kN}$, $m_5 = 4,5 \text{ kN/g}$)
- omjer poprečne sile i težine kata blizak 1: oštećenja (str. 401.)

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: primjer

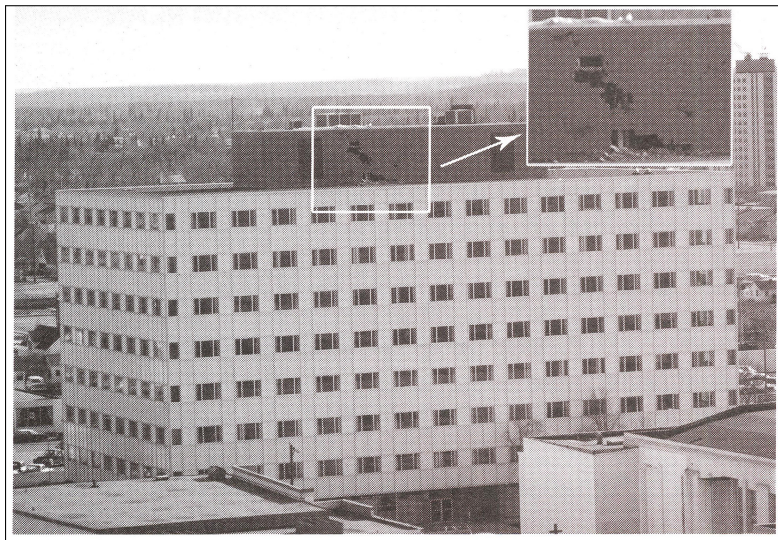


Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: primjer



izvor: <http://www.fgg.uni-lj.si/kmk/esdep/master/wg17/10100.htm>

Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: primjer



Proračun primjenom spektra odziva

- prikazani postupak: proračun odziva u vremenu, $r(t)$ funkcija vremena
- međutim: dimenzioniranje temeljimo na vršnim silama i pomacima
- ključno: Možemo li odrediti vršnu vrijednost izravno iz spektra odziva?
- za sustav s jednim stupnjem slobode: prema definiciji – da (str. 168.)
- za sustav s više stupnjeva slobode: UVJETNO DA
- to znači: ekstrem nije točan – jednak vršnoj vrijednosti funkcije $r(t)$
- ali: procjene dovoljno dobre za potrebe dimenzioniranja konstrukcije

Vršne vrijednosti modalnih odziva

- vršna vrijednost r_{n0} modalnog odziva $r_n(t)$: poznata iz spektra odziva
- podsjetimo se (str. 362.): $r_n(t) = r_n^{\text{st}} A_n(t)$
- uz vršnu vrijednost pseudoubrzanja A_n : $r_{n0} = r_n^{\text{st}} A_n$
- iznos A_n : poznat iz stvarnog (str. 178.) ili projektnog spektra (str. 211.)
- primijetite: gubimo vrijeme nastupa ekstrema r_{n0} (r_n^{st} ne ovisi o t)

Odziv na pobudu potresom: spektralna analiza

- funkciju $r_n(t)$ zamjenjujemo vršnom vrijednosti: skalarom r_{n0}
- predznak vršne vrijednosti r_{n0} : jednak predznaku r_n^{st}
- iznos A_n prema definiciji pozitivan: ordinata spektra pseudoubrzanja
- istodobni nastup ekstrema r_{n0} bilo kojeg modalnog odziva $r_n(t)$
- vrijeme nastupa: jednako trenutku nastupa ekstrema od $A_n(t)$
- i od $D_n(t)$ (jer je $A_n(t) = \omega_n^2 D_n(t)$ i ω_n^2 ne ovisi o t)
- odaberite n : uočite vrijeme pojave ekstrema (str. 392.)
- jednako vremenu nastupa ekstrema odziva za isti n (str. 393. i 394.)
- slično: usporedite ekstreme za isti n na str. 398. i 400. (slabi kat)

Pravila modalnih kombiniranja

- poznajemo vršne vrijednosti modalnih odziva r_{n0} ($n = 1, \dots, N$)
- problem: odrediti ekstrem (amplitudu) ukupnog odziva $r_0 = \max_t |r(t)|$
- razlog: vršne vrijednosti r_{n0} ali i r_0 nastupaju u različitim vremenima
- usporedite vremena nastupa na str. 393., 394. ili 400. za razne n

Odziv na pobudu potresom: spektralna analiza

- znači: za međusobno kombiniranje nužne aproksimacije
- gornja granica: zbroj apsolutnih vrijednosti svih ekstrema

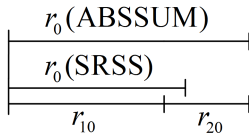
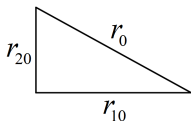
$$r_0 \leq \sum_{n=1}^N |r_{n0}|$$

- sve vršne vrijednosti istih predznaka i nastupaju istodobno
- izrazito konzervativna pretpostavka (previše na sigurnu stranu)
- nije ekonomična: rijetko se rabi za proračune konstrukcija
- naziv aproksimacije: pravilo apsolutne sume (ABSSUM)
- prijedlog E. Rosenbluetha (1951. godine):

$$r_0 \approx \sqrt{\sum_{n=1}^N r_{n0}^2}$$

Odziv na pobudu potresom: spektralna analiza

geometrijsko pojašnjenje:
(nije rastavljanje sila)



- naziv aproksimacije: pravilo drugog korijena sume kvadrata
- skraćeno SRSS (od engl. SQUARE ROOT OF SUM OF SQUARES)
- odlična aproksimacija za konstrukcije s dobro razmaknutim periodima
- loša procjena za konstrukcije s bliskim periodima
- česti primjer bliskih perioda: zgrada nesimetričnog tlocrta
- problem riješen aproksimacijom:

$$r_0 \approx \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^N \rho_{in} r_{i0} r_{n0}}$$

- naziv: pravilo potpune kvadratne kombinacije
- skraćeno CQC (od engl. COMPLETE QUADRATIC COMBINATION)

Odziv na pobudu potresom: spektralna analiza

- svaki od N^2 članova izraza jest korijen produkta:
 - vršnih odziva r_{i0} i r_{n0} pri titranju zgrade i -tim i n -tim oblikom i
 - KOEFICIJENTA KORELACIJE (međuvisnosti) tih oblika ρ_{in}
(vrijedi: $0 \leq \rho_{in} \leq 1$ i $\rho_{in} = 1$ za $i = n$)
- radi usporedbe s pravilom SRSS raspišimo izraz CQC u obliku:

$$r_0 \approx \sqrt{\sum_{n=1}^N r_{n0}^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^N \rho_{in} r_{i0} r_{n0}}$$

- prva suma (članovi za $i = n$): poput pravila SRSS, svi članovi pozitivni
- dvostruka suma (preostali članovi, za $i \neq n$): pozitivni ili negativni
- članovi negativni: ako su r_i^{st} i r_n^{st} suprotnih predznaka
- jednako predznacima od r_{i0} i r_{n0} jer je A_n prema definiciji pozitivan
- znači: iznos dvostruke sume smanjuje ili povećava iznos prve sume
- posljedica: CQC procjena odziva r_0 veća ili manja od SRSS procjene

Odziv na pobudu potresom: spektralna analiza

- ipak: dvostruka suma (pa i cijeli iznos) uvijek pozitivni
- prema definiciji koeficijenta korelacije: nekoliko CQC inačica
- danas najviše u uporabi (prema Der Kiureghianu):

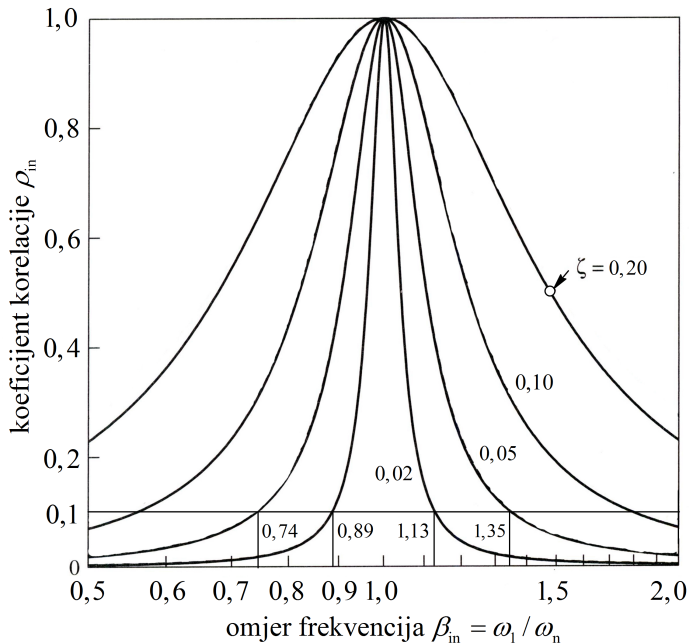
$$\rho_{in} = \frac{8\sqrt{\zeta_i\zeta_n}(\beta_{in}\zeta_i + \zeta_n)\beta_{in}^{3/2}}{(1 - \beta_{in}^2)^2 + 4\zeta_i\zeta_n\beta_{in}(1 + \beta_{in}^2) + 4(\zeta_i^2 + \zeta_n^2)\beta_{in}^2}$$

- vrijedi (uz $\beta_{in} = \omega_i/\omega_n$): $0 \leq \rho_{in} \leq 1$, $\rho_{in} = \rho_{ni}$ i $\rho_{in} = 1$ za $i = n$
- za dva oblika titranja istih perioda i prigušenja ρ_{in} također 1
- ako je isti iznos prigušenja za sve oblike titranja ($\zeta_i = \zeta_n = \zeta$):

$$\rho_{in} = \frac{8\zeta^2(1 + \beta_{in})\beta_{in}^{3/2}}{(1 - \beta_{in}^2)^2 + 4\zeta^2\beta_{in}(1 + \beta_{in}^2)}$$

- važno: iznos koeficijenta naglo opada ako su frekvencije razmaknute
- posebno izraženo za manje iznose prigušenja što je tipičan slučaj
- uočite usko područje oko $\beta_{in} = 1$ sa značajnim iznosima ρ_{in}

Odziv na pobudu potresom: spektralna analiza



Odziv na pobudu potresom: spektralna analiza

- primjer: za $\zeta = 5\%$ iznos $\rho_{in} > 0,1$ vrijedi tek za $1/1,35 \leq \beta_{in} \leq 1,35$
- ako je $\zeta = 2\%$ isti iznos vrijedi za još uže područje $1/1,13 \leq \beta_{in} \leq 1,13$
- za konstrukcije s dobro razmaknutim periodima: $\rho_{in} \approx 0$
- posljedica: svi članovi dvostruke sume (za $i \neq j$) iščezavaju (str. 407.)
- ostaje samo prva suma: izraz za CQC reducira se na izraz za SRSS
- potvrda tvrdnje da SRSS vrijedi samo za dobro razmaknute periode
- istaknimo: pravila SRSS i CQC temeljena na teoriji slučajnih titranja
- r_0 : srednja vrijednost ekstremnih odziva iz skupa potresnih zapisa
- dakle: pravila najbolje upotrijebiti uz PROJEKTNI (glatki) spektar
- razlog: određen kao medijan spektara većeg broja zapisa
- konzervativno: iz medijan plus jedna standardna devijacija
- pravila su PROCJENA: postoje pogreške koje nisu na sigurnu stranu
- iznos pogreške ovisi o: periodima, oblicima titranja i obliku spektra
- analizom velikog broja zgrada ustanovljena pogreška do 25%

Odziv na pobudu potresom: spektralna analiza

- najveća pogreška: pri ocjeni lokalnog odziva
- primjeri: katni pomak, poprečna sila ili moment u višim etažama
- pogreška raste ili pada ako rabimo nazubljeni spektar jednog zapisa

Pojašnjenje spektralne analize

- spektralna analiza: postupak za dinamički proračun konstrukcije
- iako je dinamičke prirode reducira se na niz statičkih proračuna
- za svaki promatrani oblik titranja:
 - provodimo statičku analizu konstrukcije opterećene silama $\mathbf{s}_n$
 - dobivamo statičke odzive r_n^{st} (primjerice moment u nekom presjeku)
 - množimo ih ordinatom spektra pseudoubrzanja A_n [ekstrem od $A_n(t)$!]
 - dobivamo vršni modalni odziv u nekom presjeku $r_{n0} = r_n^{\text{st}} A_n$
 - radi određivanja $A_n = \max_t |A_n(t)|$ nije potreban proračun u vremenu
- postupak jest dinamički: rabi periode, oblike titranja, prigušenje i
- dinamička svojstva potresnog zapisa (primjenom spektra odziva)
- proračuni u vremenu nisu potrebni: već obavljeni pri tvorbi spektra

Spektralna analiza višetažnih simetričnih zgrada

- promatramo višekratnice dvoosno simetričnog tlocrta
- pobuda: djelovanje potresa duž jedne osi simetrije
- VRŠNA vrijednost¹⁵ doprinosa n -tog oblika titranja: $r_n = r_n^{\text{st}} A_n$
- određivanje r_n^{st} : statičkim proračunom za opterećenje silama s_n
- izrazi za važnije r_n^{st} (primjerice u_{jn}^{st} , Δ_{jn}^{st} , V_{bn}^{st} , M_{bn}^{st}): tablica, str. 371.
- ukupni vršni modalni odzivi (u skladu s izrazom za r_n):

$$u_{jn} = u_{jn}^{\text{st}} A_n = \underbrace{(\Gamma_n / \omega_n^2) \phi_{jn}}_{\text{str. 371.}} \underbrace{\omega_n^2 D_n}_{A_n} = \Gamma_n \phi_{jn} D_n$$

$$\Delta_{jn} = \Delta_{jn}^{\text{st}} A_n = \underbrace{(\Gamma_n / \omega_n^2) (\phi_{jn} - \phi_{j-1,n})}_{\text{str. 371.}} \underbrace{\omega_n^2 D_n}_{A_n} = \Gamma_n (\phi_{jn} - \phi_{j-1,n}) D_n$$

$$V_{bn} = V_{bn}^{\text{st}} A_n = M_n^* A_n \quad M_{bn} = M_{bn}^{\text{st}} A_n = h_n^* M_n^* A_n$$

¹⁵ izostavimo indeks 0: umjesto r_{n0} pišemo samo r_n

Odziv na pobudu potresom: spektralna analiza

- vrijednost $D_n = D(T_n, \zeta_n)$: ordinata spektra pomaka za T_n i ζ_n
- vrijednost $A_n = A(T_n, \zeta_n)$: ordinata spektra pseudoubrzanja za T_n i ζ_n
- drugi način određivanja A_n : uz poznati D_n umnožak $\omega_n^2 D_n = A_n$
- odzivi su vršni jer su D_n i A_n vršne vrijednosti od $D_n(t)$ i $A_n(t)$
- statički doprinosi r_n^{st} konstantni u vremenu: ne određuju ekstrem
- slično: ekvivalentne statičke sile koje uzrokuju vršne modalne odzive

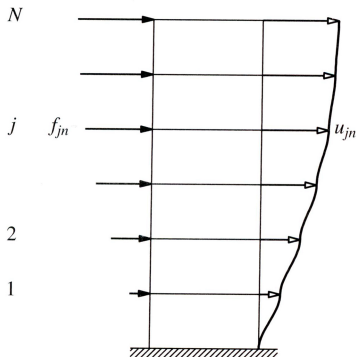
$$\mathbf{f}_n = \mathbf{s}_n A_n \quad f_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn} A_n$$

- vektor $\mathbf{f}_n = [f_{1n} \ \dots \ f_{Nn}]^T$: bočne sile koje uzrokuju vršne odzive
- u $\mathbf{f}_n(t) = \mathbf{s}_n A_n(t)$ [str. 361.] vrijednost $A_n(t)$ zamijenjena vršnom A_n
- prema tome: vektor $\mathbf{f}_n$ sadrži vršne vrijednosti vektora $\mathbf{f}_n(t)$
- sile $s_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn}$ (str. 368. i 388.) ne ovise o t : ne određuju ekstrem
- jedna statička analiza za svaki oblik titranja n
- praktična realizacija: rabi se izravno $\mathbf{f}_n$; rezultat odmah ukupni r_n

Odziv na pobudu potresom: spektralna analiza

- ako se rabi prvo $\mathbf{s}_n$: rezultat proračuna r_n^{st} ; potom ga množimo s A_n
- uporaba statičkog odziva r_n^{st} pedagoške prirode: naglašava činjenicu
- statičku analizu za opterećenje $\mathbf{s}_n$ potrebno provesti samo jednom
- unatoč tomu: odziv $r_n(t)$ dobivamo u funkciji vremena (u svakom t)

strop

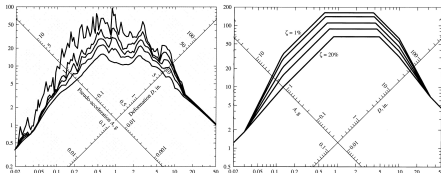


Odziv na pobudu potresom: spektralna analiza

- vršni doprinos r_n ukupnom odzivu r : statičkom analizom za sile $\mathbf{f}_n$
- smjer djelovanja komponenata f_{jn} : određen smjerom komponenata ϕ_{jn}
- za temeljni (prvi) oblik titranja: djeluju u istom smjeru (str. 414.)
- za više oblike titranja: sile mijenjaju smjer po visini zgrade
- primijetite: za određivanje u_{jn} i Δ_{jn} NIJE POTREBNA statička analiza
- tvrdnja proizlazi iz strukture formula na str. 412.
- dovoljno riješiti problem vlastitih vrijednosti, odrediti Γ_n i očitati D_n
- procjena vršne vrijednosti odziva: primjenom pravila CQC ili SRSS
- treba uključiti sve oblike titranja koji značajno utječu na odziv

Sažetak spektralne analize višetažnih simetričnih zgrada

- promatramo zgradu od N katova
- tlocrt: dvije okomite osi simetrije
- potres djeluje u smjeru jedne osi
- određen spektralnom krivuljom



Odziv na pobudu potresom: spektralna analiza

- ① odaberemo spektralnu krivulju i odredimo svojstva konstrukcije:
 - a) matricu masa $\mathbf{m}$ i bočne krutosti $\mathbf{k}$
 - b) procijenimo koeficijent relativnog prigušenja ζ
- ② izračunamo frekvencije ω_n ($T_n = 2\pi/\omega_n$) i oblike titranja ϕ_n (treba riješiti problem vlastitih vrijednosti $\mathbf{k}\phi_n = \omega_n^2\mathbf{m}\phi_n$)
- ③ izračunamo vršni odziv r_n pri titranju n -tim oblikom:
 - a) odredimo pomak i pseudoubrzanje D_n i A_n (za pripadne T_n i ζ_n očitamo ordinate spektra)
 - b) izračunamo pomake stropova i relativne pomake etaža (odredimo $\Gamma_n = \phi_n^T \mathbf{m} \ell / (\phi_n^T \mathbf{m} \phi_n)$, potom u_{jn} i Δ_{jn})
 - c) odredimo ekvivalentne statičke bočne sile $\mathbf{f}_n$ (opterećenje $\mathbf{f}_n = \mathbf{s}_n A_n$, komponente $f_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn} A_n$)
 - d) provedemo statički proračun za opterećenje $\mathbf{f}_n$ (odredimo r_n : reakcije i unutarnje sile u konstrukciji)
- ④ pravilom SRSS ili CQC procijenimo ukupni vršni iznos odziva r_0 (ako su periodi razmaknuti vrijedi SRSS, za bliske periode CQC)
 - korake 2–4 dovoljno napraviti za manji broj oblika titranja

-  Chopra, K. A.: DYNAMICS OF STRUCTURES, Theory and Application to Earthquake Engineering, Fourth Edition, Prentice Hall, New Jersey, 2007.
-  Penzien, J.; Clough, R.: DYNAMICS OF STRUCTURES, Second Edition (Revised), Computers & Structures, Inc., Berkeley, USA, 2003.
-  Humar, L. J.: DYNAMICS OF STRUCTURES, Second Edition, A. A. Balkema Publishers, Lisse, 2002.
-  Tedesco, W. J.; McDougal, G. W.; Ross, A. C.: STRUCTURAL DYNAMICS, Theory and Applications, Addison–Wesley, Menlo Park, California, 1999.
-  Mihanović, A.: DINAMIKA KONSTRUKCIJA, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 1995.
-  Čaušević, M.: DINAMIKA KONSTRUKCIJA, diskretni sustavi, Školska knjiga, Zagreb, 2005.



Paz, M.; Leigh, W.: STRUCTURAL DYNAMICS, Theory and Computation, Fifth Edition, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2004.



Den Hartog, J. P.: MECHANICAL VIBRATIONS, Third Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1947.