RIJEŠENI ZADACI 2015/2016.

Izradili studenti: F. Cvetko i Z. Čićin Angul

Napomena:

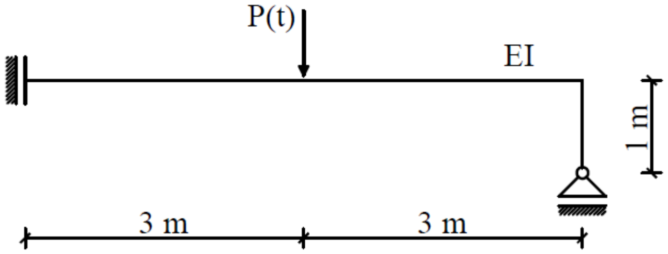
oznake nekih veličina u zadacima su različite u odnosu na oznake korištene u ak.godini 2016/2017., primjerice:

odziv:	$x \rightarrow u$
vlastiti period i frekvencija:	$T, \omega \rightarrow T_n, \omega_n$
vlastiti vektor:	$\{v\} \rightarrow \{\phi\}$
vektor modalnih koordinata:	$\{y\} \rightarrow \{q\}$

Zadatak 1. Potrebno je odrediti zakon prisilnih oscilacija točke A zadanog sustava koje će nastati zbog djelovanja sile $P(t) = 20 - 2t$ $[kN]$. Za prikazani sustav treba:

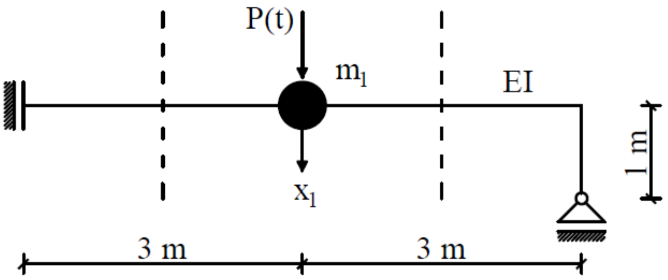
- odabrati proračunski model s jednim stupnjem slobode
- za odabrani model formulirati problem slobodnih oscilacija, odrediti frekvenciju i period oscilacija
- odrediti zakon prisilnih oscilacija točke A koristeći Duhamelov integral

Zadano je: fleksijska krutost $EI = 4 \cdot 10^4$ $[kN]$, masa grede $m_{gr} = 1{,}5$ $[t/m']$ i dodatno stalno opterećenje grede $\Delta g = 25$ $[kN/m']$.



Slika 1. Zadani sustav

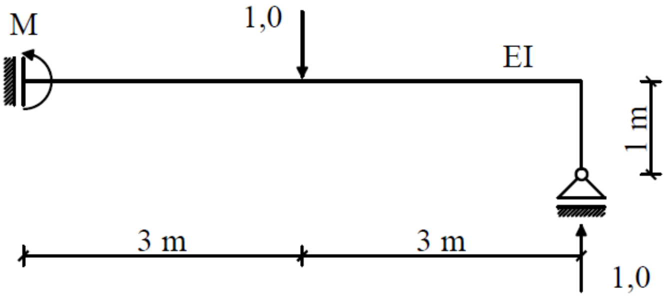
Odabiremo model s jednim stupnjem slobode. Pomak na mjestu i smjeru sile P(t).



Slika 2. Odabran proračunski model s jednim stupnjem slobode

Određivanje matrice fleksibilnosti (metoda sile)

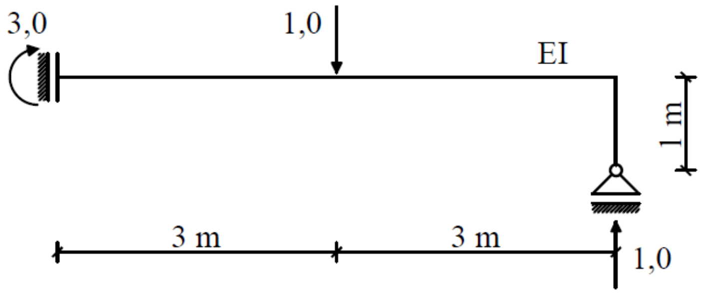
Postavljamo jediničnu silu na mjestu i smjeru odabranog stupnja slobode. Odredimo reakcije.



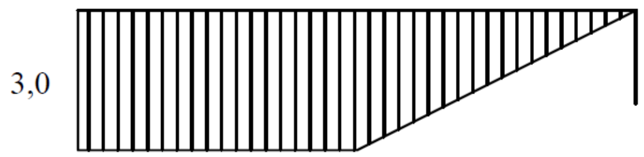
$\sum F_y = 0 \;\rightarrow\; R = 1{,}0\;kN$

$\sum M_A = 0 \;\rightarrow\; M + 1{,}0 \cdot 3 = 0 \;\rightarrow M = -3{,}0\;kNm$

Dobivamo:



Momentni dijagram:



$$\delta = \frac{1}{EI}\left(3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3\right) = \frac{36}{EI}$$

Možemo odrediti **krutost**:

$$k = \frac{EI}{36} = 1111{,}11\ kN/m$$

Određivanje mase

Koncentrirana masa koja otpada na odabrani stupanj slobode je:

$$m = 3 \cdot 1{,}5 + \frac{25}{10} \cdot 3 = 12\ t$$

Matematički problem slobodnih neprigušenih oscilacija za jedan stupanj slobode

$m\ddot{x} + kx = 0;\quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0;\quad$ gdje je $\omega^2 = \frac{k}{m}$ kružna frekvencija sustava.

Slijedi:

Kružna frekvencija i period:

Frekvencija je:

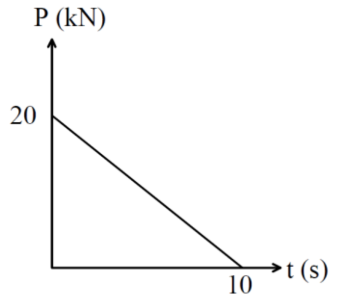
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1111{,}11}{12}} = 9{,}62\ r/s$$

Period:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}653\ s$$

Matematički problem prisilnih neprigušenih oscilacija

Graf sile u vremenu



$P(t) = 20 - 2t \; [kN]$

Rješenje preko Duhamelovog integrala

$$x(t) = \frac{1}{m\omega}\int_{\tau=0}^{\tau=t} P(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

$$x(t) = \frac{1}{m\omega}\int_{0}^{t} (20-2\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

$$x(t) = \frac{20}{m\omega}\int_{0}^{t} \sin\omega(t-\tau)\,d\tau - \frac{2}{m\omega}\int_{0}^{t} \tau\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

Integrale možemo riješiti posebno i na kraju ih zbrojiti.

Crveni integral:

$$\int_{0}^{t} \sin\omega(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{\omega}(\cos\omega(t-\tau))\Big|_0^t = \frac{1}{\omega} - \frac{\cos\omega t}{\omega}$$

Zeleni integral:

$$\int_{0}^{t} \tau\sin\omega(t-\tau)\,d\tau = \left\{\begin{matrix} u = \tau \\ du = d\tau \\ dv = \sin\omega(t-\tau)d\tau \\ v = \dfrac{1}{\omega}\cos\omega(t-\tau) \end{matrix}\right\} = \frac{\tau}{\omega}\cos\omega(t-\tau) - \int_{0}^{t}\frac{1}{\omega}\cos\omega(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \left[\frac{\tau}{\omega}\cos\omega(t-\tau) + \frac{1}{\omega^2}\sin\omega(t-\tau)\right]\Big|_0^t = \frac{t}{\omega} - \frac{1}{\omega^2}\sin\omega t$$

Odziv sustava je:

$$x(t) = \frac{20}{m\omega^2}(1-\cos\omega t) - \frac{2}{m\omega^2}\left(t - \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$$

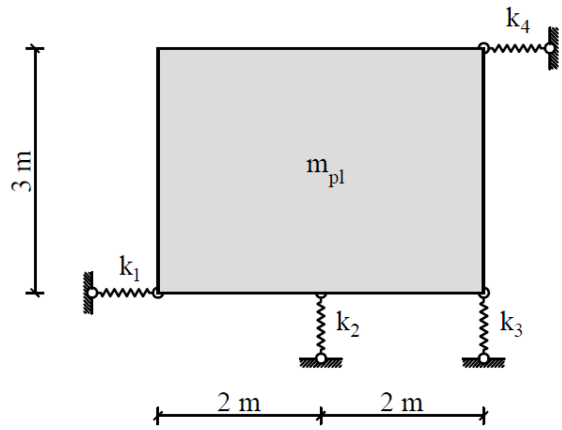
$$x(t) = 0{,}018(1-\cos 9{,}62t) - 0{,}0018\left(t - \frac{1}{9{,}62}\sin 9{,}62t\right)$$

Pomak točke A za t=10 s iznosi:

$x(10) = 0{,}00687\;m = 0{,}687\;cm$

Zadatak 2. Apsolutna kruta ploča mase $m_{pl} = 4\ [t/m^2]$ spojena je oprugama krutosti $k_1 = 1000\ [kN/m']$, $k_2 = 1100\ [kN/m']$, $k_3 = 2000\ [kN/m']$, $k_4 = 1200\ [kN/m']$. Za prikazani sustav treba:

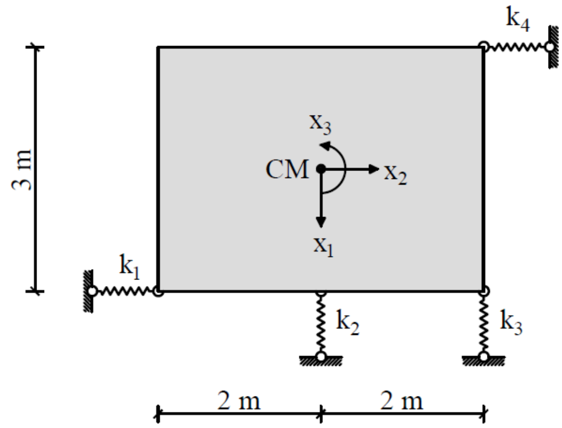
- odabrati dinamičke stupnjeve slobode
- formulirati matematički model slobodnih oscilacija
- odrediti vlastite frekvencije, periode i vektore slobodnih oscilacija koristeći iterativni postupak Stodola. Nacrtati vlastite oblike oscilacija.



Slika 1. Zadani sustav

Dinamički stupnjevi slobode

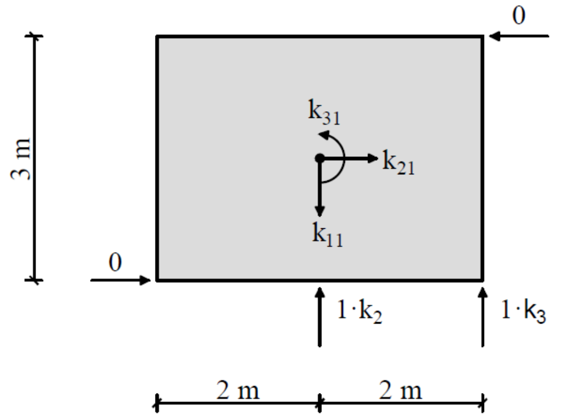
Dvije translacije i rotacija u centru masu ploče.



Slika 2. Odabrani dinamički stupnjevi slobode

Određivanje matrice krutosti

1. $x_1 = 1{,}0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0$

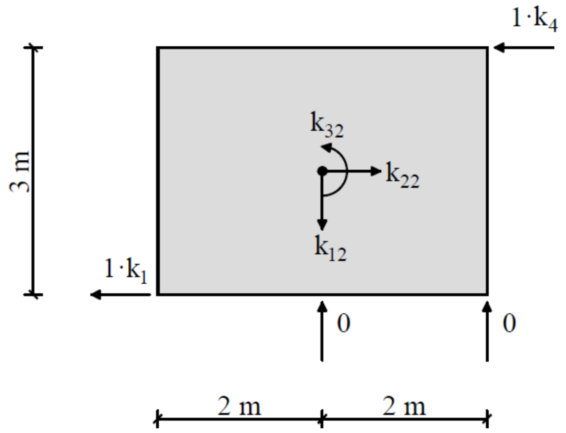


$k_{11} = 1 \cdot k_2 + 1 \cdot k_3 = 3100\ kN$

$k_{21} = 0$

$k_{31} = -1 \cdot k_3 \cdot 2 = -4000\ kNm$

2. $x_1 = 0;\ x_2 = 1{,}0;\ x_3 = 0$

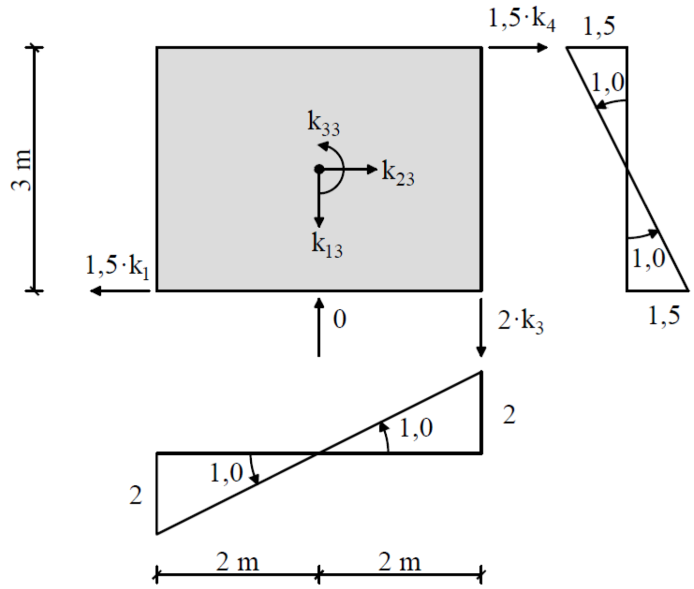


$k_{12} = 0$

$k_{22} = 1 \cdot k_4 + 1 \cdot k_1 = 2200\ kN$

$k_{32} = 1 \cdot k_1 \cdot 1{,}5 - 1 \cdot k_4 \cdot 1{,}5 = -300\ kNm$

3. $x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 1{,}0$



$k_{13} = -2 \cdot k_3 = -4000\ kN$

$$k_{23} = -1{,}5 \cdot k_4 + 1{,}5 \cdot k_1 = -300\ kN$$

$$k_{33} = 1{,}5 \cdot k_4 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot k_3 \cdot 2 + 1{,}5 \cdot k_4 \cdot 1{,}5 = 12950\ kNm$$

Određivanje matrice masa

$m_{uk} = m_{pl} \cdot 4 \cdot 3 = 48\ t$

$I_{CM} = \frac{1}{12} m_{uk}(a^2 + b^2) = 100\ tm^2$

Konačno, matrica krutosti, matrica fleksibilnosti i matrica masa su:

$$K = \begin{bmatrix} 3100 & 0 & -4000 \\ 0 & 2200 & -300 \\ -4000 & -300 & 12950 \end{bmatrix}$$

$$F = K^{-1} = \begin{bmatrix} 71/132100 & 3/132100 & 22/132100 \\ 3/132100 & 4829/10568000 & 93/5284000 \\ 22/132100 & 93/5284000 & 341/2642000 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 48 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

Matematički model slobodnih oscilacija

$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$

$\{x\} = \{v\} \sin \omega t$

$\{\ddot{x}\} = -\omega^2 \{v\} \sin \omega t$

Prvi oblik

Iteracija po Stodoli (postupak iteracije za dobivanje najniže vlastite frekvencije)

$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$

$[K]^{-1}/ \quad ([K] - \omega^2[M])\{v\} = \{0\}$

$([I] - \omega^2[F][M])\{v\} = \{0\}$

$[F][M]\{v\} = \frac{1}{\omega^2}\{v\}$

$[D] = [F][M]$

$\lambda = \frac{1}{\omega^2}$

$[D]\{v\} = \lambda\{v\}$

$[D]\{v_1^*\}^{(n)} = \lambda_1^*\{v_1^*\}^{(n+1)}$

Pretpostavimo prvi vlastiti vektor kao

$$\{v_1^*\}^{(0)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Izračunamo dinamičku matricu $[D]$:

$$[D] = [F][M] = \begin{bmatrix} 0,0258 & 0,0011 & 0,0167 \\ 0,0011 & 0,0219 & 0,0018 \\ 0,0080 & 0,0008 & 0,0129 \end{bmatrix}$$

Računamo:

$$[D]\{v_1^*\}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,0258 & 0,0011 & 0,0167 \\ 0,0011 & 0,0219 & 0,0018 \\ 0,0080 & 0,0008 & 0,0129 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,044 \\ 0,025 \\ 0,022 \end{Bmatrix} = 0,044 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,569 \\ 0,499 \end{Bmatrix}$$

Sada imamo prvi vlastiti vektor nakon prve iteracije:

$$\lambda_1^* = 0,044 \quad \text{i} \quad \{v_1^*\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,569 \\ 0,499 \end{Bmatrix}$$

Sad ponavljamo postupak s novim vlastitim vektorom:

$$[D]\{v_1^*\}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,0258 & 0,0011 & 0,0167 \\ 0,0011 & 0,0219 & 0,0018 \\ 0,0080 & 0,0008 & 0,0129 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,569 \\ 0,499 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,035 \\ 0,014 \\ 0,015 \end{Bmatrix} = 0,035 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,416 \\ 0,430 \end{Bmatrix}$$

Sada imamo prvi vlastiti vektor nakon druge iteracije:

$$\lambda_1^* = 0,035 \quad \text{i} \quad \{v_1^*\}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,416 \\ 0,430 \end{Bmatrix}$$

Postupak ponavljamo do zadovoljavajuće konvergencije. U Excelu se razmjerno lako može provesti iterativni postupak.

			1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
			1,000	0,569	0,416	0,328	0,273	0,237	0,213	0,197	0,187	0,180	0,176	0,173	0,171	0,169
			1,000	0,499	0,430	0,416	0,412	0,411	0,410	0,410	0,410	0,409	0,409	0,409	0,409	0,409
0,026	0,001	0,017	0,044	0,035	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033
0,001	0,022	0,002	0,025	0,014	0,011	0,009	0,008	0,007	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006
0,008	0,001	0,013	0,022	0,015	0,014	0,014	0,014	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013
		λ	0,044	0,035	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033

Nakon 13. iteracije dobivamo prvi vlastiti vektor.

$$\lambda_1 = 0,033$$

$$\{v_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,169 \\ 0,409 \end{Bmatrix}$$

Prvu vlastitu frekvenciju i period određujemo iz izraza:

$$\lambda = \frac{1}{{\omega_1}^2} \rightarrow \omega_1 = 5,52\ r/s$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 1,138\ s$$

Treći oblik

Iteracija po Stodoli (postupak iteracije za dobivanje najviše vlastite frekvencije)

$[M]^{-1}/ \quad [M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$

$-\omega^2\{v\}\sin\omega t + [M]^{-1}[K]\{v\}\sin\omega t = \{0\}$

$-\omega^2\{v\}\sin\omega t + [D]\{v\}\sin\omega t = \{0\}$

$[D] = [M]^{-1}[K]$

$\lambda = \omega^2$

$[D]\{v\}\sin\omega t = \lambda\{v\}\sin\omega t$

$[D]\{v\} = \lambda\{v\}$

$[D]\{v_3^*\}^{(n)} = \lambda_3^*\{v_3^*\}^{(n+1)}$

Pretpostavimo treći vlastiti vektor kao

$$\{v_3^*\}^{(0)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Izračunamo dinamičku matricu $[D]$:

$$[D] = [M]^{-1}[K] = \begin{bmatrix} 64{,}583 & 0 & -83{,}333 \\ 0 & 45{,}833 & -6{,}250 \\ -40{,}000 & -3{,}000 & 129{,}500 \end{bmatrix}$$

Računamo:

$$[D]\{v_3^*\}^{(0)} = \begin{bmatrix} 64{,}583 & 0 & -83{,}333 \\ 0 & 45{,}833 & -6{,}250 \\ -40{,}000 & -3{,}000 & 129{,}500 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -18{,}750 \\ 39{,}583 \\ 86{,}500 \end{Bmatrix} = 86{,}500\begin{Bmatrix} -0{,}217 \\ 0{,}458 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Sada imamo treći vlastiti vektor nakon prve iteracije:

$$\lambda_3^* = 86{,}500 \quad \text{i} \quad \{v_1^*\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} -0{,}217 \\ 0{,}458 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Sad ponavljamo postupak s novim vlastitim vektorom:

$$[D]\{v_1^*\}^{(1)} = \begin{bmatrix} 64{,}583 & 0 & -83{,}333 \\ 0 & 45{,}833 & -6{,}250 \\ -40{,}000 & -3{,}000 & 129{,}500 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -0{,}217 \\ 0{,}458 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -97{,}333 \\ 14{,}724 \\ 136{,}798 \end{Bmatrix} = 136{,}798\begin{Bmatrix} -0{,}712 \\ 0{,}108 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Sada imamo treći vlastiti vektor nakon druge iteracije:

$$\lambda_3^* = 136{,}798 \quad \text{i} \quad \{v_3^*\}^{(2)} = \begin{Bmatrix} -0{,}712 \\ 0{,}108 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Postupak ponavljamo do zadovoljavajuće konvergencije.

			1,000	-0,217	-0,712	-0,820	-0,840	-0,843	-0,843	-0,843	-0,843	-0,843	-0,843	-0,843	-0,843	-0,843
			1,000	0,458	0,108	-0,008	-0,041	-0,050	-0,052	-0,053	-0,053	-0,053	-0,053	-0,053	-0,053	-0,053
			1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
64,583	0,000	-83,333	-18,750	-97,333	-129,285	-136,301	-137,561	-137,768	-137,798	-137,801	-137,801	-137,801	-137,801	-137,801	-137,801	-137,801
0,000	45,833	-6,250	39,583	14,724	-1,317	-6,633	-8,123	-8,531	-8,643	-8,675	-8,683	-8,686	-8,686	-8,687	-8,687	-8,687
-40,000	-3,000	129,500	86,500	136,798	157,637	162,331	163,209	163,363	163,389	163,393	163,394	163,394	163,394	163,394	163,394	163,394
		λ	86,500	136,798	157,637	162,331	163,209	163,363	163,389	163,393	163,394	163,394	163,394	163,394	163,394	163,394

Nakon 13. iteracije dobivamo treći vlastiti vektor.

$$\lambda_3 = 163{,}394$$

$$\{v_3\} = \begin{Bmatrix} -0{,}843 \\ -0{,}053 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Treću vlastitu frekvenciju i period određujemo iz izraza:

$$\lambda_3 = {\omega_3}^2 \rightarrow \omega_3 = 12{,}78\, r/s$$

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = 0{,}492\ s$$

Drugi oblik

Drugi oblik možemo odrediti iz uvjeta ortogonalnosti.

$$\{v_1\} \perp \{v_2\} \quad \text{i} \quad \{v_3\} \perp \{v_2\}$$

$$\{v_1\}^T [M] \{v_2\} = 0 \quad \text{i} \quad \{v_3\}^T [M] \{v_2\} = 0$$

Dobivamo dvije jednadžbe s tri nepoznanice. Da bismo rješili problem, jednu od njih pretpostavimo, npr. $v_{12} = 1{,}0$. Tada možemo odrediti preostale dvije iz sustava jednažbi i po potrebi normirati vektor.

$$\{v_1\}^T [M] \{v_2\} = 0$$

$$\{1 \quad 0{,}169 \quad 0{,}409\} \begin{bmatrix} 48 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \{v_2\} = 0$$

$$48 v_{12} + 8{,}12 v_{22} + 40{,}9 v_{32} = 0$$

$$\{v_3\}^T [M] \{v_2\} = 0$$

$$\{-0{,}843 \quad -0{,}053 \quad 1\} \begin{bmatrix} 48 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \{v_2\} = 0$$

$$-40{,}48 v_{12} - 2{,}55 v_{22} + 100 v_{32} = 0$$

Ako pretpostavimo da je $v_{12} = 1$ dobivamo sljedeći sustav jednadžbi:

$$8{,}12 v_{22} + 40{,}9 v_{32} = -48$$

$$-2{,}55 v_{22} + 100 v_{32} = 40{,}48$$

Iz sustava jednadžbi dobivamo:

$$v_{22} = -7{,}045$$
$$v_{32} = 0{,}225$$

Normiramo vrijednosti prema v_{22} i slijedi drugi vlastiti vektor:

$$\{v_2\} = \begin{Bmatrix} -0{,}142 \\ 1 \\ -0{,}032 \end{Bmatrix}$$

Da bismo dobili drugu vlastitu frekvenciju, množimo dinamičku matricu $[D] = [M]^{-1}[K]$** i vlastiti vektor:

$$[D]\{v_2\} = \begin{bmatrix} 64{,}583 & 0 & -83{,}333 \\ 0 & 45{,}833 & -6{,}250 \\ -40{,}000 & -3{,}000 & 129{,}500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0{,}142 \\ 1 \\ -0{,}032 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6{,}507 \\ 46{,}033 \\ -1{,}460 \end{Bmatrix} = 46{,}033 \begin{Bmatrix} -0{,}142 \\ 1 \\ -0{,}032 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Dobivamo:} \qquad \lambda_2 = 46{,}033$$

Sada drugu vlastitu frekvenciju i period određujemo iz izraza:

$\lambda_2 = {\omega_2}^2 \rightarrow \omega_2 = 6{,}78\ r/s$

$T_2 = \dfrac{2\pi}{\omega_2} = 0{,}926\ s$

**postupak možemo provesti i s dinamičkom matricom $[D] = [F][M]$

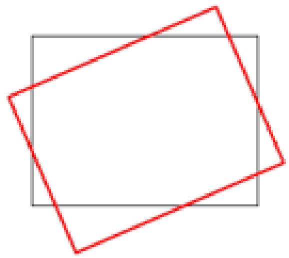
Konačno,

1. vlastiti oblik, frekvencija i period

$\{v_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}169 \\ 0{,}409 \end{Bmatrix}$

$\omega_1 = 5{,}52\ r/s$

$T_1 = 1{,}138\ s$

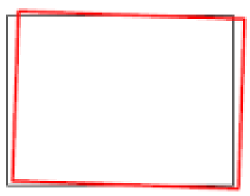


2. vlastiti oblik, frekvencija i period

$\{v_2\} = \begin{Bmatrix} -0{,}142 \\ 1 \\ -0{,}032 \end{Bmatrix}$

$\omega_2 = 6{,}78\ r/s$

$T_2 = 0{,}926\ s$

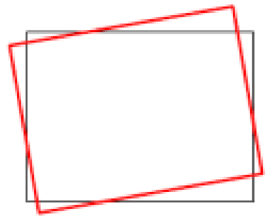


3. vlastiti oblik, frekvencija i period

$\{v_3\} = \begin{Bmatrix} -0{,}843 \\ -0{,}053 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$\omega_3 = 12{,}78\ r/s$

$T_3 = 0{,}492\ s$



Napomena: vlastiti vektori vektori se mogu odrediti i na drugi način, pomoću „matrice čišćenja“.

Nakon što odredimo prvi vlastiti vektor, odredimo matricu čišćenja za drugi oblik iz izraza:

$$[S_1] = [I] - \frac{\{v_1\}\{v_1\}^T[M]}{\{v_1\}^T[M]\{v_1\}}$$

Izračunamo novu dinamičku matricu koja je „očišćena“ od prvog oblika:

$$[D_1] = [D][S_1]$$

S tom novom dinamičkom matricu provodimo već prikazan iterativni postupak i dobivamo direktno drugi vlastiti vektor, frekvenciju i period.

Za treći vlastiti oblik ponovimo radimo matricu čišćenja za treći oblik:

$$[S_2] = [S_1] - \frac{\{v_2\}\{v_2\}^T[M]}{\{v_2\}^T[M]\{v_2\}}$$

Izračunamo novu dinamičku matricu koja je „očišćena“ od prvog i drugog oblika:

$$[D_2] = [D][S_2]$$

S tom dinamičkom matricu opet provodimo već prikazan iterativni postupak i dobivamo treći vlastiti vektor, frekvenciju i period.

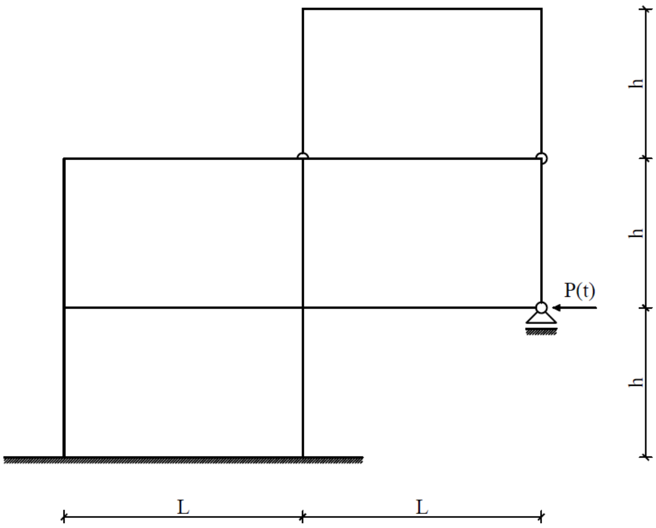
Zadatak 3. Stupovi prikazanog okvira imaju presjek 25/25 [cm], a za grede se može pretpostaviti da su apsolutno krute. Stalno opterećenje greda je $G = 20\ [kN/m']$, a korisno $Q = 15\ [kN/m']$. Masu elementa zanemariti. Za zadani sustav treba:

a) Odabrati dinamičke stupnjeve slobode. Odrediti matricu mase, matricu krutosti i matricu fleksibilnosti. Odrediti vlastite frekvencije, periode i vlastite vektore slobodnih oscilacija.
b) Odrediti odziv sustava (funkcije pomaka dinamičkih stupnjeva slobode) koji će nastati uslijed djelovanja sile $P(t) = 10 - 5t\ [kN](0\ s \leq t \leq 10\ s)$

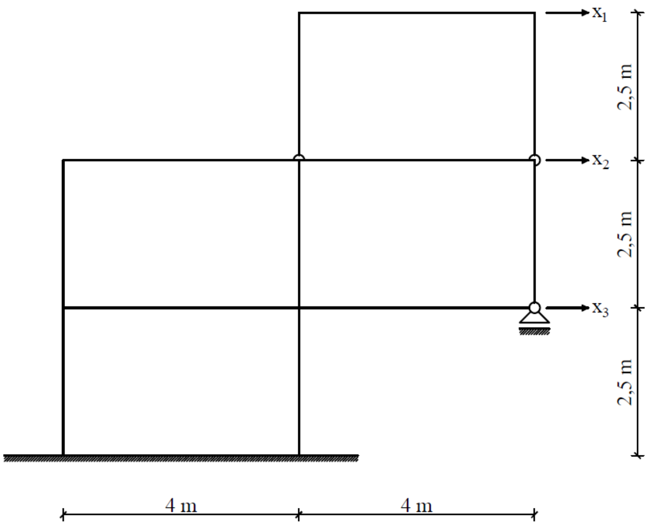
$h = 2{,}5\ [m]$
$L = 4\ [m]$
$E = 2{,}5 \cdot 10^7\ [kN/m^2]$

$$I = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}25^3}{12} = \frac{1}{3072}\ [kNm^2]$$

$EI = 9765{,}625\ [kNm^2]$



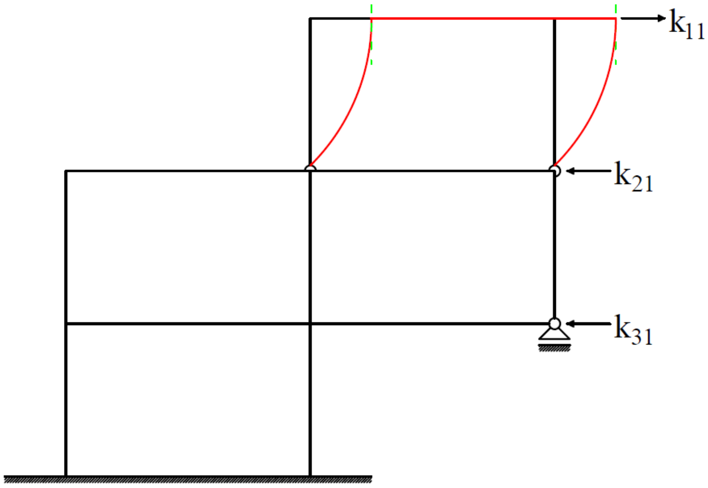
Slika 1. Zadani sustav



Slika 2. Odabrani dinamički stupnjevi slobode

Određivanje matrice krutosti

1. $x_1 = 1{,}0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0$

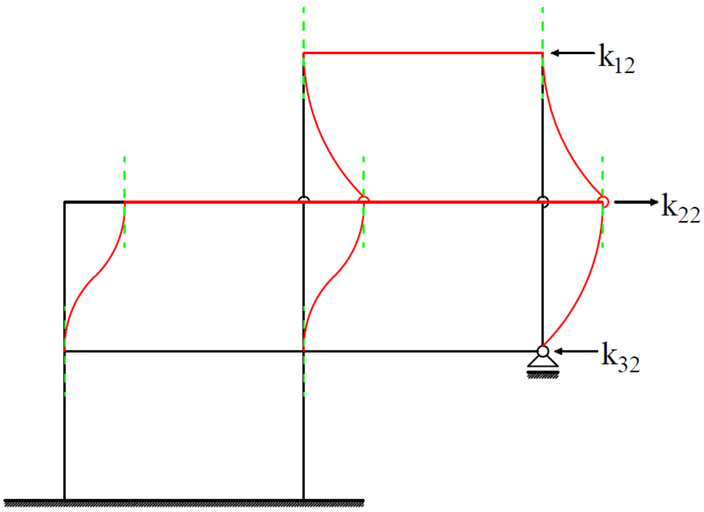


$$k_{11} = \frac{3EI}{h^3} + \frac{3EI}{h^3} = \frac{6EI}{h^3}\ kN$$

$$k_{21} = -\frac{3EI}{h^3} - \frac{3EI}{h^3} = -\frac{6EI}{h^3}\ kN$$

$$k_{31} = 0\ kN$$

2. $x_1 = 0;\ x_2 = 1{,}0;\ x_3 = 0$

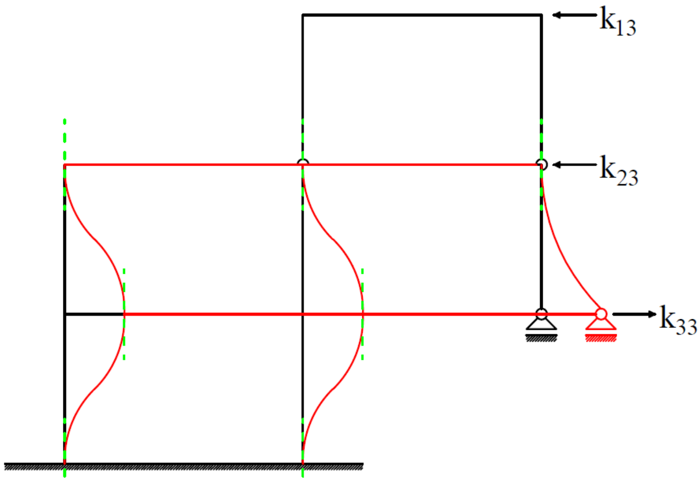


$$k_{12} = -\frac{3EI}{h^3} - \frac{3EI}{h^3} = -\frac{6EI}{h^3}\ kN$$

$$k_{22} = \frac{3EI}{h^3} + \frac{3EI}{h^3} + \frac{12EI}{h^3} + \frac{12EI}{h^3} + \frac{3EI}{h^3} = \frac{33EI}{h^3}\ kN$$

$$k_{32} = -\frac{3EI}{h^3} - \frac{12EI}{h^3} - \frac{12EI}{h^3} = -\frac{27EI}{h^3}\ kN$$

$3.\ x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 1{,}0$



$k_{13} = 0\ kN$

$$k_{23} = -\frac{3EI}{h^3} - \frac{12EI}{h^3} - \frac{12EI}{h^3} = -\frac{27EI}{h^3}\ kN$$

$$k_{33} = \frac{3EI}{h^3} + \frac{12EI}{h^3} + \frac{12EI}{h^3} + \frac{12EI}{h^3} + \frac{12EI}{h^3} = \frac{51EI}{h^3}\ kN$$

Određivanje matrice masa

$$m_1 = \frac{G}{g} \cdot 4 + 0{,}3 \cdot \frac{Q}{g} \cdot 4 = 9{,}99\ t$$

$$m_2 = \frac{G}{g} \cdot 8 + 0{,}3 \cdot \frac{Q}{g} \cdot 8 = 19{,}98\ t$$

$$m_3 = \frac{G}{g} \cdot 8 + 0{,}3 \cdot \frac{Q}{g} \cdot 8 = 19{,}98\ t$$

Konačno, matrica krutosti, matrica fleksibilnosti i matrica masa su:

$$K = \frac{EI}{h^3}\begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -6 & 42 & -27 \\ 0 & -27 & 51 \end{bmatrix} = 520{,}83 \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -6 & 33 & -27 \\ 0 & -27 & 51 \end{bmatrix}$$

$$F = K^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}00047111 & 0{,}00015111 & 0{,}000080 \\ 0{,}00015111 & 0{,}00015111 & 0{,}000080 \\ 0{,}000080 & 0{,}000080 & 0{,}000080 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 9{,}99 & 0 & 0 \\ 0 & 19{,}98 & 0 \\ 0 & 0 & 19{,}98 \end{bmatrix}$$

Matematički model slobodnih oscilacija

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

$$\{x\} = \{v\} \sin \omega t$$

$$\{\ddot{x}\} = -\omega^2 \{v\} \sin \omega t$$

Nakon što smo odredili matricu krutosti, matricu fleksibilnosti i matricu masa, određivanje vlastitih vektora, frekvencija i perioda slijedi po već prikazanom postupku. **(Zadatak 2.)**

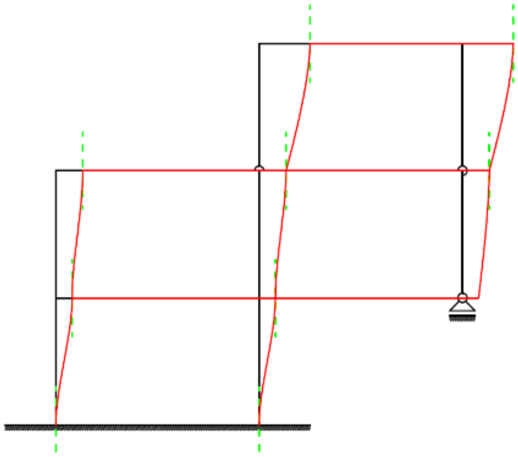
Rješenja:

1. vlastiti oblik, frekvencija i period

$$\{v_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}530 \\ 0{,}316 \end{Bmatrix}$$

$\omega_1 = 12{,}11\ r/s$

$T_1 = 0{,}519\ s$

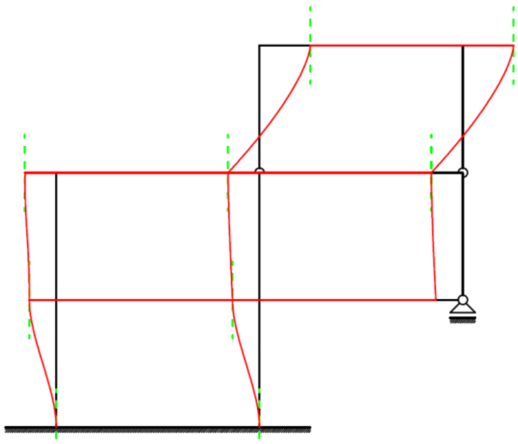


2. vlastiti oblik, frekvencija i period

$$\{v_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}624 \\ -0{,}534 \end{Bmatrix}$$

$\omega_2 = 22{,}53\ r/s$

$T_2 = 0{,}279\ s$

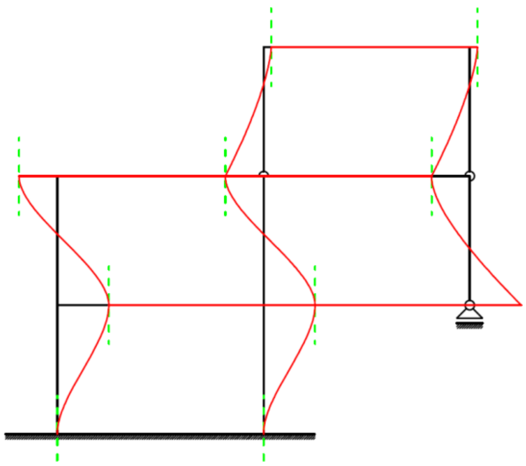


3. vlastiti oblik, frekvencija i period

$$\{v_3\} = \begin{Bmatrix} 0{,}150 \\ -0{,}736 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$\omega_3 = 42{,}98\ r/s$

$T_3 = 0{,}146\ s$



Matematički problem prisilnih neprigušenih oscilacija sustava s više stupnjeva slobode

Modalna analiza

$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{P(t)\}$

$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{P\}f(t)$

Funkcije pomaka možemo prikazati superpozicijom:

$\{x\} = [\phi]\{y\}$

$\{\ddot{x}\} = [\phi]\{\ddot{y}\}$

gdje je $[\phi]$ modalna matrica ili matrica vlastitih vektora.

$\{v_n\}^T / \quad [M][\phi]\{\ddot{y}\} + [K][\phi]\{y\} = \{P\}f(t)$

$\{v_n\}^T[M][\phi]\{\ddot{y}\} + \{v_n\}^T[K][\phi]\{y\} = \{P\}f(t)$

Iz uvjeta ortogonalnosti vlastitih vektori vrijedi da je

$\{v_i\}^T[M]\{v_j\} = 0$

$\{v_i\}^T[K]\{v_j\} = 0 \quad$ za $\quad i \neq j$

$\{v_n\}^T[M]\{v_n\}\ddot{y}_n + \{v_n\}^T[K]\{v_n\}y_n = \{v_n\}^T\{P\}f(t)$

$M_n\ddot{y}_n + K_n y_n = P_n f(t)$

$\omega_n^2 = \dfrac{K_n}{M_n}$

Konačni odziv sustava – superpozicija pojedinih modalnih oblika.

$\{x\} = [\phi]\{y\} = \{v_1\} \cdot y_1 + \{v_2\} \cdot y_2 + \{v_3\} \cdot y_3$

Potrebno je rješiti tri neovisne diferencijalne jednadžbe u modalnim koordinatama:

$M_n\ddot{y}_n + K_n y_n = P_n f(t) \quad$ za $\quad n = 1,2,3$

Opće rješenje za poznatu funkciju *f(t)* može se odrediti analitički ili pomoću Duhamelovog integrala.

U zadatku,

vektor pobude iznosi

$\{P\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$

a funkcija pobude je

$f(t) = 10 - 5t\ [kN]$

Odredimo modalne mase, modalne krutosti i modalnu silu.

$$M_1 = \{v_1\}^T[M]\{v_1\} = \{1 \quad 0{,}530 \quad 0{,}316\}\begin{bmatrix} 9{,}99 & 0 & 0 \\ 0 & 19{,}98 & 0 \\ 0 & 0 & 19{,}98 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}530 \\ 0{,}316 \end{Bmatrix} = 17{,}615$$

$$M_2 = \{v_2\}^T[M]\{v_2\} = \{1 \quad -0{,}624 \quad -0{,}534\}\begin{bmatrix} 9{,}99 & 0 & 0 \\ 0 & 19{,}98 & 0 \\ 0 & 0 & 19{,}98 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}624 \\ -0{,}534 \end{Bmatrix} = 23{,}468$$

$$M_3 = \{v_3\}^T[M]\{v_3\} = \{0{,}150 \quad -0{,}736 \quad 1\}\begin{bmatrix} 9{,}99 & 0 & 0 \\ 0 & 19{,}98 & 0 \\ 0 & 0 & 19{,}98 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0{,}150 \\ -0{,}736 \\ 1 \end{Bmatrix} = 31{,}049$$

$$K_1 = \{v_1\}^T[K]\{v_1\} = \{1 \quad 0{,}530 \quad 0{,}316\}\begin{bmatrix} 3125{,}0 & -3125{,}0 & 0 \\ -3125{,}0 & 17187{,}5 & -14062{,}5 \\ 0 & -14062{,}5 & 26562{,}5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}530 \\ 0{,}316 \end{Bmatrix} = 2585{,}1$$

$$K_2 = \{v_2\}^T[K]\{v_2\} = \{1 \quad -0{,}624 \quad -0{,}534\}\begin{bmatrix} 3125{,}0 & -3125{,}0 & 0 \\ -3125{,}0 & 17187{,}5 & -14062{,}5 \\ 0 & -14062{,}5 & 26562{,}5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}624 \\ -0{,}534 \end{Bmatrix} = 11921{,}0$$

$$K_3 = \{v_3\}^T[K]\{v_3\} = \{0{,}150 \quad -0{,}736 \quad 1\}\begin{bmatrix} 3125{,}0 & -3125{,}0 & 0 \\ -3125{,}0 & 17187{,}5 & -14062{,}5 \\ 0 & -14062{,}5 & 26562{,}5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0{,}150 \\ -0{,}736 \\ 1 \end{Bmatrix} = 57372{,}4$$

$$P_1 = \{v_1\}^T\{P\} = \{1 \quad 0{,}530 \quad 0{,}316\}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = -0{,}316$$

$$P_2 = \{v_2\}^T\{P\} = \{1 \quad -0{,}624 \quad -0{,}534\}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = 0{,}534$$

$$P_3 = \{v_3\}^T\{P\} = \{0{,}150 \quad -0{,}736 \quad 1\}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = -1$$

Rješavamo diferencijalnu jednadžbu – analitički:

$M_n\ddot{y}_n + K_n y_n = P_n(10 - 5t)$ za $\quad n = 1,2,3$

$y_n = y_{n,hom} + y_{n,part}$

Homogeno rješenje je poznato:

$y_{n,hom} = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t$

Partikularno rješenje ima oblik kao i funkcija prisile:

$y_{n,part} = C + Dt$

$\ddot{y}_{n,part} = 0$

Partikularno rješenje uvrštavamo u jednadžbu:

$$K_n C + K_n D t = 10P_n - P_n 5t$$

$$C = \frac{10P_n}{K_n}$$

$$D = -\frac{5P_n}{K_n}$$

$$y_{n,part} = \frac{10P_n}{K_n} - \frac{5P_n}{K_n} t$$

Ukupno rješenje je zbroj homogenog i partikularnog rješenja.

$$y_n = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{10P_n}{K_n} - \frac{5P_n}{K_n} t$$

Konstante određujemo za homogene početne uvjete (pomak i brzina su jednaki nula za t=0)

$$y_n = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{10P_n}{K_n} - \frac{5P_n}{K_n} t$$

$$\dot{y}_n = -A_n \omega_n \sin \omega_n t + B_n \, \omega_n \cos \omega_n t - \frac{5P_n}{K_n}$$

Dobivaju se vrijednosti:

$$A_n = -\frac{10P_n}{K_n}$$

$$B_n = \frac{5P_n}{K_n \omega_n}$$

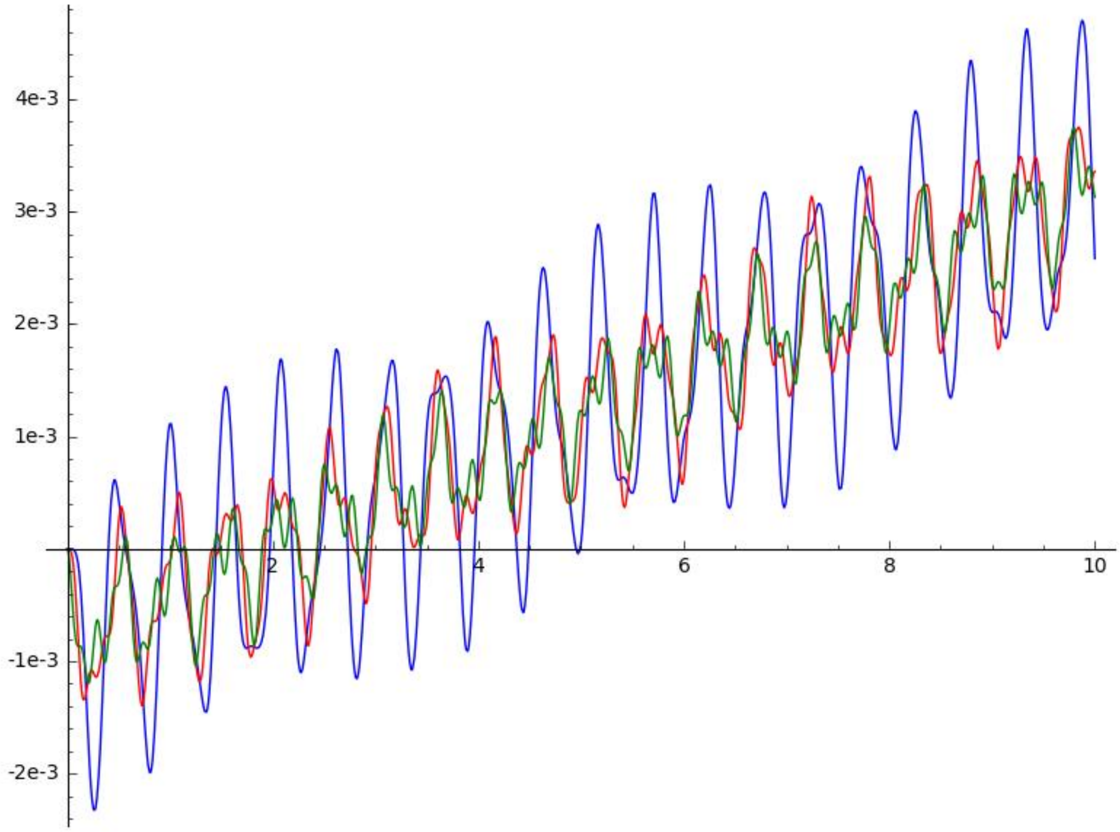
Rješenje u općem obliku je:

$$y_n = -\frac{10P_n}{K_n} \cos \omega_n t + \frac{5P_n}{K_n \omega_n} \sin \omega_n t + \frac{10P_n}{K_n} - \frac{5P_n}{K_n} t$$

Nakon što uvrstimo vrijednosti za pojedine oblike, odziv sustava dobivamo transformacijom natrag u x-koordinate kao:

$\{x\} = [\phi]\{y\}$

x1,x2,x3



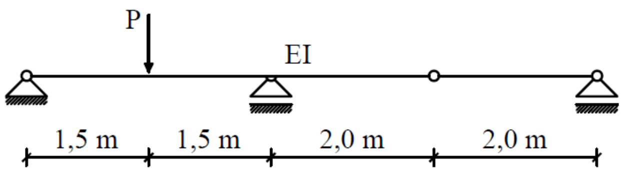
Zadatak 4. Potrebno je odrediti zakon slobodnih oscilacija točke A zadanog sustava koje će nastati ako se u jednom trenutku naglo ukloni sila $P = 45\ [kN]$. Za prikazani sustav treba:

- odabrati proračunski model s jednim stupnjem slobode

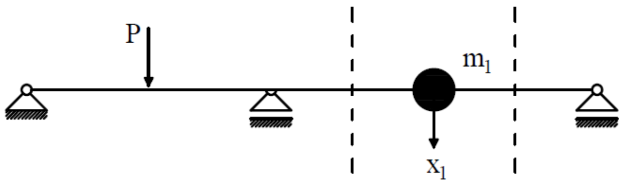
- za odabrani model formulirati problem slobodnih oscilacija, odrediti frekvenciju i period oscilacija

- odrediti zakon slobodnih oscilacije točke A.

Zadano je: fleksijska krutost $EI = 4{,}5 \cdot 10^4\ [kNm^2]$, masa grede $m_{gr} = 3\ [t/m']$ i dodatno stalno opterećenje grede $\Delta g = 20\ [kN/m']$.



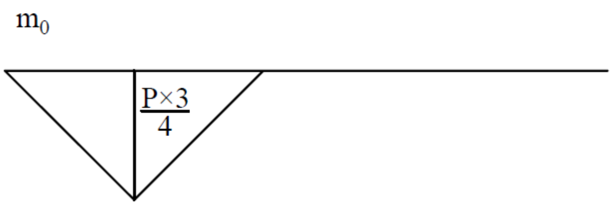
Slika 1. Zadani sustav

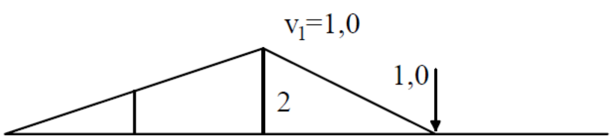


Slika 2. Odabrani stupanj slobode

Masa

$m = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10\ t$





Metoda sile

$$\delta = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{3 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\right] = \frac{20}{3EI}$$

$$k = \frac{1}{\delta} = \frac{3EI}{20} = 6750\ kN/m$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{6750}{10}} = 25{,}98\ r/s$$

$$x_{st} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{P \cdot 3}{4} \cdot 1{,}5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{P \cdot 3}{4} \cdot 1{,}5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\right] = \frac{9}{8000}\ m$$

$$x_0 = \frac{9}{8000}\ m$$

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$$

$$\dot{x}(0) = 0 \rightarrow -A\omega\sin(0) + B\omega\cos(0) = 0 \rightarrow B\omega = 0 \rightarrow B = 0$$

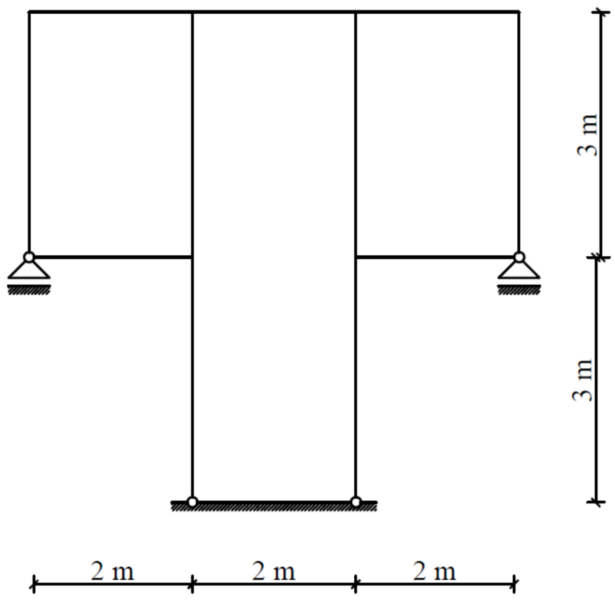
$$x(0) = x_0 \rightarrow A\cos(0) + B\sin(0) = x_0 \rightarrow A = x_0$$

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) = \frac{9}{8000}\cos(25{,}98t)$$

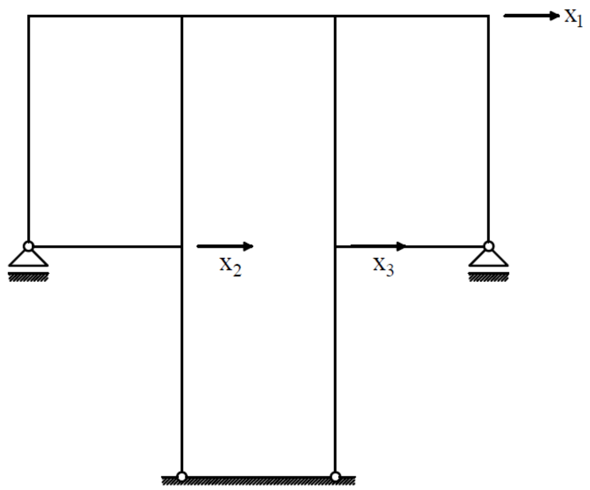
Zadatak 5. Prikazani okvirni sustav ima stupove fleksijske krutosti $EI = 4{,}5 \cdot 10^4\ [kNm^2]$, a za grede se može pretpostaviti da su apsolutno krute. Masa stupova može se zanemariti, masa greda iznosi $m_{gr} = 3\ [t/m']$, a dodatno stalno opterećenje na gredama $\Delta g = 15\ [kN/m']$. Za prikazani sustav treba:

- odabrati dinamičke stupnjeve slobode

- definirati matematički model slobodnih oscilacija i odrediti frekvencije, periode i vlastite vektore primjenom uvjeta simetrije sustava. Nacrtati vlastite oblike oscilacija.

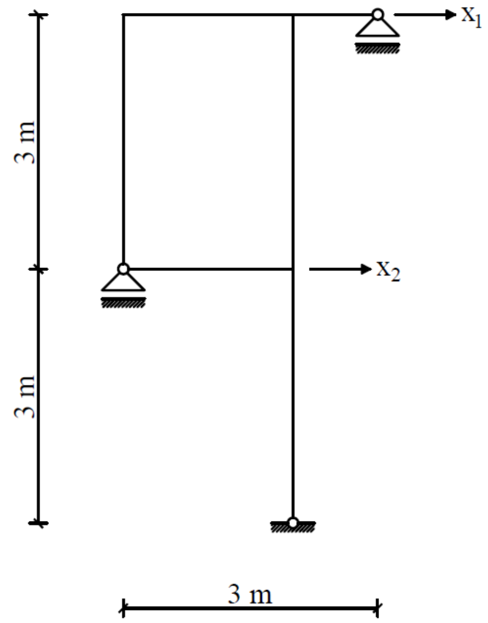


Slika 1. Zadani sustav



Slika 2. Odabrani stupnjevi slobode

NESIMETRIJA:

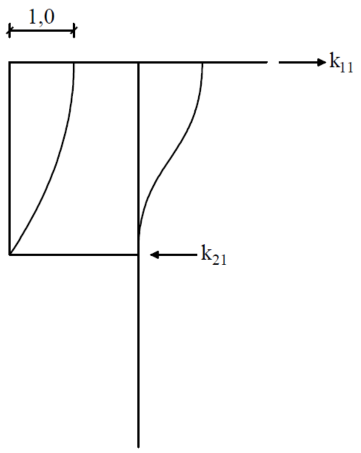


$$m_1 = 3 \cdot 3 + \frac{15}{10} \cdot 3 = 13{,}5\ t$$

$$m_2 = 3 \cdot 2 + \frac{15}{2} \cdot 2 = 9\ t$$

$$M = \begin{bmatrix} 13{,}5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

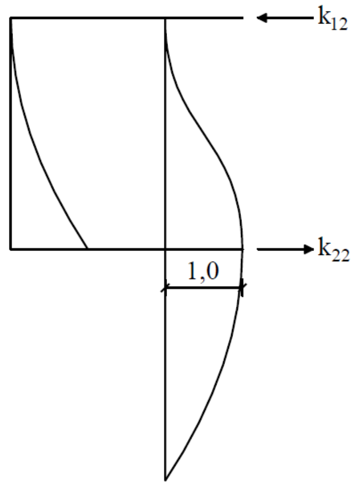
$x_1 = 1;\ x_2 = 0$



$$k_{11} = \frac{3EI}{3^3} + \frac{12EI}{3^3} = \frac{5EI}{5}$$

$$k_{21} = -\frac{3EI}{3^3} - \frac{12EI}{3^3} = -\frac{5EI}{9}$$

$x_1 = 0;\ x_2 = 1$



$$k_{12} = -\frac{3EI}{3^3} - \frac{12EI}{3^3} = -\frac{5EI}{9}$$

$$k_{22} = \frac{3EI}{3^3} + \frac{3EI}{3^3} + \frac{12EI}{3^3} = \frac{2EI}{3}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} EI$$

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{0\}$$

$$\{X\} = \{v\}\sin\omega t$$

$$\{\ddot{X}\} = -\omega^2\{v\}\sin\omega t$$

$$-\omega^2[M]\{v\}\sin\omega t - [K]\{v\}\sin\omega t = 0$$

$$([K] - \omega^2[M])\{v\} = 0$$

$$\lambda = \omega^2$$

$$\det([K] - \lambda[M])\{v\} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 25000 - 13{,}5\lambda & -25000 \\ -25000 & 30000 - 9\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$1{,}25 \cdot 10^8 - 225000\lambda - 405000\lambda + 121{,}5\lambda^2$$

$$121{,}5\lambda^2 - 630000\lambda + 1{,}25 \cdot 10^8$$

$$\lambda_1 = 206{,}64 \rightarrow \omega_1 = 14{,}37\ r/s$$

$$\lambda_2 = 4945{,}5 \rightarrow \omega_2 = 70{,}32\ r/s$$

vlastiti vektori:

$$\begin{vmatrix} 22210{,}36 & 25000 \\ -25000 & 28140{,}2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$v_{11} = 1,0$

$v_{21} = 0,889$

$v_1 = \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 0,889 \end{Bmatrix}$

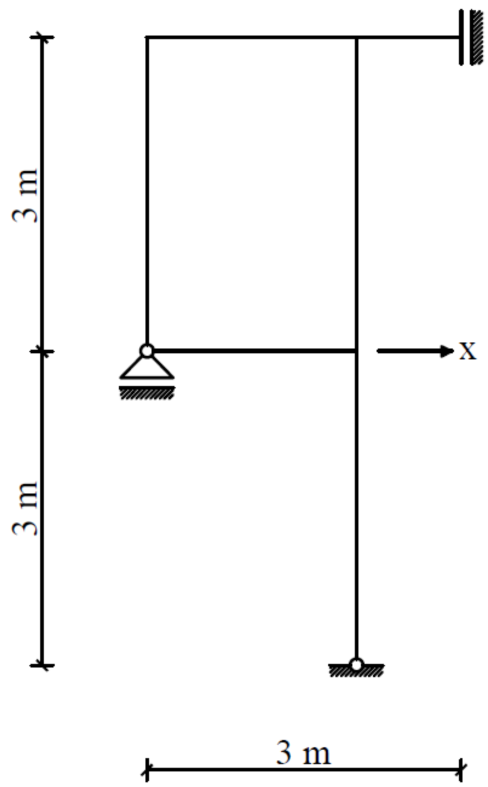
$\begin{vmatrix} -41764,25 & -25000 \\ -25000 & -14509,5 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{Bmatrix} = 0$

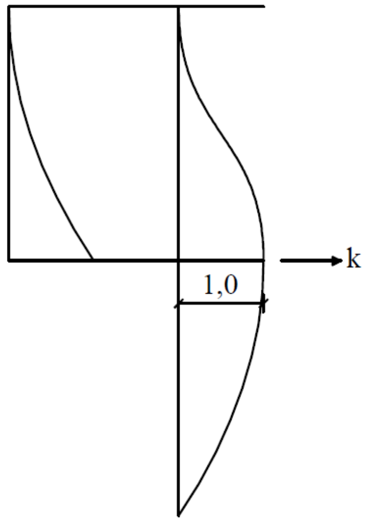
$v_{12} = 1,0$

$v_{22} = -1,67$

$v_2 = \begin{Bmatrix} 1,0 \\ -1,67 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,598 \\ 1,0 \end{Bmatrix}$

SIMETRIJA:





$$k = \frac{3EI}{3^3} + \frac{3EI}{3^3} + \frac{12EI}{3^3} = \frac{2EI}{3} = 30000\ kN/m$$

$$\omega = \sqrt{\frac{35000}{9}} = 57{,}74\ r/s$$

$$v = 1{,}0$$

PROŠIRENJE NA POČETNI SUSTAV:

$$\omega_1 = 14{,}37\ r/s$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0{,}437\ s$$

$$\{v_1\} = \begin{Bmatrix} 1{,}0 \\ 0{,}889 \\ 0{,}889 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = 57{,}74\ r/s$$

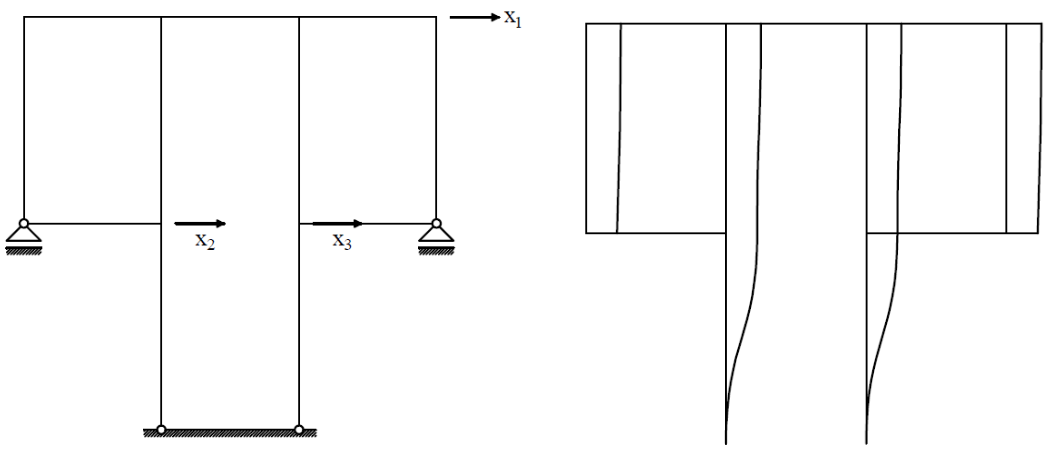
$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0{,}109\ s$$

$$\{v_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1{,}0 \\ -1{,}0 \end{Bmatrix}$$

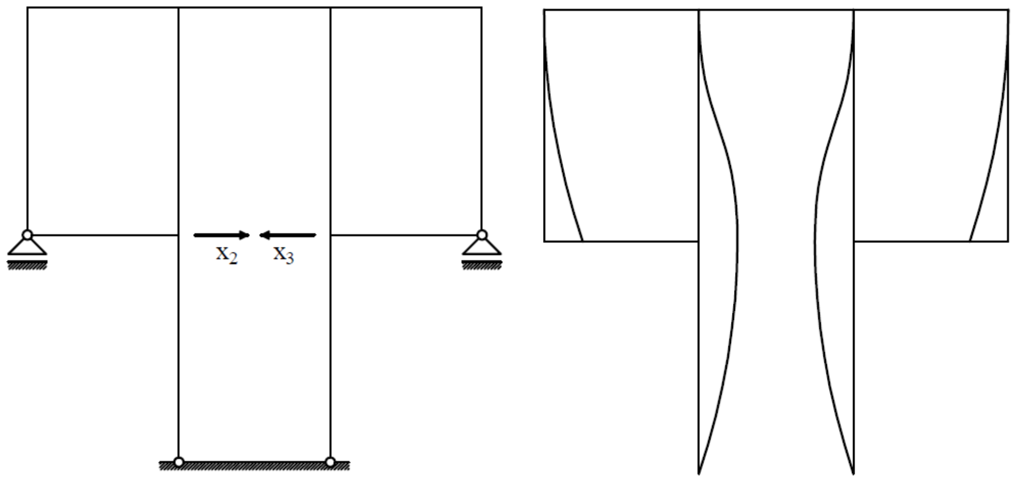
$$\omega_3 = 70{,}32\ r/s$$

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = 0{,}089\ s$$

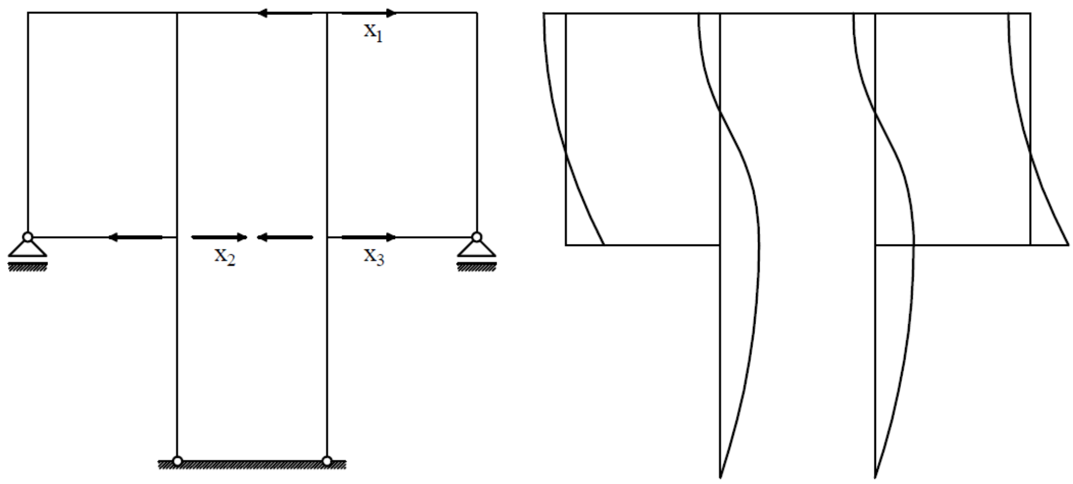
$$\{v_3\} = \begin{Bmatrix} -0{,}598 \\ 1{,}0 \\ 1{,}0 \end{Bmatrix}$$



Slika 3. Prvi oblik



Slika 4. Drugi oblik



Slika 5. Treći oblik