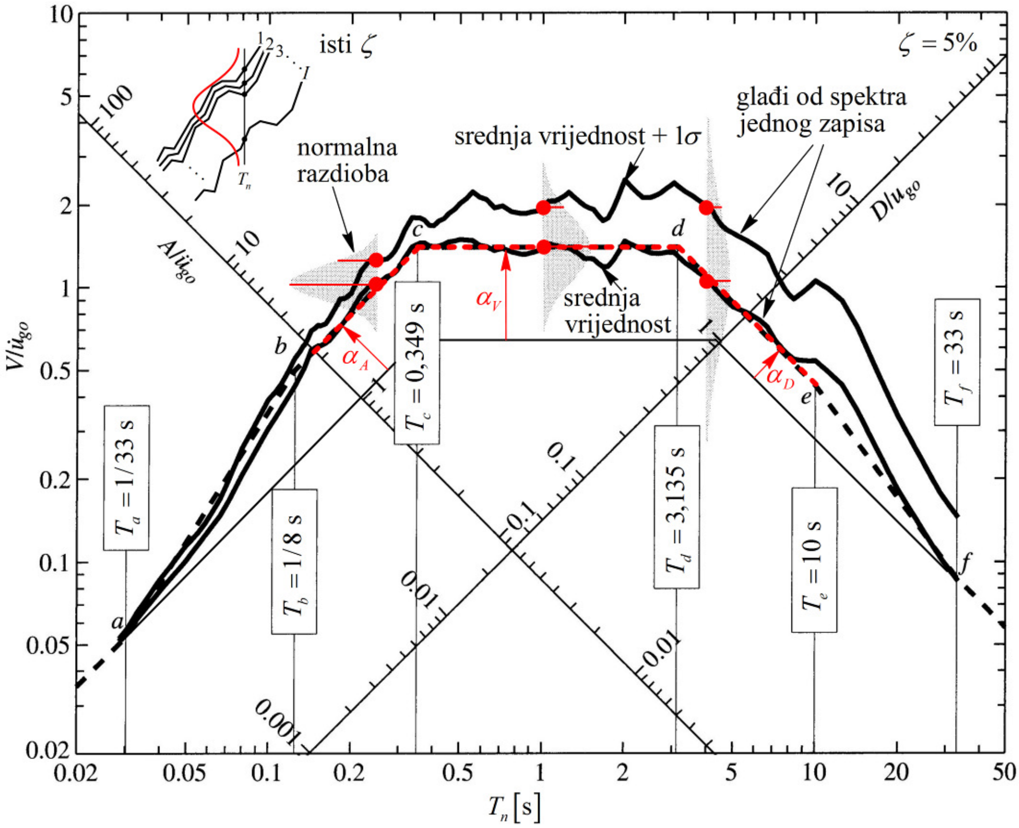
Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet
Zavod za tehničku mehaniku
Katedra za statiku, dinamiku i stabilnost konstrukcija

DINAMIKA KONSTRUKCIJA
s uvodom u potresno inženjerstvo

Skripta

prof. dr. sc. Damir Lazarević
doc. dr. sc. Marta Šavor Novak
doc. dr. sc. Mario Uroš



Zagreb, 2018.

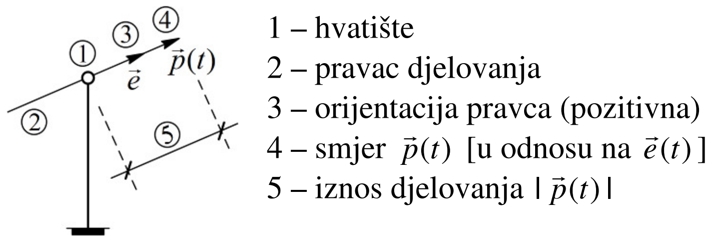
SADRŽAJ

UVOD

Dinamika konstrukcija je dio tehničke mehanike u kojem se analizira GIBANJE konstrukcija pod utjecajem PROMJENJIVIH djelovanja.

$$\vec{p}(t) \rightarrow \underbrace{\vec{a}(t) \rightarrow m\vec{a}(t)}_{\text{gibanje konstrukcije}} \tag{1}$$

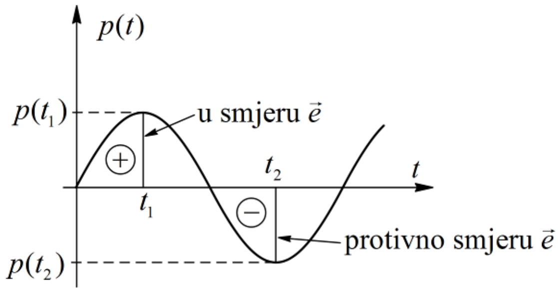
U dinamici konstrukcija su hvatište, pravac i orijentacija djelovanja fiksni (slika 1.) pa jedinični vektor položaja $\vec{e}$ ($|\vec{e}|=1$) ne ovisi o vremenu t. Smjer i iznos djelovanja su određeni skalarnom funkcijom $p(t)$ (slika 2.).



Slika 1.: Pojam sile

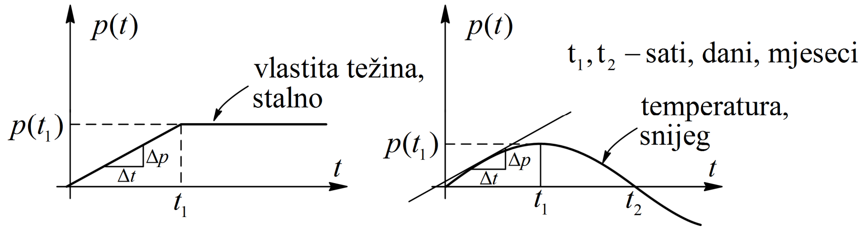
Prema tome, dinamičko djelovanje možemo zapisati kao:

$$\vec{p}(t) = p(t)\vec{e} \tag{2}$$

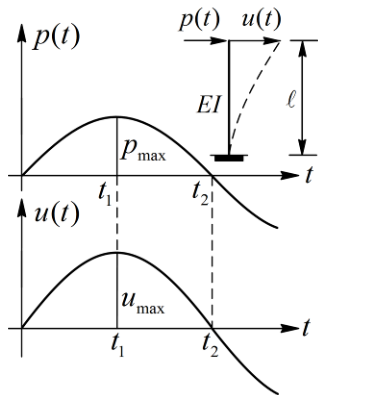


Slika 2.: Funkcija promjenjivog djelovanja

Teorijski sva su opterećenja promjenjiva. Primjerice, vlastita težina, stalno opterećenje, temperatura i snijeg mogu imati velik maksimalni iznos $p_{\text{maks}}(t)$, ali opterećenje se sporo mijenja odnosno $\dot{p} = dp/dt$ je malo (slika 3.). Tada su ubrzanja $\vec{a}(t)$ i sile inercije $m\vec{a}(t)$ male pa je dovoljan statički pristup.



Slika 3.: Primjer sporoga prirasta opterećenja (primjeren statički pristup)



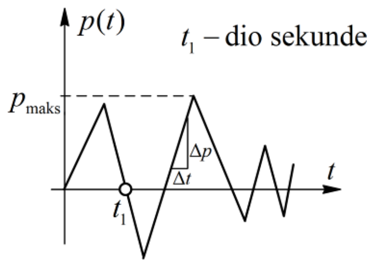
Slika 4.: Primjer određivanja maksimalnog pomaka vrha stupa zbog dinamičke pobude

Ako promatramo konzolu visine ℓ, pomak vrha možemo odrediti kao $u(t) = p(t)/k$, uz $k = 3EI/\ell^3$. Funkcije opterećenja i progiba su oblikovno iste, a razlikuju se do na konstantu $1/k$. Prema tome, u trenutku maksimalnog opterećenja p_{maks} sigurno je i pomak najveći, u_{maks} (slika 4.). To znači da je dovoljno poznavati maksimalno opterećenje, a onda statičkim pristupom možemo odrediti maksimalni pomak kao $u_{\text{maks}} = p_{\text{maks}}/k$. Ovisnost o vremenu nije potrebna. Poopćenje prema metodi pomaka jest:

$$\mathbf{Ku}(t) = \mathbf{p}(t) \rightarrow \mathbf{Ku}_{\text{maks}} = \mathbf{p}_{\text{maks}} \rightarrow \mathbf{u}_{\text{maks}} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}_{\text{maks}} \qquad (3)$$

U statici prešutno podrazumijevamo maksimalne vrijednosti pa pišemo $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}$.

Kod pokretnoga djelovanja: vjetra, potresa, rada strojeva, udara, eksplozija i slično, brzi prirast opterećenja ($\dot{p}$ veliko) ne znači nužno veliko ubrzanje $\vec{a}(t)$ i silu inercije $m\vec{a}(t)$. Primjerice, udar puščanoga zrna u zid konstrukcije (mali p_{maks}) ne može pobuditi građevinu na gibanje jer je potrebna jaka pobuda. Velike mase nije lako pokrenuti i ubrzati.



Slika 5.: Primjer djelovanja s brzim prirastom opterećenja

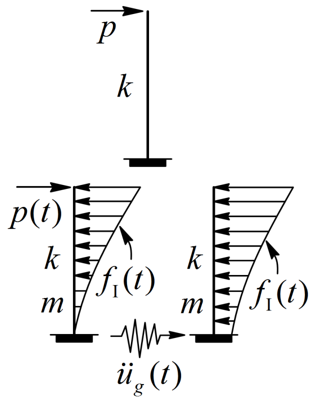
Kod zgrada, značajni dinamički učinci nastaju ako rezultanta dinamičkog opterećenja iznosi više od 10% težine zgrade. Za uobičajenu peterokatnicu površine $A = 620\ \text{m}^2$, vlastita težina i stalni teret iznose 42000 kN pa je rezultanta priličnih 4200 kN. Primjeri malih masa i velikih ubrzanja nisu neuobičajeni:

- bolid formule 1: 0,7t; Airbus: 60t; Space Shuttle: 110t
- uzlijetanje i povratak Space Shuttlea: 3g
- naglo kočenje bolida formule 1: 5g
- povratak Apolla 16: 7,2g
- poniranje borbenog zrakoplova: 12g
- sudari (teške ozljede ili smrt): 50g

Iako pri jakim potresima vršno ubrzanje tla iznosi skromnih 0,4g, zbog velikih masa koje se mogu pobuditi, nastaju značajne sile inercije. Zapamtite:

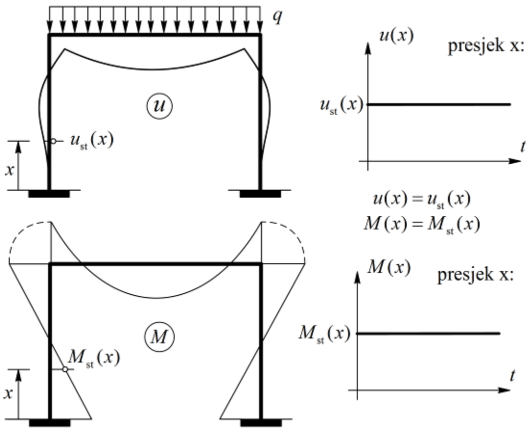
VELIKA masa × MALO ubrzanje = ZNAČAJNA sila inercije!!!

Razlike prema statičkom proračunu su sljedeće:

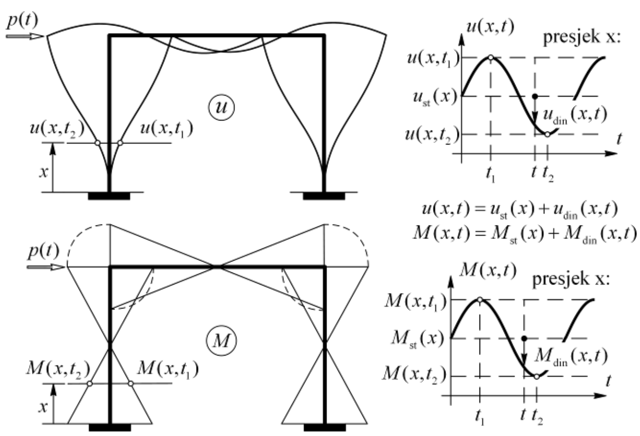


Slika 6.: Razlike prema statičkom proračunu – dodatne sile inercije

- javljaju se brzina i ubrzanje konstrukcije te dodatne sile: sile inercije i sile prigušenja (slika 6.);
- slabo su poznata opterećenja (vjetar, potres,...);
- nejasne su pojave koje uzrokuju prigušenje;
- potreban je manji broj nepoznanica;
- složeniji su postupci proračuna, iako je za praktične potrebe nekad dovoljan kvazistatički pristup (vršne dinamičke vrijednosti se procjenjuju na temelju statičkih sila); lokalno se dobiju i do 15 puta veće vrijednosti od statičkih (globalno najčešće do 3 puta);
- dinamika često nije intuitivna, interpretacija je ponekad teška;
- pomaci, unutarnje sile i naprezanja su funkcije vremena (slika 7. vs. slika 8.)

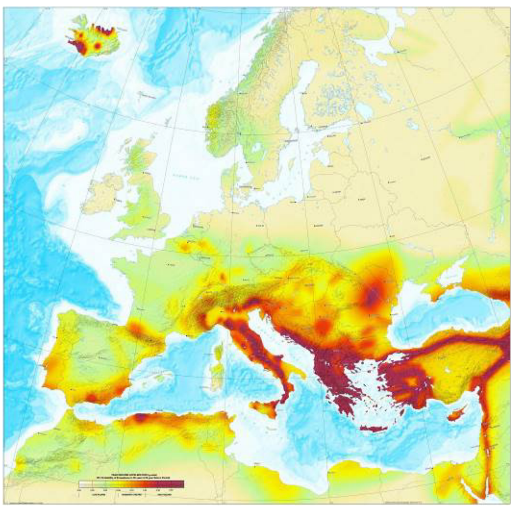


Slika 7.: Statički proračun – pomaci, unutarnje sile i naprezanja se ne mijenjaju u vremenu

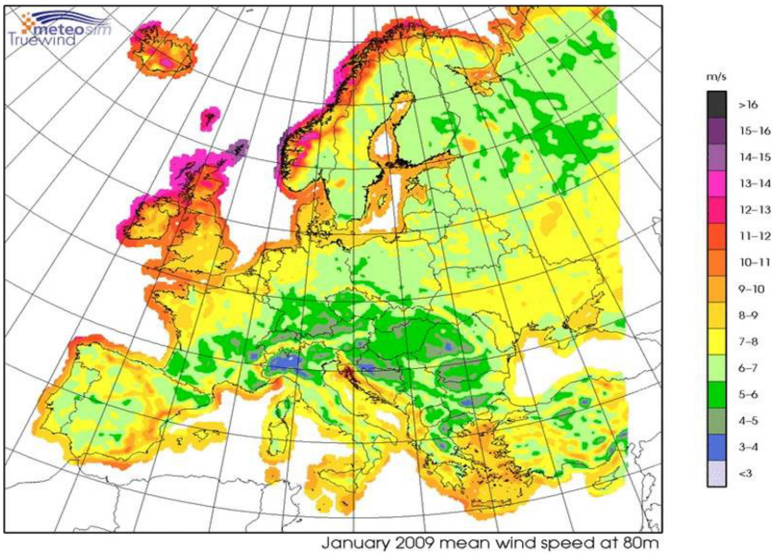


Slika 8.: Dinamički proračun – pomaci, unutarnje sile i naprezanja funkcije vremena

Motivacija: Republika Hrvatska je područje jakih potresa i vjetrova!

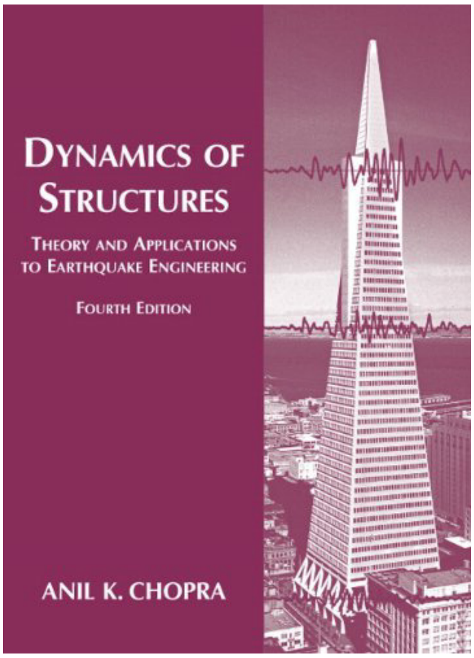


Slika 9.: Potresna karta Europe – vršna ubrzanja tla
izvor: http://www.ija.csic.es/gt/earthquakes/



Slika 10.: Karta brzina vjetrova u Europi
izvor: http://windtrends.meteosimtruewind.com/

Osnovna literatura upotrijebljena pri izradi ove skripte je: Anil K. Chopra: *Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering*, Fourth Edition, Prentice Hall, New Jersey, 2011. Ostala literatura nalazi se na kraju bilješki.



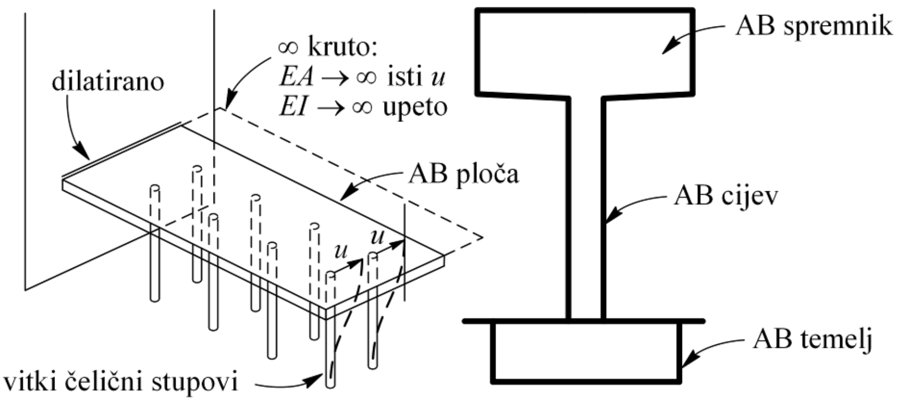
I. Sustav s jednim stupnjem slobode

1. Formulacija problema i postupci rješavanja sustava s jednim stupnjem slobode

1.1. Uvodni primjeri

Uvod u dinamiku konstrukcija započet ćemo analizom jednostavnih primjera koji se mogu idealizirati sustavom s jednim stupnjem slobode gibanja (slika 11. i slika 12.).

Na slici 11. prikazani su primjeri nadstrešnice i vodospremnika. Intuitivno nam je zanimljiva bočna pobuda i gibanje tih konstrukcija. Modele možemo definirati koncentriranom masom *m* na vrhu konstrukcije i bočnom krutosti *k* nosivih elemenata bez mase.



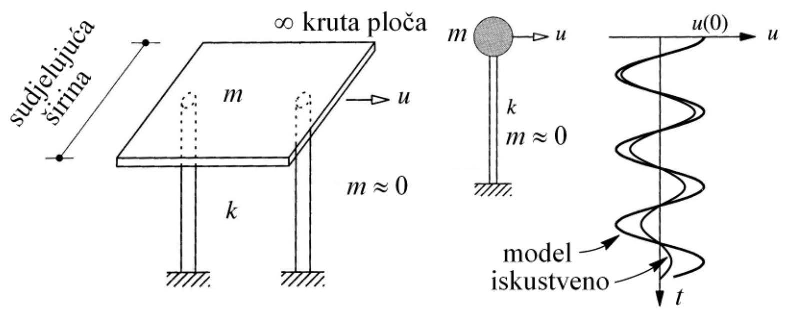
Slika 11.: Uvodni primjeri: nadstrešnica i vodospremnik

Posljedice gibanja: • ubrzanje $\xrightarrow{\ddot{u}}$ sila inercije $\xrightarrow{m\ddot{u}}$ potreban položaj i iznos mase m • pomaci $\xrightarrow{u}$ unutarnje sile $\xrightarrow{ku}$ potrebna bočna krutost k

Za spomenute primjere masu *m* možemo definirati kao masu sudjelujućega dijela ploče ili spremnika, a bočnu krutost *k* kao krutost stupova prema savijanju.

Nepoznanice su bočni pomak u i ubrzanje $\ddot{u}$. Mogući pomak mase modela nazivamo DINAMIČKI STUPANJ SLOBODE.

U poglavlju I bavit ćemo se samo sa sustavima s jednim (dinamičkim) stupnjem slobode.



Slika 12.:Model nadstrešnice; slobodno titranje zbog početnoga pomaka

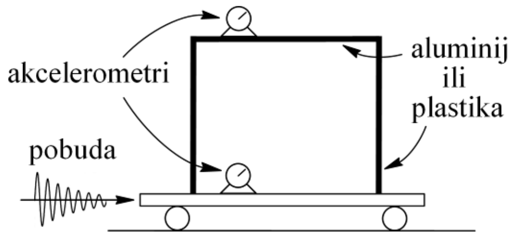
Ako zamislimo pobudu sustava s jednim stupnjem slobode u obliku bočnoga pomaka $u(0)$, bez opterećenja , uvjet ravnoteže sila glasi:

$$m\ddot{u} + ku = 0 \text{, } (m \text{ i } k \text{ poznati}), \tag{4}$$

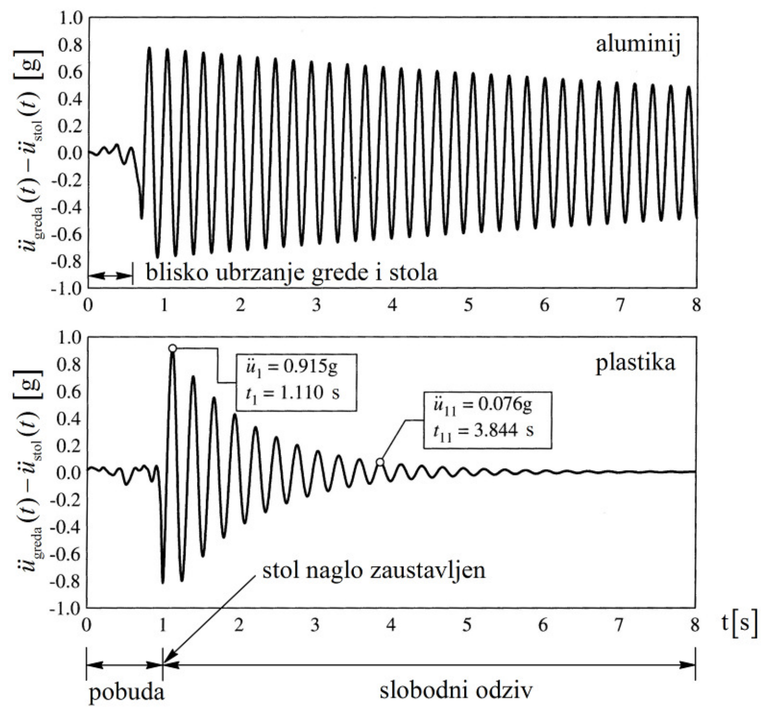
a nepoznanice su pomak u i ubrzanje $\ddot{u}$ (dovoljno odrediti u, derivacija $\rightarrow \ddot{u}$).

Idealizirani sustav titra lijevo – desno oko uspravnog položaja, a to titranje[1] traje vječno amplitudama jednakim početnom pomaku (slika 12. desno). Iskustveno znamo da se titranje ipak postupno smiruje i prestaje jer postoji proces koji umiruje titranje, a naziva se prigušenje. Na slici 14. prikazane su vrijednosti odziva modela okvira od plastike i aluminija (slika 13.) izmjerene laboratorijskim pokusima na potresnom stolu. Očekivano, amplitude titranja modela se smanjuju s vremenom, što se odvija brže kod plastičnog nego kod aluminijskog okvira.

Kod prigušenog sustava kinetička i potencijalna energija titranja opadaju zbog različitih pojava što ćemo objasniti kasnije. Zasad je dovoljno istaknuti da prigušenje treba uključiti u matematički model.



Slika 13.: Model okvira od aluminija ili plastike na potresnom stolu

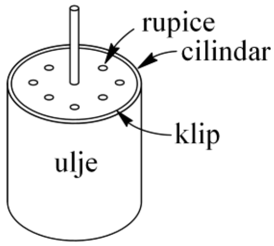


Slika 14.: Slobodni odzivi modela od aluminija i plastike

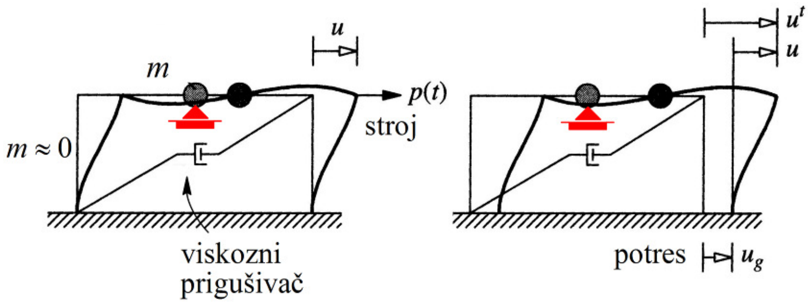
[1] osciliranje, vibriranje, njihanje, periodično gibanje

1.2. Formulacija problema

Dinamički problem ćemo formulirati na prigušenom sustavu s jednim stupnjem slobode. Promatramo okvir bez mase, s koncentriranom masom na sredini grede, a kao model prigušenja uzet ćemo viskozni prigušivač (slika 15.). Pretpostavit ćemo da stupovi i greda nisu rastezljivi ($EA \to \infty$) i da nema vertikalne pobude. Znači, dinamički stupanj slobode je bočni pomak *u*. Na okvir djeluju dvije pobude, a to su vanjska sila i pomak tla (tipični primjeri u praksi bi bili vibrirajući stroj i potres). Opisani sustav je prikazan na slici 16.

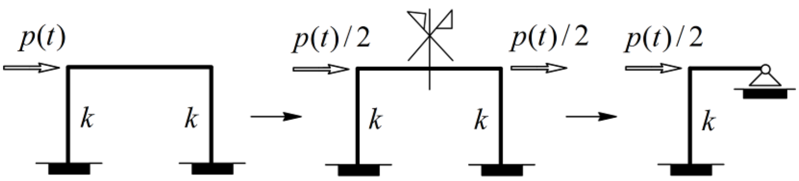


Slika 15.: Viskozni prigušivač



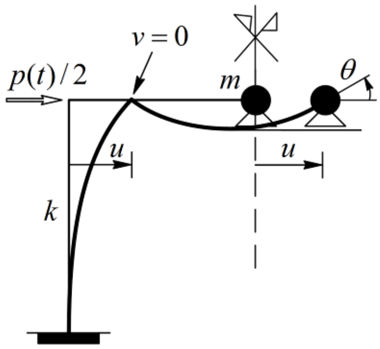
Slika 16.: Pobuda sustava s jednim stupnjem slobode: vanjska sila i pomak tla od potresa

Sada ćemo objasniti zašto postoji samo bočni pomak *u*. Naime, ako pretpostavimo da nema uzdužnih deformacija ($EA \to \infty$), pomak u je u čvorovima grede jednak, a vertikalni pomak čvora grede $v = 0$. Posljedično, svejedno je da li na okvir djeluje sila $p(t)$ u lijevom čvoru grede ili sile $p(t)/2$ u oba čvora grede (slika 17.). Znači, vrijedi uvjet antimetrije pa je okvir istoznačan poluokviru (kao nepoznanice ostaju u i θ) (slika 18.).



Slika 17.: Uvjet antimetrije na okviru - pobuda

Pretpostavljamo da je masa točkasta pa je $r = 0$ i rotacijska inercija mase $I = mr^2 / 2 = 0$. Stoga, kut zaokreta θ nije dinamički stupanj slobode, već samo statički. Uz beskonačnu aksijalnu krutost ($EA \to \infty$), dobivamo da su svuda deformacije $\varepsilon_{1,1} = 0$, naprezanja $\sigma_{1,1} = 0$ i uzdužne sile $N = 0$. Ipak, iz uvjeta ravnoteže slijedi da su samo u gredi uzdužne sile $N = 0$.



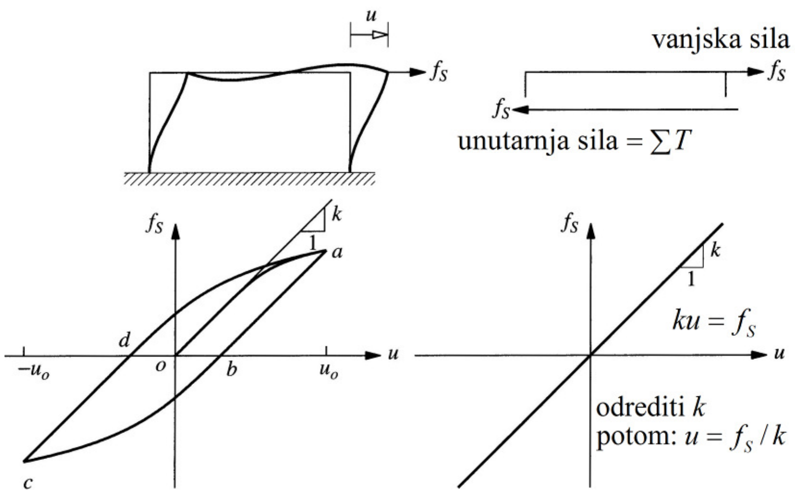
Slika 18.: Uvjet antimetrije na okviru – progibna linija

1.3. Odnos sile i pomaka

Promatrajmo okvir prikazan na slici 19. opterećen vanjskom statičkom silom f_s u smjeru pomaka u. Statički uvjet ravnoteže vanjskih i unutarnjih sila glasi:

$$ku = f_S \tag{5}$$

Jednadžba (5) je linearna za male, a nelinearna za velike pomake (slika 19. dolje).



Slika 19.: Odnos sile i pomaka na okviru: nelinearna i linearna veza

1.3.1. Linearna veza sile i pomaka

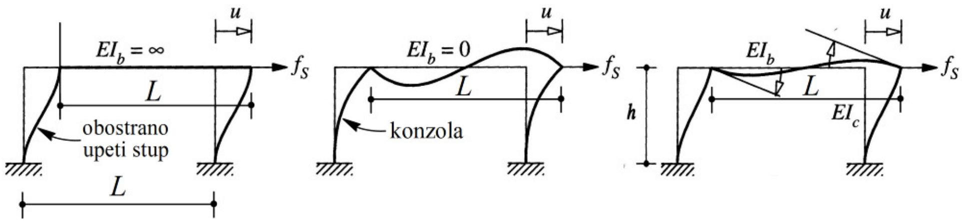
Za linearne sustave odnos bočne sile i rezultirajućeg pomaka je linearan. Krutost bočnoga smjera je sila za jedinični bočni pomak.

Određivanje fleksijske krutosti na okviru (slika 20.): ponavljanje[2]

$$\text{neizmjerno kruta greda:} \quad k = \sum_{\text{stupovi}} \frac{12EI_c}{h^3} = \frac{24EI_c}{h^3} \tag{6}$$

$$\text{neizmjerno gipka greda:} \quad k = \sum_{\text{stupovi}} \frac{3EI_c}{h^3} = \frac{6EI_c}{h^3} \tag{7}$$

[2] Građevna statika 1: Metode pomaka (http://www.grad.hr/nastava/gs/bilj2/mp1.pdf)

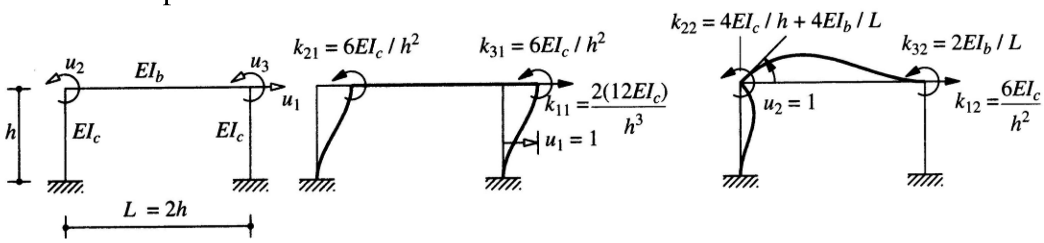


Slika 20.: Granični slučajevi krutosti grede okvira

Primijetimo da je raspon grede okvira uvijek L=const., a granični slučajevi krutosti ne ovise o L. Vrijedi:

$$I_b \to \infty \Rightarrow \frac{k\,|_{EI_b \to \infty}}{k\,|_{EI_b = 0}} = 4, \quad \text{krutost raste najviše 4 puta.} \tag{8}$$

Za opći slučaj ($EI_b > 0$ i $EI_c > 0$) upotrebljavamo inženjersku metodu pomaka[3]. Koeficijenti matrice krutosti su prikazani na slici 21.



Slika 21.: Određivanje krutosti okvira

Sile na krajevima štapova $k_{i,1}$, $i = 1,\ldots,3$ određujemo za jedinični pomak $u_1 = 1$, uz ostale spriječene pomake ($u_2 = u_3 = 0$). Slično možemo dobiti sile $k_{i,2}$ i $k_{i,3}$. Uz navedene pretpostavke vrijedi:

$$\text{za } I_b = I_c, \quad \mathbf{Ku} = \mathbf{f} \ \text{ jest}: \quad \frac{EI_c}{h^3}\begin{bmatrix} 24 & 6h & 6h \\ 6h & 6h^2 & h^2 \\ 6h & h^2 & 6h^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Sustav ima tri statička i jedan dinamički stupanj slobode. Upotrijebit ćemo postupak statičke kondenzacije za eliminaciju onih stupnjeva slobode kojima ne pripadaju dinamička opterećenja. U ovomu slučaju iskoristit ćemo uvjet da nema opterećenja u smjeru rotacijskih stupnjeva slobode u_2 i u_3. Prvo ćemo izraz (9) napisati tako da ćemo grupirati članove koji se odnose na dinamički stupanj slobode i one koji se odnose na statičke stupnjeve slobode:

$$\begin{bmatrix} k_{1,1} & \mathbf{k}_{1,2} \\ \mathbf{k}_{2,1} & \mathbf{K}_{2,2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_S \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} k_{1,1} & = 24EI_c/h^3 & \mathbf{k}_{1,2} & = EI_c/h^3\begin{bmatrix} 6h & 6h \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_2 & = \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} & \mathbf{k}_{2,1} & = EI_c/h^3\begin{bmatrix} 6h & 6h \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \end{matrix}, \tag{10}$$

pri čemu je:

$$\mathbf{K}_{2,2} = \frac{EI_c}{h^3}\begin{bmatrix} 6h^2 & h^2 \\ h^2 & 6h^2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} k_{1,1}u_1 & +\mathbf{k}_{1,2}\mathbf{u}_2 = f_S \\ \mathbf{k}_{2,1}u_1 & +\mathbf{K}_{2,2}\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u}_2 = -\mathbf{K}_{2,2}^{-1}\mathbf{k}_{2,1}u_1 \end{matrix}. \tag{11}$$

[3] Građevna statika 2: http://www.grad.hr/nastava/gs/bilj2/mp2.pdf

Kutovi zaokreta postaju ovisni o bočnomu pomaku u_1:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \left(-\frac{EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 6h^2 & h^2 \\ h^2 & 6h^2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \frac{EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 6h \\ 6h \end{bmatrix} u_1 = -\frac{6}{7h} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_1. \tag{12}$$

Rabeći izraze (10) – (12) dobivamo:

$$f_S = k_{1,1}u_1 - \mathbf{k}_{1,2} \underbrace{\mathbf{K}_{2,2}^{-1}\mathbf{k}_{2,1}u_1}_{\mathbf{u}_2} = \underbrace{(k_{1,1} - \mathbf{k}_{1,2}\mathbf{K}_{2,2}^{-1}\mathbf{k}_{2,1})}_{\text{bočna krutost } k} u_1 \tag{13}$$

$$\mathbf{k}_{1,2}\mathbf{K}_{2,2}^{-1}\mathbf{k}_{2,1} = 1\underset{2}{\boxed{\mathbf{k}_{1,2}}} \cdot 2 \underset{2}{\boxed{\mathbf{K}_{2,2}^{-1}}} \cdot 2 \underset{1}{\boxed{\mathbf{k}_{2,1}}} = 1 \underset{1}{\boxed{}} \quad \text{skalar!} \tag{14}$$

$$f_S = \left(\frac{24EI_c}{h^3} - \frac{EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 6h & 6h \end{bmatrix} \frac{6}{7h} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) u_1 = \underbrace{\frac{96}{7}\frac{EI_c}{h^3}}_{k} u_1 \tag{15}$$

Znači, ukupna bočna krutost okvira je $k = \dfrac{96}{7}\dfrac{EI_c}{h^3}$.

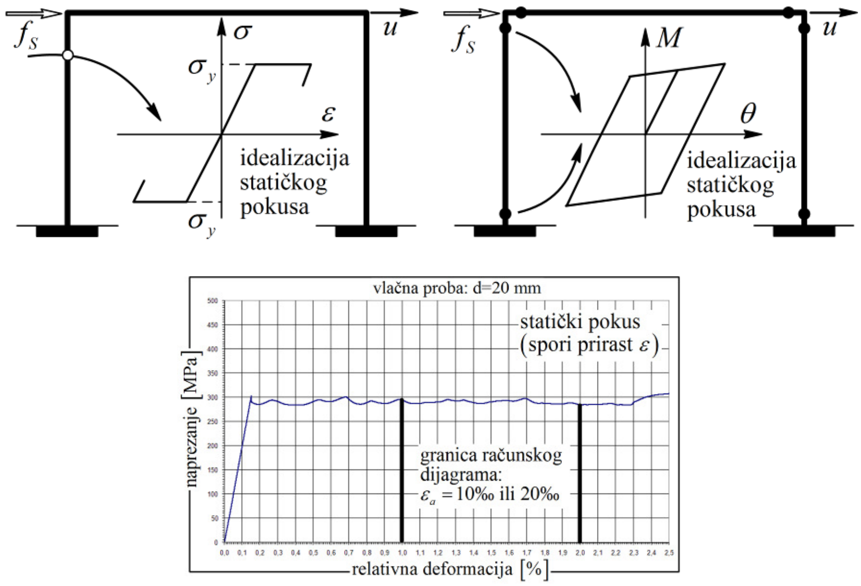
1.3.2. Nelinearna veza sile i pomaka

Za veće pomake građevine, odnos sile i pomaka nije pravac (slika 19. lijevo dolje). Ta funkcija nije jednoznačna jer jednom pomaku u može pripadati više sila f_S i obratno. Za proračun je potrebno poznavati POVIJEST pomaka u, odnosno $f_S = f_S[u(t)]$.

Funkcija $f_S - u$ (u razini grede) za dinamički proračun može se odrediti (slika 22.):

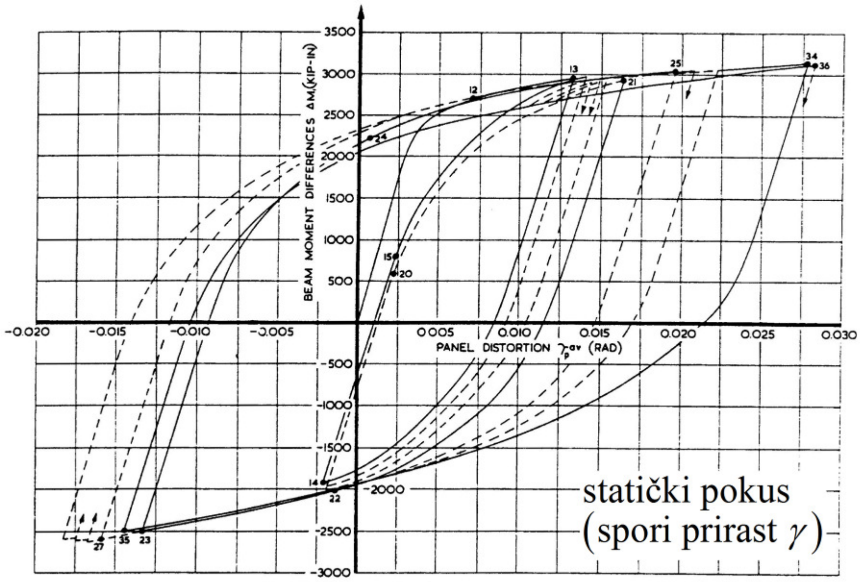
(a) nelinearnom statičkom analizom uz zadani zakon ponašanja $\sigma - \varepsilon$ ili primjenom

(b) krivulje PLANIRANOG spoja (npr. $M - \theta$) prema SPOROM cikličkom pokusu.



Slika 22.: Određivanje funkcije *fs-u*

Na slici 23. prikazan je odnos sila-pomak za jedan konstruktivni čelični element dobiven ispitivanjem u laboratoriju (slika 24.), kojeg upotrebljavamo u pristupu (b).



Slika 23.: Primjer ispitivanja,
izvor: prof. Toshihiro, Daido Institute, Nagoya

Slika 24.: Odnos sila-deformacija za čelični konstruktivni element

Važnost nelinearnih modela:

a) očekujemo raspucavanje i tečenje pri jakim potresima i
b) trošenje seizmičke energije pri plastičnim deformacijama.

Zbog toga možemo pretpostaviti manje seizmičke sile na konstrukciju, no važno je napomenuti da je teško osigurati kontrolirana oštećenja bez ugrožavanja života! Primjer teško oštećene zgrade pri potresu u Kini, 2008. godine dan je na slici 25.

Slika 25.: Primjer zgrade oštećene u potresu (pokrajina Wenchuan, Kina)
http://nees-anchor.ceas.uwm.edu/wenchuan_earthquake/eeri_lfe_wenchuan.html

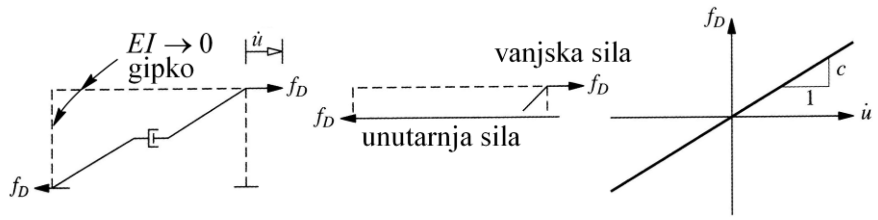
1.4. Prigušenje

1.4.1. Model prigušenja u elastičnom području

Pojave koje uzrokuju prigušenje u elastičnom području su sljedeće:

- u uvjetima pokusa:
  - toplinski učinci zbog unutarnjeg trenja u materijalu pri deformaciji tijela
  - otpor zraka pri gibanju modela
  - radijacijsko prigušenje zbog širenja valova kroz tlo, itd.
- dodatno, na realnoj konstrukciji:
  - trenje u čeličnim spojevima
  - otvaranje i zatvaranje mikropukotina u betonu
  - trenje između nekonstrukcijskih i konstrukcijskih elemenata

Teško je definirati matematički model svake ove pojave. Zbog toga upotrebljavamo zamjenjujući grubi model svih pojava: linearni viskozni prigušivač (slika 15.)

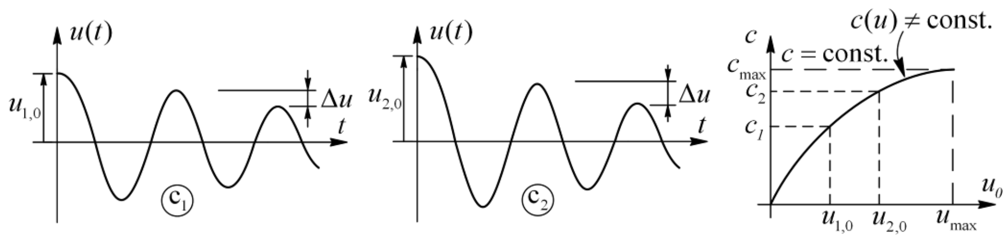


Slika 26.: Ponašanje linearnog viskoznog prigušivača

Sila prigušenja je proporcionalna brzini:

$f_D = c\dot{u}$, gdje je c [Ns/m] – koeficijent viskoznog prigušenja. (16)

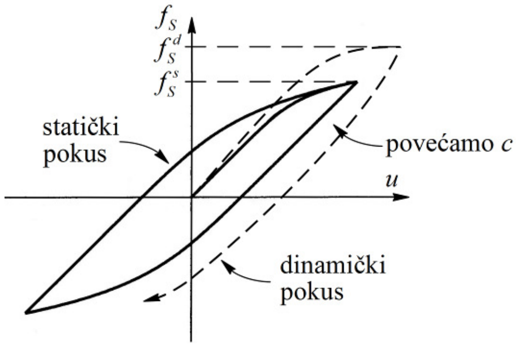
Koeficijent viskoznog prigušenja c bira se tako da se obuhvate svi mehanizmi prigušenja koji uzrokuju trošenje energije u elastičnome području. Zato se model prigušenja i naziva EKVIVALENTNO viskozno prigušenje. Ono se ne može odrediti iz dimenzija konstrukcije (kao krutost i masa), već se određuje pokusima iz slobodnog ili prisilnog titranja. Ekvivalentnim viskoznim prigušenjem modelira se trošenje energije u elastičnom području. Općenito, koeficijent c nije konstantan, nego ovisi o iznosu elastičnog pomaka, ali se to najčešće ne uzima u obzir pri dinamičkim analizama, nego se vrijednost c smatra konstantnom, uz iznos pri deformaciji, $u_{\max} = u_y$ (na granici tečenja), jer ionako idemo i dalje, u plastično područje.



Slika 27.: Odziv u vremenu sustava s prigušenjem uz $c \neq$ const.

1.4.2. Model prigušenja u plastičnom području

Zbog redovito neelastičnog ponašanja konstrukcija pri većim opterećenjima troši se dodatna energija koja je jednaka površini ispod krivulje $f_S - u$. Prigušenje u plastičnom području se ne modelira viskoznim prigušenjem već izravno nelinearnim dinamičkim modelom sa $f_S - u$ krivuljom (slika 19.). Treba biti oprezan jer je funkcija $f_S - u$ određena na temelju statičkih pokusa. Razlika prema dinamičkom pokusu se obično kompenzira povećanjem viskoznog prigušenja (slika 28.).



Slika 28.: Model prigušenja u plastičnom području

1.5. Opterećenje (pobuda)

Vanjsko opterećenje $p(t)$ je promjenjivo (i često slabo poznato!) pa su i sve veličine promjenjive u vremenu. Kao sile otpora građevine na vanjsku pobudu javljaju se elastična (ili neelastična) sila $f_S(t)$ i sila prigušenja. Rješenjem dinamičke jednadžbe dobit ćemo nepoznate veličine: pomak $u(t)$, brzinu $\dot{u}(t)$ i ubrzanje $\ddot{u}(t)$, iz kojih se zatim mogu odrediti unutarnje sile $M(t)$, $T(t)$, $N(t)$ te naprezanja $\sigma(t)$, $\tau(t)$ i deformacije $\varepsilon(t)$, $\gamma(t)$.

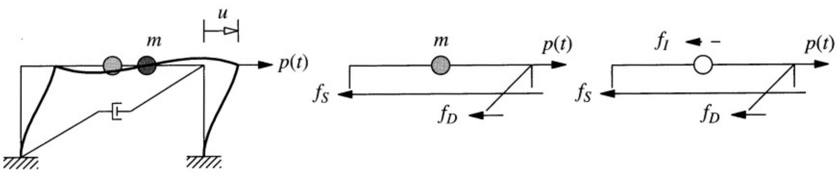
1.6. Formulacija jednadžbe gibanja

1.6.1. Primjena 2. Newtonova zakona

Na slici 29. prikazane su sile koje djeluju na masu okvira u nekom trenutku *t*. Sile otpora su suprotne od pobude i u bilo kojem t vrijedi:

rezultanta $f(t) = p(t) - f_S(t) - f_D(t)$ djeluje na masu m (17)

prema 2. Newtonom zakonu je: $f(t) = m\ddot{u}(t)$ i $p(t) - f_S(t) - f_D(t) = m\ddot{u}(t)$ (18)



Slika 29.: Ravnoteža sila na okviru

Jednadžba gibanja sustava s jednim stupnjem slobode glasi:

$$m\ddot{u}(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) \tag{19}$$

Uz: $f_D = c\dot{u}(t)$ [izraz (16)] i $f_S(t) = ku(t)$ [izraz (5)] dobivamo:

$$\begin{aligned} m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) &= p(t) \\ m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + f_S[u(t)] &= p(t) \end{aligned} \tag{20}$$

1.6.2. Primjena D'Alembertova principa dinamičke ravnoteže

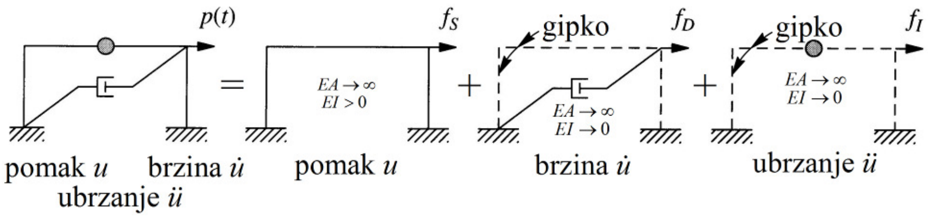
Prema D'Alembertovu principu dinamičke ravnoteže fiktivna sila inercije jednaka je umnošku mase i ubrzanja $f_I(t) = m\ddot{u}(t)$ te djeluje suprotno od ubrzanja $\ddot{u}(t)$. U bilo kojemu trenutku t sustav je u ravnoteži i vrijedi:

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t). \tag{21}$$

1.6.3. Rastav na neovisne podmodele

Vanjsko opterećenje $p(t)$ uzrokuje gibanje konstrukcije koje se može opisati pomakom $u(t)$, brzinom $\dot{u}(t)$ i ubrzanjem $\ddot{u}(t)$. Sustav se može prikazati kao kombinacija triju komponenata (slika 30.):

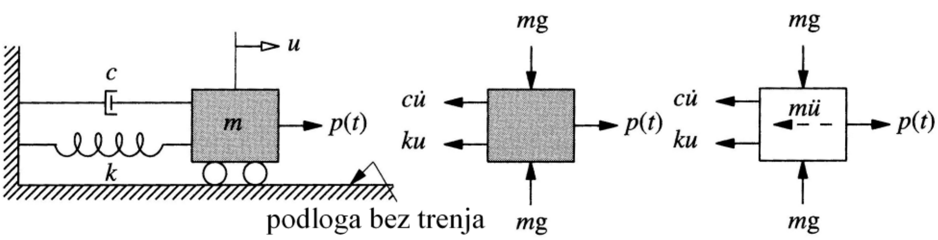
- $u(t)$ aktivira samo krutost k: okvir bez prigušenja i mase,
- $\dot{u}(t)$ aktivira samo prigušenje c: okvir bez krutosti i mase,
- $\ddot{u}(t)$ aktivira samo masu m: okvir bez krutosti i prigušenja.



Slika 30.: Neovisni podmodeli: krutost, prigušenje i masa

1.7. Ekvivalentni model

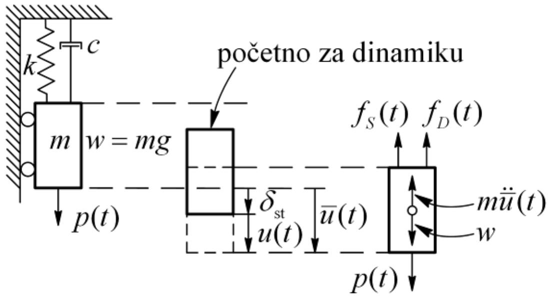
Klasični model koji opisuje sustav s jednim stupnjem slobode je ekvivalentni model sastavljen od mase, opruge i prigušivača (slika 31.). Ako pretpostavimo da je apsolutno kruta masa jednaka masi na gredi okvira, krutost opruge jednaka bočnoj krutosti okvira (izraz (15)), a koeficijent prigušenja jednak koeficijentu prigušenja okvira, da je podloga apsolutno kruta i bez trenja te da je dinamički stupanj slobode horizontalni pomak, tada je ekvivalentni model istoznačan dinamičkom modelu okvira. Težina mase (okvira) nema utjecaja na dinamičku jednadžbu čak i ako djeluje u smjeru gibanja modela, što ćemo pokazati u sljedećem primjeru.



Slika 31.: Ekvivalentni model: ravnoteža sila

1.7.1. Statičko opterećenje

Kod ekvivalentnog modela kod kojega pobuda $p(t)$ djeluje u istomu smjeru kao i težina w (slika 32.), pomak $\bar{u}(t)$ mase m se mjeri od početnoga položaja u kojemu je opruga nedeformirana.



Slika 32.: Ekvivalentni model: ravnoteža sila (vertikalni smjer)

Uvjet ravnoteže tada glasi:

$$m\ddot{\bar{u}}(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) + w \tag{22}$$

uz:

$$f_D(t) = c\dot{\bar{u}}(t) \text{ i } f_S(t) = k\bar{u}(t) \tag{23}$$

dobivamo:

$$m\ddot{\bar{u}}(t) + c\dot{\bar{u}}(t) + k\bar{u}(t) = p(t) + w \tag{24}$$

$$\text{ukupni pomak je: } \bar{u}(t) = \delta_{st} + u(t) \text{ i } \delta_{st} = \text{const. (provjes od } w\text{)}, \tag{25}$$

$$\text{odnosno: } \dot{\bar{u}}(t) = \dot{u}(t),\ \ddot{\bar{u}}(t) = \ddot{u}(t) \text{ jer } \delta_{st} \text{ ne ovisi o } t \tag{26}$$

Uvjet ravnoteže postaje:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + k\bar{u}(t) = p(t) + w \tag{27}$$

Kad uvrstimo izraz (25) za ukupni pomak $\bar{u}(t)$ u (27), dobit ćemo:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + k[\delta_{st} + u(t)] = p(t) + w \tag{28}$$

Uvjet statičke ravnoteže (ne ovisi o t) glasi:

$$k\delta_{st} = w \tag{29}$$

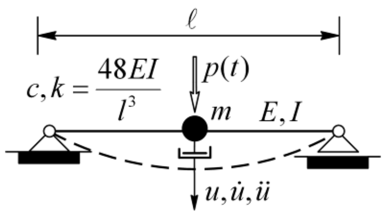
Znači, konačna jednadžba glasi:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \tag{30}$$

Možemo zaključiti da je položaj statičke ravnoteže početni položaj za dinamički proračun tako da je pomak $u(t)$ zapravo udaljenost od položaja statičke ravnoteže. Za ukupni pomak ili silu u opruzi ipak trebamo zbroj.

1.7.2. Poopćenje

Mnoge modele iz prakse možemo svesti na ekvivalentni model - sustav mase, opruge i prigušivača, a na slici 33. je pokazan primjer stroja na gredi. Za model vrijedi ista dinamička jednadžba: $m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$.



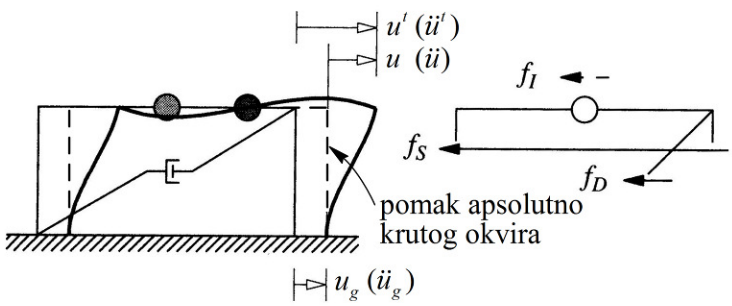
Slika 33.: Primjer teškog stroja na gredi

1.8. Pobuda potresom

U seizmički aktivnim područjima, najvažniji problem dinamike konstrukcija je odrediti ponašanje građevina pri pobudi potresom koju uzrokuje gibanje tla ispod oslonaca.

Pretpostavljamo istodobni dolazak potresa na sve ležajeve pa je pomak $u_g(t)$ svih ležajeva isti. Ta pretpostavka je ispravna za većinu konstrukcija jer je uobičajeno razmak ležaja mali prema poluvalu širenja potresa, no za jako duge građevine kao što su veći mostovi, cjevovodi i slično, pretpostavka neće vrijediti.

Na slici 34. prikazan je jednostavni okvir pobuđen potresnom pobudom.



Slika 34.: Djelovanje potresne pobude (pomaka tla) na okvir

Pomake mase okvira m mjerimo od početnoga položaja okvira. Ako pomak mase prema ležajevima označimo s $u(t)$, ukupni pomak je:

$$u^t(t) = u_g(t) + u(t) \ \ [\infty \text{ kruti + deformabilni dio}] \tag{31}$$

Jednadžba gibanja po D'Alembertovom principu glasi:

$$f_I^t(t) + f_D^t(t) + f_S^t(t) = 0, \quad p(t) = 0. \tag{32}$$

Vrijedi (bez t):

$$f_I^t = f_I^g + f_I\,, \ \ f_D^t = f_D^g + f_D\,, \ \ f_S^t = f_S^g + f_S\,, \tag{33}$$

a za $u_g(t)$ i $\dot{u}_g(t)$:

$$f_D^g = f_S^g = 0 \Rightarrow f_I^t(t) + f_D(t) + f_S(t) = 0. \tag{34}$$

Znači:

$$m\ddot{u}^t(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0,$$
$$\text{uz: } \ddot{u}^t(t) = \ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t). \tag{35}$$

Vrijedi:

$$m[\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t)] + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad \text{(slično i kut zaokreta – izraz (42))} \tag{36}$$

Konačno:

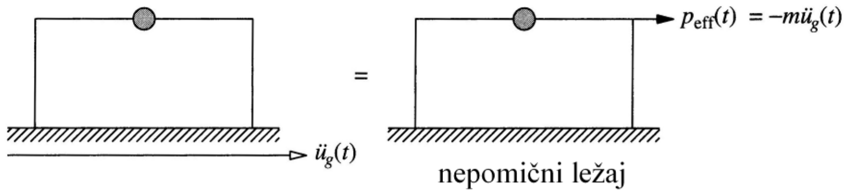
$$\text{linearno:} \quad m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{u}_g(t) \tag{37}$$

$$\text{nelinearno:} \quad m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + f_S\left[u(t)\right] = -m\ddot{u}_g(t) \tag{38}$$

Možemo primijetiti da su lijeve strane jednadžbi iste kao u slučaju opterećenja $p(t)$ (izraz (20)), a i desne su strane iste ako se pobuda označi kao:

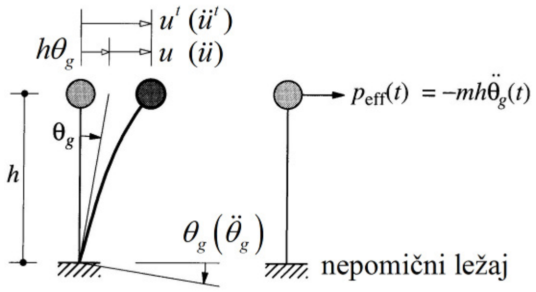
$$p(t) = p_{\text{eff}}(t) = -m\ddot{u}_g(t) \tag{39}$$

Istoznačni su modeli ako je sustav opterećen ubrzanjem tla $\ddot{u}_g(t)$ ili efektivnom[4] silom potresa $-m\ddot{u}_g(t)$ uz nepomične ležajeve.



Slika 35.: Efektivna sila potresa za horizontalnu potresnu pobudu

Važno je primijetiti da je efektivna sila potresa proporcionalna masi građevine (ne tla!). Kad projektiramo, trebamo voditi računa da povećanjem mase građevine, povećavamo i silu potresa!



Slika 36.: Efektivna sila potresa za rotacijsku potresnu pobudu

Iako se rotacijske komponente ubrzanja tla ne bilježe pri potresima, one se mogu procijeniti iz mjerenih translacijskih pobuda na poznatim dubinama. Ako promatramo djelovanje rotacijske komponente potresa (kut zaokreta temelja θ_g) na model konzole (slika 36.), pomak mase m jest:

$$u^t(t) = h\theta_g(t) + u(t), \ (\text{mali } \theta_g: \ \tan\theta_g \approx \theta_g). \tag{40}$$

Uz:

$$\ddot{u}^t(t) = h\ddot{\theta}_g(t) + \ddot{u}(t), \ (h = \text{const.}), \tag{41}$$

[4] posljedičnom (jer je posljedica djelovanja potresa)

vrijedi:

$$m[h\ddot{\theta}_g(t) + \ddot{u}(t)] + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \text{ (poput pomaka – izraz (36)).} \tag{42}$$

Konačno:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -mh\ddot{\theta}_g(t), \tag{43}$$

pri čemu je efektivna sila potresa:

$$p_{\text{eff}} = -mh\ddot{\theta}_g(t). \tag{44}$$

Istoznačno je zadati rotacijsko ubrzanje tla $\ddot{\theta}_g$ ili nepomični ležaj i p_{eff}.

Treba uočiti da promatramo translacijski pomak mase, iako je pobuda rotacijska. Znači, translacijski je i stupanj slobode i efektivna sila. Kut zaokreta temelja može biti značajan kod temeljenja visokih građevina, primjerice, kod vodotornja ili silosa temeljenih na lošem tlu.

1.9. Slijed proračuna

1.9.1. Proračun pomaka, brzine i ubrzanja

Ako je za neki sustav zadana masa *m*, prigušenje *c*, krutost *k* za linearni ili odnos $f_S[u(t)]$ za neelastični sustav, te vanjska pobuda $p(t)$ ili ubrzanje tla $\ddot{u}_g(t)$, temeljni zadatak dinamike konstrukcija je odrediti odziv modela kao ovisnost neke veličine u vremenu. Pritom treba riješiti prikazane dinamičke jednadžbe i odrediti pomak modela $u(t)$, zatim derivacijama dobiti brzinu $\dot{u}(t)$ i ubrzanje $\ddot{u}(t)$, a za potresno opterećenje eventualno i ukupne vrijednosti $u(t)^t$, $\dot{u}^t(t)$ i $\ddot{u}^t(t)$. Primjerice, poznavanje $u(t)^t$ je potrebno za određivanje iznosa seizmičke dilatacije tako da pri potresu ne bi došlo do udaranja zgrade o zgradu (slika 37.). Ipak, najvažniji je podatak dinamički pomak $u(t)$ jer unutarnje sile izravno ovise o relativnom pomaku!

Slika 37.: Oštećenje zgrada na seizmičkoj dilataciji

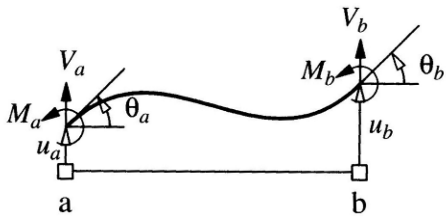
1.9.2. Proračun unutarnjih sila

Nakon što je napravljen dinamički proračun i određen pomak $u(t)$, unutarnje sile i naprezanja mogu se u svakomu trenutku *t* odrediti statičkom analizom.

Tu postoje dva pristupa:

1. Za poznati bočni pomak u mogu se odrediti svi kutovi zaokreta (koji su eliminirani statičkom kondenzacijom); za sve poznate pomake krajeva štapa mogu se odrediti unutarnje sile (slika 38.) preko matrice krutosti (izraz (45)) i na kraju naprezanja iz unutarnjih sila

   (bočni pomak $\rightarrow$ kutovi zaokreta $\rightarrow$ unutarnje sile [5] $\rightarrow$ naprezanja)



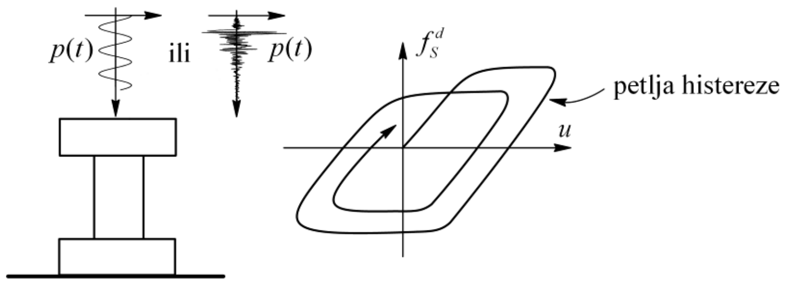
Slika 38.: Pomaci i sile na krajevima štapa

$$
\begin{aligned}
M_a &= \frac{4EI}{\ell}\theta_a + \frac{2EI}{\ell}\theta_b + \frac{6EI}{\ell^2}u_a - \frac{6EI}{\ell^2}u_b \\
M_b &= \frac{2EI}{\ell}\theta_a + \frac{4EI}{\ell}\theta_b + \frac{6EI}{\ell^2}u_a - \frac{6EI}{\ell^2}u_b \\
V_a &= \frac{12EI}{\ell^3}u_a - \frac{12EI}{\ell^3}u_b + \frac{6EI}{\ell^2}\theta_a + \frac{6EI}{\ell^2}\theta_b \\
V_b &= -\frac{12EI}{\ell^3}u_a + \frac{12EI}{\ell^3}u_b - \frac{6EI}{\ell^2}\theta_a - \frac{6EI}{\ell^2}\theta_b
\end{aligned}
\tag{45}
$$

2. U bilo kojem trenutku t ekvivalentna statička sila (koja sporo djeluje) uzrokuje pomak okvira $u(t)$ pa se može izraziti kao $f_S(t) = ku(t)$. Unutarnje sile ili naprezanja zbog djelovanja spomenute sile f_S se u bilo kojemu trenutku t mogu odrediti statičkom analizom. Primijetimo da su dinamički učinci sadržani u rješenju $u(t)$.

   (statičko opterećenje $f_S(t) = ku(t) \rightarrow$ unutarnje sile $\rightarrow$ naprezanja)

Primijetimo da u drugom pristupu vanjska bočna sila nije definirana kao $f_I(t)$, već kao $f_S(t)$, jer nije ispravno uključiti silu prigušenja u izračun vanjske bočne sile ($f_S^d = -[f_S(t) + f_D(t)] = f_I$). Naime, u proračunu konstrukcija se računski određene sile u elementima uspoređuju s otpornostima presjeka koja su određena statičkim ispitivanjima materijala ($\dot{u} = 0$, $f_D = 0$). Znači, otpornost presjeka je temeljena na statičkim pokusima!



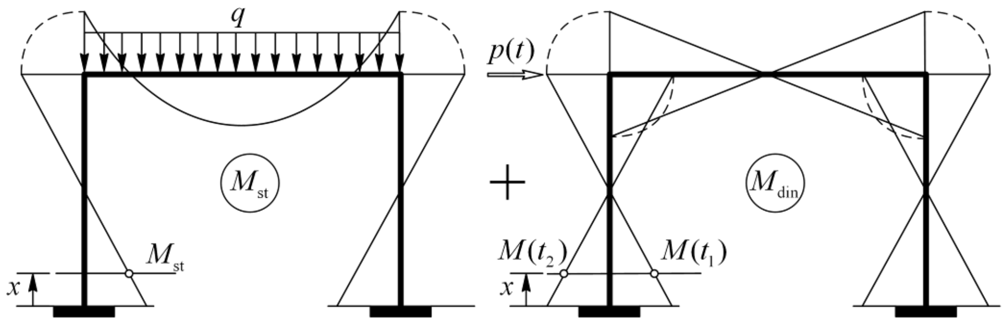
Slika 39.: Nepouzdanost modela

Dinamički pokusi, čak i pri pravilnoj sinusnoj pobudi, nisu pouzdani. Dolazi do velikoga rasipanja petlji histereze (primjerice za AB, ziđe, kamen). Dodatno, djelovanje potresa je nepoznato, nepravilno i slučajno, puno složenije od jednostavne sinusne ovisnosti! Znači, oblik petlje histereze (pa i ekstremi) su još nepouzdaniji i nije ih moguće standardizirati (propisati).

[5] Građevna statika 1: http://www.grad.hr/nastava/gs/bilj2/mp1.pdf

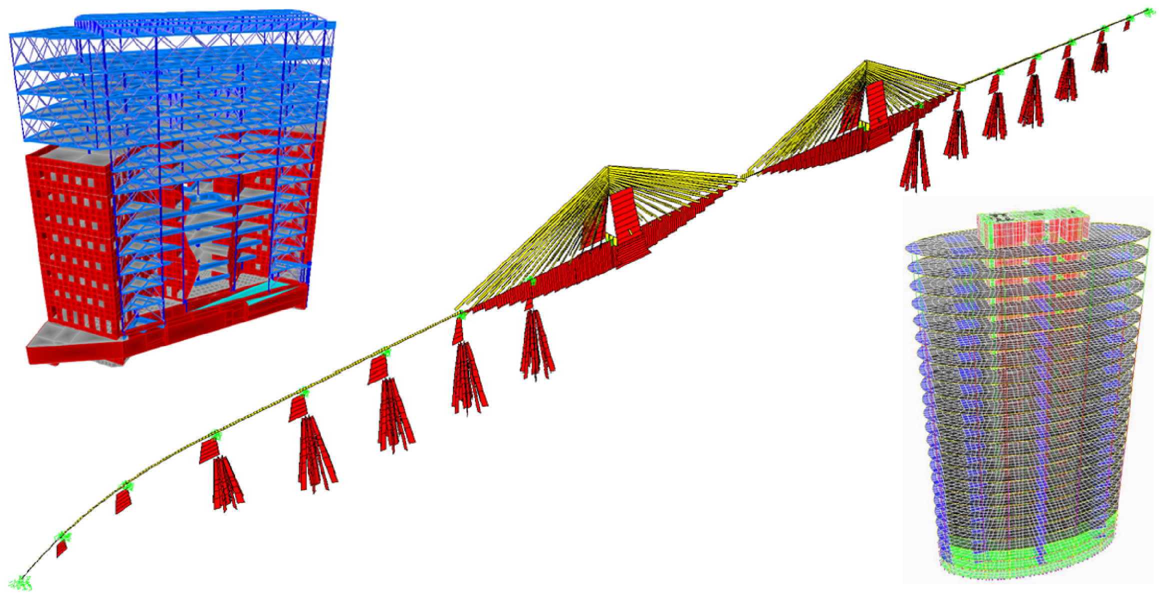
1.10. Kombinacije djelovanja

Pri dimenzioniranju konstrukcija potrebna je kombinacija statičkih i dinamičkih djelovanja. Kao što je poznato, kod linearnih modela vrijedi princip superpozicije, primjerice:[6] ukupni moment savijanja je jednak zbroju momenata statičkih i dinamičkih djelovanja, $M_{\text{tot}}(t) = M_{\text{st}} + M_{\text{din}}(t)$, pa je i M_{tot} funkcija vremena. U praksi rabimo dinamički ekstrem: $M_{\text{tot}} = M_{\text{st}} + \max_t |M_{\text{din}}(t)|$, znači ekstremnu dinamičku vrijednost koja povećava statički iznos. Prema slici 40.: $M_{\text{tot}} = M_{\text{st}} + M(t_1)$ (djeluju na istu stranu).



Slika 40.: Kombinacija statičkih i dinamičkih djelovanja

Kod nelinearnih modela ne vrijedi princip superpozicije, već treba naslijediti sile i pomake iz statičke kombinacije, jer je potreban proračun novih krutosti za početak dinamičkog proračuna. Primjerice, uzdužne sile utječu na bočnu krutost konstrukcije - tlačna sila smanjuje, a vlačna povećava krutost prema savijanju što može biti značajno primjerice kod visokih zgrada ili zavješenoga mosta (slika 41.).



Slika 41.: Primjeri nelinearnih modela realnih konstrukcija

[6] izostavimo ovisnost o položaju presjeka x: pišemo (*t*), a ne (*x*, *t*)

1.11. Postupci proračuna

Kao što smo spomenuli u prošlim poglavljima, glavni je zadatak dinamičkoga proračuna odrediti $u(t)$ (potom unutarnje sile i naprezanja). Rješavamo običnu linearnu diferencijalnu jednadžbu drugoga reda s konstantnim koeficijentima:

$$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=p(t). \tag{46}$$

Nazivamo je običnom jer sadrži obične, a ne parcijalne derivacije; linearnom jer nema potencija većih od jedan; drugog reda jer postoji najviše druga derivacija, te s konstantnim koeficijentima jer su m, c i k konstante.

Za jedinstveno rješenje moramo zadati početne uvjete (za $t=0$). Budući da se radi o jednadžbi drugoga reda, trebaju nam dva početna uvjeta: početni pomak $u(0)$ i početna brzina $\dot{u}(0)$. Konstrukcije često miruju prije dinamičke pobude, a takvi se uvjeti ($u(0)=0,\ \dot{u}(0)=0$) nazivaju homogenim početnim uvjetima.

1.11.1. Klasično rješenje

Klasično analitičko rješenje[7] diferencijalne jednadžbe gibanja se dobije kao zbroj homogenog (komplementarnog) i partikularnog rješenja:

$$u(t)=u_c(t)+u_p(t) \tag{47}$$

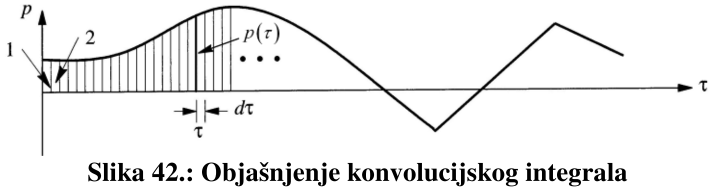
Naravno, zbroj vrijedi ako je jednadžba linearna (vrijedi princip superpozicije). Komplementarno rješenje $u_c(t)$ za $p(t)=0$ zadovoljava početne uvjete, a partikularno rješenje $u_p(t)$ za $p(t)$ ima oblik pobude i ne mora zadovoljiti početne uvjete.

Ovaj postupak je pogodan za:

- proračun slobodnog titranja (za $p(t)=0$) i
- analitički definirane funkcije pobude $p(t)$.

1.11.2. Duhamelov integral

Još jedan poznati pristup rješavanju jednadžbe gibanja je uporaba specijalnoga oblika konvolucijskog integrala koji se naziva *Duhamelov integral*, pri čemu je funkcija opterećenja prikazana nizom kratkih impulsa (slika 42.).



Slika 42.: Objašnjenje konvolucijskog integrala

Odziv modela jednak je sumi odziva za svaki impuls $p(\tau)$:

$$u(t)=\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t p(\tau)\sin[\omega_n(t-\tau)]d\tau \tag{48}$$

[7] Mat. 2: http://www.grad.hr/nastava/matematika/mat2/node29.html

Rješenje (48) vrijedi za homogene početne uvjete i $\omega_n = \sqrt{k/m}$.
Ovisno o definiranju funkcije pobude traži se rješenje integrala:

- analitička funkcija: moguće analitičko rješenje integrala ili
- numerički definirana pobuda: numerička integracija (trapezna, Simpsonova, Gaußova formula).

Znači, Duhamelov integral se može proračunati numeričkim metodama (proračun u vremenskom području), no treba ipak napomenuti da postoje učinkovitije numeričke metode za određivanje dinamičkog odziva.

1.11.3. Rješenje u frekvencijskom području

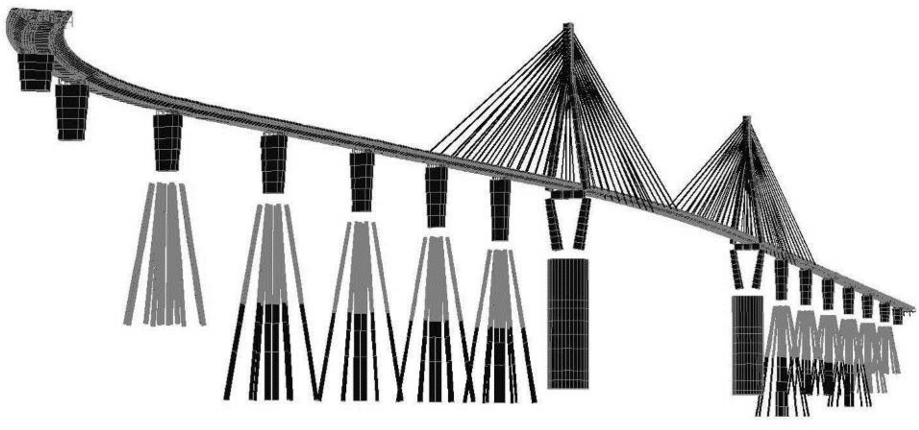
Transformacijske metode (Laplaceova i Fourierova transformacija) se upotrebljavaju za rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi. Budući da je koncept obiju transformacijskih metoda vrlo sličan, u daljnjem tekstu ukratko će se pokazati upotreba Fourierovih transformacija u dinamičkoj analizi u frekvencijskom području.
Fourierovom transformacijom se pobuda u vremenu $p(t)$ definira u frekvencijskom području kao funkcija $P(\omega)$ koju čini niz harmonijskih funkcija, a odziv modela jednak je sumi odziva za svaku funkciju niza.

Skraćeno: $p(t) \to P(\omega) \to U(\omega) \to u(t)$

Motivacija za korištenje spomenutih transformacija može biti učinkovitije rješavanje Duhamelovog integrala.
Ovisno o definiranju funkcije pobude, koriste se postupci:

- analitička funkcija: analitičko rješenje integrala,
- numerički definirana funkcija: diskretna Fourierova transformacija (DFT),
    - algoritam: brza Fourierova transformacija (FFT) – vrlo učinkovita.

Metode u frekvencijskom području se učinkovito mogu primijeniti pri međudjelovanju konstrukcije i neomeđenog medija, na primjer kod mostova (slika 43.) i brana (slika 44.).



Slika 43.: Inačica mosta kopno – Pelješac

Slika 44.: Međudjelovanje brane i vode u velikoj akumulaciji (neomeđeno)
izvor: http://www.epoch-suite.com/casestudies.html

1.11.4. Numeričko rješenje

Sve dosad spomenute metode su temeljene na principu superpozicije što znači da je njihova primjena ograničena samo na linearne modele. Znači, ne mogu se upotrijebiti za analizu neelastičnog odziva građevina pri jakim potresima.

Numeričke metode se temelje na zamisli vremenske diskretizacije pri čemu je funkcija pobude analitički ili numerički definirana. Numeričke metode se mogu upotrijebiti i za linearne i za nelinearne modele.

1.12. Vršne vrijednosti

Odziv modela prema bilo kojoj metodi je u funkciji vremena, no od posebnog interesa je odrediti vršnu vrijednost odziva odnosno amplitudu.

Po definiciji je vršna vrijednost odziva MAKSIMUM APSOLUTNE VRIJEDNOSTI funkcije odziva,

$$r_0 = \max_t |r(t)|, \qquad r(t) = u(t), \dots, M(t), \dots, \sigma(t), \dots \tag{49}$$

i uvijek je pozitivna veličina.

2. Sustav s jednim stupnjem slobode: slobodno titranje

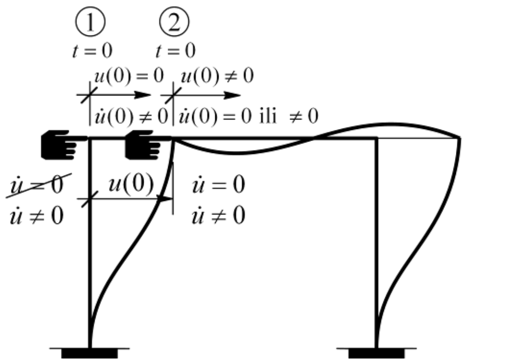
2.1. Slobodno titranje bez prigušenja

Slobodno titranje ($p = 0$)[8] sustava s jednim stupnjem slobode bez prigušenja ($c = 0$) može se izraziti diferencijalnom jednadžbom:

$$m\ddot{u} + ku = 0. \tag{50}$$

Jedine pobude sustava su početni uvjeti, početni pomak $u(0)$ i/ili početna brzina $\dot{u}(0)$. Na primjeru okvira sa slike 45. govorimo o uspravnom ili otklonjenom okviru na početku mjerenja vremena ($t = 0$). Mogući početni uvjeti su:

- uspravni okvir, 1:
  - $u(0) = \dot{u}(0) = 0$: nema gibanja ($p = 0$), rješenje: $u = 0$
  - $u(0) = 0$ i $\dot{u}(0) \neq 0$
- otklonjeni okvir, 2:
  - $u(0) \neq 0$ i $\dot{u}(0) = 0$
  - $u(0) \neq 0$ i $\dot{u}(0) \neq 0$



Slika 45.: Objašnjenje početnih uvjeta na okviru

Jednadžbu (50) možemo pisati:

$$ku = -m\ddot{u}\,,\; u = -(m/k)\ddot{u} \tag{51}$$

Očito su funkcija i druga derivacija iste do na konstantu:

$$u = a\ddot{u}\,,\; a = -m/k \;\text{– konstanta} \tag{52}$$

Idealan izbor rješenja jednadžbe (50) jest:

$$u = e^{st}\,,\; \ddot{u} = s^2 e^{st}\,,\,(\,s^2 = a\,) \tag{53}$$

Ako uvrstimo u (50), dobit ćemo:

$$(ms^2 + k)e^{st} = 0\,,\,(\,e^{st} > 0\,) \tag{54}$$

Izraz je jednak nuli ako je:

$$ms^2 + k = 0\,,\;\text{(karakteristična jednadžba)} \tag{55}$$

Rješenje jednadžbe (55) je:

$$s^2 = -k/m\,,\; s_{1,2} = \pm\sqrt{-k/m} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{k/m} = \pm i\omega_n \tag{56}$$

pri čemu su $s_{1,2} = \pm i\omega_n$ karakteristični korijeni, a pomaci su: $e^{s_1 t}$ i $e^{s_2 t}$.

Budući da se radi o linearnoj jednadžbi, vrijedi princip superpozicije što znači da je linearna kombinacija $e^{s_1 t}$ i $e^{s_2 t}$ također rješenje. Dakle:

$$u(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \;\text{(uvrstite u } m\ddot{u} + ku = 0\text{)}^9 \tag{57}$$

[8] više nećemo dosljedno pisati funkcijsku ovisnost o t

[9] Mat. 2: http://www.grad.hr/nastava/matematika/mat2/node29.html

Nakon uvrštavanja izraza (56) u (57) konačno dobivamo:

$$u(t) = A_1 e^{i\omega_n t} + A_2 e^{-i\omega_n t} \tag{58}$$

Rješenje (58) je u imaginarnom području (sadrži imaginarnu jedinicu), a znamo da je titranje okvira realan problem s realnim rješenjem – pomak $u(t)$. Logičan korak je prelazak u realno područje za što rabimo Eulerov obrazac[10]:

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x. \tag{59}$$

Uz

$$x = \omega_n t, \tag{60}$$

dobit ćemo:

$$e^{\pm i\omega_n t} = \cos \omega_n t \pm i \sin \omega_n t \quad \text{što uvrstimo u izraz za } u(t). \tag{61}$$

Budući da je pomak realna veličina, konstante A_1 i A_2 moraju biti konjugirano kompleksni brojevi:

$$A_{1,2} = a \pm bi \Rightarrow A_1 + A_2 = 2a = A,\ (A_1 - A_2)i = 2bi \cdot i = -2b = B. \tag{62}$$

Rješenje u realnom području glasi:

$$u(t) = A\cos \omega_n t + B \sin \omega_n t, \tag{63}$$

a brzina je

$$\dot{u}(t) = -\omega_n A \sin \omega_n t + \omega_n B \cos \omega_n t. \tag{64}$$

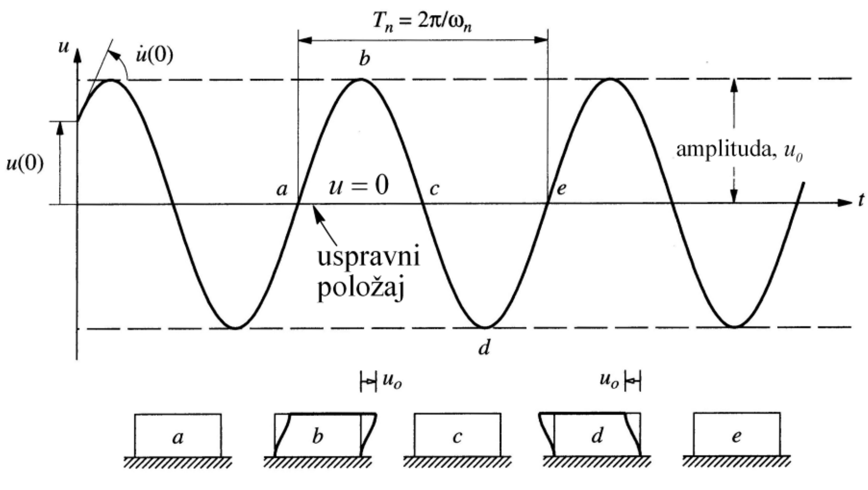
Iznosi konstanata A i B se određuju iz početnih uvjeta:

$$u(0) = A \text{ i } \dot{u}(0) = \omega_n B. \tag{65}$$

Konačno rješenje jest:

$$u(t) = u(0)\cos \omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t. \tag{66}$$

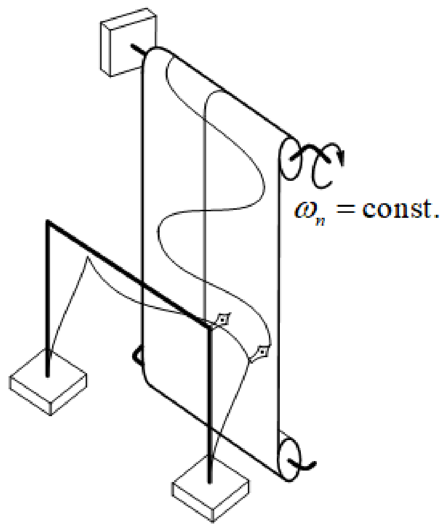
Rješenje (66) daje funkciju gibanja: titranje oko ravnotežnog položaja $u = 0$ (slika 46.).



Slika 46.: Slobodno titranje sustava bez prigušenja

[10] http://en.wikipedia.org/wiki/Euler's_formula#Using_calculus

Primijetimo da se bilo koji položaj ponavlja svakih $2\pi / \omega_n$ sekundi (primjer: a i e): identičan je pomak i brzina (nagib tangente). Dio krivulje $a-e$ opisuje jedan slobodni titraj okvira. Ovakvo gibanje naziva se jednostavnim harmonijskim gibanjem (opisano harmonijskom funkcijom) pri čemu je prirodna kružna frekvencija titraja konstanta $\omega_n = \sqrt{k/m}$ [rad/s] (indeks n: od engl. NATURAL).



Slika 47.: Prirodna kružna frekvencija titraja

Trag pera na papiru koji namatamo frekvencijom $\omega_n = \mathrm{const.}$ (slika 47.) može poslužiti za fizikalno pojašnjenje kružne frekvencije.

Prirodni period titraja (titrajno vrijeme) jest:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \text{ [s]} \quad \text{trajanje titraja [s]} \tag{67}$$

a prirodna (ciklička) frekvencija titraja:

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} \text{ [Hz]} \quad \text{broj titraja u sekundi } [\mathrm{s}^{-1}] \tag{68}$$

Riječ PRIRODNA ističe slobodno titranje, bez prisile. Svojstva titranja ω_n, T_n i f_n ovise SAMO O MASI I KRUTOSTI, a ne o početnim uvjetima $u(0)$ i $\dot{u}(0)$!

Ako imamo dva okvira jednake mase m, krući okvir (veća k) će imati veću frekvenciju f_n, a manji period T_n. Slično, ako imamo dva okvira jednake krutosti k, teži okvir (veća m) imat će manju frekvenciju f_n, a veći T_n.

Ako je pomak od težine u promatranom smjeru (str. 21):

$$\delta_{\mathrm{st}} = mg/k \tag{69}$$

uz $k = mg / \delta_{\mathrm{st}}$ možemo odrediti kružnu frekvenciju, frekvenciju i period bez dinamičkoga proračuna:

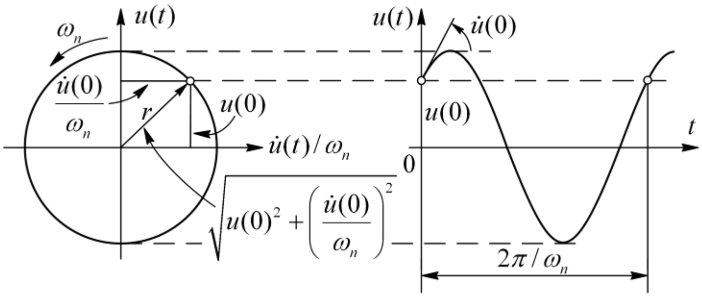
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\mathrm{st}}}}, \quad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{\mathrm{st}}}{g}}, \quad f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{\mathrm{st}}}} \tag{70}$$

Uobičajeni periodi u zgradarstvu se kreću od $0,1$ do $2,0$ sekunde.

Primijetite na slici 46. da sustav titra između dvije amplitude $\pm u_0$. Za pojašnjenje, skicirajmo međuovisnost brzine i pomaka. Ako deriviramo pomak (izraz (66)), dobit ćemo brzinu

$$\dot{u}(t) = -\omega_n u(0) \sin \omega_n t + \dot{u}(0) \cos \omega_n t \; / \quad : \omega_n \tag{71}$$

Zatim kvadriramo $u(t)$ i $\dot{u}(t)/\omega_n$ i zbrojimo, grupiramo po $[u(0)]^2$ i $[\dot{u}(0)/\omega_n]^2$, uz $\sin^2\omega_n t+\cos^2\omega_n t=1$ te konačno dobivamo jednadžbu kružnice u sustavu $\langle \dot{u}(t)/\omega_n, u(t)\rangle$:



$$\underbrace{\left(\frac{\dot{u}(t)}{\omega_n}\right)^2}_{x^2}+\underbrace{u(t)^2}_{y^2}=\underbrace{u(0)^2+\left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\right)^2}_{r^2} \tag{72}$$

Slika 48.: Slobodan odziv: analogija kružnog i harmonijskog gibanja

Prema slici 48. polumjer r jednak je amplitudi titraja:

$$u_0=\sqrt{u(0)^2+\left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\right)^2}. \tag{73}$$

Amplituda ovisi o početnim uvjetima (i frekvenciji – k i m).
U graničnim slučajevima (neizmjerno kruta greda okvira nasuprot grede bez krutosti) omjer frekvencija iznosi najviše dva:

$$\omega_n\,|_{EI_b\to\infty}=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{24EI_c}{mh^3}},\qquad \omega_n\,|_{EI_b=0}=\sqrt{\frac{6EI_c}{mh^3}}. \tag{74}$$

Za neizmjerno krutu gredu okvira sa zglobnim ležajevima kružna frekvencija jest

$$\omega_n=\sqrt{\frac{6EI_c}{mh^3}} \tag{75}$$

i dva puta je manja od kružne frekvencije upetoga okvira s istom gredom. Znači, osim o svojstvima štapova, prirodna frekvencija ω_n ovisi i o rubnim uvjetima.

2.2. Slobodno prigušeno titranje

Jednadžba slobodnoga titranja ($p=0$) s prigušenjem glasi:

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=0 \tag{76}$$

Definiramo dva važna koeficijenta: c_{kr} i ζ ,

$$c_{\mathrm{kr}}=2m\omega_n=2\sqrt{km}=\frac{2k}{\omega_n},\qquad \zeta=\frac{c}{c_{\mathrm{kr}}}=\frac{c}{2m\omega_n} \tag{77}$$

pri čemu je: c – mjera utrošene energije za jednog (slobodnog ili prisilnog) harmonijskog titraja

c_{kr} – kritični koeficijent prigušenja (nema titranja)

ζ – koeficijent relativnog prigušenja (dio kritične vrijednosti)

Koeficijent relativnog prigušenja ζ osim o c ovisi i o svojstvima modela: masi i krutosti.

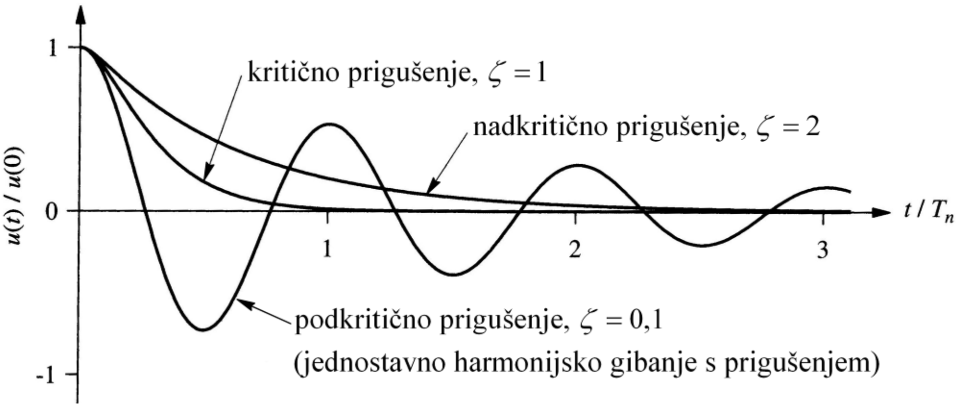
Ako podijelimo izvornu jednadžbu (76) s m i uz $\omega_n = \sqrt{k/m}$, dobit ćemo zapis ovisan o ζ i ω_n (T_n) koje često rabimo u praksi:[11]

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u = 0. \tag{78}$$

2.2.1. Vrste prigušenog gibanja

Na slici 49. prikazana su tri slučaja prigušenog gibanja $u(t)$ za početni pomak $u(0)$:

- $\zeta = 1$, ($c = c_{\mathrm{kr}}$): vraćanje u položaj ravnoteže bez titranja,
- $\zeta > 1$, ($c > c_{\mathrm{kr}}$): isto, ali sporije (manjim prirastima) i
- $\zeta < 1$, ($c < c_{\mathrm{kr}}$): titranje sve manjim amplitudama.



Slika 49.: Slobodno titranje sustava s podkritičnim, kritičnim i nadkritičnim prigušenjem

Kritični koeficijent prigušenja c_{kr} je najmanji iznos viskoznog prigušenja koji sprječava titranje. Znači, razdvaja gibanje bez i s titranjem. U građevinarstvu je prirodno prigušenje vrlo malo pa je zanimljivo slabo (podkritično) prigušenje, $c < c_{\mathrm{kr}}$ ($\zeta < 0,1$). Čak i amortizeri automobila imaju $\zeta < 0,5$.

Nećemo se baviti graničnim (kritičnim) prigušenjem $c = c_{\mathrm{kr}}$ i jakim (nadkritičnim) prigušenjem $c > c_{\mathrm{kr}}$, iako u praksi postoje. Primjerice, kočni mehanizam za zatvaranje vrata je nadkritično prigušen. Puštanjem vrata dolaze u početni položaj bez titranja.

2.2.2. Slabo prigušeni sustav

Ako promatramo odziv slabo prigušenog sustava prikazanog jednom od krivulja na slici 49., možemo primijetiti da sustav opet titra lijevo – desno, slično rješenju za $\zeta = 0$. Znači, možemo pretpostaviti isto rješenje jednadžbe gibanja:

$$u(t) = e^{\mathrm{st}}. \tag{79}$$

Kad uvrstimo (79) u jednadžbu (78), dobit ćemo:

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)e^{\mathrm{st}} = 0,\ (e^{st} > 0). \tag{80}$$

[11] c_{kr} i ζ definirani su tako da diskriminanta karakteristične jednadžbe novog zapisa iščezne za ζ=1 (c=c_{kr}). Radi se o posebnom obliku odziva – bez titranja. Zapis (kanonski) je jednostavniji; sadrži samo dvije konstante.

Karakteristična jednadžba jest:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0\,, \tag{81}$$

a karakteristični korijeni:

$$s_{1,2} = \omega_n(-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2})\,,\ 1-\zeta^2 > 0\,. \tag{82}$$

Vrijedi princip superpozicije pa kombinacija $e^{s_1 t}$ i $e^{s_2 t}$ također daje rješenje.
Opet vrijedi:

$$u(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}, 1-\zeta^2 > 0. \tag{83}$$

Uvrstimo s_1 i s_2:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(A_1 e^{i\omega_D t} + A_2 e^{-i\omega_D t}\right) \tag{84}$$

Primijetimo da je izraz u zagradi sličan rješenju bez prigušenja (izraz (58)), samo je umjesto ω_n kružna frekvencija prigušenog titraja ω_D:

$$\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}. \tag{85}$$

Kad u zagradu uvrstimo Eulerov obrazac:

$$e^{\pm i\omega_D t} = \cos\omega_D t \pm i\sin\omega_D t\,, \tag{86}$$

zagrada postaje:

$$A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t. \tag{87}$$

Ukupno rješenje je dakle:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t), \tag{88}$$

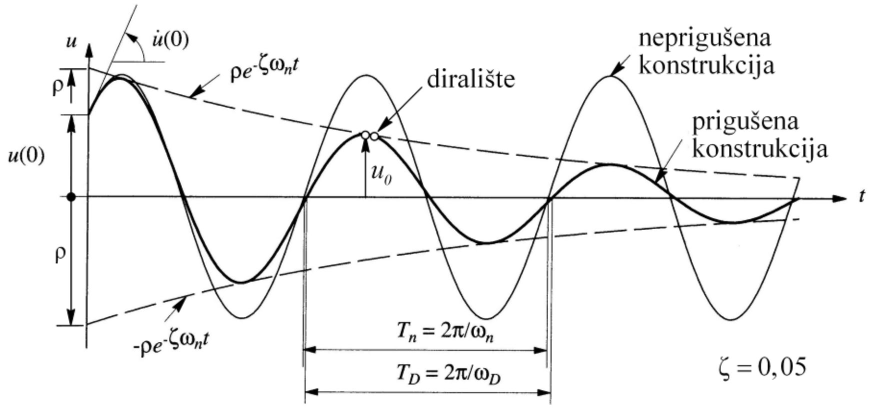
a konstante A i B odredimo iz početnih uvjeta $u(0)$ i $\dot{u}(0)$:

$$A = u(0), \qquad B = \frac{\dot{u}(0) + \zeta\omega_n u(0)}{\omega_D}. \tag{89}$$

Konačno dobivamo odziv slobodnog prigušenog sustava kao:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[u(0)\cos\omega_D t + \frac{\dot{u}(0) + \zeta\omega_n u(0)}{\omega_D}\sin\omega_D t\right]. \tag{90}$$

Za prigušenje $\zeta = 0$, rješenje je jednako gibanju bez prigušenja. Na slici 50. prikazani su slobodni odzivi neprigušenog i prigušenog sustava uz iste početne uvjete za oba modela. Iz rješenja (90) i slike 50. očito je da je prirodna frekvencija prigušenog titraja ω_D.



Slika 50.: Utjecaj prigušenja na slobodno titranje

Prirodni period prigušenog titraja jest:

$$T_D = 2\pi/\omega_D, \tag{91}$$

a veza prirodnog perioda prigušenog T_D i neprigušenog titraja T_n:

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{T_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}. \tag{92}$$

Amplituda titranja opada eksponencijalno, a ovojnica se može odrediti kao:

$$\pm\rho e^{-\zeta\omega_n t}, \tag{93}$$

pri čemu je ρ iznos najveće amplitude (za $t = 0$)[12]. Na slici 50. možemo uočiti da su dirališta ovojnice malo udesno od vršnih vrijednosti u_0.

Koristeći se (67), (91) i (92), možemo dobiti izraz:

$$\frac{\omega_D}{\omega_n} = \sqrt{1-\zeta^2}\,/^2 \tag{94}$$

kojeg kvadriramo i dobijemo jednadžbu jedinične kružnice:

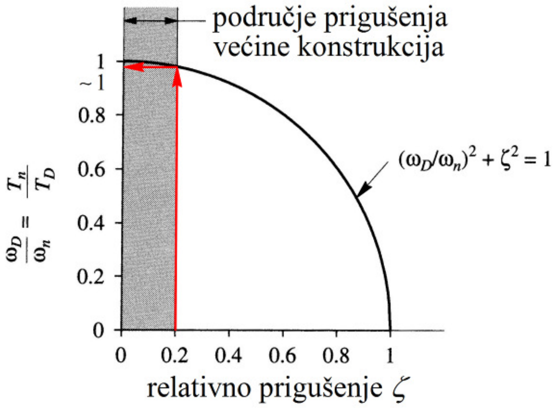
$$\left(\omega_D/\omega_n\right)^2 + \zeta^2 = 1 \tag{95}$$

Na slici 51. prikazan je odziv prigušenog sustava primjenom kružnice, slično kao na slici 48. za neprigušeni sustav.

Slika 51.: Odziv sustava prikazan preko kružnice

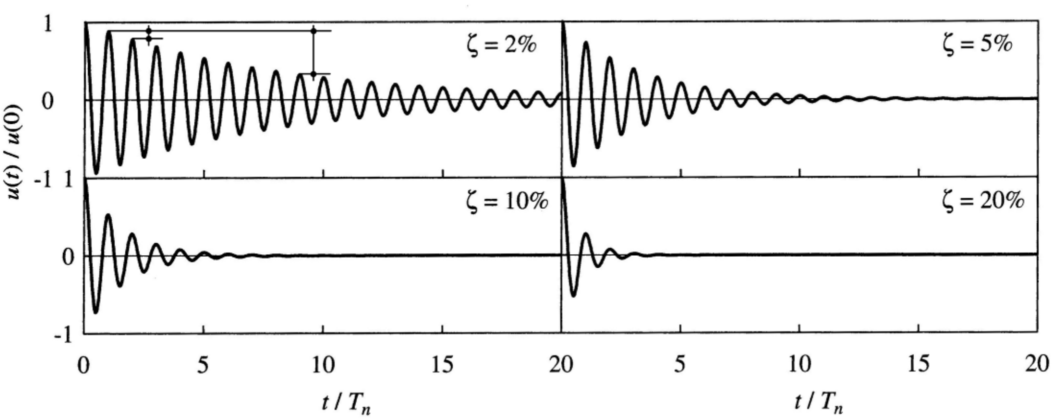
12 bez izvoda: $\rho = \pm\sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0) + \zeta\omega_n u(0)}{\omega_D}\right]^2}$

Prigušenje ζ smanjuje vrijednosti prirodnih frekvencija titraja s ω_n na ω_D, dakle povećava period ($T_D > T_n$). Za uobičajena prigušenja u građevinarstvu ($\zeta < 0,20$) te razlike su zanemarive (slika 52.; promatramo 1. kvadrant gdje su ω_n, ω_D i ζ pozitivni), dakle može se uzeti da su frekvencije i periodi prigušenih sustava jednaki onima od neprigušenih sustava ($\omega_D \approx \omega_n$, $T_D \approx T_n$). Primjerice, za AB konstrukcije koeficijent relativnog prigušenja iznosi $\zeta = 0,05$ pa je prirodna kružna frekvencija prigušenog u odnosu na neprigušeni sustav $\omega_D = \sqrt{1-0,05^2}\,\omega_n = 0,9987\omega_n$. Ako je koeficijent relativnog prigušenja $\zeta = 1$, prirodna kružna frekvencija prigušenog sustava je nula ($\omega_D = 0$, $T_D \to \infty$) i nema titranja. Nasuprot tome, ako je koeficijent relativnog prigušenja $\zeta = 0$, prirodna kružna frekvencija prigušenog i neprigušenog sustava je jednaka ($\omega_D = \omega_n$, $T_n = T_D$), pa sustav slobodno titra istom amplitudom.



Slika 52.: Utjecaj prigušenja na prirodnu frekvenciju titraja

Prigušenje značajno utječe na brzinu smirivanja titranja (naravno vrijedi da za veće prigušenje, imamo manje ciklusa do smirivanja titranja) što možemo primijetiti na slici 53. Pobuda svih primjera prikazanih na slici je početni pomak $u(0)$, $[\dot{u}(0) = 0]$.



Slika 53.: Slobodno titranje sustava za različita prigušenja

2.2.3. Zakon opadanja vršnih vrijednosti

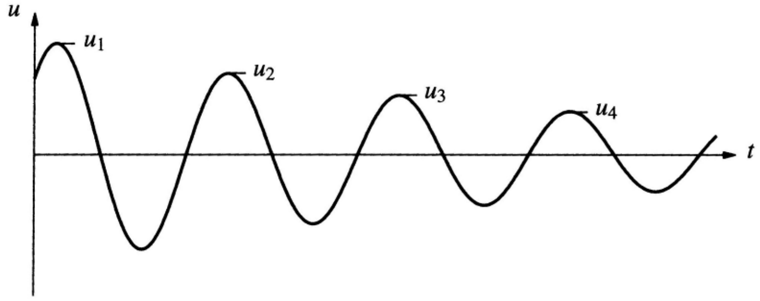
Ako analiziramo omjer pomaka udaljenih za T_D, $u(t)/u(t+T_D)$, koje uvrstimo u rješenje $u(t)$ (izraz (90)), dobit ćemo:

$$\frac{u(t)}{u(t+T_D)} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}[/]}{e^{-\zeta\omega_n t}e^{-\zeta\omega_n T_D}[/]} = e^{\zeta\omega_n T_D} = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, \qquad (96)$$

pri čemu je kraćenje uglatih zagrada označeno s $[/]$ jer je,

$$\cos\omega_D(t+T_D) = \cos\omega_D(t+\frac{2\pi}{\omega_D}) = \cos(\omega_D t + 2\pi) = \cos\omega_D t\,. \qquad (97)$$

Na isti način možemo dokazati da vrijedi $\sin\omega_D(t+T_D) = \sin\omega_D t$. Izraz (96) možemo upotrijebiti za bilo koje uzastopne vrijednosti, također udaljene za T_D (ne moraju biti vršne kao na slici 54.), pa vrijedi:



$$\frac{u_i}{u_{i+1}} = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad /\ln \qquad (98)$$

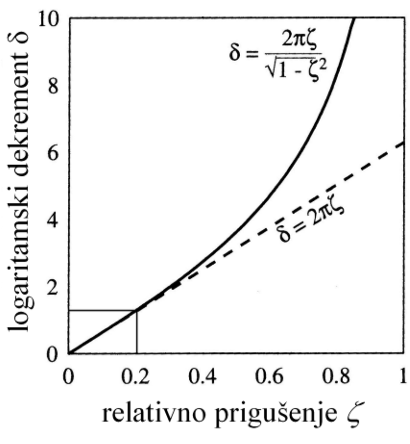
Slika 54.: Amplitude prigušenog titranja

Prirodni logaritam omjera u_i / u_{i+1} naziva se logaritamski dekrement [13]:

$$\delta = \ln\frac{u_i}{u_{i+1}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \qquad (\text{odnosno}: \frac{u_i}{u_{i+1}} = e^{\delta})\,. \qquad (99)$$

Za slabo prigušenje $\sqrt{1-\zeta^2} \approx 1$, pa približno vrijedi:

$$\delta \approx 2\pi\zeta \qquad (100)$$



Slika 55.: Točan i približan odnos logaritamskog dekrementa i koeficijenta relativnog prigušenja

[13] logaritamsko opadanje

Primijetimo na slici 55. dobro podudaranje točne i približne vrijednosti logaritamskog dekrementa za $\zeta < 0,2$ (područje većine konstrukcija). Ako je razlika uzastopnih vršnih vrijednosti mala, što je slučaj kod slabo prigušenih sustava, teško je precizno izmjeriti bliske vrijednosti amplituda pa je poželjno uspostaviti omjer udaljenih amplituda, nakon *j* titraja:

$$\frac{u_1}{u_{j+1}} = \frac{u_1}{u_2}\frac{u_2}{u_3}\frac{u_3}{u_4}\cdots\frac{u_j}{u_{j+1}} = \underbrace{e^{\delta}e^{\delta}e^{\delta}\ldots e^{\delta}}_{j\text{ puta}} = e^{j\delta} \quad /\ln \tag{101}$$

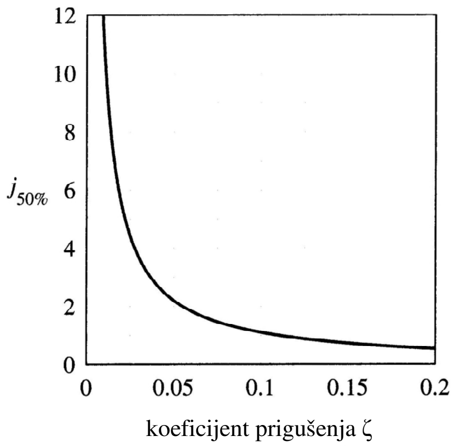
Prema tome:

$$\ln\frac{u_1}{u_{j+1}} = \ln e^{j\delta} = j\delta, \qquad \delta = \frac{1}{j}\ln\frac{u_1}{u_{j+1}} \approx 2\pi\zeta. \tag{102}$$

Primjerice, broj titraja potreban za smanjenje amplitude na pola jest:

$$j \approx \frac{1}{2\pi\zeta}\ln\frac{u_1}{u_{j+1}} = \frac{1}{2\pi\zeta}\ln 2 \approx \frac{0,11}{\zeta} \tag{103}$$

i prikazan je na slici 56. u ovisnosti o prigušenju.



Slika 56.: Broj titraja potreban za smanjenje amplitude na 50% izvorne vrijednosti

2.2.4. Određivanje prigušenja i perioda pokusom

Prigušenje ζ nije moguće odrediti analitički, već se mora odrediti pokusom: titranjem građevina. Jedan način određivanja prigušenja pokusom jest slobodnim titranjem koje možemo realizirati potezanjem konstrukcije užetom koje potom naglo otpustimo (slobodno titranje uz $u(0)$ i $\dot{u}(0) = 0$). Za slabo prigušene sustave vrijedi:

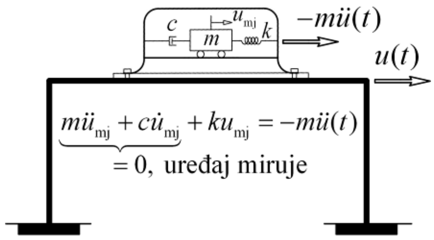
$$\zeta = \frac{1}{2\pi j}\ln\frac{u_i}{u_{i+j}} = \frac{1}{2\pi j}\ln\frac{\ddot{u}_i}{\ddot{u}_{i+j}}. \tag{104}$$

Prvi izraz je dobiven iz logaritamskoga dekrementa za $i = 1$, a drugi izraz deriviranjem omjera $u(t)/u(t+T_D)$ (izraz (96)):

$$\frac{\ddot{u}(t)}{\ddot{u}(t+T_D)} = \frac{(-\zeta\omega_n)^2 e^{-\zeta\omega_n t}[/]}{(-\zeta\omega_n)^2 e^{-\zeta\omega_n t} e^{-\zeta\omega_n T_D}[/]} = e^{\zeta\omega_n T_D} = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}. \tag{105}$$

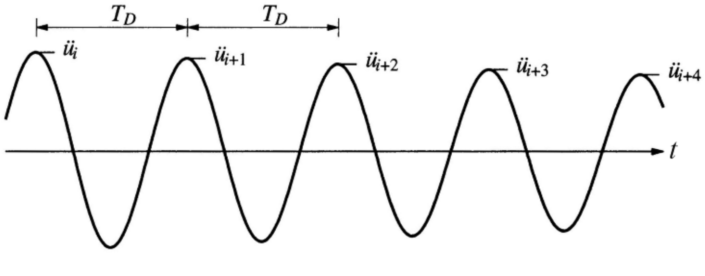
Opet imamo poništenje zagrada [/] jer se drugom derivacijom trigonometrijske funkcije ne mijenjaju. Drugi dio izraza (104) nam je važan jer je lakše je mjeriti ubrzanje nego pomak konstrukcije.

Naime, morali bismo mjeriti pomake i preko 1m (± 50 cm), što je nezgrapno, te ne smije nastati dodatni pomak zbog ubrzanja uređaja. Drugim riječima, uređaj mora reagirati statički na dinamičku pobudu, titranje građevine. To ostvarujemo velikom masom i malom krutosti uređaja što konstrukciju uređaja čini nezgrapnom. Tada je period uređaja puno veći od prirodnog perioda zgrade ($T_D^{uređaja} \gg T_D^{zgrade}$) pa uređaj praktički stoji dok zgrada titra.



Slika 57.: Određivanje prigušenja i perioda mjerenjem pomaka

Prema slici 57. vidimo da se ovaj problem svodi na titranje sustava s jednim stupnjem slobode opterećenim pomakom ležaja $u(t)$. Samo sada je ležaj greda okvira kojeg mjerimo, a uređaj je jednostupanjski sustav prikazan ekvivalentnim modelom. Dakle, pobuda je $u(t)$, a opterećenje uređaja $p_{\text{eff}} = -m\ddot{u}(t)$. Kao da je greda okvira zapravo tlo. Budući da uređaj praktički miruje iz dinamičke jednadžbe ostaje samo: $ku_{\text{mj}} = -m\ddot{u} \Rightarrow u_{\text{mj}} = -(m/k)\ddot{u} = -(1/\omega_n^2)\ddot{u}$. Pobuđena građevina titra po zakonu $u = u_0 \sin\omega_D t \Rightarrow \ddot{u} = -u_0\omega_D^2 \sin\omega_D t$. Tada je $u_{\text{mj}} = (1/\omega_n^2)u_0\omega_D^2 \sin\omega_D t \approx u_0 \sin\omega_D t$, ($\omega_n \approx \omega_D$). Prema tomu $u_{\text{mj}} \approx u$ pa mjerimo pomak grede. Prirodni period sustava T_D se također može odrediti mjerenjem vremena potrebnog za titraj (slika 58). Usporedbom s iznosom iz proračuna $T_D \approx T_n = 2\pi\sqrt{m/k}$, možemo dokazati valjanost usvojenog modela, računske mase i krutosti.



Slika 58.: Zapis ubrzanja sustava koji slobodno titra

Rekli smo da je mjerenje ubrzanja jednostavnije. Radi pojašnjenja treba riješiti dinamičku jednadžbu za $p(t) \neq 0$, a do sada smo analizirali samo slobodno titranje ($p(t) = 0$).

2.3. Energija slobodnoga titranja

Energija slobodnog titranja sustava s jednim stupnjem slobode uz početne uvjete $u(0)$ i $\dot{u}(0)$ je zbroj potencijalne i kinetičke energije koju unosimo u sustav:

$$E_I = \frac{1}{2}k\left[u(0)\right]^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{u}(0)\right]^2. \tag{106}$$

Potencijalna energija $E_S(t)$ ovisi o deformaciji okvira (opruge), a kinetička energija $E_K(t)$ o brzini mase:

$$E_S(t) = \frac{1}{2}k\left[u(t)\right]^2, \quad E_K(t) = \frac{1}{2}m\left[\dot{u}(t)\right]^2. \tag{107}$$

Ako nema prigušenja u sustavu, ukupna je energija samo iz dva dijela,

$$E_S(t) + E_K(t) = \frac{1}{2}k\left[u(t)\right]^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{u}(t)\right]^2. \tag{108}$$

Kad uvrstimo u i $\dot{u}$ slobodnog titranja bez prigušenja (izrazi (66) i (71)), dobit ćemo:

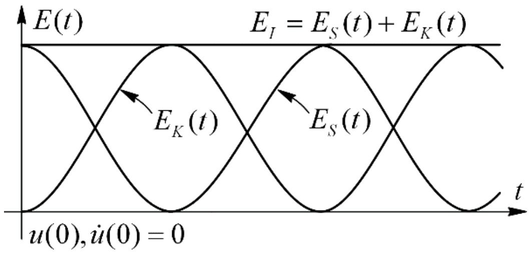
$$E_S(t) \quad = \frac{1}{2}k\left[u(0)\cos\omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\sin\omega_n t\right]^2, \tag{109}$$

$$E_K(t) \quad = \frac{1}{2}m\omega_n^2\left[-u(0)\sin\omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\cos\omega_n t\right]^2. \tag{110}$$

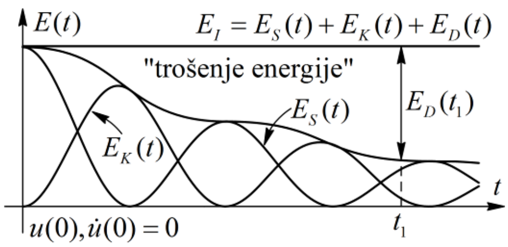
Dokažimo da vrijedi zakon očuvanja energije. Prvo raspišemo i zbrojimo potencijalnu i kinetičku energiju, $E_S(t)$ i $E_K(t)$, zatim uvrstimo $\omega_n^2 = k/m$ i grupiramo po $\left[u(0)\right]^2$ i $\left[\dot{u}(0)/\omega_n\right]^2$ te upotrijebimo identitet: $\sin^2\omega_n t + \cos^2\omega_n t = 1$. Na kraju ostaje:

$$E_S(t) + E_K(t) = \frac{1}{2}k\left[u(0)\right]^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{u}(0)\right]^2 = E_I. \tag{111}$$

Očito ukupna energija ne ovisi o vremenu i jednaka je početno uloženoj energiji (slika 59.).



Slika 59.: Energija slobodnog titranja bez prigušenja



Slika 60.: Energija slobodnog titranja uz prigušenje

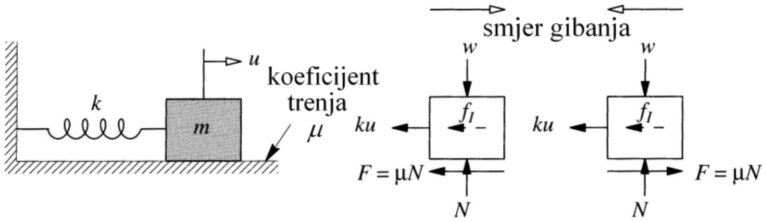
Ako promatramo sustav s prigušenjem, potencijalnu i kinetičku energiju, E_S i E_K, možemo odrediti uvrštavanjem rješenja $u(t)$ prigušenog sustava (izraz (90)) i brzine $\dot{u}(t)$ u izraz (107). Ukupna energija će se sad smanjivati s vremenom zbog rasipanja energije prigušenjem (slika 60.). Znači, uz potencijalnu i kinetičku energiju, pojavljuje se i energija prigušenja $E_D(t)$ (rad sile prigušenja f_D na u) i vrijedi: $E_I = E_S + E_K + E_D$ i $(E_S + E_K) \to 0$, $E_D \to E_I$.

Utrošak energije (ordinata) E_D iznosi ($c = \text{const.}$):

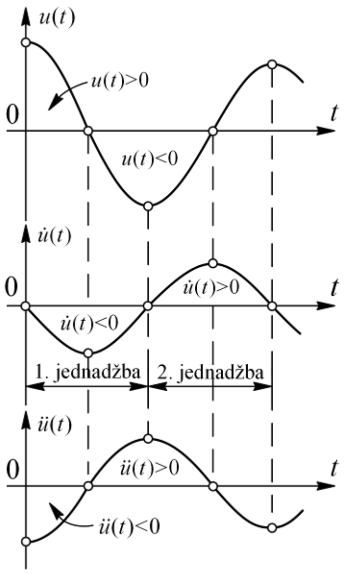
$$E_D = \int f_D du = \int_0^{t_1} (c\dot{u})\dot{u}dt = c\int_0^{t_1} \dot{u}^2 dt. \tag{112}$$

2.4. Slobodno titranje uz Coulombovo trenje

Ako želimo analizirati model konstrukcije s tarnim prigušivačima, primijenit ćemo Coulombovo trenje. Ono jest trenje suhih površina, a sila trenja se može izraziti kao $F = \mu N$, pri čemu je μ koeficijent trenja, a N sila okomita na tarne plohe. Sila F je suprotna od smjera gibanja (smjera brzine, ne pomaka!), a elastična i sila inercije su uvijek istoga smjera (pomak i ubrzanje su suprotnih predznaka, a sila inercije je suprotna ubrzanju, što znači da je u smjeru pomaka).



Slika 61.: Ravnoteža sila uz Coulombovo trenje



Slika 62.: Pomak, brzina i ubrzanje sustava uz Coulombovo trenje

Jednadžba gibanja s desna na lijevo i rješenje te jednadžbe su:

$$m\ddot{u} + ku - F = 0, \quad m\ddot{u} + ku = F, \tag{113}$$

$$u(t) = A_1 \cos \omega_n t + B_1 \sin \omega_n t + u_F,$$

$$u_F = F/k, \text{(partikularno rješenje)},$$

dok su za gibanje s lijeva na desno:

$$m\ddot{u} + ku = -F, \tag{114}$$

$$u(t) = A_2 \cos \omega_n t + B_2 \sin \omega_n t - u_F..$$

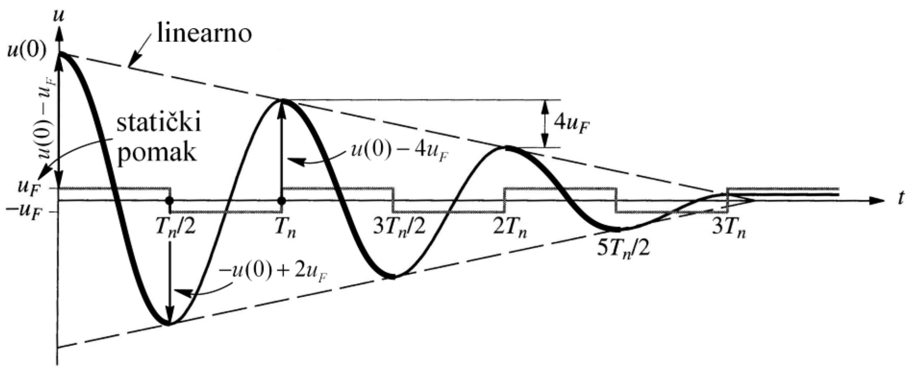
Svaka jednadžba vrijedi za pola titraja.

Ako gibanje počinje s desne strane, početni su uvjeti: $u(0)$ na desno i $\dot{u}(0) = 0$.

Iz rješenja prve jednadžbe možemo odrediti konstante: $A_1 = u(0) - u_F$, a iz derivacije: $B_1 = 0$.

Konačno rješenje jednadžbe gibanja s desna na lijevo za prvih pola titraja jest:

$$u(t) = [u(0) - u_F]\cos \omega_n t + u_F, \qquad 0 \le t \le \pi/\omega_n. \tag{115}$$



Slika 63.: Slobodno titranje sustava uz Coulombovo trenje

Prema slici 63, amplituda iznosi $u(0) - u_F$ (funkcija je translatirana za u_F). Jednadžba (115) vrijedi do $\dot{u} = 0$, za $\pi / \omega_n = T_n / 2$ i tada je pomak: $u(T_n / 2) = -u(0) + 2u_F$. Zatim iz mirovanja ($\dot{u} = 0$) krećemo u desno i vrijedi rješenje druge jednadžbe (114), a uz početne uvjete $u(T_n / 2) = -u(0) + 2u_F$ i $\dot{u}(T_n/2) = 0$ dobivamo konstante: $A_2 = u(0) - 3u_F$ i $B_2 = 0$ $[iz\ \dot{u}(t)]$.

Konačno rješenje jednadžbe gibanja s lijeva na desno za drugih pola titraja jest:

$$u(t) = [u(0) - 3u_F]\cos \omega_n t - u_F \qquad \pi / \omega_n \le t \le 2\pi / \omega_n \tag{116}$$

Amplituda iznosi $u(0) - 3u_F$, a pomak funkcije $-u_F$. Jednadžba (116) vrijedi do $\dot{u} = 0$ za $2\pi / \omega_n = T_n$ (slika 63.) i tada je pomak: $u(T_n) = u(0) - 4u_F$. Razlika amplituda iznosi: $u_1 - u_2 = 4u_F$, (općenito, $u_i - u_{i+1} = 4u_F$). Zatim iz mirovanja krećemo opet u lijevo pa vrijedi jednadžba (113), a uz početne uvjete: $u(T_n) = u(0) - 4u_F$ i $\dot{u}(T_n) = 0$ odredimo A_1 i B_1, pa dobivamo:

$$u(t) = [u(0) - 5u_F]\cos \omega_n t + u_F, \qquad 2\pi/\omega_n \le t \le 3\pi/\omega_n. \tag{117}$$

Amplituda iznosi $u(0) - 5u_F$, a pomak funkcije u_F. Primijetimo da je za pola titraja potrebno vremena π / ω_n, a titraj za $T_n = 2\pi / \omega_n$. Znači, trenje ne utječe na period slobodnog neprigušenog titraja.

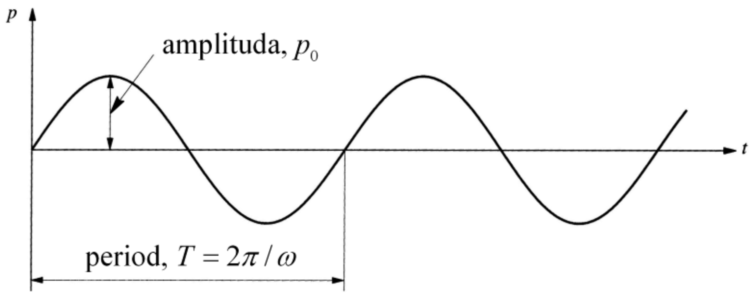
Kod Coulombovog trenja vrijedi linearni (ne eksponencijalni) zakon opadanja amplituda, a do zaustavljanja gibanja dolazi kad je amplituda u_0 manja od granične u_F (elastična sila ku_0 je manja od sile trenja $F = \mu N$). Konačni položaj sustava je pomaknut u odnosu na izvorni ravnotežni položaj, a laganom ga trešnjom obično možemo vratiti u početni položaj $u = 0$.

Primijetimo da viskozno prigušenje ne zaustavlja gibanje (amplitude su sve manje, ali nikada jednake nuli). Budući da se konstrukcije ipak zaustavljaju, trenje sigurno postoji, no najčešće se ne modelira izravno, već se koristi zamjenjujuće viskozno prigušenje. Iznimka su tarni prigušivači kod kojih se modelira i trenje.

3. Sustav s jednim stupnjem slobode: harmonijska pobuda

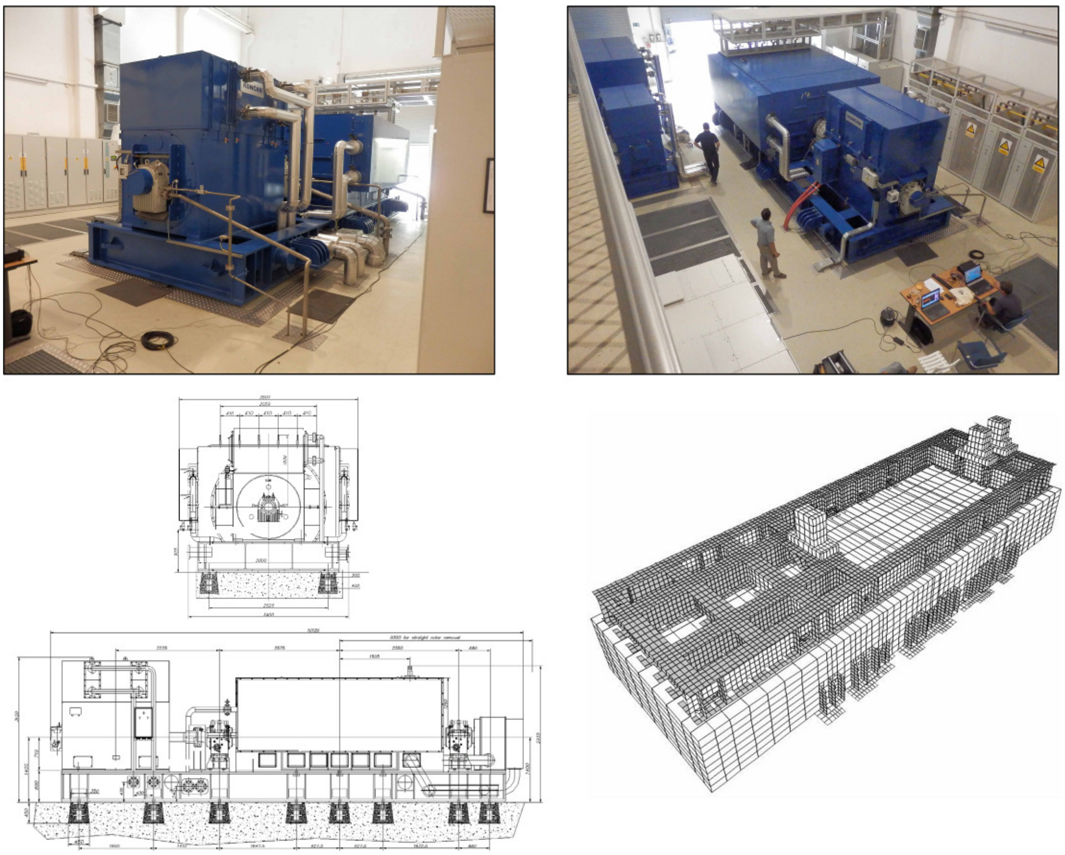
Analiza odziva sustava s jednim stupnjem slobode na harmonijsku pobudu je nezaobilazna tema u dinamici konstrukcija, ne samo zbog primjene u inženjerskoj praksi (primjerice, odziv na pobudu ekscentričnom rotirajućom masom), već i zbog uvida u ponašanje prema drugim tipovima pobude. Također, rezultati su primjenjivi na pobudu potresom.

Harmonijska pobuda jest $p(t) = p_0 \sin \omega t$ ili $p(t) = p_0 \cos \omega t$, pri čemu su p_0, ω i T amplituda, frekvencija i period pobude (prisile), prikazani na slici 65.

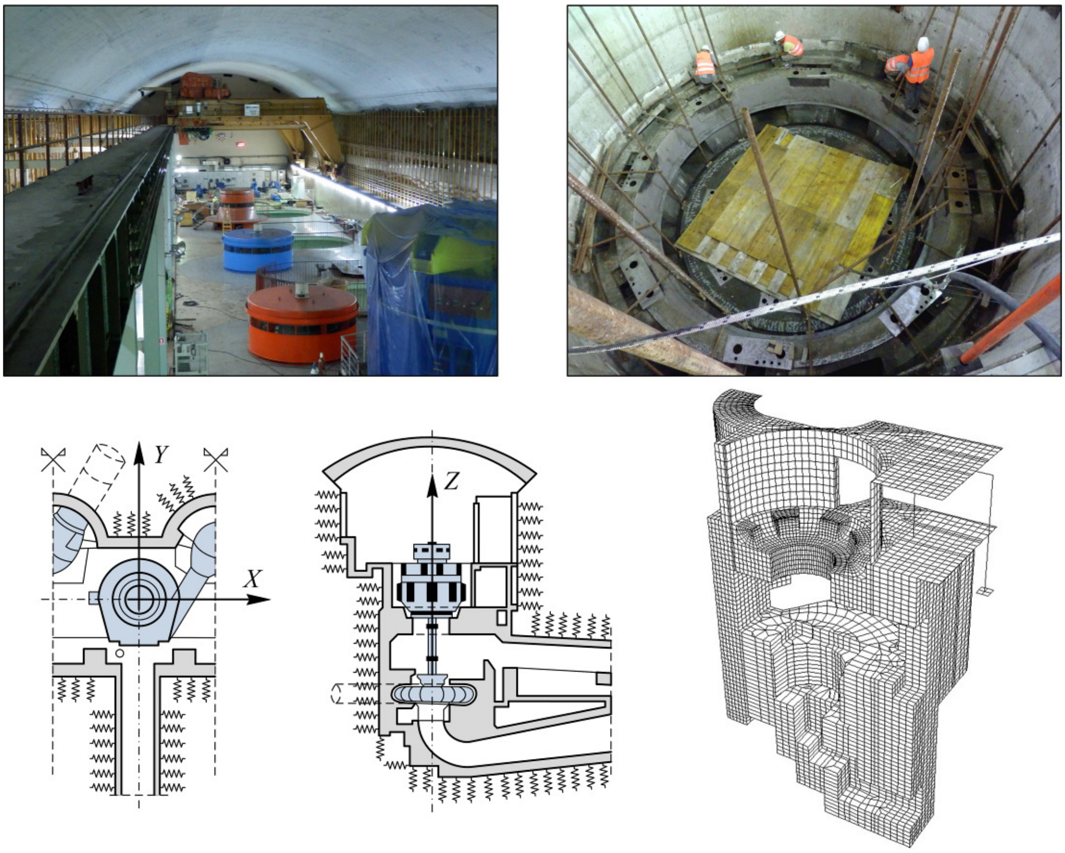


Slika 64.: Harmonijska pobuda

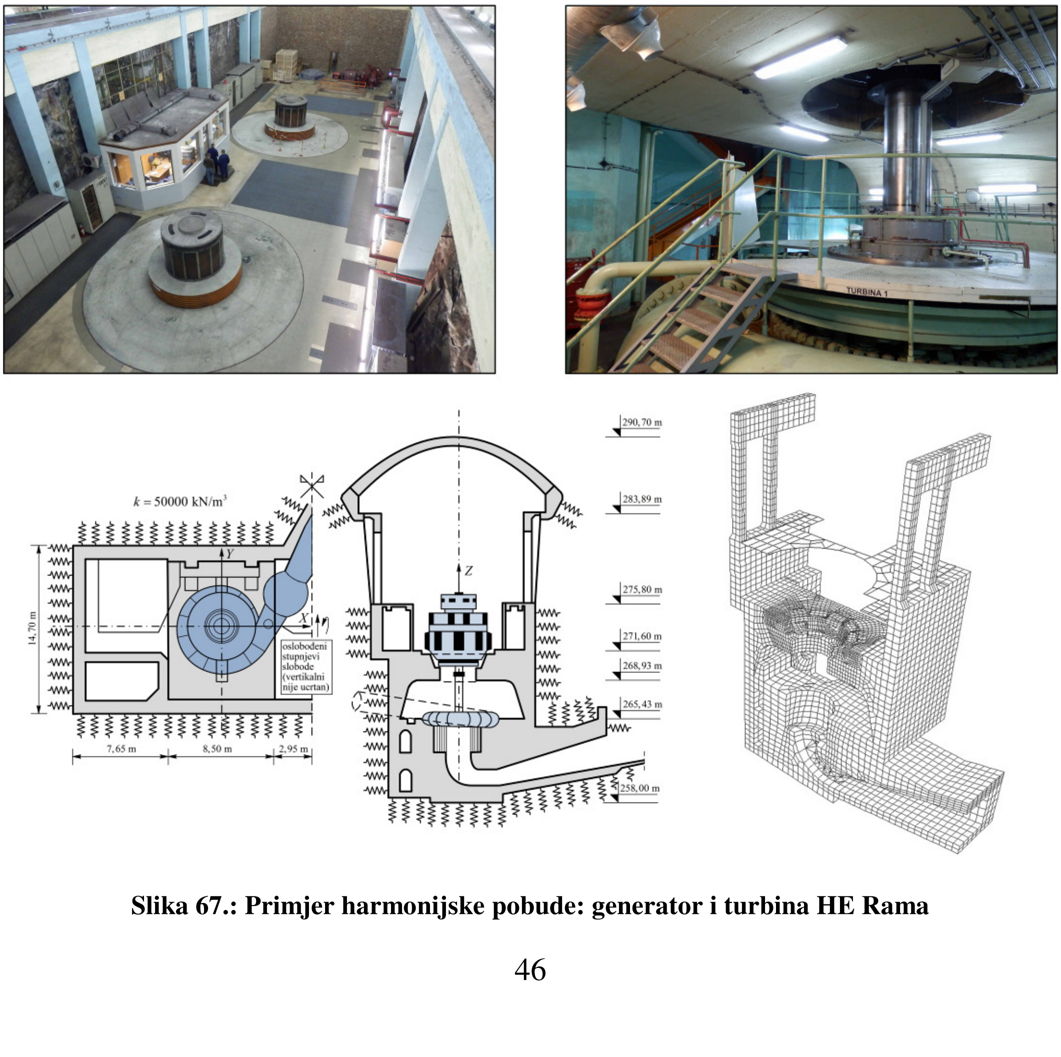
Na slikama 65.-67. prikazani su neki primjeri harmonijske pobude iz inženjerske prakse.



Slika 65.: Primjer harmonijske pobude: turbogenerator Končar



Slika 66.: Primjer harmonijske pobude: generator i turbina HE Zakučac



Slika 67.: Primjer harmonijske pobude: generator i turbina HE Rama

3.1. Harmonijska pobuda kod sustava bez prigušenja

Diferencijalna jednadžba gibanja za sustav bez prigušenja i pobudu u obliku funkcije sinus jest:

$$m\ddot{u} + ku = p_0 \sin \omega t \tag{118}$$

Početni su uvjeti (za $t = 0$, početak opterećenja): $u(0)$ i $\dot{u}(0)$. Budući da je jednadžba linearna, vrijedi princip superpozicije. Ukupno rješenje jest:

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t), \tag{119}$$

pri čemu je homogeno rješenje (za $p = 0$, izraz (63)):

$$u_c(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t\,. \tag{120}$$

Partikularno rješenje (za $p \neq 0$) možemo izabrati tako da je oblik funkcije pobude i odziva isti, ili tražiti da zbroj funkcije i druge derivacije bude jednak funkciji sinus. Dakle, funkcija sinusa je dobar kandidat:

$$u_p(t) = C \sin \omega t\,,\ \text{odnosno}\ \ \ddot{u}_p(t) = -C\omega^2 \sin \omega t. \tag{121}$$

Kad (121) uvrstimo u jednadžbu (118), dobit ćemo: $C(k - m\omega^2) = p_0$ i $C = p_0 / (k - m\omega^2)$.

Uz $m = k / \omega_n^2$ dobivamo:

$$C = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1-(\omega / \omega_n)^2} \tag{122}$$

i partikularno rješenje jest:

$$u_p(t) = C \sin \omega t = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t, \qquad \omega \neq \omega_n. \tag{123}$$

Ukupno (homogeno i partikularno) rješenje jednadžbe (118) jest:

$$u(t) = \underbrace{A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t}_{\text{homogeno}} + \underbrace{\frac{p_0}{k} \frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t}_{\text{partikularno}}\,. \tag{124}$$

Za određivanje konstanata A i B odredimo brzinu:

$$\dot{u}(t) = -A\omega_n \sin \omega_n t + B\omega_n \cos \omega_n t + \frac{p_0}{k} \frac{\omega}{1-(\omega/\omega_n)^2} \cos \omega t. \tag{125}$$

Iz početnoga pomaka slijedi: $u(0) = A$, a iz početne brzine:

$$\dot{u}(0) = B\omega_n + \frac{p_0}{k} \frac{\omega}{1-(\omega/\omega_n)^2}\,. \tag{126}$$

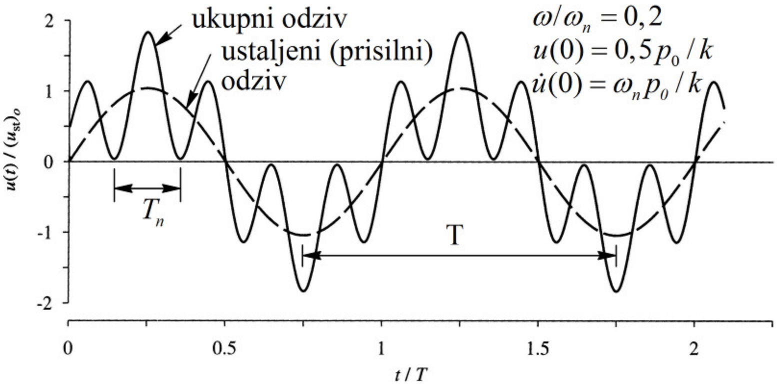
Prema tomu, konstante A i B su:

$$A = u(0), \qquad B = \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{p_0}{k} \frac{\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}. \tag{127}$$

Nakon što konstante A i B uvrstimo u rješenje (124), konačno dobivamo:

$$u(t)=\underbrace{u(0)\cos\omega_n t+\left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}-\frac{p_0}{k}\frac{\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right]\sin\omega_n t}_{\text{prolazni dio}}+\underbrace{\frac{p_0}{k}\frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2}\sin\omega t}_{\text{prisilni, ustaljeni dio}}. \tag{128}$$

Titranje ovisi o $\sin(\cdot)$ i $\cos(\cdot)$ jer su funkcije od t, a ostalo su konstante. Prolazno titranje sadrži članove $\sin\omega_n t$ i $\cos\omega_n t$ i predstavlja titranje frekvencijom slobodnog odziva ω_n, a ovisi o početnom uvjetu $u(0)$ i zagradi $[\cdot]$. Prisilno, ustaljeno titranje sadrži član $\sin\omega t$, koji predstavlja titranje frekvencijom pobude ω (vođeno i traje koliko i pobuda).



Slika 68.: Titranje neprigušenog sustava pri harmonijskoj pobudi

Budući da postoji pobuda, moguće je gibanje i uz homogene početne uvjete. Kad uvrstimo $u(0)=\dot{u}(0)=0$ u jednadžbu (128), dobit ćemo:

$$u(t)=\frac{p_0}{k}\frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{\omega_n}\sin\omega_n t\right). \tag{129}$$

Prolazno titranje jest razlika ukupnog i prisilnog odziva, a u slučaju bez prigušenja traje vječno, konstantnom amplitudom. Realno je ipak da nakon nekog vremena iščezava pa otuda naziv PROLAZNO. Nakon što prolazni dio iščezne, ostaje samo prisilni dio (konstantne amplitude, uz $\sin\omega t$) [pogledati drugi dio izraza (128)]:

$$u(t)=(u_{st})_0\left[\frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right]\sin\omega t, \tag{130}$$

pri čemu je $(u_{st})_0 = p_0/k > 0$ amplituda statičkog pomaka:[14]

$$u_{st}(t)=\frac{p(t)}{k}=\frac{p_0}{k}\sin\omega t, \qquad (\underbrace{m\ddot{u}}_{\approx 0}+ku=p_0\sin\omega t). \tag{131}$$

Ako zamislimo lagani okvir ($m\approx 0$) kod kojega je zanemariva sila inercije, pomak okvira jest statički, ali ovisi o vremenu jer je $p(t)$ funkcija vremena [izraz (131)].

Ako istaknemo odziv i pobudu, dobivamo:

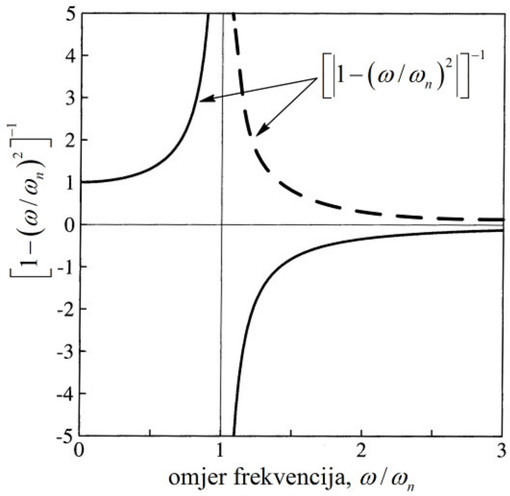
[14] ili kraće samo statički pomak

$$u(t) = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right] p_0 \sin \omega t \tag{132}$$

Predznak zagrade u izrazima (130) ili (132) određuje smjer odziva prema smjeru pobude.

Na slici 69. punim linijama su označena dva slučaja mogućih predznaka zagrade:

- za $\omega/\omega_n < 1$ ($\omega < \omega_n$), zagrada je pozitivna pa su $u(t)$ i $p(t)$ istoga smjera (pomak je u fazi s opterećenjem)
- za $\omega/\omega_n > 1$ ($\omega > \omega_n$), zagrada je negativna pa su $u(t)$ i $p(t)$ suprotnoga smjera, (pomak i opterećenje su izvan faze)



Slika 69.: Faktor $[1-(\omega/\omega_n)^2]^{-1}$ u ovisnosti o omjeru frekvencija

Ako navedeno zapišemo matematički, dobit ćemo opći zapis prisilnoga odziva u obliku:

$$u(t) = (u_{st})_0 \left[\frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right] \sin \omega t = u_0 \sin(\omega t - \phi), \tag{133}$$

pri čemu amplituda u_0 iznosi:

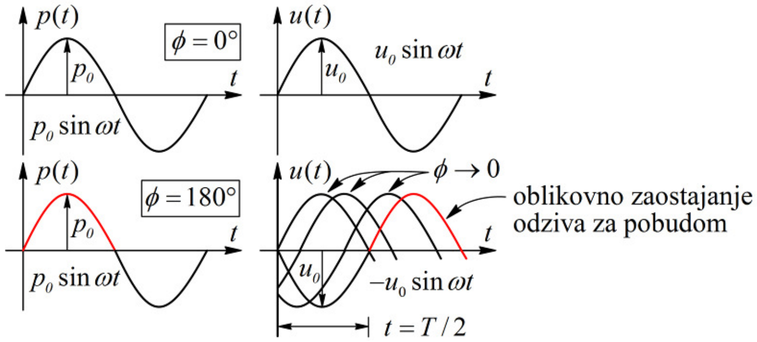
$$u_0 = (u_{st})_0 \left[\frac{1}{|1-(\omega/\omega_n)^2|}\right], \tag{134}$$

a prema definiciji je pozitivna pa se zbog toga pojavljuje apsolutna vrijednost nazivnika. Znači, gubimo predznak zagrade (prebacimo ga uz funkciju $\sin \omega t$), a nadoknadimo ga rabeći fazni kut ϕ. Time dobivamo:

$$\sin(\omega t - \phi), \quad \phi = \begin{cases} 0^\circ & \text{za } \omega < \omega_n \quad \sin \omega t, \\ 180^\circ & \text{za } \omega > \omega_n \quad -\sin \omega t. \end{cases} \tag{135}$$

Ako je $\phi = 0^\circ$, pomak se mijenja u smjeru opterećenja, a ako je $\phi = 180^\circ$, pomak se mijenja suprotno opterećenju (slika 70.). Za $\phi = 180^\circ$, dolazi do KAŠNJENJA odziva $u(t)$ za opterećenjem $p(t)$

$$\sin(\omega t - \phi) = 0 \Rightarrow \omega t - \phi = 0 \Rightarrow t = \frac{\phi}{\omega} = \frac{\pi}{2\pi/T} = \frac{T}{2}.$$



Slika 70.: Opterećenje i pomak u ovisnosti o faznom kutu

Još jedan važan zapis prisilnog odziva jest (uvodimo oznaku R_d):

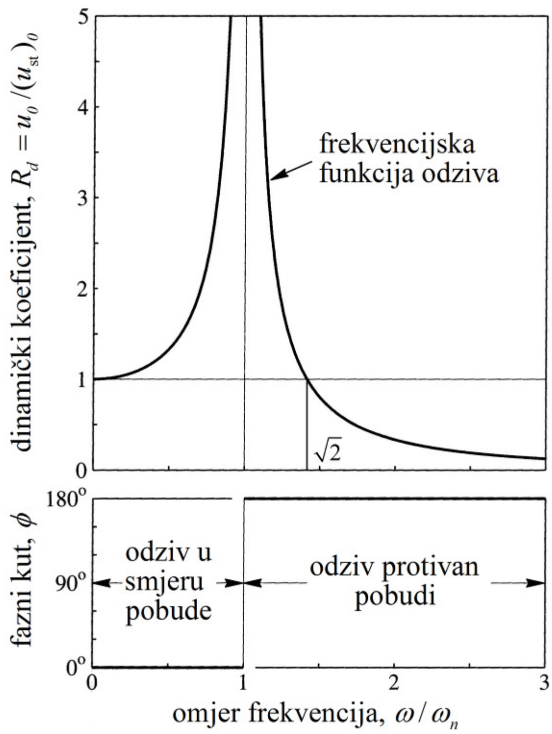
$$u(t) = \frac{(u_{\mathrm{st}})_0}{(u_{\mathrm{st}})_0} u_0 \sin(\omega t - \phi) = (u_{\mathrm{st}})_0 R_d \sin(\omega t - \phi), \tag{136}$$

pri čemu je R_d dinamički koeficijent ili koeficijent povećanja pomaka, a dobiva se kao omjer amplitude dinamičkoga i statičkoga pomaka (bez dimenzija):

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{\mathrm{st}})_0} = \frac{1}{|1 - (\omega/\omega_n)^2|} > 0. \tag{137}$$

Na slici 71. prikazan je dinamički koeficijent u ovisnosti o omjeru frekvencija. Možemo primijetiti sljedeće:

- ako je omjer $\omega/\omega_n \ll 1$, spora je promjena opterećenja, a dinamički utjecaj je mali ($R_d \approx 1$);
- ako je omjer $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$, dinamički utjecaj je manji od statičkog ($R_d < 1$);
- kako se omjer frekvencija povećava $\omega/\omega_n \gg 1$, dolazi do brze promjene opterećenja, a dinamički utjecaj je zanemariv ($R_d \approx 0$);
- ako je omjer $\omega/\omega_n \approx 1$, izraziti je dinamički utjecaj ($R_d \gg 1$).



Slika 71.: Dinamički koeficijent i fazni kut za neprigušeni sustav pri harmonijskoj pobudi

3.1.1. Pojam rezonancije

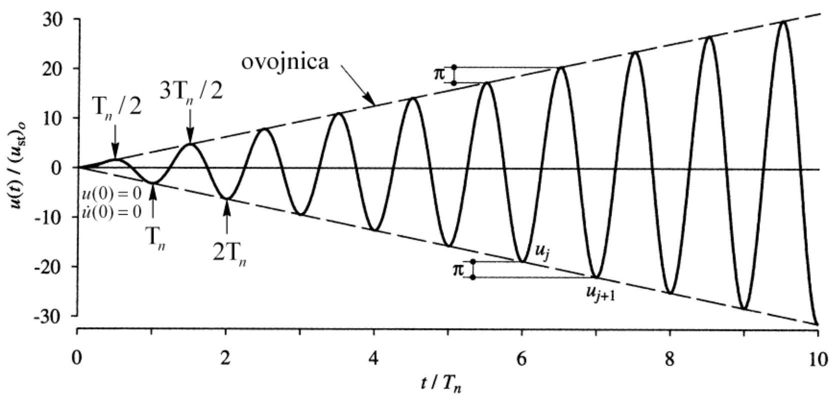
Rezonancija je titranje modela pri kojemu je dinamički koeficijent maksimalan, a rezonancijska frekvencija je definirana kao frekvencija pobude koja uzrokuje rezonanciju. Kod modela bez prigušenja, rezonancijska frekvencija jest vlastita frekvencija ω_n pri kojoj dinamički koeficijent nije ograničen (teži prema neizmjerno). Važno je da velika amplituda ne nastupa trenutno (raste u vremenu) što je prikazano na slici 72. Primijetimo ako je $\omega = \omega_n$, ne vrijedi odabrano partikularno rješenje prema izrazu (121). Analizirajmo, radi jednostavnosti, titranje uz homogene početne uvjete. Uočimo da vrijedi:

$$\lim_{\omega\to\omega_n} u(t) = \frac{0}{0}, \qquad \text{L'Hôpitalovo pravilo:}$$
$$\lim_{\omega\to\omega_n} u(t) = \lim_{\omega\to\omega_n} \frac{p_0}{k}\frac{d/d\omega[\sin\omega t - (\omega/\omega_n)\sin\omega_n t]}{d/d\omega[1-(\omega/\omega_n)^2]}. \tag{138}$$

Deriviranjem po ω (ne po t), dobivamo:

$$\lim_{\omega\to\omega_n} u(t) = \lim_{\omega\to\omega_n} \frac{p_0}{k}\frac{t\cos\omega t - (1/\omega_n)\sin\omega_n t}{-2\omega/\omega_n^2}\frac{\omega_n}{\omega_n}, \tag{139}$$

$$u(t) = -\frac{1}{2}\frac{p_0}{k}\left(\omega_n t\cos\omega_n t - \sin\omega_n t\right), \text{ uz uvjet: } \omega = \omega_n . \tag{140}$$



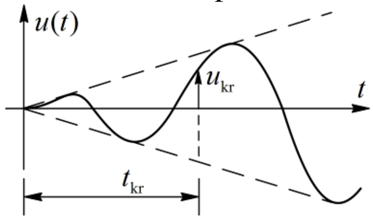
Slika 72.: Odziv neprigušenog sustava u rezonanciji

Uz statički pomak $(u_{st})_0 = p_0/k$ i vlastitu frekvenciju $\omega_n = 2\pi/T_n$ dobivamo:

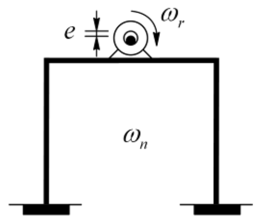
$$\frac{u(t)}{(u_{st})_0} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi t}{T_n}\cos\frac{2\pi t}{T_n} - \sin\frac{2\pi t}{T_n}\right). \tag{141}$$

Period iznosi T_n, a ekstremi (maksimum pa minimum) nastupaju svakih $T_n/2$. Ako je j broj titraja ($j = 1, 2, \ldots$), vrijeme nastupa ekstrema je u slučaju maksimuma $t = (j-1/2)T_n$, a minimuma $t = jT_n$. Iznosi ekstrema (uvrstimo $t = (j-1/2)T_n$ pa $t = jT_n$) su $u_j = \pi(j-1/2)(u_{st})_0$ za maksimum, a $u_j = -\pi j(u_{st})_0$ za minimum.

Prirast vršnoga iznosa nakon svakoga titraja (uzmimo minimume) je konstantan i iznosi $|u_{j+1}|-|u_j| = (u_{st})_0[\pi(j+1)-\pi j] = \pi(u_{st})_0 = \pi p_0/k$. Budući da je prirast konstantan, ovojnica rasta je pravac. Amplituda (općenitije, pomak) raste prema neizmjerno. Pri tome pretpostavljamo neograničeno važenje Hookeova zakona, no realno postoji iznos kritičnoga pomaka u_{kr} pri kojemu počinje pucati krhki, a teći duktilni materijal. U oba slučaja nastaje promjena krutosti k, pa i frekvencije $\omega_n = \sqrt{k/m}$ pa više nema rezonancije jer frekvencija prisile više nije jednaka vlastitoj frekvenciji ($\omega \neq \omega_n$). Primijetimo da kritični pomak ne nastaje trenutno, već se postiže nakon određenog vremena t_{kr} (slika 73.).



Slika 73.: Vrijeme nastupanja kritičnog pomaka u rezonanciji



Slika 74.: Pobuda turbinskog stola ekscentričnom masom turbine

Poželjno je da konstrukcija što brže prođe kroz rezonanciju ($t \ll t_{kr}$). Primjerice, kod pobude turbinskoga stola ekscentričnom masom turbine (slika 74.), oblika $p(t) = p_0 \sin \omega t$, gdje je $0 \leq \omega \leq \omega_r$, a ω_r je radna frekvencija turbine i ω_n je frekvencija slobodnog titranja stola (u praksi je najčešće $\omega_r > \omega_n$), pri pokretanju ili zaustavljanju uvijek postoji slučaj pri kojemu je $\omega = \omega_n$, što predstavlja prolaz kroz frekvenciju slobodnoga titranja stola koji treba trajati što kraće. Frekvencija pobude ω mora odmah dalje rasti (padati), a ne čekati pri $\omega = \omega_n$ jer tada (prema slici 73.) vrijeme t teče prema t_{kr}, a pomak u raste prema u_{kr}.

3.2. Harmonijska pobuda s prigušenjem

3.2.1. Prolazni i prisilni dio odziva sustava

Ako postoji prigušenje, jednadžba gibanja sustava s jednim stupnjem slobode pri harmonijskoj pobudi jest:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \sin \omega t, \qquad \text{uz}: u(0) \text{ i } \dot{u}(0). \tag{142}$$

Homogeno rješenje jednadžbe je odziv pri slobodnom titranju s prigušenjem iz izraza (88):

$$u_c(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t). \tag{143}$$

Partikularno rješenje (prisilno titranje zbog pobude) trebamo izabrati tako da je isti oblik pobude i odziva. Logična pretpostavka bi bila funkcija sinus. No to nije rješenje, jer je prva derivacija (treba nam za proračun sile prigušenja – drugoga člana lijeve strane u izrazu (142)) funkcija kosinus pa nema jednakosti kad se tako odabrano partikularno rješenje uvrsti u izraz (142).

Zato ćemo rješenje pretpostaviti kao zbroj funkcija sinus i kosinus što je također zapis funkcije sinus (poput pobude)[15] i opisuje titranje lijevo – desno. Dakle:

$$u_p(t) = C\sin\omega t + D\cos\omega t. \tag{144}$$

Ako prikažemo osnovnu jednadžbu (142) s pomoću ζ (podijelimo je s m), dobivamo uz $c/m = 2\zeta\omega_n$ i $k/m = \omega_n^2$:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \frac{p_0}{m}\sin\omega t\,. \tag{145}$$

Deriviranjem $u_p(t)$ i uvrštavanjem u jednadžbu (145), dobivamo:

$$\begin{aligned}&\underbrace{-C\omega^2\sin\omega t - D\omega^2\cos\omega t}_{\ddot{u}_{p(t)}} + 2\zeta\omega_n\underbrace{(C\omega\cos\omega t - D\omega\sin\omega t)}_{\dot{u}_{p(t)}} + \omega_n^2\underbrace{(C\sin\omega t + D\cos\omega t)}_{u_{p(t)}} =\\ &= \frac{p_0}{m}\sin\omega t.\end{aligned} \tag{146}$$

Potom, izmnožimo zagrade i grupiramo po $\sin\omega t$ i $\cos\omega t$:

$$\left[\left(\omega_n^2-\omega^2\right)C - 2\zeta\omega_n\omega D\right]\sin\omega t + \left[2\zeta\omega_n\omega C + \left(\omega_n^2-\omega^2\right)D\right]\cos\omega t = \frac{p_0}{m}\sin\omega t \;/\cdot\frac{1}{\omega_n^2} \tag{147}$$

Jednakost važi za svaki trenutak t samo ako su članovi uz $\sin\omega t$ i $\cos\omega t$ jednaki. Nakon dijeljenja izraza (147) s ω_n^2, uz $m\omega_n^2 = k$, dobivamo dvije jednadžbe:

$$\begin{aligned}&\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]C - \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)D &&= \frac{p_0}{k}, \quad \text{članovi uz } \sin\omega t,\\ &\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)C + \left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]D &&= 0, \quad \text{članovi uz } \cos\omega t.\end{aligned} \tag{148}$$

Ako riješimo sustav jednadžbi (148), dobivamo:

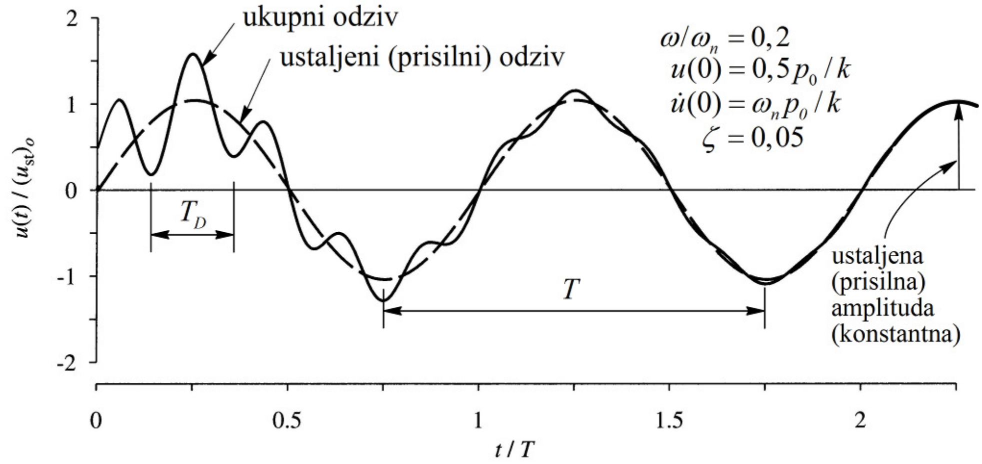
$$\begin{aligned}C &= \frac{p_0}{k}\frac{1-\left(\omega/\omega_n\right)^2}{\left[1-\left(\omega/\omega_n\right)^2\right]^2 + [2\zeta\left(\omega/\omega_n\right)]^2} = (u_{\mathrm{st}})_0\frac{b_C}{n_C},\\ D &= \frac{p_0}{k}\frac{-2\zeta\,\omega/\omega_n}{\left[1-\left(\omega/\omega_n\right)^2\right]^2 + [2\zeta\left(\omega/\omega_n\right)\,]^2} = (u_{\mathrm{st}})_0\frac{b_D}{n_D}.\end{aligned} \tag{149}$$

Ukupno rješenje (zbroj homogenog i partikularnog) jest:

$$u(t) = \underbrace{e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t)}_{\text{prolazni dio}} + \underbrace{C\sin\omega t + D\cos\omega t}_{\text{prisilni, ustaljeni dio}}. \tag{150}$$

Konstante možemo odrediti poput A i B iz izraza (124) do (127) iz $u(t)$ i $\dot{u}(t)$, uz $u(0)$ i $\dot{u}(0)$, no treba još jednom napomenuti da prolazni dio titranja brzo iščezava.

[15] $p_0\sin(\omega t-\phi) = C\sin\omega t + D\cos\omega t$, $p_0 = \sqrt{C^2+D^2}$, $\tan\phi = D/C$



Slika 75.: Titranje prigušenog sustava pri harmonijskoj pobudi

Primijetimo da je rješenje složeno čak i za jedan stupanj slobode. Prolazno titranje jest razlika ukupnog i prisilnog odziva i jednako je slobodnom titranju s prigušenjem, a s vremenom iščezava. Zato analiziramo samo dio koji ostaje, a to je PRISILNI dio koji je poput pobude, KONSTANTNIH perioda (pobude) i amplitude (slika 75.). Na kraju ćemo istaknuti da ekstrem može nastupiti i prije prisilnoga odziva.

3.2.2. Rezonancija s prigušenjem

Kad uvrstimo $\omega = \omega_n$ u izraze (149) za C i D, dobivamo: $C = 0$ i $D = -(u_{st})_0/(2\zeta)$. Uvrštavanjem u ukupno rješenje (150), slijedi da je pomak:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t) - \frac{(u_{st})_0}{2\zeta}\cos\omega_n t, \quad \text{a brzina:}$$

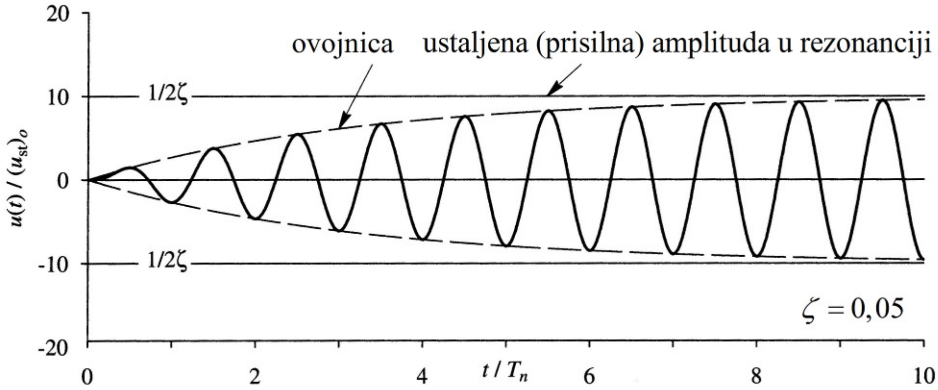
$$\dot{u}(t) = -\zeta e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t) + e^{-\zeta\omega_n t}(-A\omega_D\sin\omega_D t + B\omega_D\cos\omega_D t) + \tag{151}$$
$$+\frac{(u_{st})_0\omega_n}{2\zeta}\sin\omega_n t,$$

Treba odrediti i konstante A i B (nije potrebno L'Hôpitalovo pravilo). Zbog jednostavnosti ćemo pretpostaviti homogene početne uvjete $u(0) = \dot{u}(0) = 0$. Kad deriviramo $u(t)$, iz $u(t)$ i $\dot{u}(t)$ za $t = 0$ dobivamo,

$$A = (u_{st})_0/(2\zeta), \qquad B = (u_{st})_0/(2\sqrt{1-\zeta^2}). \tag{152}$$

Nakon što (152) uvrstimo u ukupno rješenje (C i D određeni ranije) i sredimo, dobit ćemo ukupni odziv sustava s prigušenjem u rezonanciji, prikazan na slici 76.:

$$u(t) = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta}\left[\underbrace{e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_D t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_D t\right)}_{\text{prolazno}} - \underbrace{\cos\omega_n t}_{\text{ustaljeno}}\right]. \tag{153}$$



Slika 76.: Odziv prigušenog sustava u rezonanciji

Maksimalna je amplituda za $t \to \infty$ KONAČNA (asimptota):

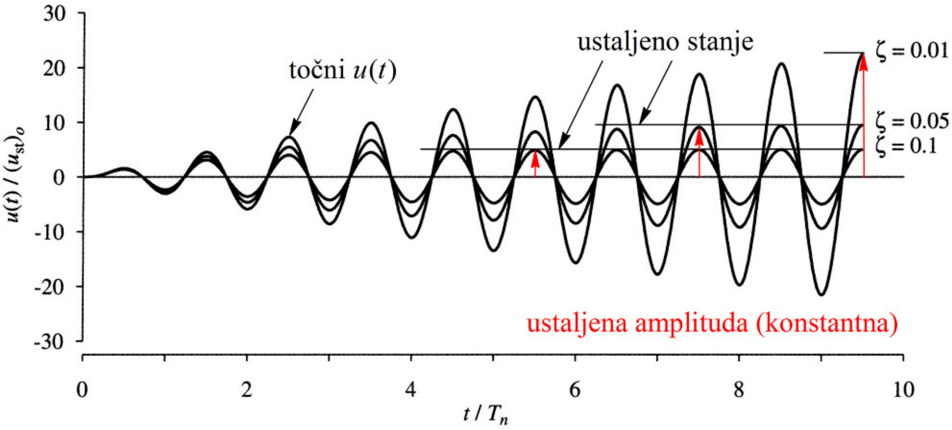
$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = u_0 = \frac{(u_{\mathrm{st}})_0}{2\zeta}, \tag{154}$$

jer $e^{-\zeta\omega_n t} \to 0$ i $\max(\cos\omega_n t) \to \pm 1$.

Za slabo prigušenje, član uz sin je vrlo mali i $\omega_D \approx \omega_n$ pa dobivamo:

$$u(t) \approx \underbrace{\frac{(u_{\mathrm{st}})_0}{2\zeta}\left(e^{-\zeta\omega_n t} - 1\right)}_{\text{amplituda}} \underbrace{\cos\omega_n t}_{\substack{\text{zakon}\\ \text{titranja}}}, \tag{155}$$

jer je opći zapis funkcije kosinus: $a\cos\omega_n t$ i a je amplituda.



Slika 77.: Odzivi sustava različitih prigušenja u slučaju rezonancije

Znači, amplituda raste prema zakonu eksponenta (ne linearno). Prigušenje smanjuje prirast amplitude koji nije više konstantan. Važno je istaknuti da iznos amplitude značajno ovisi o prigušenju (član $e^{-\zeta\omega_n t}$), što je pokazano na slici 77. Također i maksimalna amplituda ovisi obrnuto proporcionalno o prigušenju: $u_0 = (u_{\mathrm{st}})_0 / 2\zeta$, s porastom ζ brže se dostižu konstantne amplitude odziva. Zamijetimo da se radi se o stanju ustaljenog titranja jer je za dovoljno veliki t prolazni dio prigušen ($e^{-\zeta\omega_n t} \to 0$) pa su jednake frekvencije odziva ($\cos\omega_n t \to \cos\omega t$) i pobude ($\sin\omega t$).

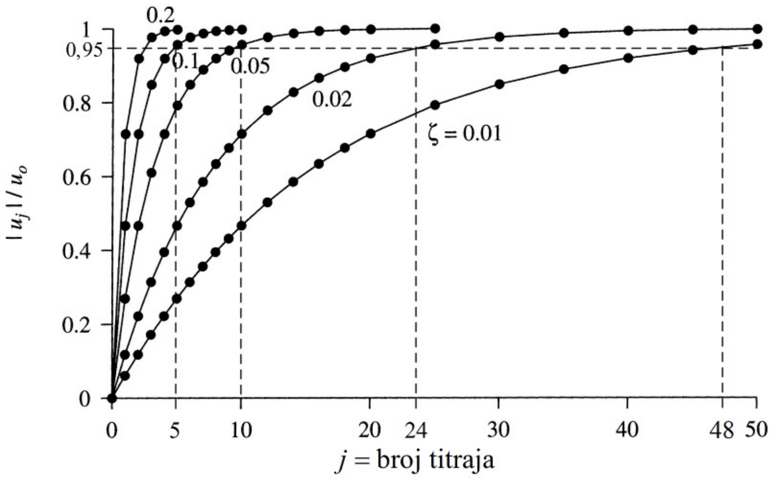
Odredimo broj titraja potreban za dostizanje ustaljenog stanja. Ekstrem nastupa nakon j titraja (uzmimo minimum u $t = jT_n = 2\pi j / \omega_n$):

$$\begin{aligned} \underbrace{u\left(\frac{2\pi j}{\omega_n}\right)}_{u_j} &\approx \underbrace{\frac{(u_{\mathrm{st}})_0}{2\zeta}}_{u_0}\left(e^{-\zeta\omega_n\frac{2\pi j}{\omega_n}}-1\right)\cos\omega_n\frac{2\pi j}{\omega_n}, \\ u_j &= u_0 \underbrace{\left(\overbrace{e^{-2\pi\zeta j}}^{<1\,(j>0)}-1\right)}_{<0}(\pm 1). \end{aligned} \tag{156}$$

Ako trebamo samo pozitivnu vrijednost (amplitudu), dobit ćemo:

$$\frac{|u_j|}{u_0} = \left(e^{-2\pi\zeta j}-1\right)(-1) = 1 - e^{-2\pi\zeta j}. \tag{157}$$

Omjer nije funkcija, već postiže diskretne vrijednosti za $j = 1, \ldots$



Slika 78.: Ovisnost amplitude odziva o broju titraja u rezonanciji

Ako su vrijednosti spojene pravcima, lakše ćemo uočiti zakonitosti. Uz slabije prigušenje, potrebno je više titraja za dostizanje ustaljene amplitude. Primjerice, za dostizanje 95% ustaljene amplitude, potrebno je 48, 24, 10 i 5 titraja za prigušenja ζ od 0,01; 0,02; 0,05 i 0,1 (slika 78.). Znači, prigušenje ζ kontrolira iznos ustaljene amplitude u_0 i broj titraja j do ustaljenog stanja.

3.2.3. Harmonijska pobuda s prigušenjem: prisilno stanje

Vršni pomak i kašnjenje u fazi

Analizirajmo prisilno (ustaljeno) titranje pri harmonijskoj pobudi, određeno izrazima (144) i (149). Partikularno rješenje $u(t) = C\sin\omega t + D\cos\omega t$ uz proizvoljne konstante C i D

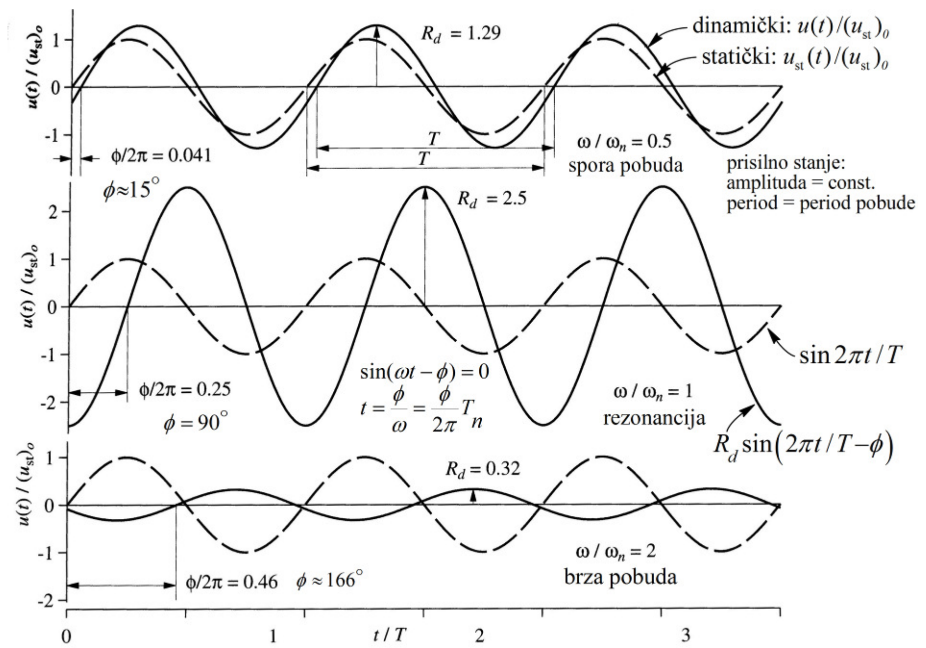
($C = u_0 \cos\phi$ i $D = -u_0 \sin\phi$) možemo napisati kao $u(t) = u_0(\sin\omega t \cos\phi - \cos\omega t \sin\phi)$, a uz[16] kao:

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t - \phi)\frac{(u_{\text{st}})_0}{(u_{\text{st}})_0} = (u_{\text{st}})_0 R_d \sin(\omega t - \phi)\,. \tag{158}$$

Uočimo da je $C^2 + D^2 = u_0^2 \cos^2\phi + u_0^2 \sin^2\phi = u_0^2$ i $D/C = -\tan\phi$ te konačno: $u_0 = \sqrt{C^2 + D^2}$ i $\phi = \arctan(-D/C)$. Uz izraz (149) prema kojemu je $C = (u_{\text{st}})_0 \mathrm{b}_C / \mathrm{n}_C$, $D = (u_{\text{st}})_0 \mathrm{b}_D / \mathrm{n}_D$ i $\mathrm{n}_C = \mathrm{n}_D = n$ dobivamo:

$$\begin{aligned} &u_0 = (u_{\text{st}})_0\sqrt{(\mathrm{b}_C^2 + \mathrm{b}_D^2)/\mathrm{n}^2} = (u_{\text{st}})_0/\sqrt{\mathrm{n}},\ \text{ jer je } \mathrm{b}_C^2 + \mathrm{b}_D^2 = n,\\ &\frac{u_0}{(u_{\text{st}})_0} = \frac{1}{\sqrt{n}}, \end{aligned} \tag{159}$$

$$\begin{aligned} R_d &= \frac{u_0}{(u_{\text{st}})_0} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}},\\ \phi &= \arctan\left(-\frac{(u_{\text{st}})_0 \mathrm{b}_D \mathrm{n}_C}{(u_{\text{st}})_0 \mathrm{b}_C \mathrm{n}_D}\right) = \arctan\left(-\frac{b_D}{b_C}\right), \phi = \arctan\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}. \end{aligned} \tag{160}$$

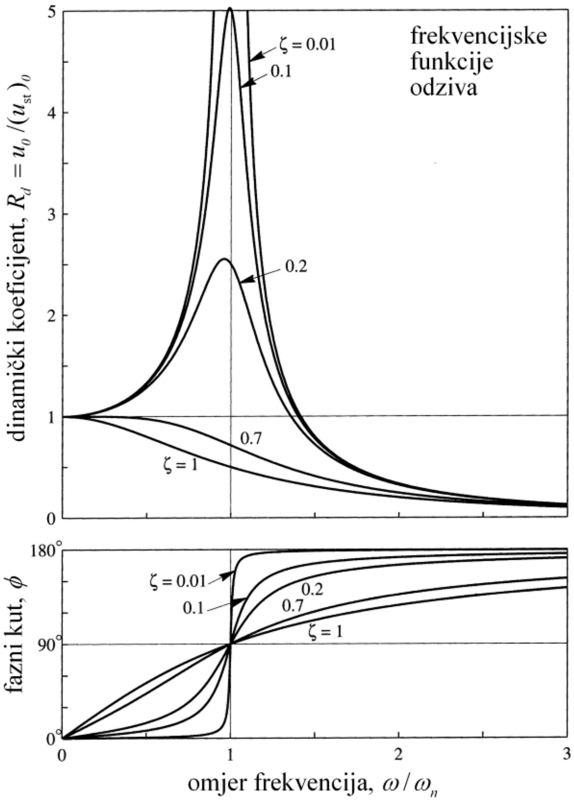


Slika 79.: Prisilni dio odziva prigušenog sustava za različite omjere frekvencije sinusne pobude i prirodne frekvencije

Crtamo $u(t)/(u_{\text{st}})_0 = R_d \sin(2\pi t/T - \phi)$ za što trebamo R_d i ϕ. Ako odaberemo tri vrijednosti omjera ω/ω_n 0,5; 1 i 2, uz prigušenje za sva tri slučaja $\zeta = 0{,}2$, možemo odrediti R_d (1,29; 2,5; 0,32) i ϕ (15°; 90°; 166°) i crtati $u(t)/(u_{\text{st}})_0$, što je pokazano na slici 79. Na slici je također ucrtan statički pomak: $u_{\text{st}}(t)/(u_{\text{st}})_0 = \sin 2\pi t/T$ koji se mijenja s vremenom

[16] rabimo poznati identitet: $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

zbog $p(t)$, ali bez dinamičkih učinaka ($m\ddot{u}=0$, $c\dot{u}=0$). Mijenja se poput $p(t)$: do na konstantu $1/k$ i isti je za sva tri omjera ω/ω_n (ne ovisi o ω_n).



Slika 80.: Dinamički koeficijent i fazni kut za prigušeni sustav pri harmonijskoj pobudi

Na slici 80. prikazan je dinamički koeficijent i fazni kut za prigušeni sustav pri harmonijskoj pobudi. Dinamički koeficijent je ovisan o omjeru frekvencija i prigušenju [$R_d = f(\omega/\omega_n, \zeta)$, izraz (160)]. Možemo primijetiti tri područja:

1. $\omega/\omega_n \ll 1$, ($R_d \approx 1$):

$$u_0 \approx (u_{st})_0 = \frac{p_0}{k}. \tag{161}$$

2. $\omega/\omega_n \gg 1$, ($R_d \approx 0$):

$$u_0 \approx (u_{st})_0 \frac{\omega_n^2}{\omega^2} = \frac{p_0}{k}\frac{\omega_n^2}{\omega^2} = \frac{p_0}{m\omega^2}. \tag{162}$$

3. $\omega/\omega_n \approx 1$, ($R_d \gg 1$):

$$u_0 \approx \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} = \frac{p_0}{k}\frac{1}{2\zeta} = \frac{p_0}{c\omega_n}. \tag{163}$$

Sve krivulje su ispod krivulje sustava bez prigušenja ($\zeta = 0$), prikazanog na slici 71. Prigušenje $\zeta > 0$ smanjuje dinamički koeficijent R_d pa tako i amplitudu pomaka za sve frekvencije pobude. Smanjenje, koje je ovisno o frekvenciji pobude, možemo promotriti s obzirom na tri spomenuta područja:

1. Ako je promjena opterećenja spora ($\omega / \omega_n \ll 1$), dinamički koeficijent je blizak jedinici ($R_d \approx 1$) i slab je utjecaj prigušenja (krivulje za različita prigušenja su bliske). U tome području je amplituda pomaka gotovo jednaka kao i statički odziv sustava p_0 / k i uz zadani p_0, pomak je kontroliran krutošću (kao u statici).

2. Ako je promjena opterećenja brza ($\omega / \omega_n \gg 1$), s povećanjem omjera $\omega / \omega_n \gg 1$ dinamički koeficijent teži prema nuli, a utjecaj prigušenja je slab (krivulje za različita prigušenja su bliske). Odziv je manji od statičkoga i dinamički učinci su zanemarivi. Uz zadane vrijednosti p_0 i ω, pomak je kontroliran masom.

3. Ako se frekvencije pobude i odziva podudaraju ($\omega / \omega_n \approx 1$), nastupa stanje rezonancije, uz veliki dinamički koeficijent ($R_d \gg 1$). Odziv je puno veći od statičkoga, a uz zadane vrijednosti p_0 i $\omega_n \approx \omega$, pomak je kontroliran prigušenjem. Za različita prigušenja, krivulje su značajno razmaknute.

Fazni kut određuje kašnjenje[17] odziva za pobudom (za $t = \phi / 2\pi T$). Prikazat ćemo ovisnost faznoga kuta o omjeru frekvencija i prigušenju [$\phi = f(\omega / \omega_n, \zeta)$] za tri područja ($\zeta$ zadan):

1. Za $\omega / \omega_n \ll 1$, fazni kut je gotovo nula ($\phi \approx 0^\circ$) pa su pomak i pobuda u fazi i jednako su usmjereni ($R_d = 1,29$).
2. Za $\omega / \omega_n \gg 1$, fazni kut je gotovo 180° ($\phi \approx 180^\circ$), pa su pomak i pobuda izvan faze i suprotno su usmjereni ($R_d = 0,32$).
3. Za $\omega / \omega_n \approx 1$, fazni kut je 90° za sva prigušenja ($\phi \approx 90^\circ$) i nastupa stanje rezonancije pri kojemu je pomak ekstreman, a pobuda bliska nuli ($R_d = 2,5$).

Za sva tri područja je važan iznos amplitude dinamičkog opterećenja p_0. Ako je mala amplituda pobude p_0, mala je i amplituda pomaka u_0 (čak i u rezonanciji). Dakle, uz veliki dinamički koeficijent R_d i malu amplitudu pobude p_0 (zbog čega je i mali statički pomak $(u_{st})_0 = p_0 / k$), dobivamo i malu amplitudu pomaka $u_0 = R_d (u_{st})_0$. Ova se činjenica rabi kod ispitivanja konstrukcija. Primjerice, opterećenje vjetrom može prouzročiti malu amplitudu pobude p_0 za AB konstrukciju. Tada zgrada čak i u rezonanciji zbog toga vjetra neprimjetno titra. Unatoč tome, uređaji ipak bilježe vrlo slabi odziv (10^{-3} mm): rezonanciju pri malim amplitudama pomaka u_0.

[17] zaostajanje

Dinamički koeficijenti odziva

Kao što smo pokazali u prethodnom poglavlju, analizom pomaka u vremenu $u(t)$ dobivamo dinamički koeficijent pomaka R_d. Na sličan način možemo dobiti dinamički koeficijent brzine (analizom $\dot{u}(t) \to R_v$) i dinamički koeficijent ubrzanja $\ddot{u}(t) \to R_a$. Ako pomak u prisilnom stanju izrazimo kao $u(t) = u_0 \sin(\omega t - \phi)$, brzina i ubrzanje su $\dot{u}(t) = \omega u_0 \cos(\omega t - \phi)$ i $\ddot{u}(t) = -\omega^2 u_0 \sin(\omega t - \phi)$. Možemo primijetiti da su harmonijske funkcije slične, istih ω i ϕ, konstantnih amplituda (prisilno stanje!). Znači možemo pretpostaviti da su slični i dinamički koeficijenti odziva R_d, R_v i R_a.

Od ranije znamo da se omjer dinamičkog i statičkog pomaka može izraziti kao $u(t)/(p_0/k) = R_d \sin(\omega t - \phi)$, pri čemu je dinamički koeficijent pomaka $R_d = u_0/(u_{st})_0$. Ako deriviramo pomak ($d\,/\,dt$), dobit ćemo:

$$\frac{\dot{u}(t)}{p_0/k} = R_d\,\omega \cos(\omega t - \phi)\frac{\omega_n}{\omega_n}, \quad \frac{\dot{u}(t)}{\omega_n\, p_0/k} = R_d \frac{\omega}{\omega_n}\cos(\omega t - \phi), \tag{164}$$

$$\frac{\dot{u}(t)}{p_0/\sqrt{km}} = R_v \cos(\omega t - \phi), \quad R_v = \frac{\omega}{\omega_n} R_d, \quad R_v = \frac{\dot{u}_0}{p_0/\sqrt{km}}, \tag{165}$$

pri čemu je R_v dinamički koeficijent brzine (bez dimenzije). Deriviranjem brzine, dobivamo:

$$\frac{\ddot{u}(t)}{p_0/\sqrt{km}} = -R_v\,\omega \sin(\omega t - \phi)\frac{\omega_n}{\omega_n}, \quad \frac{\ddot{u}(t)}{\omega_n\, p_0/\sqrt{km}} = -R_v \frac{\omega}{\omega_n}\sin(\omega t - \phi), \tag{166}$$

$$\frac{\ddot{u}(t)}{p_0/m} = -R_d\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \sin(\omega t - \phi), \quad \frac{\ddot{u}(t)}{p_0/m} = -R_a \sin(\omega t - \phi), \tag{167}$$

$$R_a = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 R_d, \quad R_a = \frac{\ddot{u}_0}{p_0/m}, \tag{168}$$

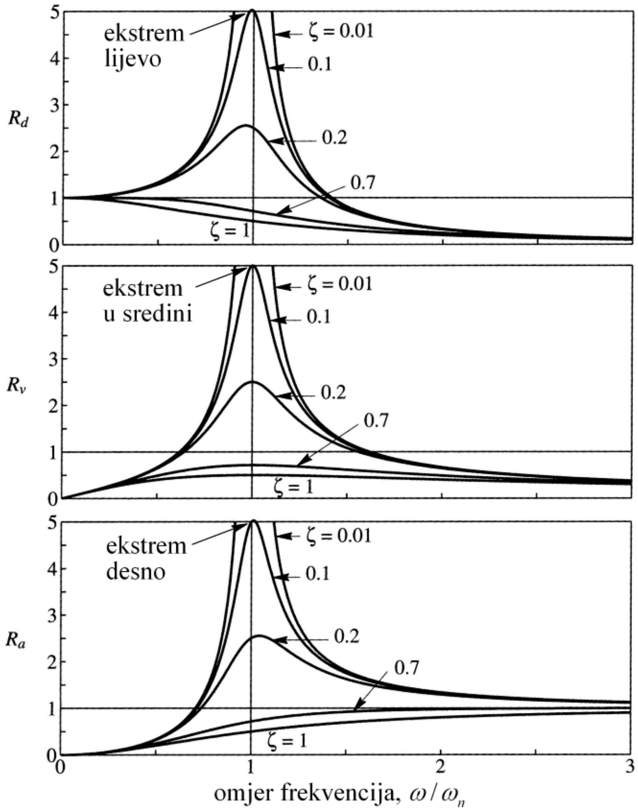
pri čemu je R_a dinamički koeficijent ubrzanja (bez dimenzije). Iz izraza (167) možemo primijetiti da je dinamički koeficijent ubrzanja omjer amplitude ubrzanja i ubrzanja zbog (amplitude) pobude p_0 koja djeluje na masu *m*.

Na slici 82. prikazani su dinamički koeficijenti odziva R_d, R_v i R_a u funkciji $\omega\,/\,\omega_n$ (uočimo: nemaju dimenziju). Dinamički koeficijent pomaka R_d je isti kao na slici 80., a da bismo odredili dinamičke koeficijente R_v i R_a, rabimo R_d i množimo ga skalarima $\omega\,/\,\omega_n$ ili $(\omega\,/\,\omega_n)^2$, kao što je istaknuto izrazima (165) i (168).

Budući da je dinamički koeficijent pomaka R_d pozitivan i dinamički koeficijenti brzine i ubrzanja, R_v i R_a, su također pozitivni. Dinamičke koeficijente nazivamo frekvencijskim funkcijama odziva jer one daju ovisnost amplituda odziva (u_0, $\dot{u}_0$, $\ddot{u}_0$) o frekvenciji pobude (ω).

Na slici 81. možemo uočiti neka svojstva dinamičkih koeficijenata o omjerima frekvencija i o prigušenju:

- dinamički koeficijent pomaka R_d:
  za $\omega/\omega_n = 0$, $R_d = 1$,
  za $\omega/\omega_n < 1$, R_d maksimalan,
  za $\omega/\omega_n \to \infty$, $R_d \to 0$.
- dinamički koeficijent brzine R_v:
  za $\omega/\omega_n = 0$, $R_v = 0$,
  za $\omega/\omega_n = 1$, R_v maksimalan,
  za $\omega/\omega_n \to \infty$, $R_v \to 0$.
- dinamički koeficijent ubrzanja R_a:
  za $\omega/\omega_n = 0$, $R_a = 0$,
  za $\omega/\omega_n > 1$, R_a maksimalan,
  za $\omega/\omega_n \to \infty$, $R_a \to 1$,
- za $\zeta > 1/\sqrt{2} \approx 0,7$, dinamički koeficijenti R_d i R_a nemaju ekstrem.



Slika 81.: Dinamički koeficijenti pomaka, brzine i ubrzanja za prigušeni sustav pri harmonijskoj pobudi

Odmah uočite da su za $\zeta < 0,2$ dinamički koeficijenti R_d, R_v i R_a bliski u području rezonancije. Među koeficijentima postoji jednoznačna veza. Uočimo:

$$R_v = \frac{\omega}{\omega_n} R_d, \quad R_a = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 R_d = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) R_v. \tag{169}$$

Ako odredimo R_v iz druge jednadžbe i izjednačimo s prvom, dobivamo:

$$\frac{R_a}{\omega/\omega_n} = R_v = \frac{\omega}{\omega_n} R_d. \tag{170}$$

Znači, dovoljno je poznavati jedan dinamički koeficijent, a za neki ω/ω_n odredimo ostala dva. Prema tome, očito postoji mogućnost da se ovisnosti prikažu jednom funkcijom (nisu potrebne tri). Osnovna zamisao je funkciju $R_v = f(\omega/\omega_n)$ prikazati u logaritamskom mjerilu (uočite srednju sliku na slici 81.).

Prikaz dinamičkih koeficijenata u logaritamskom mjerilu

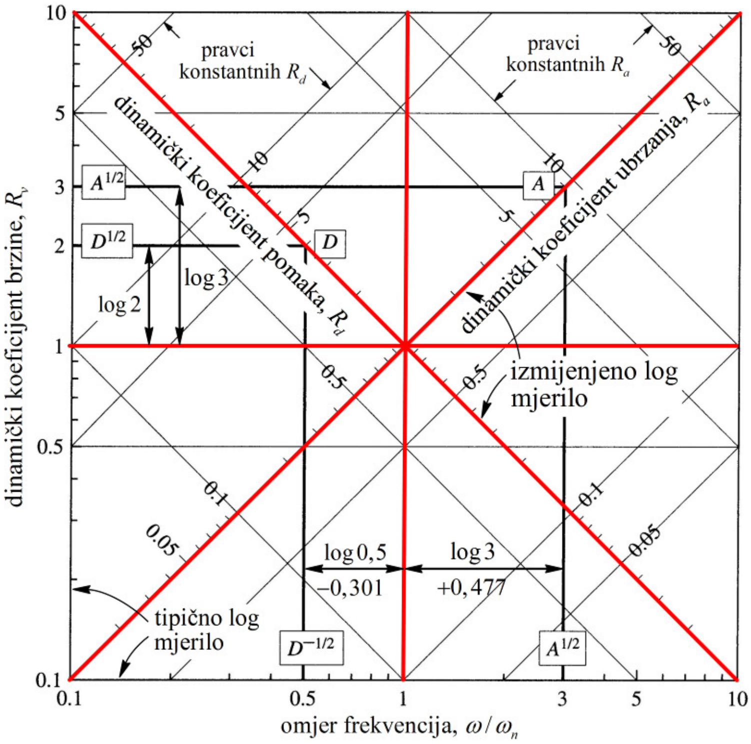
Druga jednakost u izrazu (170) ($R_v = \omega/\omega_n R_d$) u logaritamskom mjerilu postaje:

$$\log R_v = \log\frac{\omega}{\omega_n} + \log R_d,\ \log R_v - \text{ordinata},\ \log\frac{\omega}{\omega_n} - \text{apscisa}. \tag{171}$$

Za $\log R_d = \text{const.}$ jednakost je oblika $y = x + c$, što predstavlja jednadžbu pravca nagiba 45° i odsječka $\log R_d$ na lijevoj ordinati. Sustav takvih pravaca određuje vrijednosti R_d, a vrijednosti se očitavaju na osi R_d okomitoj (nagiba -45°) na pravce. Prva jednakost u izrazu (170) ($R_v = 1/(\omega/\omega_n)R_a$) u logaritamskom mjerilu postaje:

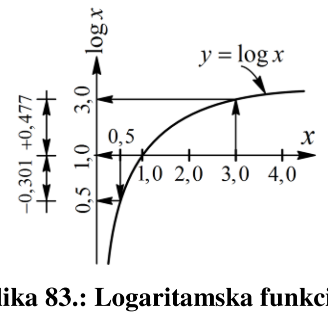
$$\log R_v = -\log\frac{\omega}{\omega_n} + \log R_a, \quad \log R_a = \text{const.} \tag{172}$$

Za $\log R_a = \text{const.}$ izraz (172) predstavlja jednadžbu pravca nagiba -45° i odsječka $\log R_a$ na desnoj ordinati. Sustav takvih pravaca određuje vrijednosti R_a, a vrijednosti se očitavaju na osi R_a okomitoj (nagiba 45°) na pravce.



Slika 82.: Prikaz dinamičkih koeficijenata u logaritamskom mjerilu

Logaritamska funkcija je pogodna za prikaz nekih funkcija jer „razvlači“ male vrijednosti, a „stišće“ velike vrijednosti (slika 83.).



Slika 83.: Logaritamska funkcija

Na slici 82. su skicirana svojstva logaritamskih mjerila pri čemu je ishodište $R_v = 1$ i $\omega/\omega_n = 1$, jer je $\log 1 = 0$. Kroz ishodište provučemo spomenute pravce (crveno). Osi R_v i ω/ω_n su istih log skala i osi R_a i R_d su istih log skala. Ako je $R_a = A$, tada je $R_v = A^{1/2}$ i $\omega/\omega_n = A^{1/2}$ jer vrijedi:

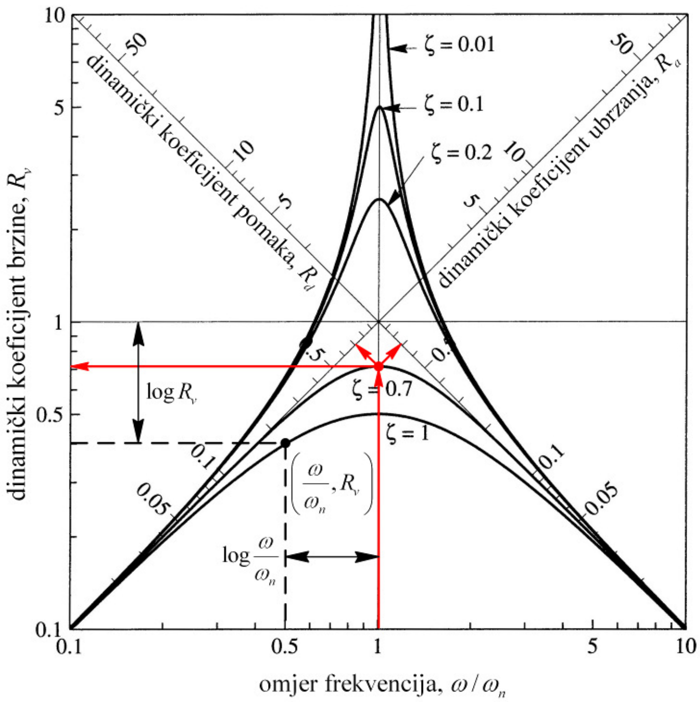
$$R_a = \frac{\omega}{\omega_n} R_v = A^{1/2} A^{1/2} = A. \tag{173}$$

Vrijednosti R_v i ω / ω_n su jednake jer je R_a pod nagibom 45°. Primjerice, za $R_a = 9$, $R_v = \omega / \omega_n = 3$. Ako je $R_d = D$, tada je $R_v = D^{1/2}$ i $\omega / \omega_n = D^{-1/2}$ jer vrijedi:

$$R_d = \frac{R_v}{\omega / \omega_n} = D^{1/2} / D^{-1/2} = D. \tag{174}$$

Vrijednost R_v je recipročna vrijednosti ω / ω_n jer je R_d nagiba -45°. Na primjer, za $R_d = 4$, $R_v = 2$ i $\omega / \omega_n = 1/2$.

Promotrimo graf $\omega / \omega_n - R_v$ na slici 81. Prvo odaberemo prigušenje ζ i točku $(\omega / \omega_n, R_v)$, a zatim nacrtamo točku $(\log \omega / \omega_n, \log R_v)$. Postupak ponovimo za puno točaka koje spojimo pravcima. Time dobivamo jednu krivulju. Sve ponovimo za novo prigušenje. Na slici 84. prikazani su dinamički koeficijenti odziva u logaritamskom mjerilu za različita prigušenja.



Slika 84.: Prikaz dinamičkih koeficijenata u logaritamskom mjerilu za različita prigušenja

Frekvencije i dinamički koeficijenti u rezonanciji

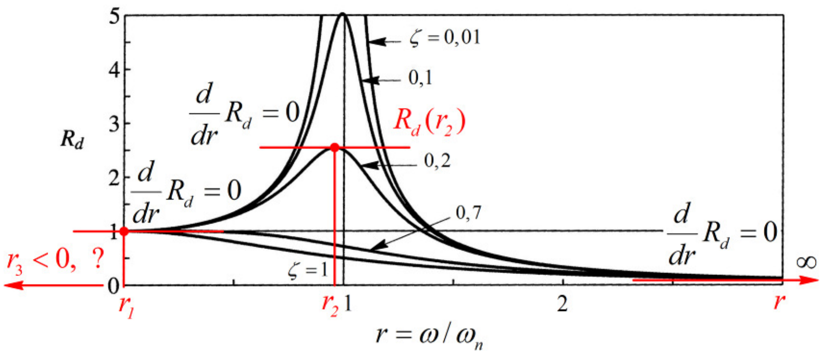
Rezonancijska frekvencija jest frekvencija POBUDE za vršnoga odziva. Na slici 81. pokazano je da se vršne vrijednosti dinamičkih koeficijenata R_d, R_v i R_a javljaju pri frekvencijama koje se malo razlikuju. Te rezonancijske frekvencije se mogu odrediti iz prvih derivacija koje moraju biti jednake nuli (određivanje ekstrema: $d / d(\omega / \omega_n) R_d = 0$). Isto vrijedi za R_v odnosno R_a. Uz $r = \omega / \omega_n \geq 0$ (koeficijent poremećaja), R_d postaje:

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}}$$

$$= \left[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right]^{-1/2} = f(r)^{-1/2}, \qquad \frac{dR_d}{dr} = \frac{f`(r)}{2\sqrt{f^3(r)}}, \tag{175}$$

$$\frac{dR_d}{dr} = \frac{2r\left(1-r^2-2\zeta^2\right)}{[(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2]^{3/2}} = 0 \Rightarrow \left(1-r^2-2\zeta^2\right) = 0.$$

Rješenja iz (175) su: $r_1 = 0$, $r_{2,3} = \pm\sqrt{1-2\zeta^2}$ (horizontalne tangente).



Slika 85.: Frekvencije i dinamički koeficijenti u rezonanciji

Na slici 85. možemo primijetiti sljedeće:

- $r_3 < 0$ nema fizikalni smisao jer je $r > 0$, a za $r \to \infty \Rightarrow R_d \to 0$. Budući da je $R_d > 0$, to predstavlja minimum,
- $r_1 = 0 \Rightarrow \omega = 0$, nema titranja, $R_d(r_1) = 1$, pa preostaje samo
- $r_2 = \sqrt{1-2\zeta^2} \Rightarrow R_d(r_2) = 1/\left(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}\right)$, što predstavlja maksimum,
- vršna vrijednost – rezonancija: $R_d(r_2) = R_{\text{d,vrš}}$.

Prema tome, rezonancijska frekvencija pomaka jest:

$$r_2 = \sqrt{1-2\zeta^2} = \omega/\omega_n \Rightarrow \omega_{\text{d,vrš}} = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}. \tag{176}$$

Sličan postupak vrijedi i za $R_v = (\omega/\omega_n)R_d$ i $R_a = (\omega/\omega_n)^2 R_d$. Dobivamo:

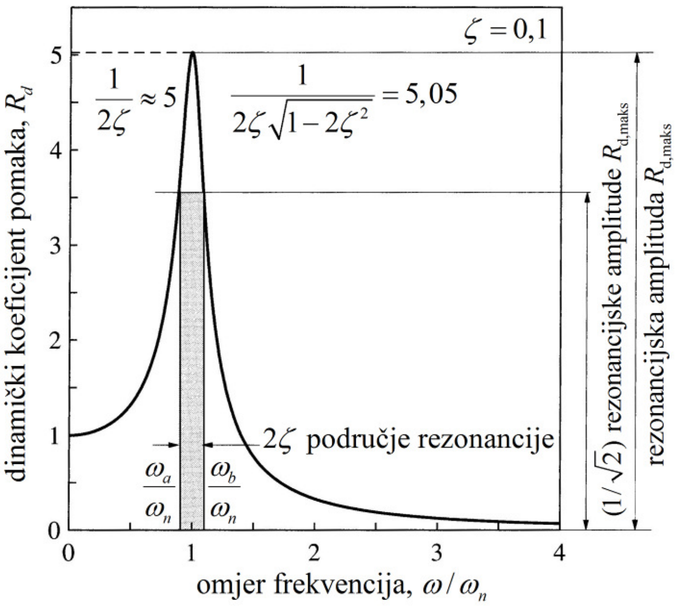
- rezonancijska frekvencija brzine: $\omega_{\text{v,vrš}} = \omega_n$,
- rezonancijska frekvencija ubrzanja: $\omega_{\text{a,vrš}} = \omega_n/\left(1-2\zeta^2\right)$,
- pripadni R_v u rezonanciji: $R_{\text{v,vrš}} = 1/(2\zeta)$,
- pripadni R_a u rezonanciji: $R_{\text{a,vrš}} = 1/\left(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}\right)$.

Uočimo: premda postoji prigušenje ($\zeta > 0$), sve frekvencije pri kojima se javlja vršni odziv, $\omega_{\text{vrš}}$, ovise o vlastitoj frekvenciji ω_n, a ne o ω_D. Ako je $\zeta = 0$, svi $\omega_{\text{vrš}} = \omega_n$ i $R_{\text{d,vrš}} = R_{\text{v,vrš}} = R_{\text{a,vrš}} \to \infty$. Za $\zeta < 0,2$ razlike među svim vrijednostima su zanemarive:

$$\omega_{\text{d,vrš}} = \omega_{\text{v,vrš}} = \omega_{\text{a,vrš}} \approx \omega_n, \quad R_{\text{d,vrš}} = R_{\text{v,vrš}} = R_{\text{a,vrš}} \approx \frac{1}{2\zeta}.$$

Analiza područja rezonancije

Važno je definirati područje rezonancije jer nije opasna samo pobuda pri rezonancijskoj frekvenciji, već i frekvencijama iz njezina okoliša (slika 86.). Kao što možemo primijetiti na slici 86., velika vrijednost dinamičkog koeficijenta je i u blizini ekstrema, a oblik područja ovisi o ζ (veći ζ šire i niže područje – prethodne slike).



Slika 86.: Područje rezonancije

Važno svojstvo frekvencijske funkcije odziva za $R_d = 1/\sqrt{2}R_{\mathrm{d,vrš}}$ skicirano je na slici 86. Njime definiramo područje rezonancije. Iz grafa funkcije R_d vidimo da jednakost vrijedi za dvije frekvencije (ω_a i ω_b) koje ćemo dobiti iz odnosa $R_d(\omega/\omega_n) = 1/\sqrt{2}R_{\mathrm{d,vrš}}$. Raspisano:

$$\frac{1}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+\left[2\zeta(\omega/\omega_n)\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}. \qquad (177)$$

Kvadriramo (177):

$$\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+\left[2\zeta(\omega/\omega_n)\right]^2 = 8\zeta^2\left(1-\zeta^2\right). \qquad (178)$$

Opet kvadriramo prethodni izraz i grupiramo po ω/ω_n:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4 - 2(1-2\zeta^2)\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 1 - 8\zeta^2(1-\zeta^2) = 0. \qquad (179)$$

Izraz (179) jest kvadratna jednadžba po $(\omega/\omega_n)^2$ s koeficijentima $a=1$, $b=-2(1-2\zeta^2)$ i $c = 1-8\zeta^2(1-\zeta^2)$. Rješenja $[-b\pm\sqrt{b^2-4ac}/(2a)]$ (samo + jer je $\omega/\omega_n > 0$) imaju oblik:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = (1-2\zeta^2)\pm 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2} \qquad (180)$$

Za mala prigušenja možemo uzeti $\zeta^2 \approx 0$ pa dobivamo $[(\omega/\omega_n)^2 \approx 1 \pm 2\zeta]$, odnosno:

$$\frac{\omega}{\omega_n} \approx \sqrt{1 \pm 2\zeta} \approx 1 \pm \zeta, \text{ gdje je korijen aproksimiran s prva dva člana Taylorovog reda}^{18} \quad (181)$$

Budući da je $\omega_a < \omega_b$ (slika 86.) imamo:

$$\omega_a \approx (1-\zeta)\omega_n, \qquad \omega_b \approx (1+\zeta)\omega_n. \tag{182}$$

Oduzimanjem $\omega_b - \omega_a$ dobivamo:

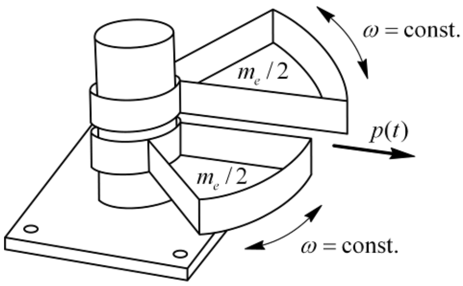
$$\frac{\omega_b - \omega_a}{\omega_n} \approx 2\zeta, \text{ (Slika 86)}, \ \zeta \approx \frac{\omega_b - \omega_a \ /:2\pi}{2\omega_n \ /:2\pi} = \frac{f_b - f_a}{2f_n}, \tag{183}$$

što je prikazano na slici 86. Izraz (183) možemo primijeniti za određivanje prigušenja ζ na temelju prisilnog titranja zgrade (poglavlje 10).

3.2.4. Harmonijska pobuda s prigušenjem: primjena

Pobuda vibracijskim uređajem

Vibracijski uređaji su uređaji za harmonijsku pobudu građevina čime se mogu odrediti prirodne frekvencije i prigušenja građevine (ω_n i ζ).



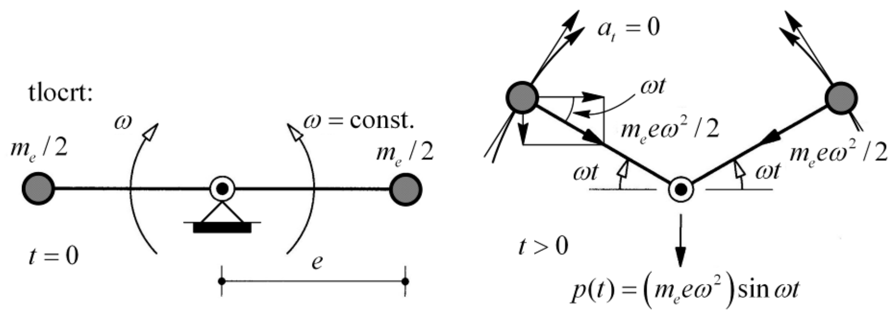
Slika 87.: Skica vibracijskoga uređaja za pobudu građevina

Na slici 87. prikazan je vibracijski uređaj s osnovnom konstrukcijom koju čine dvije košare na uspravnoj osovini koje rotiraju u suprotnim smjerovima, kutnom brzinom $\omega = \text{const.}$ Masa m_e je određena brojem olovnih ploča u košari. Osovina je pričvršćena za metalnu ploču kojom je uređaj kruto povezan s konstrukcijom.

Model uređaja s dvije ekscentrične mase $m_e/2$ na kraku e od osovine je prikazan na slici 88.

[18] $f(\zeta) \approx f(0) + f'(0)\zeta + \ldots$

$\sqrt{1 \pm 2\zeta} \approx \sqrt{1 \pm 2 \cdot 0} \pm 2/\left(2\sqrt{1 \pm 2 \cdot 0}\right)\zeta + \ldots = 1 \pm \zeta$



Slika 88.: Vibracijski uređaj: početni položaj i položaj u trenutku *t*

Za jednoliko kružno gibanje ($\omega = \text{const.}$) tangencijalno je ubrzanje $a_t = 0$ pa je tangencijalna sila jednaka nuli. Centrifugalna sila jest $F_{\text{cf}} = mr\omega^2 = m_e/2e\omega^2$. Nasuprotne se komponente $F_{\text{cf}}\cos\omega t$ poništavaju, a pobuda konstrukcije jest zbroj komponenata $F_{\text{cf}}\sin\omega t$. Time dobivamo:

$$p(t) = 2F_{\text{cf}}\sin\omega t = 2m_e/2e\omega^2\sin\omega t = \left(m_e e\omega^2\right)\sin\omega t. \tag{184}$$

Amplituda pobude $p_0 = m_e e\omega^2$ je proporcionalna s ω^2. Ako pretpostavimo da je ekscentrična masa mala u usporedbi s masom građevine ($m_e \ll m$), mala je i sila inercije $m_e\ddot{u}$ zbog ubrzanja građevinom $\ddot{u}$ pa uređaj uzrokuje samo pobudu građevine (ne i dodatnu silu inercije). Prema tome, odziv modela (građevine) s jednim stupnjem slobode jest:

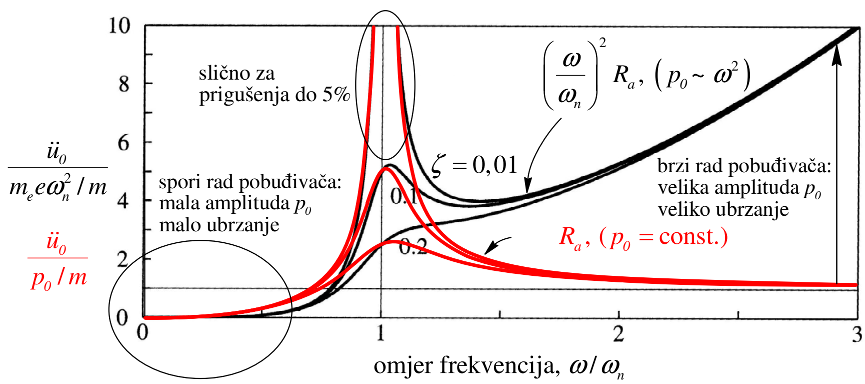
$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = \left(m_e e\omega^2\right)\sin\omega t. \tag{185}$$

Amplituda prisilnog pomaka [uz : $R_d = u_0/(u_{\text{st}})_0$] jest:

$$u_0 = \frac{p_0}{k}R_d = \frac{m_e e\omega^2}{k}R_d = \frac{m_e e}{m}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 R_d, \quad \left(k = m\omega_n^2\right). \tag{186}$$

Amplituda prisilnog ubrzanja [uz : $R_a = \ddot{u}_0/(p_0/m)$, izraz (168)] jest:

$$\ddot{u}_0 = \frac{p_0}{m}R_a = \frac{m_e e\omega^2}{m}R_a / \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = \frac{m_e e\omega_n^2}{m}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 R_a. \tag{187}$$



Slika 89.: Amplituda ubrzanja u ovisnosti o omjeru frekvencija

Uočimo da su amplitude pobude i odziva proporcionalni s ω^2. Do sada smo promatrali konstantne amplitude pobude $p_0 \sin \omega t$ ($p_0 = \text{const.}$) pa pripadno vršno ubrzanje $\ddot{u}_0 = p_0/mR_a$ nije ovisilo dodatno o ω^2.

Određivanje prirodne frekvencije i prigušenja pokusom

Da bismo provjerili valjanosti modela odabranih masa i krutosti ($\omega_n = \sqrt{k/m}$), potrebno je usporediti računske vrijednosti frekvencije i one izmjerene pokusom. Štoviše, pokus je jedini način određivanja prigušenja, jer ga nije moguće odrediti iz svojstava materijala i dimenzija konstrukcije.

Rezonancijski pokus

Koncept rezonancijskog pokusa je temeljen na rezultatu $u_0 = (u_{\text{st}})_0 / 2\zeta$ [izraz (163)], odnosno:

$$\zeta = \frac{1}{2}\frac{(u_{\text{st}})_0}{(u_0)_{\omega=\omega_n}}, \qquad [(u_{\text{st}})_0 \text{ i } u_0 \text{ određujemo pokusom}]. \tag{188}$$

Prigušenje se dakle računa iz eksperimentalno određenih vrijednosti amplituda statičkog pomaka i amplituda pomaka u rezonanciji. Redovito mjerimo amplitudu ubrzanja $\ddot{u}_0$ (poglavlje 2.2.4), a iz općega zapisa $u(t) = u_0 \sin(\omega t - \phi)$ možemo dobiti amplitudu pomaka:

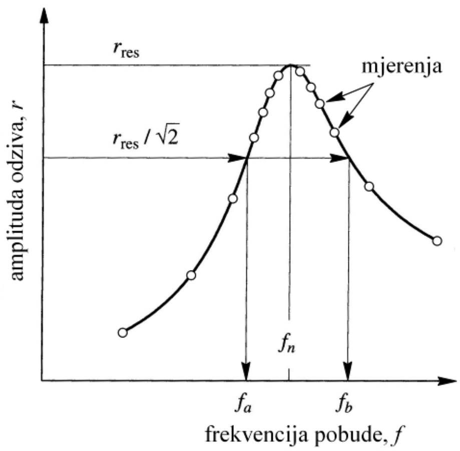
$$\ddot{u}(t) = -\underbrace{u_0 \omega^2}_{\ddot{u}_0} \sin(\omega t - \phi), \qquad u_0 = \frac{(\ddot{u}_0)_{\omega=\omega_n}}{(\omega^2)_{\omega=\omega_n}} \tag{189}$$

Uočimo da prirodna frekvencija ω_n nije poznata. Možemo ju odrediti uporabom faznoga kuta (znamo da je za $\omega = \omega_n$ fazni kut $\phi = 90^\circ$, Slika 80.). Titramo konstrukciju frekvencijom pobude ω i mjerimo ϕ te postupno povećavamo ω dok ne utvrdimo $\phi = 90^\circ$, a tada je $\omega = \omega_n$. Zatim malo pričekamo dok se amplitude ne ustale (slika 76.) i očitamo amplitudu ubrzanja $\ddot{u}_0$. Da bismo odredili prigušenje, treba izmjeriti i amplitudu statičkog pomaka $(u_{\text{st}})_0 = p_{0,\text{vrš}} / k$, pri čemu je $p_{0,\text{vrš}}$ amplituda pobude u rezonanciji. Problem predstavlja prouzročiti veliki STATIČKI iznos $p_{0,\text{vrš}} = m_e e \omega_n^2$.

- 1. pristup: sporim ($\omega \ll \omega_n$) rotiranjem većih masa m_0. Budući da je ω^2 vrlo malo, $p_0 = m_0 e \omega^2 \ll p_{0,\text{vrš}}$ čak i uz velike mase m_0 u košari, pa dobivamo preslabu pobudu (označeno na slici 89.).
- 2. pristup: povlačenje konstrukcije užetom uz zahtjev da je sila povlačenja jednaka amplitudi $p_{0,\text{vrš}}$. Ako je mala sila (tada rezonancija nije opasna), teško je MJERITI $(u_{\text{st}})_0$, a nije ispravno IZRAČUNATI $(u_{\text{st}})_0$ kao $p_{0,\text{vrš}} / k$ jer k nije mjereno!

Određivanje frekvencijske funkcije odziva

Budući da je teško odrediti statički odziv uporabom vibracijskog uređaja, prirodna frekvencija i prigušenje se obično određuju iz eksperimentalno dobivene frekvencijske funkcije odziva prema sljedećem postupku. Prvo podesimo vibracijski uređaj na neku frekvenciju f i mjerimo odziv konstrukcije $\ddot{u}$ dok prolazni dio ne iščezne (čekamo $\ddot{u}_0 = \text{const.}$, Slika 75.), pa očitamo amplitudu prisilnog ubrzanja $\ddot{u}_0$ Time je određena jedna točka funkcije odziva $(f, \ddot{u}_0)$. Zatim ponovimo postupak za novu frekvenciju i ponavljamo ga dok ne prođemo rezonanciju (gušće oko tjemena). Očitamo rezonancijsku frekvenciju f_n ($\underline{\omega_n} = 2\pi f_n$) i podijelimo vrijednosti amplituda ubrzanja $\ddot{u}_0$ s $m_e e \underline{\omega_n}^2 / m$. Frekvencijsku krivulju odziva u obliku amplituda ubrzanja u ovisnosti o frekvenciji možemo nacrtati izravno iz izmjerenih vrijednosti. Spojimo dobivene točke i dobivamo graf za amplitudu pobude proporcionalnu s ω^2 koja sliči krivulji danoj na slici 89. Ako izmjerene vrijednosti amplituda ubrzanja podijelimo s ω^2, dobivamo graf R_a za konstantnu amplitudu pobude ($p_0 = \text{const.}$) koja sliči krivulji na slici 81.c. Ako vrijednosti amplituda ubrzanja podijelimo s ω^4 $[R_a = (\omega/\omega_n)^2 R_d]$, dobivamo graf R_d za konstantnu amplitudu pobude ($p_0 = \text{const.}$), koja je eksperimentalna inačica krivulje na slici 81.a. Prirodnu frekvenciju i prigušenje možemo odrediti iz bilo koje od tri krivulje frekvencijskoga odziva (slika 89., slika 81.a, slika 81.c), a na slici 90. je shematski pokazan postupak za eksperimentalno određenu krivulju.



Slika 90.: Određivanje frekvencijske funkcije odziva mjerenjem

Dakle, prvo odredimo ordinatu $r_{\text{res}}/\sqrt{2}$, zatim frekvencije f_a i f_b iz krivulje. Za mali iznos prigušenja ζ vlastita frekvencija je približno jednaka rezonancijskoj frekvenciji pomaka ($f_n \approx f_{\text{d,vrš}}$) ili iz izraza (176) točna vrijednost iznosi $f_n = f_{\text{d,vrš}}/\sqrt{1-2\zeta^2}$. Konačno, prigušenje odredimo iz izraza $\zeta = (f_b - f_a)/(2f_n)$. Premda je ovaj izraz izveden iz frekvencijske krivulje odziva pomaka pri konstantnoj amplitudi pobude, približno vrijedi i za ostale frekvencijske krivulje ako je sustav slabo prigušen (sjetimo se, R_d, R_v i R_a su bliske oko f_n).

4. Sustav s jednim stupnjem slobode: Duhamelov integral

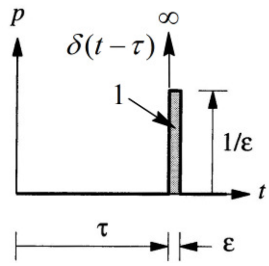
Ako pobuda nije periodična, da bismo dobili rješenje diferencijalne jednadžbe gibanja, možemo upotrijebiti Duhamelov integral. Pretpostavimo da model miruje prije pobude pa je:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t), \quad \text{uz } u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 0\,. \tag{190}$$

Temeljna zamisao je prikazati $p(t)$ nizom neizmjerno kratkih impulsa. Tražimo odziv modela na pobudu svakim impulsom, a konačno rješenje dobivamo kao zbroj svih odziva.

4.1. Odziv na jedinični impuls

Kratkotrajno djelovanje vrlo velike sile u kratkom vremenu nazivamo impulsom sile. Na slici 91. prikazana je sila iznosa $1/\varepsilon$, trajanja ε, s početkom u τ. Budući da trajanje pobude $\varepsilon \to 0$, sila $p \to \infty$, jer iznos impulsa mora uvijek biti 1 i zato ga nazivamo jediničnim impulsom. Diracova funkcija $\delta(t-\tau)$ u $t=\tau$ matematički definira jedinični impuls. Opisno, to je vrlo (neizmjerno) tanka linija koja se pruža u beskraj. Promotrimo djelovanje kratkotrajne sile $p(t)$ na masu m:



Slika 91.: Jedinični impuls

$$p(t) = m\ddot{u}(t) \tag{191}$$

Ako integriramo od početka do kraja toga impulsa:

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = m\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\ddot{u}(t)dt}_{d\dot{u}} = m[\dot{u}(t_2) - \dot{u}(t_1)] = m\Delta\dot{u}\,, \tag{192}$$

možemo zaključiti da je iznos impulsa ($\int$) jednak promjeni (Δ) količine gibanja. Promotrimo sad pobudu okvira jediničnim impulsom ($\int pdt = 1$) u $t=\tau$. Prigušivač i opruga ne „stignu reagirati“ jer je trajanje vrlo kratko ($\varepsilon \to 0$), $c\dot{u}(\tau)=0$ i $ku(\tau)=0$, i opet slijedi da je $m\ddot{u}(\tau) = p(\tau)$. Prema tome, vrijedi prethodni integral (192).

Možemo uzeti $t_2 = \tau$ i $t_1 = 0$ [$u(t_1) = 0$] pa dobivamo početne uvjete:

$$\text{zbog}: 1 = m\dot{u}(\tau) \quad \Rightarrow \quad \dot{u}(\tau) = \frac{1}{m} = \text{const.} \qquad u(\tau) = 0. \tag{193}$$

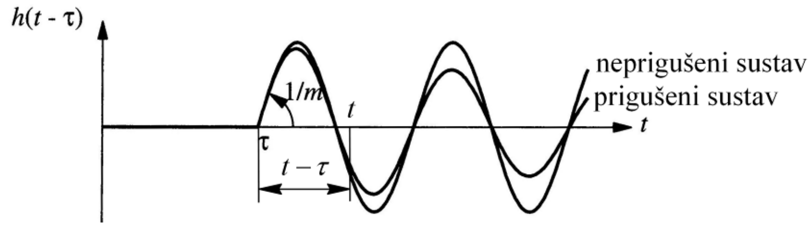
Pobuda impulsom se može izraziti kao slobodno titranje uz početnu brzinu:

$$u(t) = u(\tau)\cos\omega_n t + \frac{\dot{u}(\tau)}{\omega_n}\sin\omega_n t = \frac{1}{m\omega_n}\underbrace{\sin[\omega_n(t-\tau)]}_{\text{translatirano za } \tau},\ t \geq \tau. \tag{194}$$

Ako impuls djeluje na sustav s prigušenjem, dobivamo (izraz (90)):

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\zeta\omega_n t}\left[u(\tau)\cos\omega_D t + \frac{\dot{u}(\tau) + \zeta\omega_n u(\tau)}{\omega_D}\sin\omega_D t\right] \\ &= \frac{1}{m\omega_D}e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin[\omega_D(t-\tau)],\ t \geq \tau. \end{aligned} \tag{195}$$

Funkcija $u(t) \equiv h(t-\tau)$ je funkcija odziva na jedinični impuls (slika 92.).

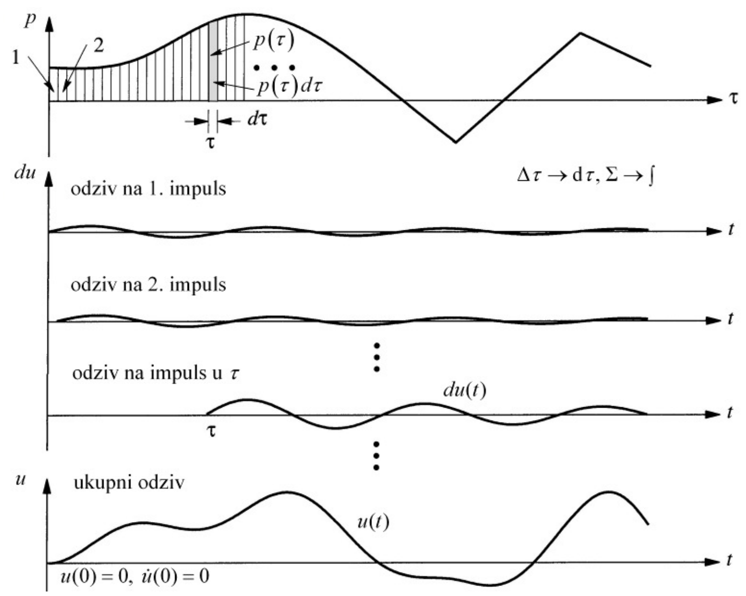


Slika 92.: Funkcija odziva na jedinični impuls

4.2. Odziv na opću pobudu

Opću pobudu $p(t)$ možemo prikazati nizom neizmjerno uskih impulsa koji nisu jedinični, već imaju iznos $\int p d\tau = p(\tau)d\tau$ (površina). Prema tome, početna brzina nije $1/m$, već $p(\tau)d\tau / m = p(\tau)d\tau \cdot 1/m$. Ako to uvrstimo u $u(t)$, dobit ćemo rješenje za impuls kao iznos impulsa $p(\tau)\,\cdot$ pomnoženo rješenjem za jedinični impuls. Znači, odziv na impuls iznosa $p(\tau)$ koji nastupa u τ jest,

$$du(t) = \underbrace{[p(\tau)d\tau]}_{\text{iznos}}\underbrace{h(t-\tau)}_{\substack{\text{jedinični}\\ \text{impuls}}}, \qquad t > \tau. \tag{196}$$



Slika 93.: Objašnjenje konvolucijskog integrala

Odziv do trenutka t jest zbroj svih odziva na impulse do tada:

$$u(t) = \int_0^t du(t)d\tau = \int_0^t p(\tau)h(t-\tau)d\tau, \text{ konvolucijski integral.} \tag{197}$$

Ako uvrstimo $h(t-\tau)$ za neprigušeni ili prigušeni sustav, konvolucijski integral (slika 93.) postaje Duhamelov integral:

$$\text{za } \zeta = 0: \quad u(t) \quad = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t p(\tau)\sin[\omega_n(t-\tau)]d\tau, \tag{198}$$

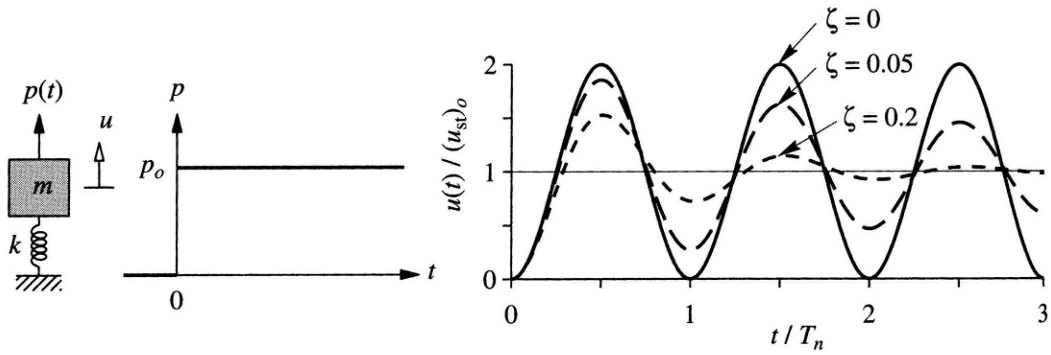
$$\text{za } \zeta > 0: \quad u(t) \;= \frac{1}{m\omega_D}\int_0^t p(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin[\omega_D(t-\tau)]d\tau. \tag{199}$$

Rješenja vrijede za početne uvjete $\dot{u}(0)=0$ i $u(0)=0$. U slučaju da su $\dot{u}(0)\neq 0$ i $u(0)\neq 0$, treba dodati rješenja za slobodno titranje (za $\zeta \geq 0$). Treba istaknuti da superpozicija impulsa i početnih uvjeta vrijedi samo za linearne modele. Ako je pobuda $p(\tau)$ jednostavna, možemo odrediti analitičko rješenje integrala što predstavlja dobru alternativu rješavanju diferencijalne jednadžbe, jer je lakše integrirati nego riješiti jednadžbu. U slučaju da je $p(\tau)$ složena ili numerički definirana funkcija, integral treba riješiti numeričkom integracijom što ovdje ne bismo objašnjavali jer za dobivanje numeričkog rješenja postoje učinkovitije numeričke metode.

4.3. Konstantna pobuda

Konstantna pobuda jest ona kod koje sila trenutno postiže vrijednost p_0 i ostaje konstantnom:

$$p(t) = p_0 \tag{200}$$



Slika 94.: Sustav s jednim stupnjem slobode i konstantnom pobudom, odziv za različita prigušenja

Iz Duhamelova integrala, uz transformacije[19] dobivamo:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{p_0}{m\omega_n}\int_0^t \sin[\omega_n(t-\tau)]d\tau = \frac{p_0}{m\omega_n^2}[\sin\omega_n t(\sin\omega_n\tau)|_0^t + \cos\omega_n t(\cos\omega_n\tau)|_0^t] \\ &= \frac{p_0}{k}\left(1-\cos\omega_n t\right) = (u_{\text{st}})_0\left(1-\cos\frac{2\pi t}{T_n}\right). \end{aligned} \tag{201}$$

Model titra prirodnim periodom T_n oko $(u_{\text{st}})_0$ (slika 94.).

Ekstremne pomake tražimo iz uvjeta da je prva derivacija pomaka (brzina) jednaka nuli: $\dot{u}(t) = (u_{\text{st}})_0\,\omega_n \sin\omega_n t = 0$. Maksimumi nastupaju za:

$$\omega_n t_0 = j\pi, (j=1,3,\ldots) \Rightarrow t_0 = j/2T_n, \tag{202}$$

a minimumi za $j = 0, 2, \ldots$.

[19] $\sin[\omega_n(t-\tau)] = \sin\omega_n t\cos\omega_n\tau - \cos\omega_n t\sin\omega_n\tau$, $\sin\omega_n t, \cos\omega_n t$ ne ovise o τ

$\int\cos\omega_n\tau d\tau = (1/\omega_n)\sin\omega_n\tau$, $\int\sin\omega_n\tau d\tau = -(1/\omega_n)\cos\omega_n\tau$

Pri tome su amplitude:

$$u(t_0) = (u_{\text{st}})_0[1-\cos(j\pi)] = 2(u_{\text{st}})_0. \tag{203}$$

Znači, sporo (statičko) djelovanje sile p_0 uzrokuje $(u_{\text{st}})_0$, a trenutno djelovanje sile p_0 uzrokuje dvostruko veći pomak. Uz prigušenje dobivamo (opet rastavljanjem $\sin[\omega_D(t-\tau)]$):

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{p_0}{m\omega_D}\int_0^t e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin[\omega_D(t-\tau)]d\tau \\ &= (u_{\text{st}})_0\left[1-e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_D t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_D t\right)\right]. \end{aligned} \tag{204}$$

Za prigušene sustave integracija je složena, ali možemo upotrijebiti računalne programe, poput *Mathematice*. Zbog toga je možda jednostavnije rabiti klasično rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0. \tag{205}$$

Partikularno rješenje (bilo koje za $p \neq 0$) $u_p = p_0 / k$ zbrojimo s homogenim rješenjem (slobodno titranje, za $p = 0$), čime dobivamo ukupno rješenje:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t) + \frac{p_0}{k}. \tag{206}$$

Konstante A i B odredimo iz početnih uvjeta ($u(0) = \dot{u}(0) = 0$):

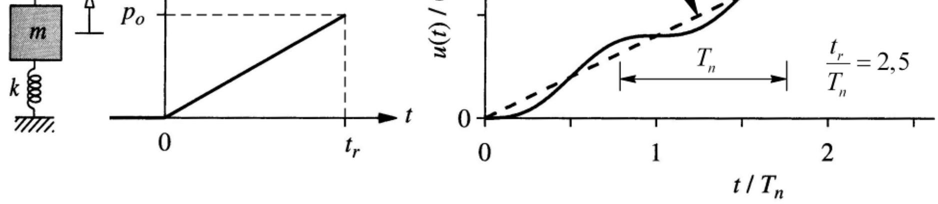
$$\text{iz } u(0)=0:\ A = -\frac{p_0}{k}, \qquad \text{iz } \dot{u}(0)=0:\ B = -\frac{p_0}{k}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}. \tag{207}$$

Kad uvrstimo A i B u $u(t)$, dobivamo konačno rješenje (204). Za $\zeta = 0$ dobivamo rješenje bez prigušenja. Na slici 94. možemo uočiti da premašenje statičkoga iznosa ovisi o iznosu prigušenja. Što je veće prigušenje, manje je premašenje (isprekidano na slici) i brže opadanje prema $(u_{\text{st}})_0$ – ustaljenom stanju.

4.4. Linearna pobuda

Ako sila raste linearno i postiže maksimalnu vrijednost p_0 u trenutku t_r, pobudu možemo izraziti kao:

$$p(t) = p_0/t_r\, t. \tag{208}$$



Slika 95.: Sustav s jednim stupnjem slobode, linearna pobuda, dinamički i statički odziv

Iako teorijski sila može beskonačno rasti ($p(t) \to \infty$) pa tako i pomaci ($u(t) \to \infty$), nas zanima samo ono vremensko područje u kojemu je model još elastičan. Iz Duhamelovog integrala, rastavljanjem $\sin[\omega_D(t-\tau)]$, uz[20] dobivamo:

$$u(t) = \frac{p_0}{m\omega_n t_r}\int_0^t \tau \sin[\omega_n(t-\tau)]d\tau = \frac{p_0}{m\omega_n t_r}[\sin\omega_n t\int_0^t \tau\cos\omega_n\tau d\tau - \cos\omega_n t\int_0^t \tau\sin\omega_n\tau d\tau]$$

$$= (u_{\mathrm{st}})_0\left(\frac{t}{t_r} - \frac{\sin\omega_n t}{\omega_n t_r}\right), \quad \text{uz}: \omega_n = \frac{2\pi}{T_n}: \tag{209}$$

$$u(t) = (u_{\mathrm{st}})_0\left(\frac{t}{T_n}\frac{T_n}{t_r} - \frac{\sin 2\pi t/T_n}{2\pi t_r/T_n}\right).$$

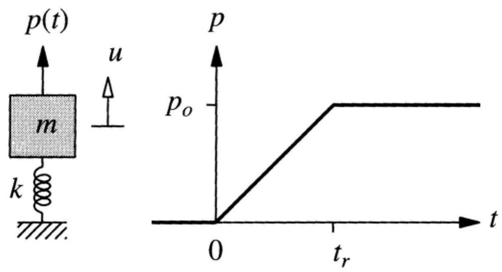
Pomak titra oko statičke vrijednosti periodom T_n ($\zeta = 0$):

$$u_{\mathrm{st}}(t) = \frac{p(t)}{k} = \frac{p_0}{k}\frac{t}{t_r} = (u_{\mathrm{st}})_0\frac{t}{t_r}. \tag{210}$$

Statički pomak prikazan isprekidano na slici 95. desno raste poput opterećenja, a funkcije se razlikuju samo za koeficijent $1/k$.

4.5. Po dijelovima linearna pobuda

U stvarnosti sila uvijek raste postupno do punoga iznosa pa ovaj zadatak možemo primijeniti za modeliranje dinamičkoga pristupa statičkom opterećenju.



Slika 96.: Sustav s jednim stupnjem slobode, po dijelovima linearna pobuda

Razlikujemo dva područja pobude (slika 96.):

$$p(t) = \begin{cases} p_0(t/t_r), & t \le t_r, \\ p_0, & t > t_r. \end{cases} \tag{211}$$

Rješenje možemo dobiti superpozicijom prethodnih rješenja. Linearni dio (početak iz mirovanja) jest:

$$u(t) = (u_{\mathrm{st}})_0\left(\frac{t}{T_n}\frac{T_n}{t_r} - \frac{\sin 2\pi t/T_n}{2\pi t_r/T_n}\right), \tag{212}$$

a konstantni dio (postoji slobodni i prisilni član):

[20] parcijalnom integracijom: $\int\tau\sin\omega_n\tau d\tau = \sin\omega_n\tau/\omega_n^2 - \tau\cos\omega_n\tau/\omega_n$; $\int\tau\cos\omega_n\tau d\tau = \cos\omega_n\tau/\omega_n^2 + \tau\sin\omega_n\tau/\omega_n$

$$u(t) \quad = u(t_r)\cos\omega_n(t-t_r)+\frac{\dot{u}(t_r)}{\omega_n}\sin\omega_n(t-t_r)+(u_{\mathrm{st}})_0[1-\cos\omega_n(t-t_r)]. \qquad (213)$$

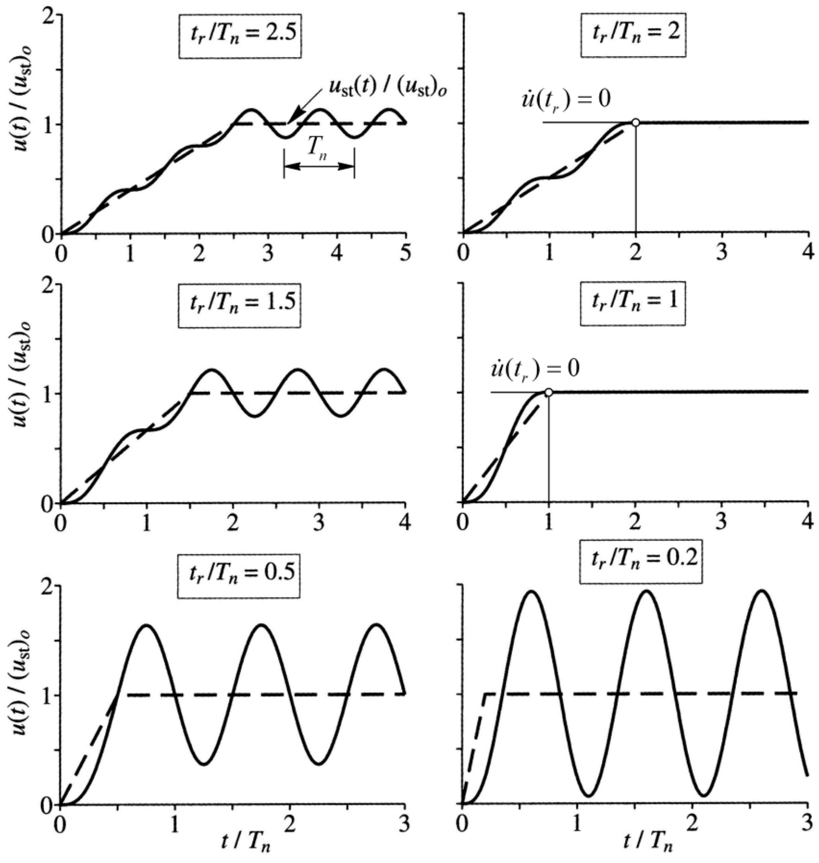
Treći član predstavlja titranje iz mirovanja zbog konstantne pobude, a prva dva člana predstavljaju slobodno titranje. Početne uvjete $u(t_r)$ i $\dot{u}(t_r)$ odredimo na kraju linearnog dijela ($t = t_r$), primjenom jednadžbe (212) i uvrstimo ih u rješenje za konstantni dio:

$$u(t) \quad = (u_{\mathrm{st}})_0\{1+\frac{1}{\omega_n t_r}[(1-\cos\omega_n t_r)\sin\omega_n(t-t_r)-\sin\omega_n t_r\cos\omega_n(t-t_r)]\}, \quad t\geq t_r. \qquad (214)$$

Zatim izmnožimo zagradu i sredimo:[21]

$$u(t)=(u_{\mathrm{st}})_0\left\{1-\frac{1}{\omega_n t_r}[\sin\omega_n t-\sin\omega_n(t-t_r)]\right\}, \quad t\geq t_r. \qquad (215)$$

Uočimo da je $\omega_n t = 2\pi(t/T_n)$, pa je $u(t)/(u_{\mathrm{st}})_0 = f(t/T_n)$. Znači, normirani pomak je funkcija normiranog vremena i ovisi samo o t_r/T_n jer je $\omega_n t_r = 2\pi(t_r/T_n)$. Crtamo $u(t)/(u_{\mathrm{st}})_0 = f(t/T_n)$, za različite t_r/T_n (slika 97.). Isprekidanim linijama je označen statički odziv $u_{\mathrm{st}}(t) = p(t)/k$.



Slika 97.: Dinamički odzivi neprigušenog sustava pri po dijelovima linearnoj pobudi za različite omjere t_r/T_n

[21] uz: $\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\sin(\alpha+\beta)$, $\alpha=\omega_n(t-t_r)$, $\beta=\omega_n t_r$

Iz slike 97. možemo zaključiti sljedeće:

(a) sustav titra oko statičkoga odziva periodom T_n,

(b) ako je $\dot{u}(t_r) = 0$, sustav ne titra za $t \geq t_r$:

iz linearnoga dijela (izraz (212)): $u(t_r) = (u_{st})_0$, za: $t = t_r$ i $t_r/T_n = j$,

iz konstantnoga dijela (izraz (213)): $u(t) = \cos\omega_n(t - t_r)[u(t_r) - (u_{st})_0] + (u_{st})_0 = (u_{st})_0$,

(c) za mali omjer t_r / T_n: odziv sličan onomu za $p(t) = p_0$,

(d) za veliki omjer t_r / T_n: titranje blisko statičkom odzivu.

Ako je spori rast sile, sustav je slabo pobuđen i mali je dinamički koeficijent za $t_r \gg T_n$.

4.6. Po dijelovima linearna pobuda: pojam spektra odziva

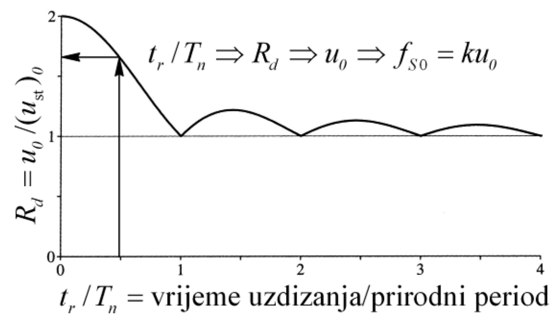
Najveća vrijednost pomaka pri po dijelovima linearnoj pobudi obično nastupa za trajanja konstantnoga dijela. Tražimo ekstrem pomaka deriviranjem rješenja za $p(t) = p_0$:

$$\frac{du(t)}{dt} = u_0 = (u_{st})_0 \left[1 + \frac{1}{\omega_n t_r}\sqrt{(1-\cos\omega_n t_r)^2 + \sin^2\omega_n t_r}\right]. \tag{216}$$

Zatim kvadriramo pod korijenom pa dobivamo:[22]

$$\begin{aligned} R_d &= \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \left[1 + \frac{1}{\omega_n t_r}\sqrt{2\left(1-\cos\omega_n t_r\right)}\right] \\ &= 1 + \frac{1}{\omega_n t_r} 2\sin\left|\frac{\omega_n t_r}{2}\right| = 1 + \frac{|\sin(\pi t_r/T_n)|}{\pi t_r/T_n}, \quad (\omega_n = \frac{2\pi}{T_n}). \end{aligned} \tag{217}$$

Dinamički koeficijent R_d ovisi samo o omjeru t_r / T_n. Spektar odziva je funkcija $R_d = f(t_r / T_n)$ za pripadajuću pobudu. Istaknimo da ta funkcija potpuno određuje odziv sustava na zadanu pobudu. Na slici 98. prikazan je spektar odziva za po dijelovima linearnu pobudu.



Slika 98.: Spektar odziva za po dijelovima linearnu pobudu

Ekstremi $u_0 / (u_{st})_0$ ne ovise o p_0 i t_r, odnosno m i k, već funkcija vrijedi za SVE sustave s jednim stupnjem slobode bez prigušenja. Svojstva dobivenoga spektra odziva su sljedeća:

[22] treba upotrijebiti: $\sin^2\omega_n t_r + \cos^2\omega_n t_r = 1$ i $\sin(\omega_n t_r/2) = \sqrt{1/2(1-\cos\omega_n t_r)} \Rightarrow \sqrt{1-\cos\omega_n t_r} = \sqrt{2}|\sin(\omega_n t_r/2)|$

a) ako je $t_r < T_n / 4$ (brzi rast opterećenja), tada je $u_0 \approx 2(u_{\mathrm{st}})_0$: poput trenutnoga djelovanja $p(t)$;

b) ako je $t_r > 3T_n$ (spori rast opterećenja), tada je $u_0 \approx (u_{\mathrm{st}})_0$: poput statičkoga djelovanja $p(t)$;

c) ako je $t_r / T_n = 1, 2, \ldots$, tada je $u_0 = (u_{\mathrm{st}})_0$, jer je $\dot{u}(t_r) = 0$: nema titranja za vrijeme $p(t) = p_0$.

5. Odziv linearnog sustava na pobudu potresom

5.1. Bilježenje potresnoga zapisa

Za inženjersku potrebu, zapis ubrzanja tla $\ddot{u}_g(t)$ predstavlja najkorisniji podatak za definiranje gibanja tla zbog djelovanja potresa. Uz poznat zapis ubrzanja tla $\ddot{u}_g(t)$, seizmičko opterećenje se može odrediti kao efektivna sila $p_{\mathrm{eff}}(t) = -m\ddot{u}_g(t)$. Zapisi se bilježe akcelerografom (slika 99.) za jake trešnje (ne seizmografom kojim se mjeri pomak na osnovnoj stijeni!). Za pokretanje i zaustavljanje bilježenja služi okidač ubrzanja (okida pri odabranom malom ubrzanju $\ddot{u}_{g0}$).

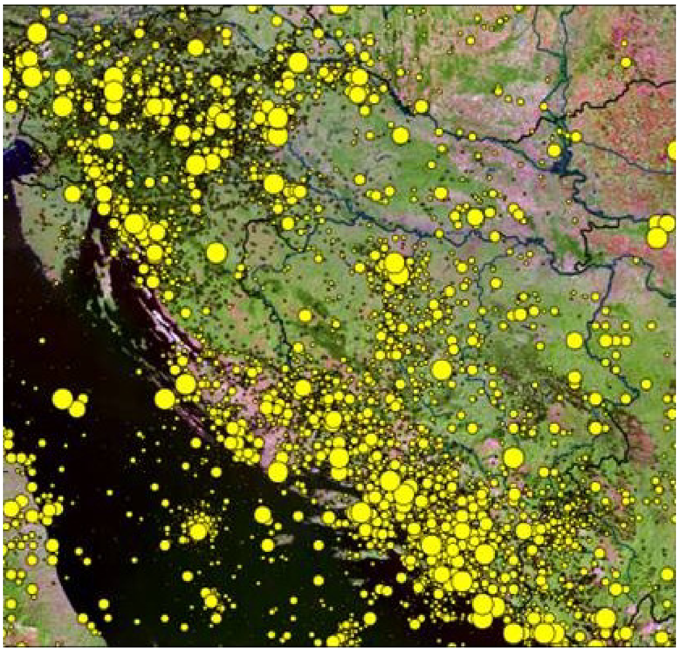
Slika 99.: Akcelerograf
izvor: http://en.wikipedia.org/wiki/Accelerograph

Napomenimo da je teško zabilježiti dugotrajne ($\geq 15\,\mathrm{s}$), jake trešnje ($\geq 0,20\mathrm{g}$) iz više razloga. Primjerice, nepoznat je smjer potresa, uređaji se kvare i trpe oštećenja (udarci). Zapisi se bilježe u tri smjera: dva okomita horizontalna i jedan uspravni.

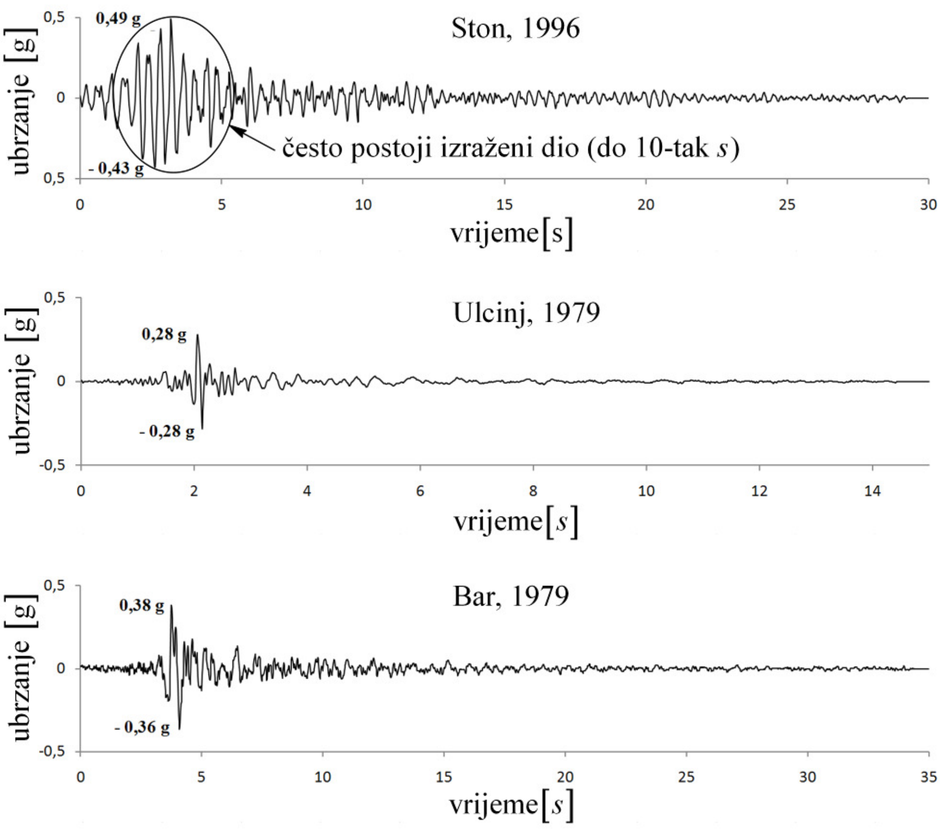
Naša zemlja je potresno aktivno područje. Na slici 100. prikazani su epicentri potresa u razdoblju od 373. g. prije Krista do 2005. godine. Najmanji kružić pripada magnitudi potresa[23] $M \leq 3$, a najveći kružić za magnitude $M = 6$. Prikazani podaci o potresima iz prošlosti su temelj seizmičkih karata kojima se propisuju područja i iznosi vršnih ubrzanja tla a_g.

Potresni zapisi su vrlo nepravilni po amplitudi i trajanju. Za potrebe proračuna i propisa bilježe se na tlu (ne u/blizu zgradi). Na slici 101. prikazani su zapisi ubrzanja tla snimljeni pri potresima u Stonu, 1996. godine te u Crnogorskom Primorju, 1979. godine (Ulcinj i Bar).

[23] M – magnituda potresa prema Richterovoj ljestvici (2 do 10).
Pobliže: http://hr.wikipedia.org/wiki/Richterova_ljestvica#Ljestvica



Slika 100.: Epicentri potresa u Hrvatskoj i susjednim područjima, 373. g. pr. Kr. – 2005.
izvor: http://www.gfz.hr/GO_Monografija.htm



Slika 101.: Potresni zapisi: Ston, Ulcinj i Bar

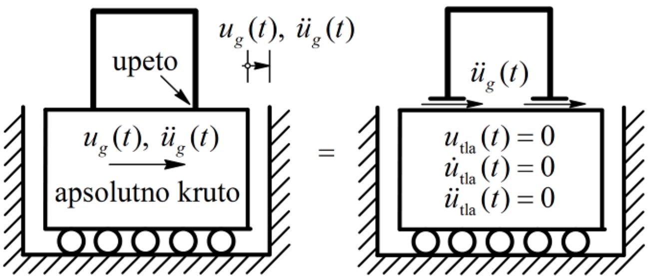
Zabilježeni MAKSIMUMI seizmičkog djelovanja su:

- 2011. godine u Tohoku, Japan za horizontalni smjer: $\ddot{u}_{g0} = 2,7\text{g}$
- 2011. godine u Christchurch, Novi Zeland za vertikalni smjer: $\ddot{u}_{g0} = 2,2\text{g}$

Tablica 1.: Približna povezanost Richterove magnitude, vršnog ubrzanja tla i trajanja jake trešnje za područje Kalifornije
izvor: Lindeburg, M. R.; McMullin, K. M.: Seismic Design of Building Structures

Richterova magnituda	Vršno ubrzanje [g]	Trajanje jake trešnje [s]
5,0	0,09	2
5,5	0,15	6
6,0	0,22	12
6,5	0,29	18
7,0	0,37	24
7,5	0,45	30
8,0	0,50	34
8,5	0,50	37

Potresni zapis obično čini niz od 1500 do 3000 točaka na razmaku od $1/50$ ili $1/100\text{s}$. Pretpostavlja se da isti zapis djeluje na temelje konstrukcije. Znači, zapisi su neovisni o utjecaju konstrukcije na tlo što je istoznačno tvrdnji o apsolutno krutome tlu (koje u stvarnosti ne postoji).

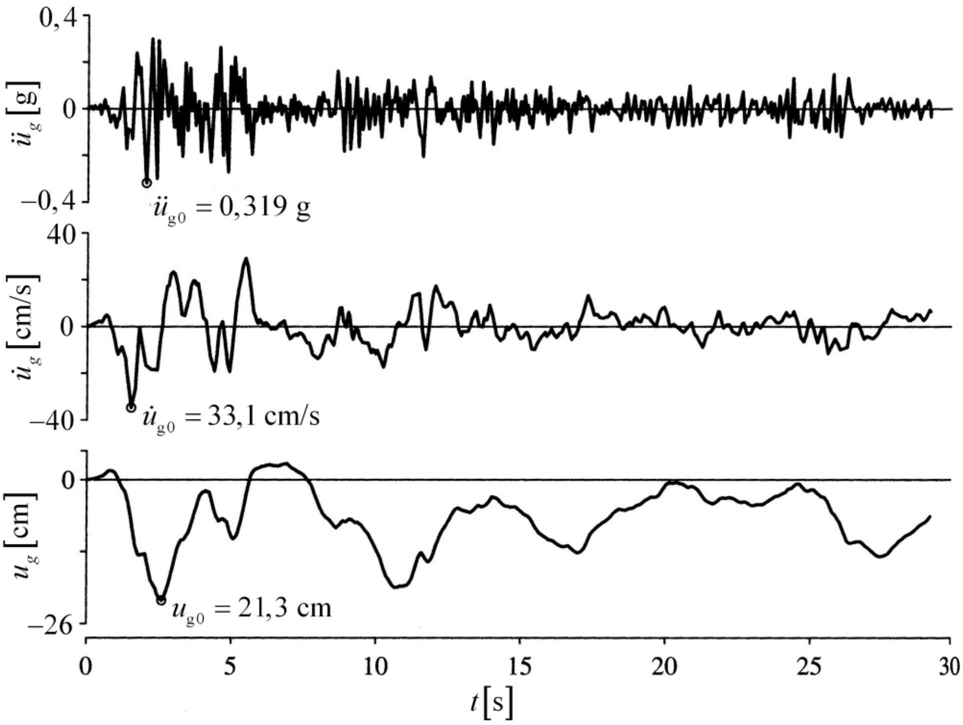


Slika 102.: Pretpostavka: apsolutno kruto tlo

Uobičajeno, tlo se deformira od gibanja zgrade, što je prihvatljivo malo ako je konstrukcija podatljiva, a tlo kruto, no može biti i značajno u slučaju krute konstrukcije i podatljivoga tla što dovodi do izobličenja zapisa. Tada se za proračune upotrebljavaju složeniji postupci proračuna kojima se uzima u obzir međudjelovanje tla i konstrukcije.

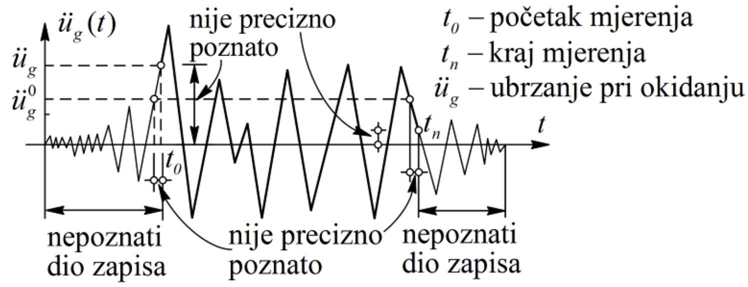
Na slici 103. je prikazan potresni zapis koji je često u uporabi: EL CENTRO, smjer sjever–jug, zabilježen 18.5.1940.[24].

[24] http://nisee.berkeley.edu/data/strong_motion/a.k.chopra/



Slika 103.: Potresni zapis El Centro, smjer sjever-jug, Imperial Valley, California, SAD, 1940.

Općenito, zapis brzine i pomaka se može dobiti integriranjem ubrzanja odnosno brzine, no istaknimo da uređaj okida tek kad je ubrzanje tla veće od nekoga zadanoga ubrzanja (ako je $\ddot{u}_g \geq \ddot{u}_g^0$, a za $\ddot{u}_g < \ddot{u}_g^0$ uređaj miruje). To znači da početni dio zapisa ostaje nepoznat (slika 104.). Time nastaje problem preciznijega integriranja i zato zapise treba sravniti što se naziva popravkom osnovne linije. To posebno vrijedi za veliki broj zapisa (koje još uvijek upotrebljavamo) snimljenih analognim uređajima koji su se rabili ranije. Danas, kod digitalnih uređaja najčešće postoji predmemorija (stalno rade i brišu).

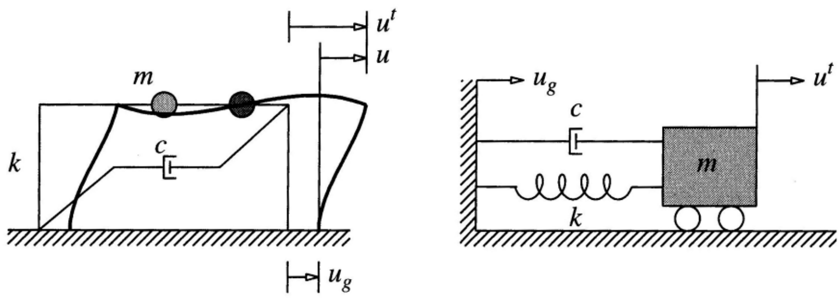


Slika 104.: Mjerenje ubrzanja tla pri potresu: problem okidanja uređaja

5.2. Jednadžba gibanja

Jednadžba gibanja pri seizmičkom opterećenju (iz $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t) / : m$ i $c/m = 2\zeta\omega_n$) jest:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = -\ddot{u}_g(t), \qquad \text{rješenje}: u = f(t, T_n, \zeta). \tag{218}$$



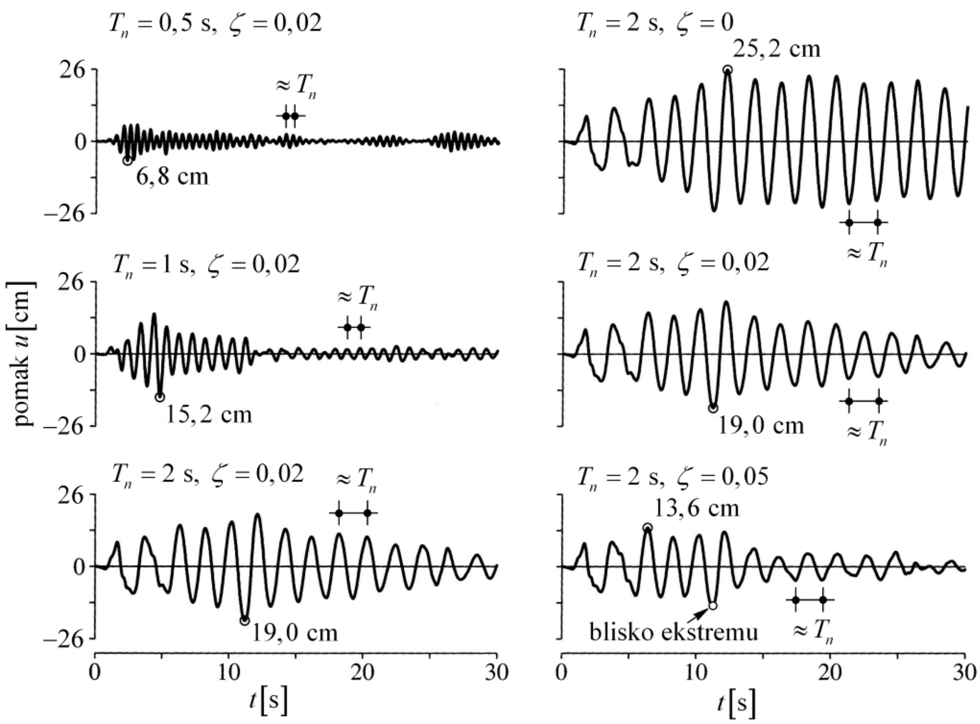
Slika 105.: Sustav s jednim stupnjem slobode

Uočimo iz prethodne jednadžbe da za zadano ubrzanje tla $\ddot{u}_g(t)$ odziv ovisi SAMO o vlastitoj frekvenciji ω_n (ili periodu T_n) i prigušenju ζ. Znači, sustavi jednakih T_n i ζ imaju iste odzive ($T_n = 2\pi / \omega_n = 2\pi\sqrt{m/k}$). Jedan sustav može imati veću masu ili krutost, no važan je omjer.

Budući da su zapisi ubrzanja vrlo nepravilni, analitičko rješenje nije moguće. Postoji točno numeričko rješenje jednadžbe gibanja metodom vremenskoga prirasta[25] uz linearnu interpolaciju pobude. Dakle, pretpostavljamo linearnu promjenu $\ddot{u}_g(t)$ kroz vremenski odsječak Δt (uzeto $1/50\mathrm{s}$) i određujemo točno rješenje jednadžbe gibanja u svakom prirastu vremena.

5.3. Svojstva rješenja

Na slici 106. prikazan je odziv dviju skupina okvira na pobudu zapisom El Centro.



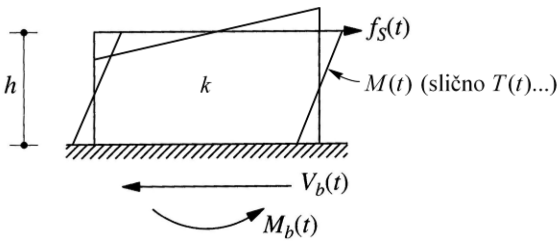
Slika 106.: Odzivi različitih sustava s jednim stupnjem slobode na pobudu potresnim zapisom El Centro

[25] vremenske diskretizacije

Prva skupina se sastoji od tri modela različitih vlastitih perioda T_n, uz isto prigušenje ζ (2%). Iz teorije slučajnih titranja može se dokazati da je period odziva $u(t) \approx T_n$. Što je veći T_n, obično je veća amplituda pomaka u_0, ali nije pravilo (graf $T_n - u_0$, Slika 106). Drugu skupinu čine tri modela istoga vlastitog perioda T_n (2s), uz različito prigušenje ζ. Što je veće prigušenje ζ, manja je amplituda pomaka u_0 (ζ djeluje povoljno, ali je izvorno malo).
Uočimo još da je za isti T_n sličan period odziva $u(t)$ i vrijeme nastupa u_0. Ako je poznato rješenje jednadžbe gibanja $u(t)$, unutarnje sile odredimo statički (postoje dva načina, pogledati poglavlje 1.9.2). Za seizmičku analizu prikladna je upotreba ekvivalentne[26] bočne sile (slika 107.), što je temelj kvazistatičkog pristupa proračunu prema mnogim propisima.
Budući da je bočna sila $f_S(t) = ku(t)$, a krutost $k = m\omega_n^2$ dobivamo:

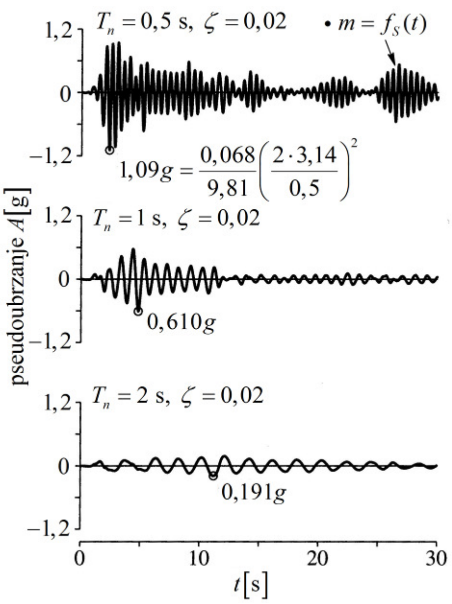
$$f_S(t) = m\omega_n^2 u(t) = mA(t), \qquad A(t) = \omega_n^2 u(t). \tag{219}$$

Bočna sila jest $m \cdot A(t)$, a ne $m \cdot \ddot{u}^t(t)$, pri čemu se $A(t)$ naziva pseudoubrzanje.



Slika 107.: Ekvivalentna bočna sila na okviru

Na slici 108. je na primjeru 1. skupine sa slike 106. prikazano određivanje pseudoubrzanja $A(t)$ kao umnoška odziva u vremenu $u(t)$ i kvadrata vlastite frekvencije $\omega_n^2 = (2\pi / T_n)^2$.



Slika 108.: Pseudoubrzanje različitih sustava s jednim stupnjem slobode za pobudu potresnim zapisom El Centro

[26] istoznačna

Proračun unutarnjih sila se svodi na statički proračun za opterećenje $f_S(t)$ u nekom trenutku t. Reakcije odredimo kao:

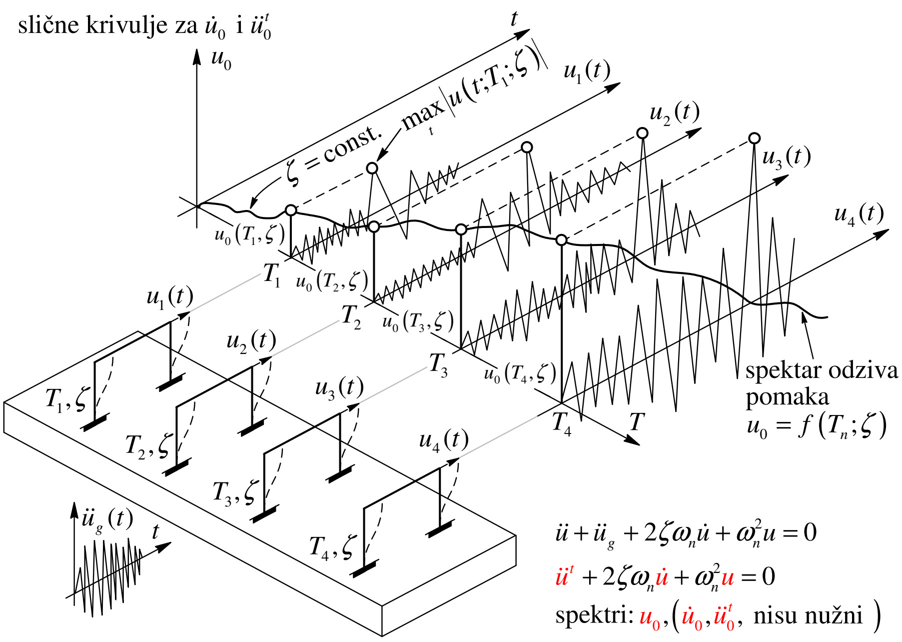
$$V_b(t) \quad = f_S(t) = mA(t), \tag{220}$$

$$M_b(t) \quad = h f_S(t) = hV_b(t), \tag{221}$$

pri čemu je V_b poprečna reakcija, a M_b moment prevrtanja. Ako se prikazani sustav promatra kao ekvivalentni sustav sastavljen od mase, opruge i prigušivača (poglavlje 1.7), nije potrebno računati bočnu silu i pripadne unutarnje sile, već silu u opruzi izravno odredimo kao $ku(t)$.

5.4. Pojam i tvorba spektra odziva

Spektrom odziva se prikazuju SVI ekstremi (amplituda) odziva okvira na potresnu pobudu. Znači, potrebna je JEDNA funkcija za SVE okvire – sustave s jednim stupnjem slobode. Na taj način je jednostavnija primjena spoznaja dinamike konstrukcija (iščezava ovisnost o vremenu t). Poznavanje spektra odziva je ključno za razvoj kvazistatičkoga postupka proračuna.



Slika 109.: Pojam i tvorba spektra odziva pomaka

Za odabrano prigušenje ζ spektar odziva ovisi samo o T_n (ω_n, f_n); $n = 1,\ldots,112$. Treba odrediti nekoliko krivulja s uobičajenim iznosima ζ. Primjerice, vršna vrijednost pomaka, brzine i ubrzanja (za jedan T_n) jest:

$$\begin{aligned}
u_0(T_n,\zeta) \quad &\equiv \max_t |u(t;T_n;\zeta)|, \quad \text{spektar odziva pomaka}: u_0 = f(T_n;\zeta) \\
\dot{u}_0(T_n,\zeta) \quad &\equiv \max_t |\dot{u}(t;T_n;\zeta)|, \quad \text{relativne brzine}: \dot{u}_0 = f(T_n;\zeta) \qquad , \\
\ddot{u}_0^t(T_n,\zeta) \quad &\equiv \max_t |\ddot{u}^t(t;T_n;\zeta)|, \quad \text{ukupnog ubrzanja}: \ddot{u}_0^t = f(T_n;\zeta)
\end{aligned}$$

pri čemu $f(T_n;\zeta)$ predstavlja simbolički zapisi ovisnosti amplitude o periodu ($\zeta = \text{const.}$).

Uočimo da nema ovisnosti o vremenu t i zbog apsolutnih vrijednosti su spektri prema definiciji pozitivnih vrijednosti. Budući da je za proračun unutarnjih sila dovoljno poznavati odziv $u(t)$, iz spektra odziva pomaka odmah znamo ekstrem $D \equiv u_0$, pa i ekstremnu bočnu silu: $f_{S0} = ku_0 = kD$ (i ekstremne M,T,N,...).

5.4.1. Spektar odziva pomaka

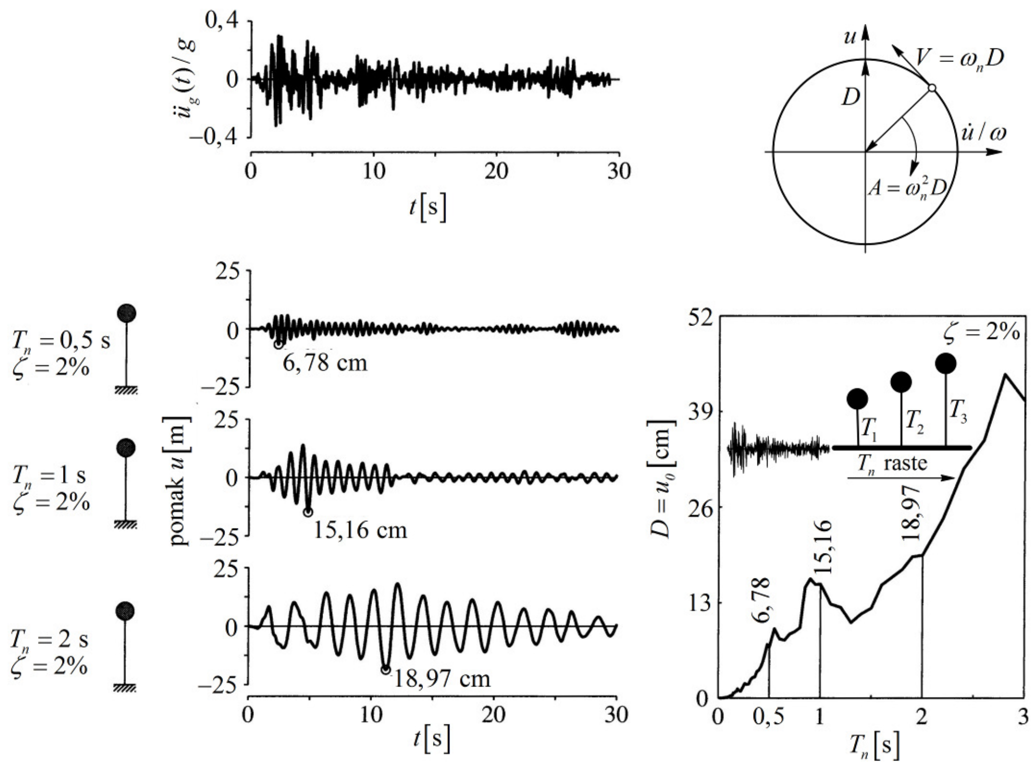
Postupak određivanja spektra odziva pomaka možemo sažeti u pet točaka:

1. riješimo jednadžbu gibanja (uz T_n i ζ) za potresni zapis
2. iz $u(t)$ odredimo ekstrem $D \equiv u_0$ (pozitivan ili negativan)
3. time je određena točka spektra (T_n, D) za prigušenje ζ
4. ponovimo postupak za niz vrijednosti T_n, uz $\zeta = \text{const.}$
5. nova krivulja: izmijenimo ζ i sve ponovimo

U nastavku ćemo zbog tvorbe projektnoga (glatkog) spektra definirati još dva spektra, a to su spektar odziva pseudobrzine i spektar odziva pseudoubrzanja.

5.4.2. Spektar odziva pseudobrzine – aproksimacija spektra brzine

Promatramo slobodno titranje bez prigušenja pomaka D i brzine V. Maksimum potencijalne energije je $E_{S0} = ku_0^2/2 = kD^2/2$, a maksimum kinetičke energije $E_{K0} = mV^2/2$ (poglavlje 2.3).



Slika 110.: Zapis ubrzanja tla; pomaci u vremenu tri sustava s jednim stupnjem slobode; spektar odziva pomaka

Ako nema prigušenja, maksimumi su jednaki ($E_{S0} = E_{K0}$) pa slijedi:

$$\frac{kD^2}{2} = \frac{mV^2}{2} = \frac{kV^2}{2\omega_n^2} \Rightarrow V = \omega_n D = (2\pi/T_n)D, \tag{222}$$

pri čemu vršna relativna pseudobrzina V određuje i E_{S0} (jednako E_{K0}). Općenito, pseudobrzina nije jednaka vršnoj vrijednosti brzine ($V \neq \dot{u}_0$), zato se i naziva pseudobrzina. Naime, izraz (222) vrijedi za slobodno titranje neprigušenog sustava, a ne za pobudu potresom $p_{\text{eff}} = -m\ddot{u}_g$ i sustav s prigušenjem $\zeta > 0$. Spektar pseudobrzine možemo dobiti množenjem spektra pomaka s $2\pi / T_n$ (slika 110.).

5.4.3. Spektar odziva pseudoubrzanja – aproksimacija spektra ubrzanja

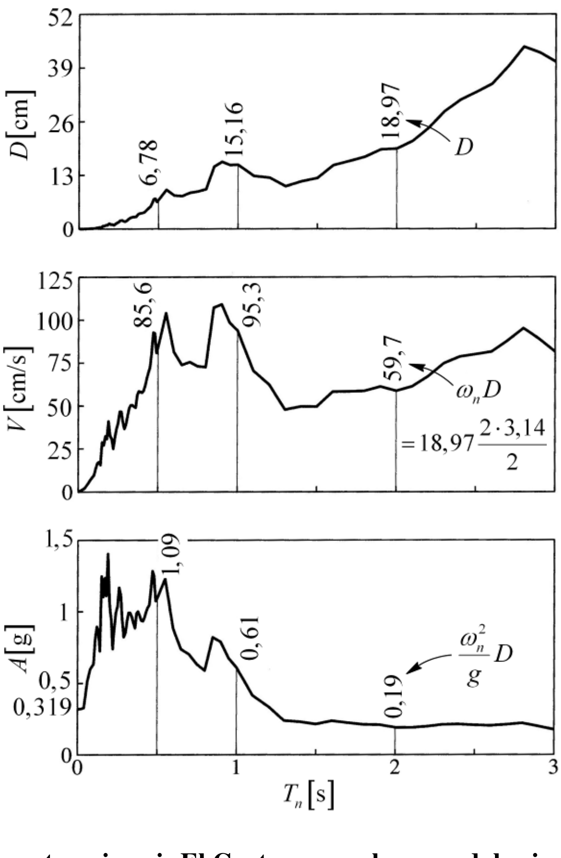
Vršno pseudoubrzanje jest:

$$A = \omega_n^2 D = (2\pi/T_n)^2 D,, \tag{223}$$

pri čemu je D je maksimalna vrijednost pomaka $u(t)$. Važno je pokazati da je pseudoubrzanje proporcionalno s poprečnom reakcijom V_{b0}:

$$f_{S0} = V_{b0} = mA\frac{g}{g}, \quad V_{b0} = \frac{A}{g}w, \quad w = mg - \text{težina zgrade.} \tag{224}$$

Veličina A / g se naziva koeficijent poprečne reakcije ili bočne sile i predstavlja koeficijent kojim množimo težinu zgrade da bismo dobili poprečnu reakciju.



Slika 111.: Spektri odziva za potresni zapis El Centro: pomaka, pseudobrzine i pseudoubrzanja, za ζ=0,02

Istaknimo da je poprečna reakcija sila inercije mA, a ne $m\ddot{u}_0^t$. Općenito, pseudoubrzanje nije jednako vršnoj vrijednosti ukupnog ubrzanja ($A \neq \ddot{u}_0^t$), zbog toga se i naziva pseudoubrzanje. Spektar pseudoubrzanja možemo dobiti množenjem spektra pomaka s $\omega_n^2 = (2\pi / T_n)^2$. Ordinate spektra su jednake ekstremu funkcije $A(t)$.

5.4.4. Zajednički $D - V - A$ spektar

U prošlim poglavljima smo pokazali da spektri odziva (*D*, *A* i *V*) sadrže iste podatke, a razlikuju se samo do na ω_n ili ω_n^2. Znači, dovoljno je odrediti jedan spektar, a ostale lako izračunamo iz izraza (222) i (223). Skraćeno:

$$D \rightleftarrows V = \omega_n D \rightleftarrows A = \omega_n^2 D. \tag{225}$$

Objasnimo zašto su nam ipak potrebna sva tri spektra. Prvo, spomenimo da svaki spektar određuje važnu fizikalnu vrijednost:

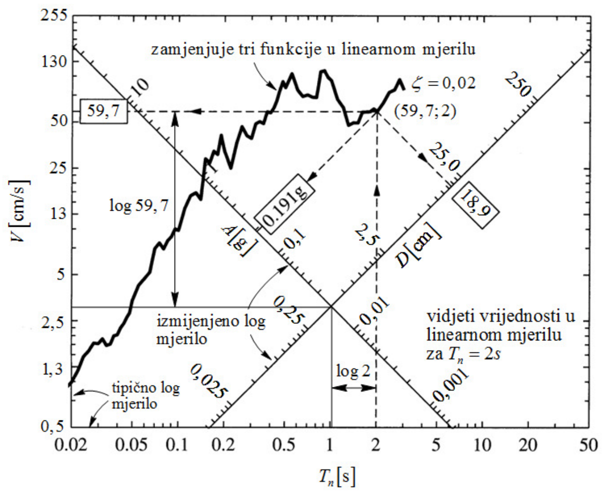
a) spektar pomaka: vršnu vrijednosti pomaka D
b) spektar pseudobrzine: maksimalnu potencijalnu energiju E_{S0}
c) spektar pseudoubrzanja: vršnu poprečnu reakciju V_{b0}

Drugi razlog jest da su svi spektri odziva potrebni u postupku tvorbe i pojašnjenja projektnoga (glatkog) spektra. Ako definiramo jednoznačnu vezu između D, V i A:

$$\left.\begin{aligned} V &= \omega_n D \\ A &= \omega_n^2 D \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{A}{\omega_n} = V = \omega_n D \quad \text{ili} \quad \frac{T_n}{2\pi} A = V = \frac{2\pi}{T_n} D, \tag{226}$$

možemo primijetiti da su slično povezani dinamički koeficijenti odziva za harmonijsku pobudu [izraz (169)]. Logaritamski prikaz pseudobrzine $V = f(T_n)$ daje zajednički (tripartitni) spektar:

$$\log V = \log(T_n) + \log(A/(2\pi)) \ \text{ i } \ \log V = -\log(T_n) + \log(2\pi D). \tag{227}$$



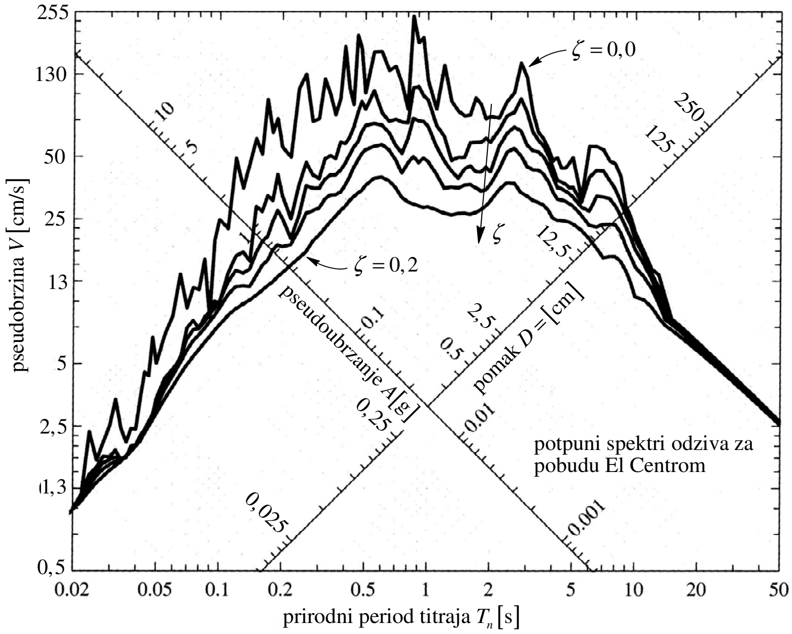
Slika 112.: Zajednički $D - V - A$ spektar potresnog zapisa El Centro, za ζ=0,02

Istaknimo da spektar mora vrijediti za većinu konstrukcija (krutih i gipkih), pa mora uključivati široko područje perioda, primjerice od 0,02 do 50 s (zato je pogodno logaritamsko mjerilo). Primjerice, vlastiti period mosta Golden Gate u poprečnom smjeru iznosi $T_n = 18,2$ s. Spektar se određuje za prigušenja do 20% (uobičajeno: 0, 2, 5, 10 i 20%). Pseudoubrzanje je često prikazano normirano i izdvojeno. Prema izrazu (224), vrijedi da je $V_{b0} = A/g\,w \Rightarrow A/g = f_{S0}/w$

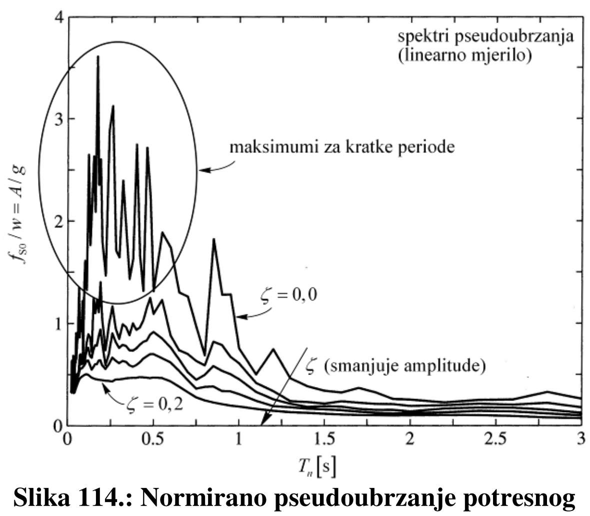
(ordinata!). Znači iz spektra možemo za poznatu težinu i vlastiti period T_n izravno odrediti poprečnu reakciju $V_{b0} = f_{S0}$.

Često izdvajamo i spektar pomaka (slika 115.) jer je ponekad važan vršni pomak, primjerice kod određivanja dilatacije.

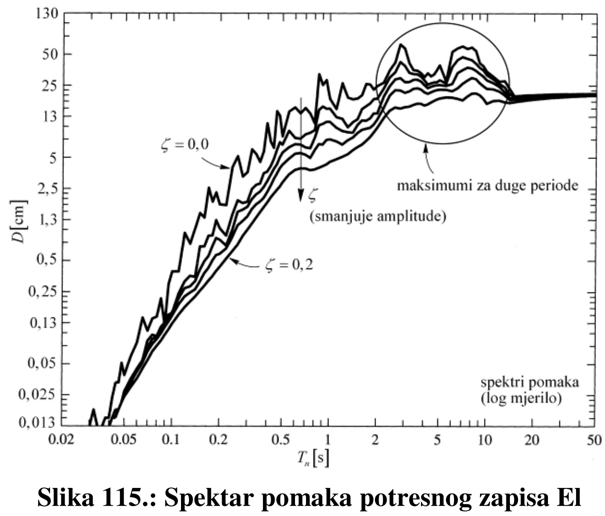
Budući da se primjena spektara odziva u potresnom inženjerstvu pokazala vrlo korisnom, izrađuju se i zatim objavljuju spektri odziva za skoro sve potresne zapise zabilježene pri jačim trešnjama. Danas postoji veliki broj zapisa[27]. Iako je potres stohastička pojava, moguće je uočiti neke pravilnosti što je od velike važnosti za procjene ponašanja budućih potresa. Općenito, uočavaju se ovisnosti o udaljenosti od rasjeda, geološkim svojstvima područja i lokalnim uvjetima temeljenja.



Slika 113.: Zajednički D – V – A spektar potresnog zapisa El Centro, za različita prigušenja



Slika 114.: Normirano pseudoubrzanje potresnog zapisa El Centro, za različita prigušenja



Slika 115.: Spektar pomaka potresnog zapisa El Centro, za različita prigušenja

[27] prvi zapis: Long Beach, California, 1933.; 3000 zapisa ,Tohoku, Japan, 2011.

5.4.5. Postupak tvorbe spektra odziva

Spektar odziva određenog potresnog zapisa $\ddot{u}_g(t)$ može se odrediti na sljedeći način:

1. numerički definiramo $\ddot{u}_g(t)$, uobičajeno svakih $0{,}02$ s
2. odaberemo prirodni period T_n i prigušenje ζ
3. numerički proračunamo odziv $u(t)$ na pobudu $\ddot{u}_g(t)$
4. pronađemo amplitudu u_0 (vršnu vrijednost) odziva $u(t)$
5. odredimo ordinate spektara:
   $$D = u_0, \qquad V = (2\pi / T_n)D, \qquad A = (2\pi / T_n)^2 D$$
6. ponoviti korake $2-5$ za dovoljno vrijednosti T_n (uz $\zeta = \text{const.}$)
7. prikažemo rezultate u obliku jedne (log. mjerilo) ili tri funkcije (linearno mjerilo)
8. za novu funkciju: ponovimo korake $2-7$ uz drugo prigušenje

Uobičajeno, broj perioda T_n od 0,02 do $50\,\text{s}$ iznosi 112 (gušće za male T_n).

5.5. Vršne vrijednosti unutarnjih sila

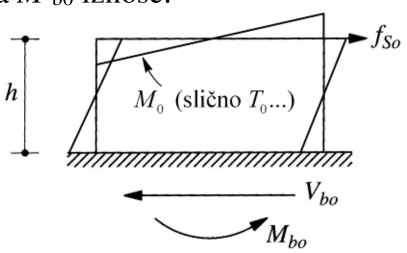
Znamo, iz spektra izravno možemo odrediti vršni pomak i sile. Znači nisu potrebni dinamički proračuni i traženje ekstrema, jer je to već obavljeno pri tvorbi spektra. Za vlastiti period T_n i prigušenje ζ statičkog sustava očitamo D, V ili A, a dovoljna je jedna od tri krivulje:

$$\underbrace{u_0 = D}_{\text{Slika 115}} = \underbrace{(T_n/2\pi)V}_{\text{Slika 113}} = \underbrace{(T_n/2\pi)^2 A}_{\text{Slika 114}}. \tag{228}$$

Vršno bočno opterećenje okvira sa slike 116. jest:

$$f_{S0} = kD = mA. \tag{229}$$

Statičkim proračunom možemo odrediti unutarnje sile M_0, T_0, N_0, no imajmo na umu da ćemo dobiti samo vršne sile (ne odziv u vremenu!). Poprečna reakcija V_{b0} i moment prevrtanja M_{b0} iznose:



$$V_{b0} = kD = mA, \qquad M_{b0} = hV_{b0}. \tag{230}$$

Slika 116.: Vršne vrijednosti sila

5.6. Svojstva spektra odziva

Da bismo pojasnili svojstva spektra odziva, promotrimo tri oblika spektralnih krivulja potresnog zapisa El Centro:

- s ucrtanim ekstremima zapisa u_{g0}, $\dot{u}_{g0}$, $\ddot{u}_{g0}$ (slika 117.)
- normirani oblik D / u_{g0}, $V/\dot{u}_{g0}$, $A/\ddot{u}_{g0}$ (slika 118.)
- za prigušenje $\zeta = 5\%$ s linearnom aproksimacijom (isprekidano, slika 119.)

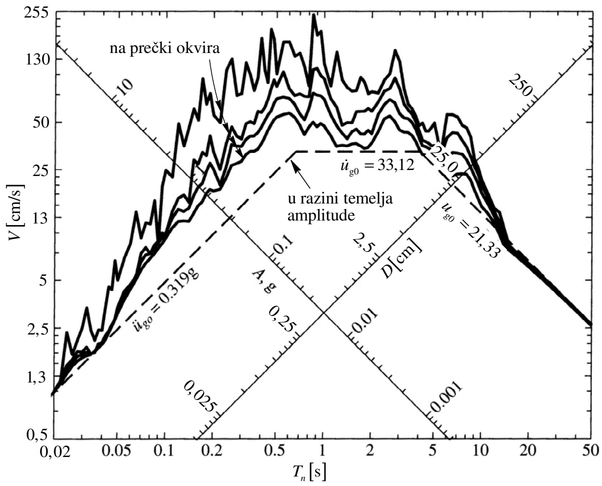
Zbog dinamičkih učinaka vršna vrijednost pseudoubrzanja je veća od vršnog ubrzanja tla $A > \ddot{u}_{g0}$ (do $10\ddot{u}_{g0}$), a bez spomenutih učinaka njihove bi vrijednosti bile jednake ($A = \ddot{u}_{g0}$):

$$\underbrace{\ddot{u}}_{\approx 0} + \underbrace{2\zeta\omega_n \dot{u}}_{\approx 0} + \underbrace{\omega_n^2 u}_{A(t)} = -\ddot{u}_g(t), \quad \underbrace{A(t) \approx -\ddot{u}_g(t),\; A \approx \ddot{u}_{g0}}_{\text{iste funkcije do na predznak}}. \tag{231}$$

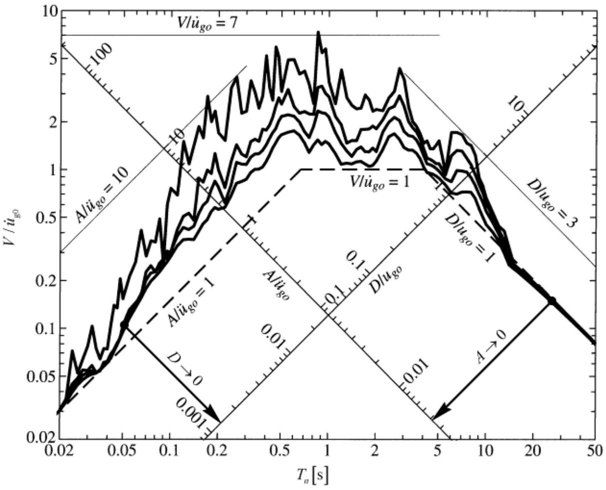
Analizirajmo područja spektra među periodima $T_a - T_f$ (slika 119.)

Tablica 2.: Ordinate područja: periodi [s]

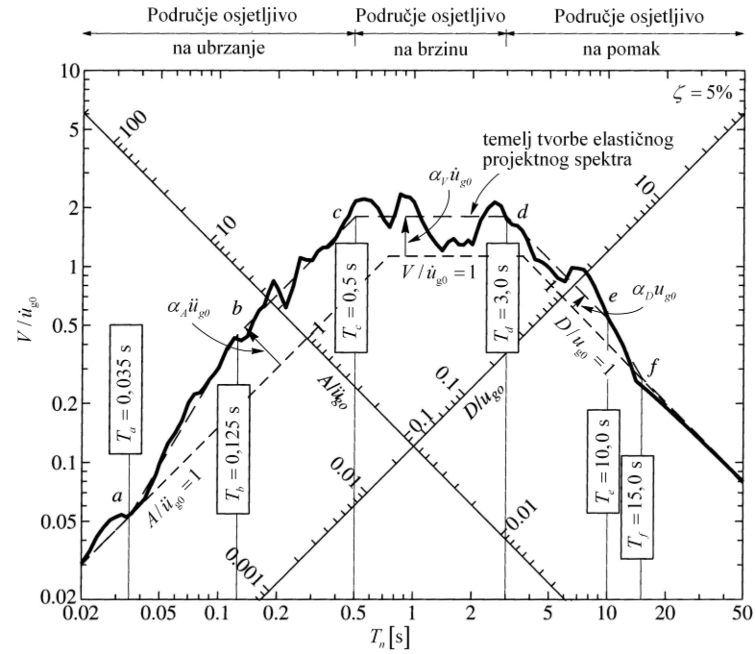
T_a	T_b	T_c	T_d	T_e	T_f
0,035	0,125	0,5	3,0	10	15



Slika 117.: *D – V – A* spektar i vršne vrijednosti ubrzanja, brzine i pomaka tla za potresni zapis El Centro, uz prigušenja 0, 2, 5 i 10%



Slika 118.: Normirani D – V – A spektar za potresni zapis El Centro, uz prigušenja 0, 2, 5 i 10%



Slika 119.: Normirani D – V – A spektar (puna linija) i idealizirani spektar (isprekidana linija) za potresni zapis El Centro i ζ=0,05

Kod sustava VRLO KRATKOG perioda ($T_n < T_a$, Slika 118) pseudoubrzanje teži vršnom ubrzanju tla ($A \to \ddot{u}_{g0}$), a pomak teži prema nuli ($D \to 0$). Primjerice, kod konstrukcije s vrlo krutim stupovima, nema relativnoga pomaka mase (odziv u, pa i $D \to 0$). Znači, jednako je gibanje mase i tla, a relativni odziv je $u = 0$ (vidjeti za EL CENTRO, Slika 120.). Dakle, znamo da je ukupni pomak jednak zbroju pomaka tla i konstrukcije ($u^t = u_g + u$) pa ako je odziv konstrukcije približno jednak nuli ($u \approx 0$), ukupni pomak je približno jednak pomaku tla ($u^t \approx u_g$). Tada je ukupno ubrzanje približno jednako ubrzanju tla ($\ddot{u}^t \approx \ddot{u}_g \Rightarrow \ddot{u}_0^t \approx \ddot{u}_{g0}$). Iz jednadžbe gibanja [izraz (218) uz $\ddot{u} + \ddot{u}_g = \ddot{u}^t$] slijedi da je ukupno ubrzanje $\ddot{u}^t = -2\zeta\omega_n \dot{u} - \omega_n^2 u$. Uz malo prigušenje ζ vrijedi $2\zeta\omega_n \dot{u} \approx 0$, pa je ukupno ubrzanje $\ddot{u}^t \approx -\omega_n^2 u = -A(t)$. Vršna vrijednost ukupnog ubrzanja je približno jednaka pseudoubrzanju $\ddot{u}_0^t \approx A$. Iz istaknutih izraza slijedi da je kod sustava vrlo kratkih perioda pseudoubrzanje približno jednako vršnom ubrzanju tla $A \approx \ddot{u}_{g0}$ ($0{,}321\text{g} \approx 0{,}319\text{g}$ na slikama 117. i 120.). Zaključno, ako vlastiti periodi teže prema nuli ($T_n \to 0$), spektri teže prema vršnomu ubrzanju tla.

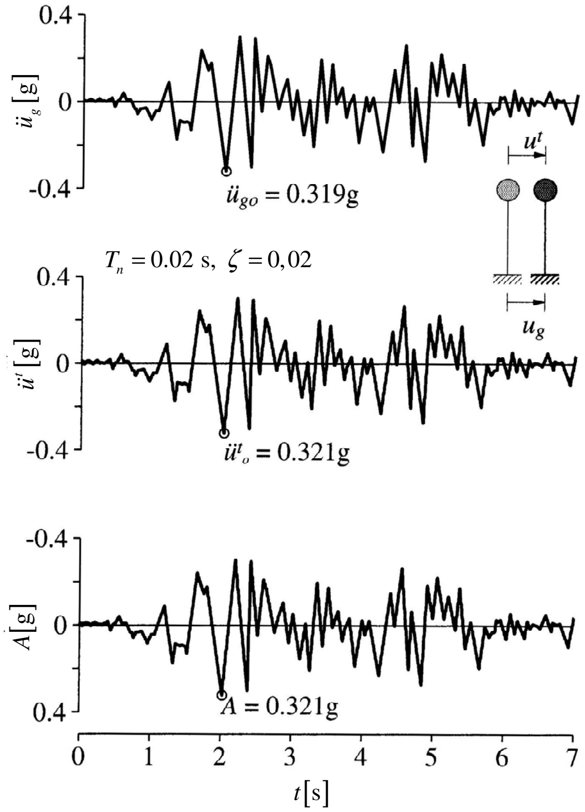
Kod sustava VRLO DUGOG perioda ($T_n > T_f$, Slika 118.) za sve vrijednosti prigušenja pomaci teže pomaku tla ($D \to u_{g0}$), a pseudoubrzanje teži prema nuli ($A \to 0$). Pri malom pseudoubrzanju A, mala je i bočna sila $f_S = mA$ (slabo opterećen okvir), pa su male i unutarnje sile. Primjerice, kod konstrukcije s vrlo gipkim stupovima, tlo se giba (zatitra), a masa stoji. Znači, nema apsolutnog pomaka i ubrzanja mase: $u^t = 0$, $\ddot{u}^t = 0$ i $\ddot{u}_0^t = 0$. Prije smo pokazali da za malo prigušenje ζ, pseudoubrzanje teži vršnom ukupnom ubrzanju ($A \approx \ddot{u}_0^t$). Budući da je ono približno jednako nuli, i pseudoubrzanje je blisko nuli ($A \approx 0$).

Ako je ukupni pomak približno jednak nuli ($u^t \approx 0$), slijedi da je odziv konstrukcije gotovo jednak pomaku tla ($u \approx -u_g$). Znači vršna vrijednost pomaka je približno jednaka vršnom pomaku tla ($D \approx u_{g0}$), što možemo uočiti na slici 121. Razlika između prikazanih pomaka tla i odziva konstrukcije u vremenu nastaje djelomično zbog gubitka početnoga dijela zapisa prije okidanja akcelerografa [problem integracije $\ddot{u}_g(t)$]. Zaključno, ako vlastiti period teži prema beskonačnosti, spektri teže prema vršnom pomaku tla.

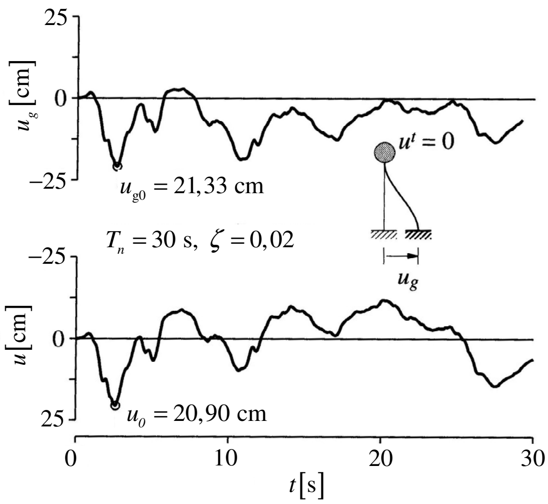
Kod sustava kratkih perioda $T_b < T_n < T_c$ pseudoubrzanje je veće od vršnog ubrzanja tla ($A > \ddot{u}_{g0}$) (slika 118.), a premašenje ovisi o T_n i ζ (jer odziv ovisi samo o T_n i ζ). U tom području spektralnu krivulju možemo aproksimirati pravcem $A = \alpha_A \ddot{u}_{g0}$ (slika 119.), pa se uz konstantnu vrijednost A gubi ovisnost o vlastitom periodu T_n, a ostaje samo o prigušenju ζ.

Kod sustava dugih perioda $T_d < T_n < T_e$, (slika 118.), pomak D je veći od vršnog ubrzanja tla u_{g0} ($D > u_{g0}$). U tom području spektralnu krivulju možemo aproksimirati pravcem konstantne vrijednosti $D = \alpha_D u_{g0} = \text{const.}$ koja je ovisna o prigušenju ζ (slika 119.).

Kod sustava srednjih perioda $T_c < T_n < T_d$, (slika 118.), pseudobrzina V je veća od vršne brzine tla $\dot{u}_{g0}$ ($V > \dot{u}_{g0}$). U tom području spektralnu krivulju možemo aproksimirati pravcem konstantne vrijednosti $V = \alpha_V \dot{u}_{g0} = \text{const.}$ koja je ovisna o prigušenju ζ (slika 119.).



Slika 120.: Ubrzanje tla, ukupno ubrzanje jednostupnjevnog sustava kratkog perioda i pseudoubrzanje pri potresu El Centro



Slika 121.: Pomak tla i odziv jako fleksibilnog jednostupnjevnog sustava pri potresu El Centro

Prigušenje određuje koeficijente uvećanja α_A, α_D i α_V (veći su od 1). U područjima $T_a - T_b$ i $T_e - T_f$ (slika 119.) spektralnu krivulju također možemo zamijeniti pravcima.

Logično je podijeliti spektar na tri dijela (slika 119.):

a) područje dugoga perioda (na desno od točke d) za $T_n > T_d$,
   – odziv najviše ovisi o pomaku tla (spektar u pravcu pomaka)
   – zato se i naziva: PODRUČJE OSJETLJIVO NA POMAK
b) područje kratkoga perioda (na lijevo od točke c): za $T_n < T_c$,
   – odziv najviše ovisi o ubrzanju tla (spektar u pravcu ubrzanja)
   – zato se i naziva: PODRUČJE OSJETLJIVO NA UBRZANJE
c) područje srednjega perioda (između točaka c i d): za $T_c < T_n < T_d$,
   – odziv najviše ovisi o brzini tla (spektar u pravcu brzine)
   – zato se i naziva: PODRUČJE OSJETLJIVO NA BRZINU

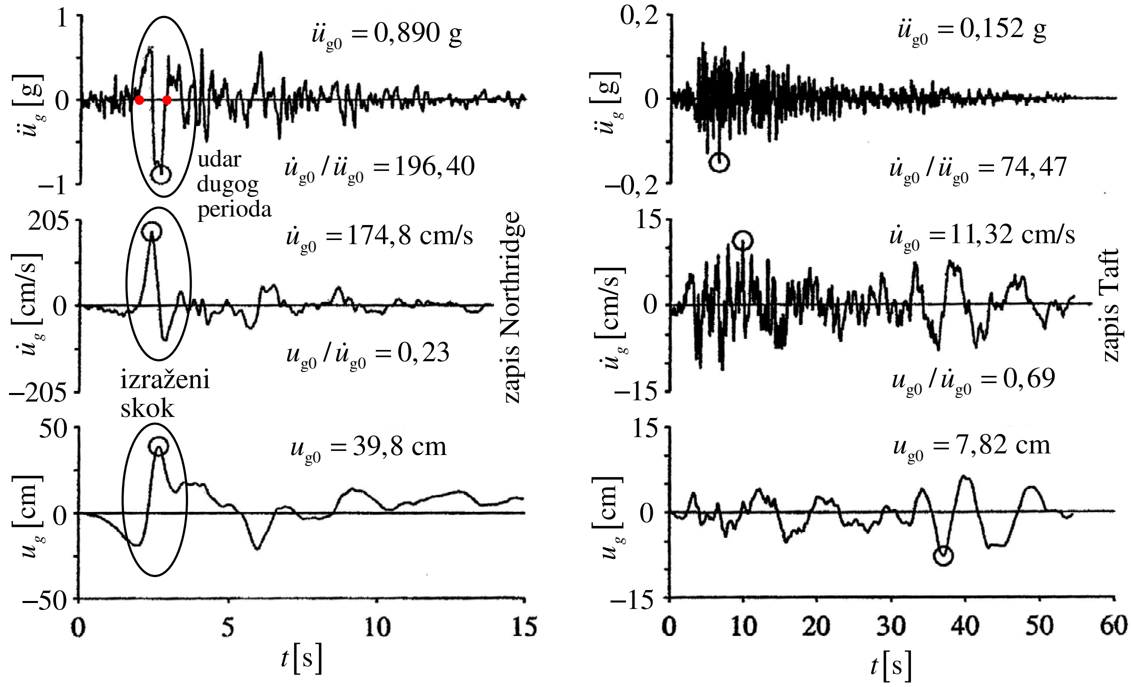
Za pojedini potresni zapis, periodi T_a, T_b, T_e i T_f na idealiziranom spektru slabo ovise o prigušenju, a T_c i T_d su izrazito ovisni o prigušenju ζ (pogledati razmake spektralnih krivulja na slici 118.). Ove zaključke je teško donijeti analizom zasebnih spektara, već je moguće samo primjenom zajedničkoga *D-V-A* spektra.

Idealiziranje spektra odziva nizom pravaca $a-b-c-d-e-f$ (slika 119.) nije precizan postupak i velika su odstupanja pravaca od ordinata spektra, što možda nije odmah uočljivo na slici 119., jer logaritamsko mjerilo smanjuje razlike. Ipak, zamisao je vrlo važna jer je idealizacija spektralnih krivulja pravcima temelj tvorbe elastičnog projektnog (glatkog) spektra.

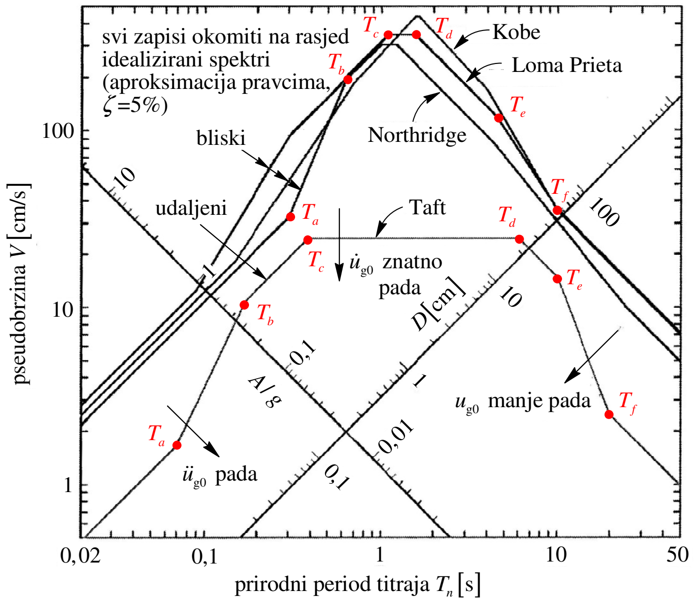
Oblik spektra i periodi od T_a do T_f najviše ovise o omjerima $\dot{u}_{g0}/\ddot{u}_{g0}$ i $u_{g0}/\dot{u}_{g0}$. Ti omjeri ovise o magnitudi potresa, udaljenosti uređaja od rasjeda, geološkim uvjetima područja i uvjetima temeljenja. Prirodna mjesta rasjeda su primjerice ispod kanjona i korita rijeka, prepreka koje se često svladavaju mostovima pa postoji izravni utjecaj bliskih zapisa (primjerice, most Pelješac).

Za bliski zapis (primjerice, NORTHRIDGE, 1994., Slika 122. lijevo) velik je omjer $\dot{u}_{g0}/\ddot{u}_{g0}$ i mali $u_{g0}/\dot{u}_{g0}$. Zbog toga je područje osjetljivo na brzinu vrlo visoko i usko, a područja osjetljiva na ubrzanje i pomak vrlo široka (slika 123.). Za udaljeni zapis (primjerice, TAFT, 1952., slika 122. desno), obratne su vrijednosti omjera pa je područje osjetljivo na brzinu nisko i vrlo široko (slika 123.). Što je veća nazubljenost spektra pojedinog zapisa, veća je ovisnost o periodu T_n. Prigušenje izglađuje spektar pa i smanjuje ovisnost o T_n (slika 118.). Prigušenje ζ smanjuje i veličinu odziva što je različito za svako područje. Ako je vlastiti period približno jednak nuli ($T_n \approx 0$), nema relativnog odziva ($u \approx 0$, $\dot{u} \approx 0$) i prigušivač ne radi. Ako vlastiti period teži u beskonačnost ($T_n \to \infty$), ukupno ubrzanje je približno jednako nuli ($\ddot{u}^t \approx 0$) i brzina teži prema nuli ($\dot{u} = -\pi u/(\zeta T_n) \to 0$), pa prigušivač također ne radi. Znači, za oba područja je utjecaj prigušenja ζ zanemariv i sve su krivulje bliske (slika 118.).

Prigušenje najviše utječe na vrijednost spektara u srednjem dijelu *D-V-A* spektra, pa su i krivulje dobivene za različita prigušenja znatno razmaknute.



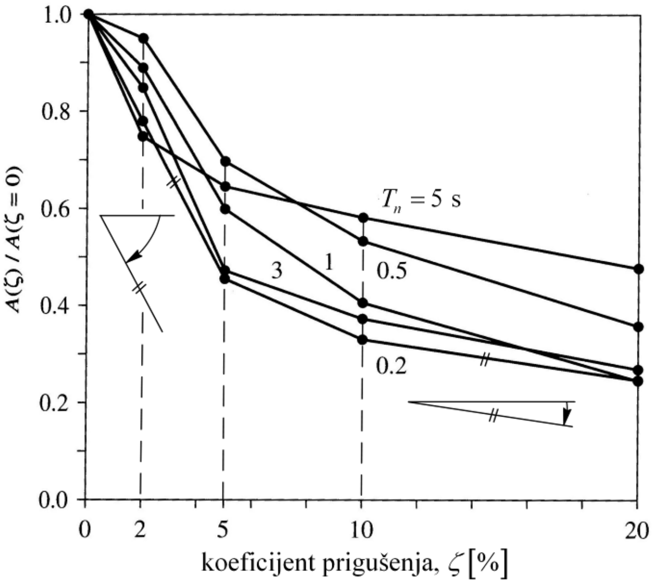
Slika 122.: Potresni zapisi: Northridge, 1994. i Taft, 1952.



Slika 123.: Idealizirani D-V-A spektri odziva pri potresima Taft, Northridge, Loma Prieta i Kobe

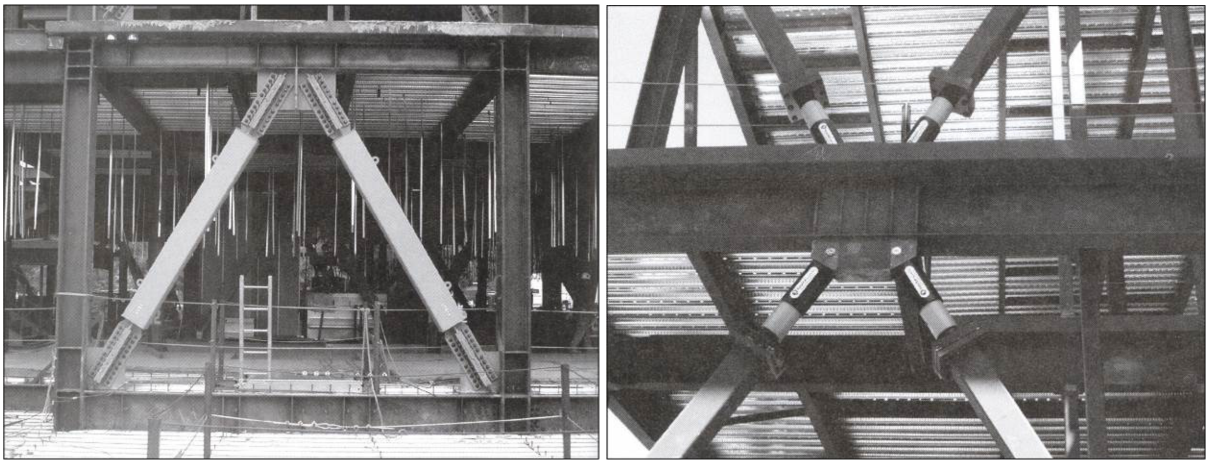
Promotrimo pseudoubrzanje u funkciji prigušenja $A(\zeta)$, prikazano na slici 124. Za dobivanje prikazane funkcije upotrijebljeni su podaci iz spektra sa slike 113. ili 114. Za određeni vlastiti period T_n, prikazane su normirane vrijednosti pseudoubrzanja [vrijednosti pseudoubrzanja podijeljene s pseudoubrzanjem za sustav bez prigušenja $A(\zeta = 0)$] spojene pravcima. Možemo uočiti da je opće svojstvo krivulja pad amplituda s porastom prigušenja. Amplitude više padaju za manja prigušenja ζ (primjerice, veći je pad za prigušenje od 0 do 2%, nego od

10 do 12%). Nasuprot tome, ovisnost o vlastitomu periodu T_n nema pravila što je potvrda složenosti dinamike konstrukcija.



Slika 124.: Promjene vršnog pseudoubrzanja u odnosu na prigušenje za različite sustave s jednim stupnjem slobode; potresni zapis El Centro

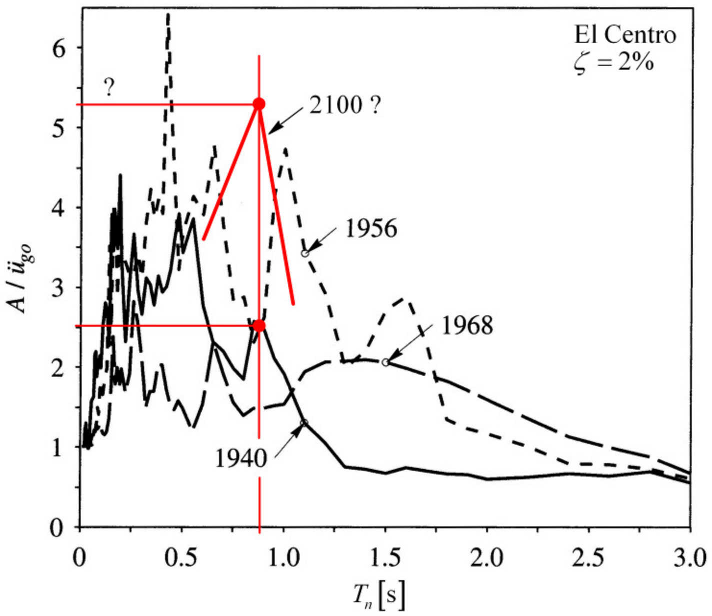
Ipak, većina konstrukcija ima malo prigušenje (do 10%). Da bismo smanjili amplitude pomaka i sile od seizmičkog djelovanja [$D = A/(2\pi/T_n)^2$ i $f_S = mA$], možemo povećati prigušenje sustava ugradnjom viskoznih prigušivača. Promjena prigušenja ne utječe značajno na vlastite periode ($T_D \approx T_n$), a značajno se smanjuje pseudoubrzanje A. Viskozni prigušivači se uobičajeno rabe u mostogradnji, a sve češće i u visokogradnji, s ciljem povećanja sigurnosti novih, a posebice postojećih konstrukcija.



Slika 125.: Prigušivači na zgradama

5.7. Elastični projektni spektar

Projektni spektar sadrži procjenu djelovanja budućih potresa. Potreban je za inženjersku praksi jer nije dovoljan spektar jednog, prošlog potresa. Naime, čak i na istoj lokaciji, zapisi zabilježeni tijekom dva različita potresa neće biti slični, već će postojati izrazite razlike u obliku zapisa i spektra, a budući ekstremi se mogu pojaviti između postojećih. Primjerice, na slici 126. prikazani su spektri odziva pseudoubrzanja od više potresnih zapisa snimljenih na stanici El Centro.

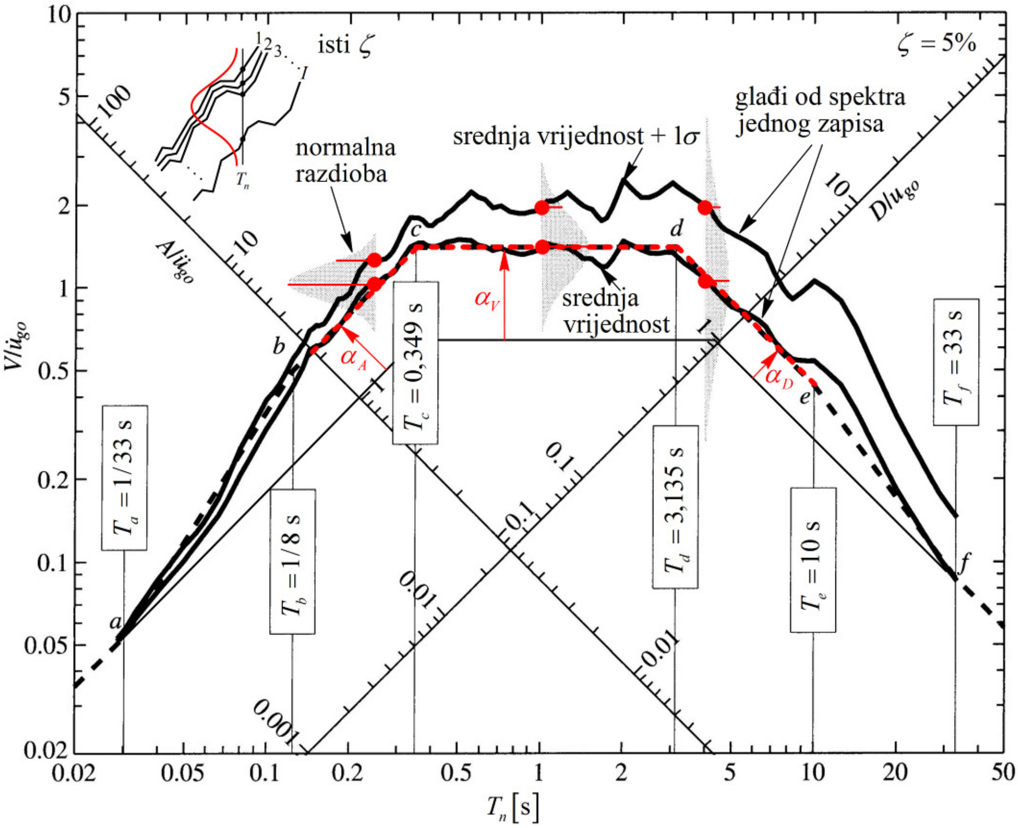


Slika 126.: Spektri odziva potresnih zapisa El Centro, komponenta sjever- jug, snimljenih pri potresima 1940., 1956. i 1968. godine, ζ=0,02

Zbog toga je nužno stvoriti spektar koji zamjenjuje više potresa, a nazubljenost pojedinih spektara aproksimirati DOVOLJNO VISOKIM pravcima. Međutim, često smo suočeni s problemom nedovoljnoga broja zapisa s određenog područja, pa se (uz uvažavanje podudarnih svojstava) mogu koristiti zapisi sa sličnog područja. U slučaju da ni takvi ne postoje, prilagođavaju se zapisi s područja drugačijih svojstava.

Projektni spektar se dobiva statističkom obradom više spektralnih krivulja. Odabere se grupa zapisa $\ddot{u}_g^i(t)$, $i = 1,\ldots,I$ pri čemu se svi zapisi normiraju na isto vršno ubrzanje $\ddot{u}_{g0}$ (često $1g$). Zatim se odrede spektri: svakom vlastitom periodu T_n pripadaju nizovi D^i, V^i i A^i svakog pojedinog zapisa. Nizovi D^i i V^i su normirani na srednje vrijednosti $u_{g0}^i, \dot{u}_{g0}^i$ svih zapisa, dok je niz A^i normiran na vršno ubrzanje $\ddot{u}_{g0}$ područja (ili $1g$).

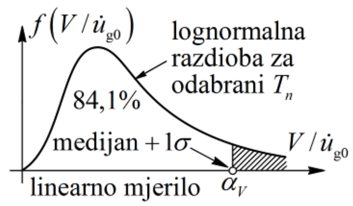
Na slici 127. je prikazan srednji spektar dobiven na opisani način uporabom 10 potresnih zapisa. Veličine u_{g0}, $\dot{u}_{g0}$ i $\ddot{u}_{g0}$ u normiranom mjerilu su srednje vrijednosti vršnih pomaka, brzine i ubrzanja tla svih zapisa. Statističkom obradom I podataka niza vrijednosti $V^i / \dot{u}_{g0}$ za svaki vlastiti period T_n, dobivamo normalnu razdiobu[28] ordinate spektra $V_i / \dot{u}_{g0}$, za koju možemo odrediti srednju vrijednost i standardnu devijaciju. Ako spojimo srednje vrijednosti, dobivamo spektar odziva srednje vrijednosti. Na isti način možemo dobiti spektar srednje vrijednosti plus jedne standardne devijacije.



Slika 127.: Spektar odziva srednje vrijednosti i spektar odziva srednje vrijednosti plus jedne standardne devijacije

Koeficijent varijacije (standardna devijacija/srednja vrijednost) mijenja se ovisno o vlastitom periodu T_n, što je shematski prikazano razdiobama vjerojatnosti za tri različita T_n na slici 127. Primijetimo da su spektri dobiveni statističkom obradom glađi od standardnih spektara pojedinih zapisa (primjerice, sa slike 113.), što opet upućuje na dobru aproksimaciju spektara pravcima jer su odmah određeni α_A, α_V i α_D.

Obradom velikoga broja zapisa snimljenih na stjenovitim i sedimentnim tlima, seizmolozi su odredili vrijednosti T_a, T_b, T_e i T_f za čvrsta tla, prikazane u tablici 3., i koeficijente uvećanja α_A, α_V i α_D za tri srednja područja, prikazane u tablici 4. Koeficijenti uvećanja α_A i α_D su određeni za potkoračenje (fraktilu) α_V od 50% (medijan) i 84,1%



Slika 128.: Lognormalna razdioba

[28] http://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution

(medijan+1 σ), pod pretpostavkom lognormalne razdiobe[29] (slika 128.) ordinata spektara.

Tablica 3.: Odabrani periodi za čvrsta tla [s]

T_a	T_b	T_e	T_f
1/33	1/8	10	33

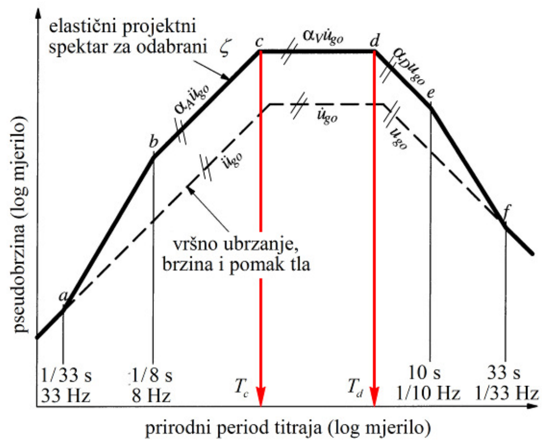
Tablica 4.: Koeficijenti uvećanja za elastični projektni spektar

Prigušenje ζ [%]	Medijan (potkoračenje: 50%)			Medijan + 1σ (potkoračenje: 84,1%)		
	α_A	α_V	α_D	α_A	α_V	α_D
1	3,21	2,31	1,82	4,38	3,38	2,73
2	2,74	2,03	1,63	3,66	2,92	2,42
5	2,12	1,65	1,39	2,71	2,30	2,01
10	1,64	1,37	1,20	1,99	1,84	1,69
20	1,17	1,08	1,01	1,26	1,37	1,38

Koeficijenti α_A, α_V i α_D uvećavaju $\ddot{u}_{g0}$, $\dot{u}_{g0}$, u_{g0} (slika 127.). Uvećanje ovisi o vjerojatnosti potkoračenja (fraktili) i prigušenju (nizu I pripada jedan ζ). Vrijednosti perioda T_c i T_d određuju se iz sjecišta $A = \alpha_A \ddot{u}_{g0}$, $V = \alpha_V \dot{u}_{g0}$ i $D = \alpha_D u_{g0}$.

Postupak tvorbe projektnog spektra prema slici 129.:

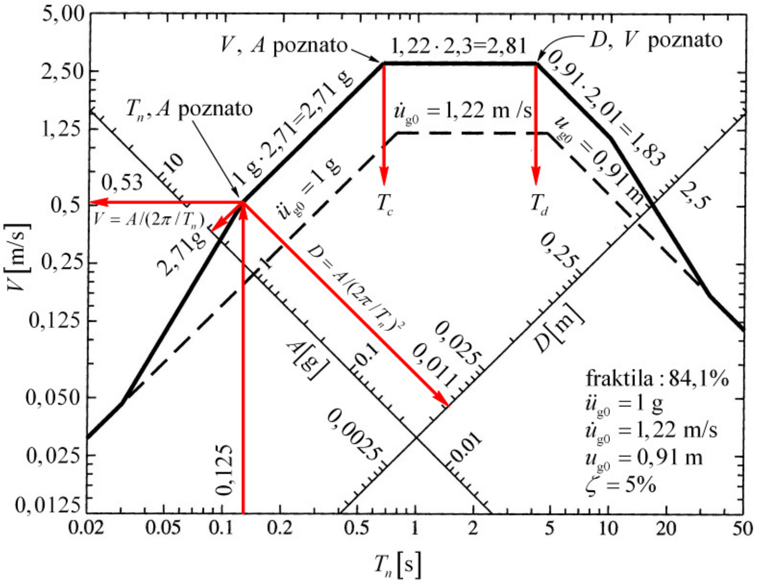
1. povući vertikalne pravce s periodima T_a, T_b, T_e i T_f
2. ucrtati pravce vršnih vrijednosti potresa: $\ddot{u}_{g0}$, $\dot{u}_{g0}$, u_{g0}
3. odrediti α_A, α_V i α_D za planiranu fraktilu i ζ (tablica 4.)
4. pomnožiti $\alpha_A \ddot{u}_{g0}$: ucrtati polupravac iz b paralelan s $\ddot{u}_{g0}$
5. pomnožiti $\alpha_V \dot{u}_{g0}$: ucrtati pravac paralelan s $\dot{u}_{g0}$
6. pomnožiti $\alpha_D u_{g0}$: ucrtati polupravac iz e paralelan s u_{g0}
7. označiti c i d: sjecišta pravaca određenih koracima 3 do 5
8. ucrtati $A = \ddot{u}_{g0}$ za $T_n < T_a$ i $D = u_{g0}$ za $T_n > T_f$
9. povući dužine prijelaznog područja $\overline{ab}$ i $\overline{ef}$



Slika 129.: Postupak tvorbe elastičnog projektnog spektra

[29] http://en.wikipedia.org/wiki/Log-normal_distribution

Sad ćemo opisani postupak upotrijebiti za tvorbu projektnog spektra za fraktilu 84,1%, $\zeta = 5\%$ i $\ddot{u}_{g0} = 1g$ (slika 130.). Vršno ubrzanje od 1g je prikladno, jer množenjem spektra s η dobivamo spektar za $\eta\ddot{u}_{g0}$. Vrijednosti $\dot{u}_{g0}$ i u_{g0} određuju seizmolozi za čvrsta tla. Uobičajeno je da su omjeri $\dot{u}_{g0}/\ddot{u}_{g0} = 1,22\,[m/s/g]$ i $\ddot{u}_{g0}u_{g0}/\dot{u}_{g0}^2 = 6$, pa za vršno ubrzanje $\ddot{u}_{g0} = 1g$ dobivamo vršnu brzinu $\dot{u}_{g0} = 1,22\text{m/s}$ i vršni pomak $u_{g0} = 0,91\,\text{m}$.



Slika 130.: Postupak tvorbe elastičnog projektnog spektra (fraktila: 84,1%) potresnih zapisa s $\ddot{u}_{g0} = 1g$, $\dot{u}_{g0} = 1,22\text{m/s}$, $u_{g0} = 0,91\text{m}$, uz ζ=0,05

Spektar na slici 130. dobiven je uz sljedeće korake:

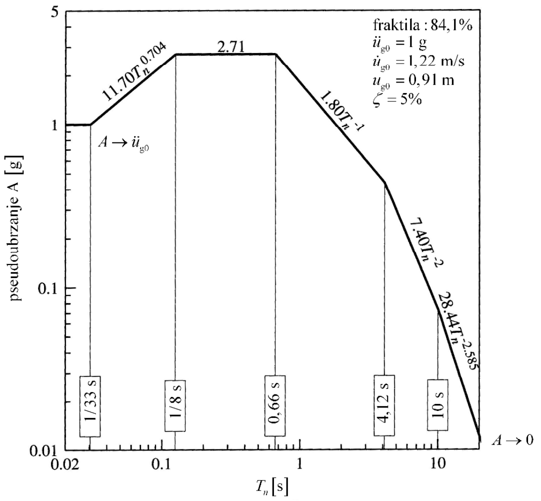
1. ucrtavaju se pravci vršnih vrijednosti: $\ddot{u}_{g0} = 1g$, $\dot{u}_{g0} = 1,22\text{m/s}$, $u_{g0} = 0,91\text{m}$
2. za fraktilu 84,1% i $\zeta = 5\%$ koeficijenti uvećanja su $\alpha_A = 2,71$, $\alpha_V = 2,30$, $\alpha_D = 2,01$ prema tablici 4.
3. ucrtava se polupravac iz b: $A = \text{const.}$: $1\text{g}\cdot 2,71 = 2,71\text{g}$
4. ucrtava se pravac $V = \text{const.}$: $1,22\cdot 2,30 = 2,81\text{m/s}$
5. ucrtava se polupravac iz e: $D = \text{const.}$: $0,91\cdot 2,01 = 1,83\text{m}$
6. iz sjecišta c i d određuju se periodi T_c i T_d
7. označava se $A = 1\text{g}$ za $T_a < 1/33\text{s}$ i $D = 0,91\text{m}$ za $T_f > 33\text{s}$
8. spajaju se točke $(1/33\text{s}, 1\text{g})$, $(1/8\text{s}, 2,71\text{g})$ i $(10\text{s}, 1,83\text{m})$, $(33\text{s}, 0,91\text{m})$

Zatim iz tripartitnog spektra možemo odrediti spektar pseudoubrzanja i pomaka na način da očitamo koordinate (T_n, A) i (T_n, D) svih sjecišta (a do f) i točke od a do f spojimo pravcima. Taj postupak je neprecizan pa je bolje rabiti formule za točne vrijednosti, primjerice, za T_n i A [izraz (226)].

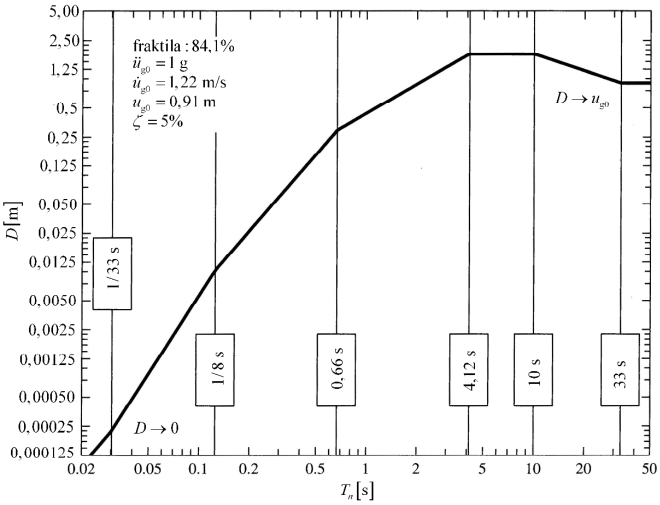
Na slici 130. za vlastiti period od $T_n = 1/8 = 0,125\,\text{s}$ poznato je pseudoubrzanje $A = 2,71\text{g}$, a prema formulama $D = A/(2\pi/T_n)^2$ i $V = A/(2\pi/T_n)$ možemo odrediti vršni pomak i pseudobrzinu. Slično možemo odrediti periode T_c i T_d iz $T_c = 2\pi V / A = 0{,}66\text{s}$ i $T_d = 2\pi D / V = 4{,}12\text{s}$. Očitavanje T_n između čvornih vrijednosti također nije precizno, pa je bolje odrediti funkcije iz kojih će se te vrijednosti računati.

Pravci u logaritamskom mjerilu su funkcije eksponenta u linearnom mjerilu. Primjerice, $A = bT_n^a$, a logaritmiranjem dobijemo $\underbrace{\log A}_{y} = a \underbrace{\log T_n}_{x} + \log b$.

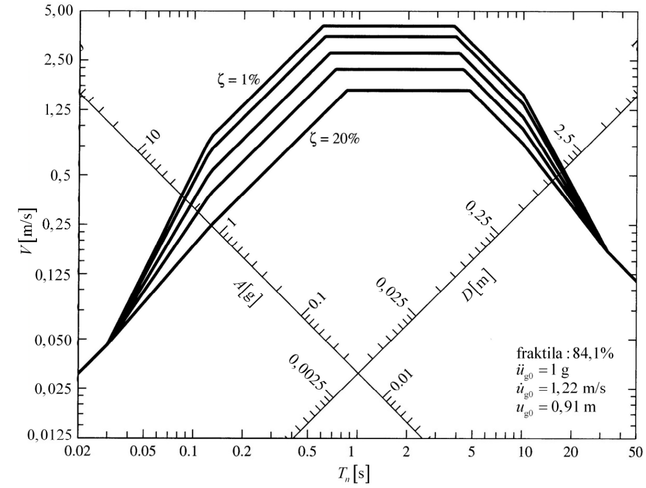
Budući da znamo dvije točke, imamo sustav 2×2 i možemo odrediti a i b, pa i $A = bT_n^a$ (slika 131). Na sličan način možemo odrediti i $D = bT_n^a$, prikazane na slici 132.



Slika 131.: Elastični projektni spektar pseudoubrzanja (fraktila: 84,1%) potresnih zapisa za $\ddot{u}_{g0} = 1g$, $\dot{u}_{g0} = 1{,}22\text{m/s}$, $u_{g0} = 0{,}91\text{m}$, uz ζ=0,05



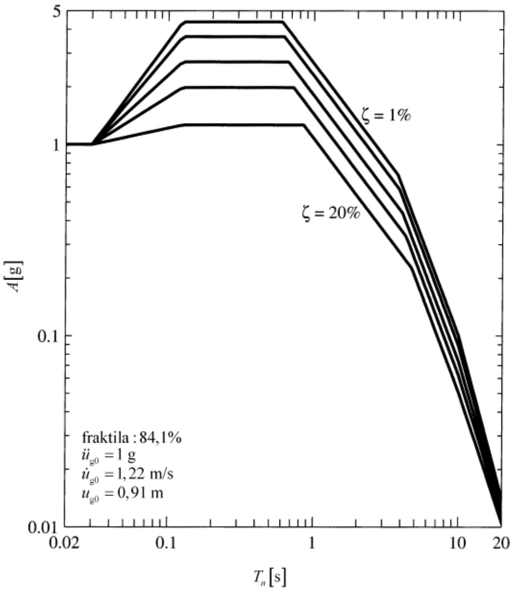
Slika 132.: Elastični projektni spektar pomaka (fraktila: 84,1%) potresnih zapisa za $\ddot{u}_{g0} = 1g$, $\dot{u}_{g0} = 1{,}22\text{m/s}$, $u_{g0} = 0{,}91\text{m}$, uz ζ=0,05



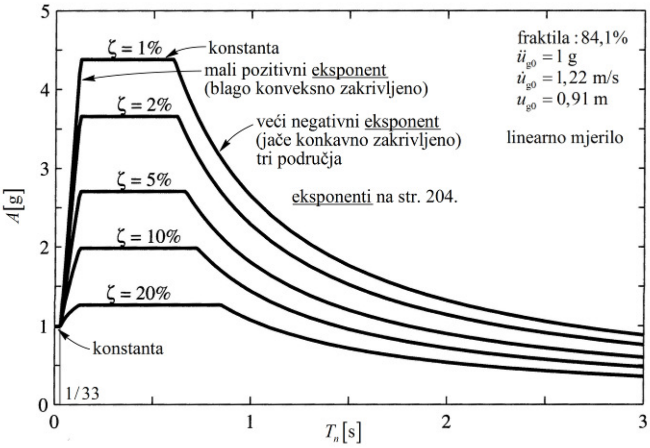
Slika 133.: Elastični projektni spektri pseudobrzine (fraktila: 84,1%) potresnih zapisa za $\ddot{u}_{g0} = 1g$, $\dot{u}_{g0} = 1{,}22\text{m/s}$, $u_{g0} = 0{,}91\text{m}$, za različita prigušenja

Ako želimo odrediti krivulju za novo prigušenje ζ, ponovimo isti postupak, ali uz druge vrijednosti koeficijenata uvećanja α_A, α_V i α_D prema tablici 4. (slika 133.).

Za različita prigušenja spektar odziva pseudoubrzanja prikazan je na slici 134. u logaritamskom, a na slici 135. u linearnom mjerilu.

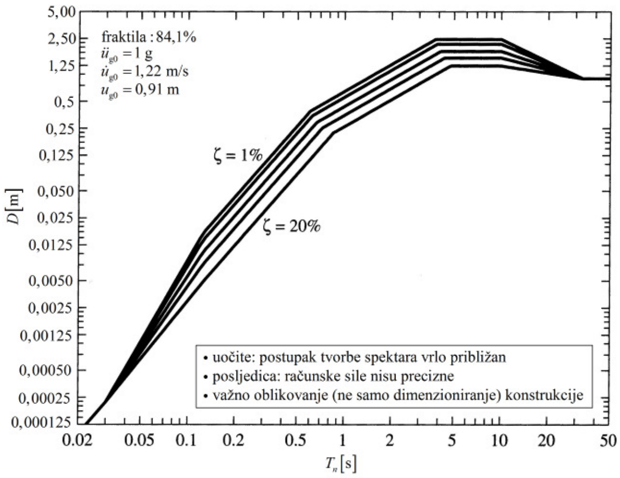


Slika 134.: Elastični projektni spektri pseudoubrzanja (fraktila: 84,1%) potresnih zapisa s $\ddot{u}_{g0} = 1g$, $\dot{u}_{g0} = 1,22\text{m/s}$, $u_{g0} = 0,91\text{m}$, za različita prigušenja



Slika 135.: Elastični projektni spektri pseudoubrzanja (fraktila: 84,1%) potresnih zapisa s $\ddot{u}_{g0} = 1g$, $\dot{u}_{g0} = 1,22\text{m/s}$, $u_{g0} = 0,91\text{m}$, za različita prigušenja

Na slici 136. prikazan je spektar odziva pomaka u logaritamskom mjerilu.



Slika 136.: Elastični projektni spektri pomaka (fraktila: 84,1%) potresnih zapisa s $\ddot{u}_{g0} = 1g$, $\dot{u}_{g0} = 1,22\text{m/s}$, $u_{g0} = 0,91\text{m}$, za različita prigušenja

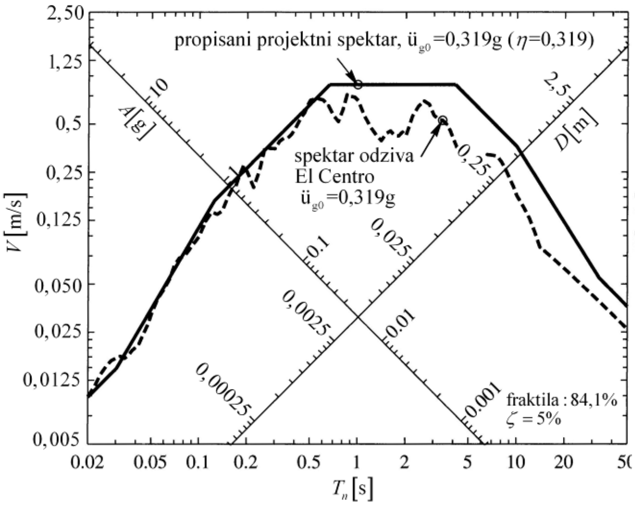
Prikazani projektni spektri određeni su za vršno ubrzanje tla $\ddot{u}_{g0} = 1\text{g}$, fraktilu 84,1% i čvrsto tlo (klasa A). Elastični spektri se upotrebljavaju za proračun projektnih sila i pomaka ELASTIČNOG SUSTAVA.

Priloženi oblici spektara uvriježeni su u svim propisima, a za različite lokacije množe se koeficijentom η koji predstavlja vršno ubrzanje tla (određeno prema potresnoj karti danoj u Nacionalnom dodatku propisa, dostupnoj na poveznici http://seizkarta.gfz.hr/karta.php).

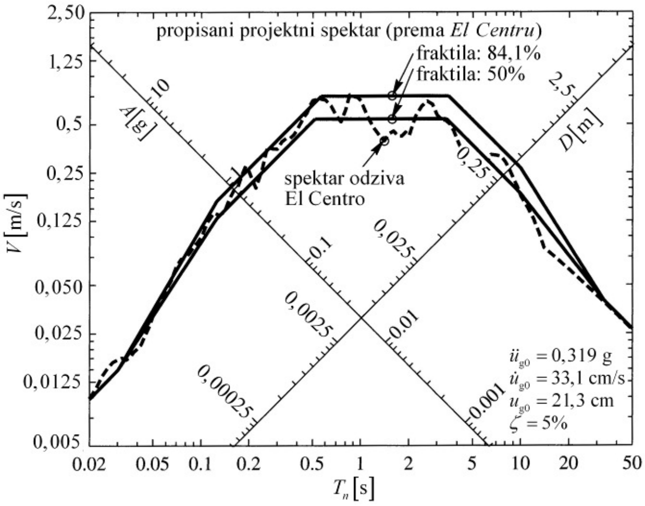
5.8. Usporedba propisanog i stvarnog spektra

Sad ćemo usporediti propisani i stvarni spektar odziva za čvrsto tlo i vršno ubrzanje tla $\ddot{u}_{g0} = 0{,}319\text{g}$ ($\eta = 0{,}319$). Iz preporučenih omjera (str. 99.), za propisano vršno ubrzanje tla od $\ddot{u}_{g0} = 0{,}319\text{g}$, slijedi da je vršna brzina $\dot{u}_{g0} = 0{,}39\text{m/s}$ i vršni pomak tla $u_{g0} = 0{,}29\text{m}$. Podsjetimo se da su stvarne vršne vrijednosti zapisa El Centro (slika 103.) $\ddot{u}_{g0} = 0{,}319\text{g}$, $\dot{u}_{g0} = 0{,}33\text{m/s}$ i $u_{g0} = 0{,}21\text{m}$. Na slici 137. možemo primijetiti da se spektri odziva dobro podudaraju u području osjetljivom na ubrzanje, jer se propisano vršno ubrzanje i stvarno vršno ubrzanje podudaraju. No, postoje značajne razlike u spektrima odziva u području osjetljivom na brzinu i pomak jer su različiti $\dot{u}_{g0}$ i u_{g0}.

Odstupanja među spektrima nastaju čak i uz iste vršne vrijednosti. Na slici 138. su prikazani propisani spektri odziva uz vrijednosti $\ddot{u}_{g0} = 0{,}319\text{g}$, $\dot{u}_{g0} = 0{,}33\text{m/s}$, $u_{g0} = 0{,}21\text{m}$ (iste vršne vrijednosti kao i zapisa El Centro), za fraktilu 50% i 84,1%. Primijetimo da fraktila 50% daje preniske vrijednosti, a fraktila 84,1% dobru procjenu u odnosu na spektar odziva stvarnog zapisa. Odstupanja postoje jer projektni spektar (glatki) nije spektar jednoga zapisa (nazubljen), već je dobiven statističkom obradom više spektara, uz nužno rasipanje.



Slika 137.: Usporedba propisanog projektnog spektra s $\ddot{u}_{g0} = 0{,}319g$ i spektra odziva potresnog zapisa El Centro, ζ=0,05

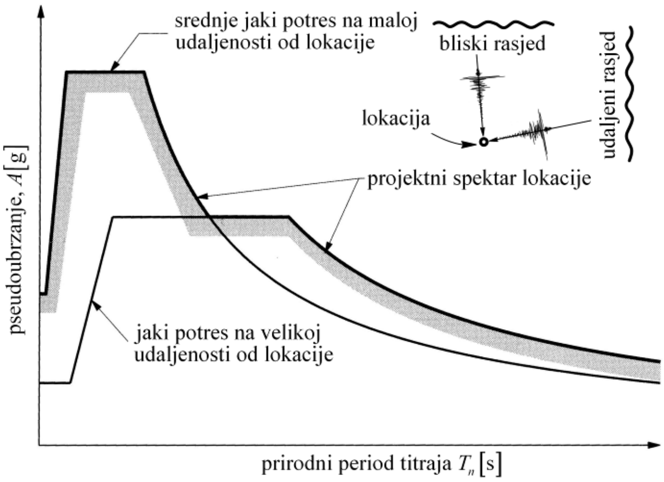


Slika 138.: Usporedba propisanih projektnih spektara s fraktilom 84,1% i 50% i spektra odziva potresnog zapisa El Centro, ζ=0,05

5.9. Razlike između projektnog i stvarnog spektra

Podsjetimo se da spektar odziva sadrži VRŠNE iznose za ODABRANI potresni zapis, dok projektni spektar daje PROPISANE iznose vršnih vrijednosti i ovisno o tvorbi, može biti vrlo različit od spektra odziva, a sličan je samo ako je dobiven statistički iz spektara odziva.

Za neke lokacije projektni spektar može biti ovojnica dvaju spektara, primjerice ako dva rasjeda utječu na širenje potresa (slika 139.). Recimo, lokaciju mogu pogoditi jedan srednje jaki bliski i jaki udaljeni potres. Svakoj grupi pripada različiti projektni spektar, pa njihovo zbirno djelovanje možemo odrediti kao ovojnicu spektara. Iz slike vidimo da bliski potresi utječu na kratke, a udaljeni na duge periode.



Slika 139.: Projektni spektar definiran kao ovojnica spektara za potrese koji se šire iz dva rasjeda

5.10. Spektri brzine i ubrzanja

Pseudovrijednosti V i A su vrijednosti tangencijalne brzine i radijalnog ubrzanja. Ako promotrimo amplitude jednostavnog harmonijskog titranja najvećim pomakom, za određivanje vršnog odziva dovoljan je spektar odziva pomaka $u_0(T_n) = D(T_n)$ [ili $V(T_n)$, ili $A(T_n)$], a spektri vrijednosti vršne brzine $\dot{u}_0(T_n)$ i ukupnoga ubrzanja $\ddot{u}_0^t(T_n)$ nisu potrebni, no odredit ćemo ih radi razlikovanja prema pseudovrijednostima V i A.

Duhamleov integral za $p(\tau) = p_{\text{eff}}(\tau) = -m\ddot{u}_g(\tau)$, ($m$ se krati) jest:

$$u(t) = -\frac{1}{\omega_D}\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin[\omega_D(t-\tau)]d\tau, \tag{232}$$

a brzina (d/dt umnoška pod integralom, $\ddot{u}_g(\tau)$ ne ovisi o t):

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = &\underbrace{-\zeta\omega_n(-\frac{1}{\omega_D})\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin[\omega_D(t-\tau)]d\tau}_{u(t)} - \\ &-\frac{1}{\omega_D}\omega_D\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\cos[\omega_D(t-\tau)]d\tau \\ \dot{u}(t) = &-\zeta\omega_n u(t) - \int_0^t \ddot{u}_g(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\cos[\omega_D(t-\tau)]d\tau . \end{aligned} \tag{233}$$

Ukupno ubrzanje $\ddot{u}^t(t)$ dobivamo deriviranjem $\dot{u}(t)$ i pribrajanjem $\ddot{u}_g(t)$ ili lakše pomoću jednadžbe gibanja [$uz\ \ddot{u}^t(t) = \ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t)$]:

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = -\ddot{u}_g(t),\ \ddot{u}^t(t) = -\omega_n^2\underline{u(t)} - 2\zeta\omega_n\underline{\dot{u}(t)}. \tag{234}$$

Podcrtane vrijednosti su određene iz dviju prethodnih jednadžbi (232) i (233). Spektri odziva daju vršne vrijednosti relativne brzine $\dot{u}_0$ i ukupnog ubrzanja $\ddot{u}_0^t$ pri pobudi $\ddot{u}_g(t)$ u funkciji vlastitog perioda T_n. Ako ih crtamo u linearnom, a ne logaritamskome mjerilu, lakše ćemo uočiti razlike (slika 140. i slika 141.).

5.10.1. Usporedba spektara pseudobrzine i relativne brzine

Odstupanja spektra pseudobrzine i relativne brzine ovise o periodu T_n (slika 140. gore). Za duge periode pseudobrzina je puno manja od vršne relativne brzine ($V \ll \dot{u}_0$) jer vršna relativna brzina teži vršnoj brzini tla ($\dot{u}_0 \to \dot{u}_{g0}$), a pseudobrzina teži prema nuli ($V \to 0$). Dokažimo navedenu tvrdnju. Ako je vlastiti period T_n vrlo dug, masa stoji i tlo se giba pa ukupni pomak teži prema nuli ($u^t \to 0$) i ukupna relativna brzina teži prema nuli ($\dot{u}^t \to 0$). Zbog $\dot{u}^t = \dot{u}_g + \dot{u}$ slijedi da je $\dot{u} \to -\dot{u}_g \Rightarrow \dot{u}_0 \to \dot{u}_{g0}$. Zbog $u^t = u_g + u$ slijedi da je $u \to -u_g \Rightarrow u_0 \to u_{g0}$ ili $D \to u_{g0}$. Ako $T_n \to \infty$, $V = 2\pi/T_n D \to 2\pi/T_n u_{g0} \to 0$. Za kratke vlastite periode, V je iznad $\dot{u}_0$, a za srednje i duge periode je ispod $\dot{u}_0$.

Promotrimo sad omjer spektara $V/\dot{u}_0$ za različita prigušenja ζ (slika 140. dolje). Ako omjer odstupa od jedinice, postoje razlike među spektrima. Možemo primijetiti da je razlika najmanja za sustav bez prigušenja, a raste s porastom prigušenja ζ. Za $\zeta = 0$ ($\omega_D = \omega_n$ i $e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} = 1$) izrazi (232) i (233) postaju:

$$\begin{aligned} \omega_n u(t) &= -\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)\sin[\omega_n(t-\tau)]d\tau, \\ \dot{u}(t) &= -\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)\cos[\omega_n(t-\tau)]d\tau. \end{aligned} \tag{235}$$

Vrijednosti $\omega_n u(t)$ i $\dot{u}(t)$ se razlikuju samo član $\sin$ i $\cos$, a amplitude su iste. Dakle, $\omega_n u_0 = \dot{u}_0$, uz $D = u_0$ i $V = \omega_n D \Rightarrow V = \dot{u}_0$. Za male vrijednosti V i $\dot{u}_0$, primjerice V=0,04 cm/s i $\dot{u}_0 = 0{,}01\,\text{cm/s}$ i uobičajenih $\dot{u}_{g0} = 40\,\text{cm/s}$, omjeri su bliski nuli:

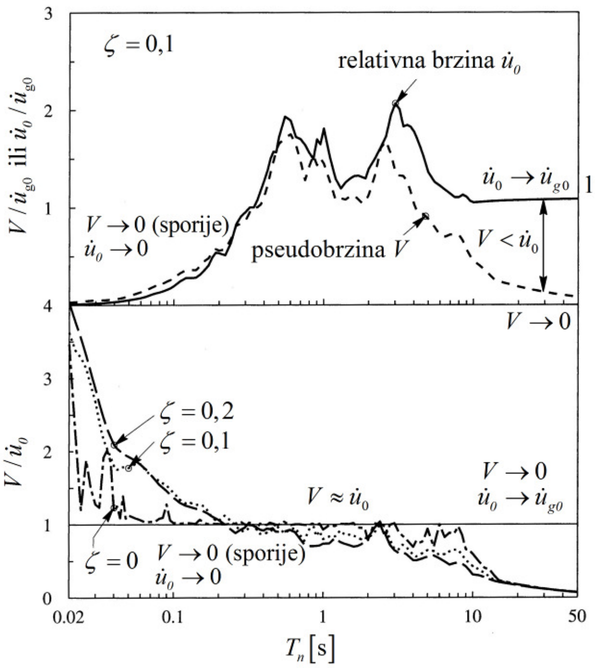
$$V/\dot{u}_{g0} = 10^{-3}, \qquad \dot{u}_0/\dot{u}_{g0} = 2{,}5\cdot 10^{-4},$$

ali omjer malih vrijednosti daje:

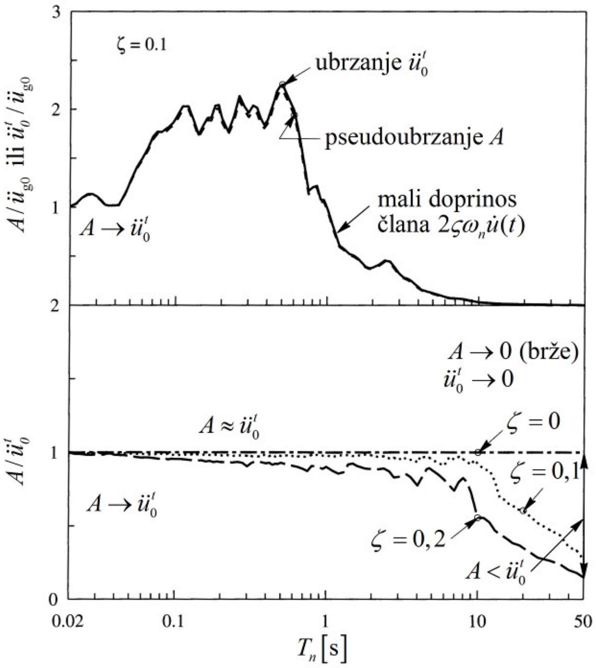
$$\frac{V}{\dot{u}_0} = \frac{0{,}04}{0{,}01} = 4.$$

Za $\zeta > 0$, vrijednost $-\zeta\omega_n u(t) \neq 0$ pa će razlika $\omega_D u(t) = V(t)$ i $\dot{u}(t)$ biti veća, a također i veća odstupanja među amplitudama V i $\dot{u}_0$ (slika 140.).

Za uobičajene vrijednosti prigušenja, mala su odstupanja za kratke i srednje periode.



Slika 140.: Usporedba spektara odziva pseudobrzine i relativne brzine, ζ=0,1; omjer spektara $V/\dot{u}_0$ za različita prigušenja



Slika 141.: Usporedba spektara odziva pseudoubrzanja i ukupnog ubrzanja, ζ=0,1; omjer spektara $A/\ddot{u}_0^t$ za različita prigušenja

5.10.2. Usporedba spektara pseudoubrzanja i ukupnog ubrzanja

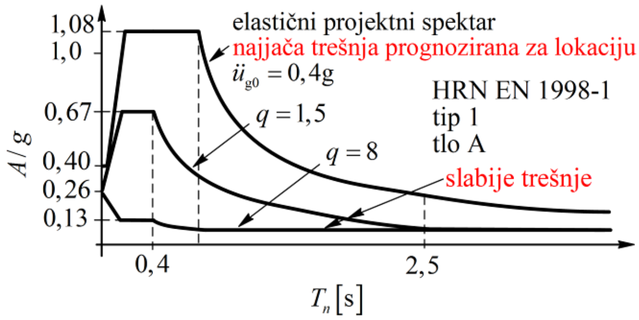
Spektri pseudoubrzanja i ukupnog ubrzanja su isti za sustave bez prigušenja, odnosno $\ddot{u}^t(t) = -\omega_n^2 u(t)$ jer je $-2\zeta\omega_n \dot{u}(t) = 0$. Iste su funkcije i amplitude: $\ddot{u}_0^t = \omega_n^2 u_0 = \omega_n^2 D = A$ (slika 141.). Za $\zeta > 0$, vrijednosti su iste [$\ddot{u}^t(t) = -\omega_n^2 u(t)$] samo u trenutku t_a kada je $\dot{u}(t_a) = 0$. Tada je $u(t_a) = u_0$ lokalni ekstrem pa je $-\omega_n^2 u_0 = \ddot{u}^t(t_a)$. Amplituda $\ddot{u}_0^t$ funkcije $\ddot{u}^t(t)$ se ne javlja u trenutku t_a (osim u slučaju bez prigušenja). Iz izraza (234) očito je da razlika između pseudoubrzanja A i ukupnog ubrzanja $\ddot{u}_0^t$ raste s prigušenjem jer raste i član $-2\zeta\omega_n \dot{u}(t)$. Za kratke periode $A \to \ddot{u}_0^t$, a kod dugih $A \ll \ddot{u}_0^t$ (slika 141.) jer u slučaju da masa stoji, tlo se giba pa je $u^t \to 0$ i $\ddot{u}^t \to 0$. Tada $\ddot{u}_0^t \to 0$, a od ranije je poznato da $D \to u_{g0}$. Ako $T_n \to \infty$, imamo $A = (2\pi / T_n)^2 D \to (2\pi / T_n)^2 u_{g0} \to 0$. Ako $\ddot{u}_0^t \to 0$ i $A \to 0$, ali A pada brže (sa T_n^2).

Razlike između spektra pseudoubrzanja i ukupnoga ubrzanja mogu se analizirati i na drugi način ako promotrimo vrijednost umnoška mase i pseudoubrzanja odnosno ukupnoga ubrzanja. U prvomu slučaju, dobit ćemo vršnu vrijednost elastične sile ($f_{S0} = mA$), dok je u drugomu slučaju umnožak jednak vršnoj vrijednosti zbroja elastičnih sila i sila prigušenja [$m\ddot{u}_0^t = (f_S + f_D)_0$]. Primijetimo na slici 141. da mora biti $A < \ddot{u}_0^t$, jer je A samo dio $\ddot{u}_0^t$ koji daje elastičnu silu f_{S0}.

Prefiks pseudo (lažno) je neprikladan jer se rabi za vrijednosti koje ni na koji način nisu krive. Pseudovrijednosti znače aproksimaciju točnih spektara i nikako nisu nekakve lažne vrijednosti. Međutim, uporaba takvog naziva se uvriježila u dinamici konstrukcija. Nama nitko ne zabranjuje konstruirati točne spektre, ali pseudovrijednosti (koje je jednostavnije odrediti) su nam dovoljne jer daju potrebno: bočne sile f_{S0} i energiju E_{S0}. Prema tome, točni spektri nam nisu potrebni osim za naglašavanje razlike prema pseudospektrima (kao u ovome poglavlju).

6. Odziv elastoplastičnog sustava na pobudu potresom

U prošlome smo poglavlju pokazali kako se određuju elastični spektri odziva i pripadna vršna vrijednost poprečne reakcije, no po propisima se građevine zbog ekonomičnosti uglavnom računaju na poprečnu reakciju manju od elastične jer se pretpostavlja da će zbog potresa naprezanje u pojedinim presjecima premašiti granicu elastičnosti.

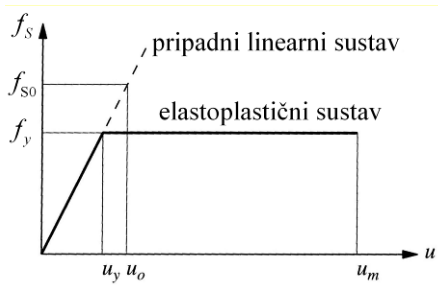


Slika 142.: Projektni spektar uz različite faktore ponašanja *q*

Za elastične računske sile iz izraza (224), $f_{S0} = A / g\, w$, odziv građevine je bez pukotina. Takvo dimenzioniranje očito nije ekonomično za jake potrese zbog velikog utroška materijala. Ipak, kod građevina kod kojih je otvaranje pukotina opasno, primjerice spremnika, brana, temelja i stolova turbina, nužno je elastično ponašanje što dovodi do velikih proračunskih sila. U tom se slučaju mogu ugraditi prigušivači. Za većinu građevina je uobičajeno prihvaćanje RAZUMNE razine oštećenja pa se pretpostavlja deformiranje iznad granice elastičnosti (plastično područje radnog dijagrama).

Elastoplastični dijagrami dobivaju se pokusima (ovisno o materijalu, elementu i statičkom sustavu).

Na slici 143. prikazan je idealizirani radni dijagram elastoplastičnog sustava i pripadajući linearni sustav. Normirana granica tečenja elastoplastičnog sustava jest:



Slika 143.: Elastoplastični radni dijagram

$$\overline{f}_y = f_y/f_0\, k/k = u_y/u_0 \le 1, \tag{236}$$

pri čemu su f_{S0} (kraće f_0) i u_0 vršne vrijednosti elastičnog odziva (sila i deformacija). Silu f_0 možemo interpretirati kao minimalnu čvrstoću sustava potrebnu da bi sustav ostao u elastičnom području prilikom gibanja tla (skraćeno, minimalnu čvrstoću za elastično ponašanje). Sila f_y je čvrstoća pri tečenju, a u_y je pripadna deformacija. Koeficijent smanjenja granice tečenja je recipročna vrijednost $\overline{f}_y$, odnosno:

$$R_y = 1/\overline{f}_y = f_0/f_y = u_0/u_y \ge 1. \tag{237}$$

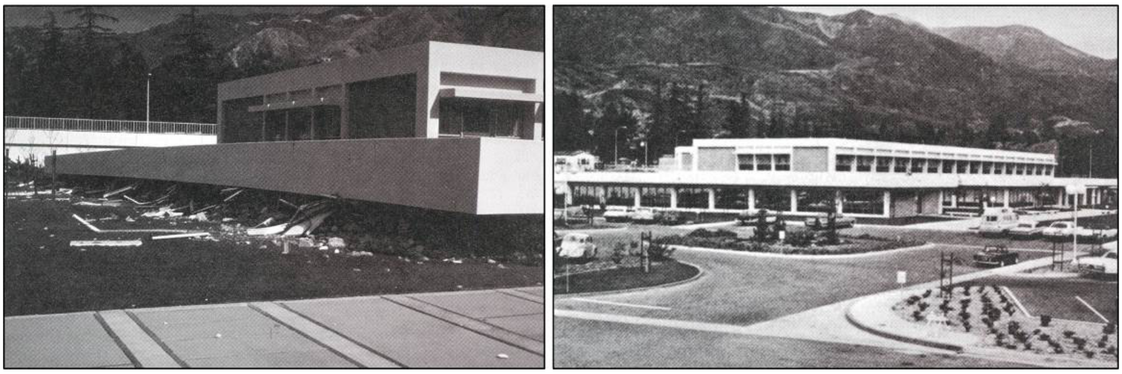
Znači, za $u > u_y$ svjesno dimenzioniramo konstrukcije na manje sile (f_y ne f_0), ali treba spomenuti da je vrlo težak projektantski zadatak PROGNOZIRATI prihvatljivo oštećenje zbog tečenja. Istaknimo, važna svojstva konstrukcije za prihvatljivo ponašanje prilikom djelovanja potresa su višestruka statička neodređenost i duktilnost[30]. Koeficijent duktilnosti jest:

$$\mu = u_m / u_y \geq 1 \text{ – zahtjev na konstrukciju.} \tag{238}$$

U praksi ima mnogo primjera loše prognoze. Primjerice, AB neboder O'Higgin, u gradu Concepción (Čile) s 21 katom, izveden 2009. godine. Nesimetričan je u tlocrtu i po visini, a bočnu su krutost činili zidovi i okviri. Teško je oštećen u potresu 2010. godine (slika 144.). Došlo je do sloma 12. kata pa je zgrada uz velike troškove morala biti uklonjena.

Slika 144.: Oštećenje nebodera O'Higgin, Concepción, Čile, zbog potresa 2010. godine

Ili primjerice, psihijatrijska dnevna bolnica, u San Fernandu, Kalifornija. AB konstrukcija se sastojala od 2 kata, a bočnu krutost su primarno činili okviri sa zidanom ispunom na drugom katu. Ispuna je prouzročila porast krutosti i čvrstoće drugog kata i pojavu modela slaboga kata (engl. *weak – story model*). Zgrada se srušila u potresu 1971. godine. Došlo je do sloma prizemlja (slika 145.) pa je uklonjena, iako je drugi kat ostao gotovo neoštećen.



Slika 145.: Oštećenje psihijatrijske dnevne bolnice, San Fernando, SAD, zbog potresa 1971. godine

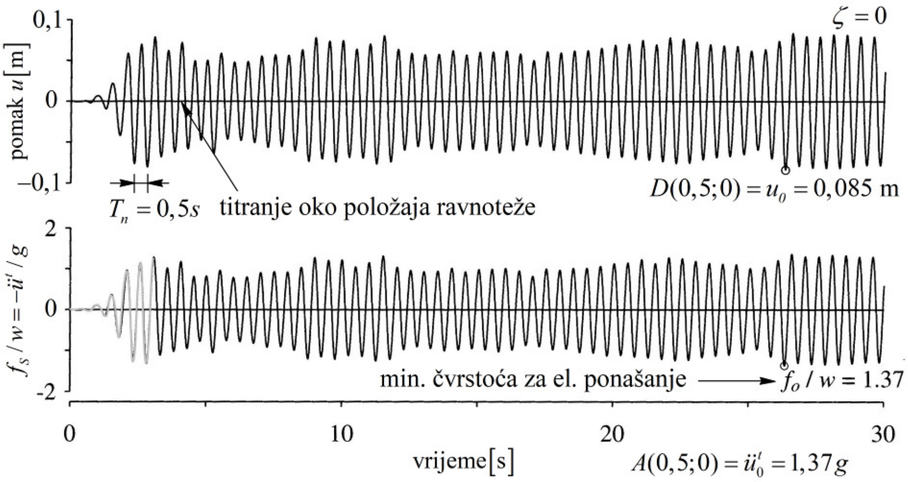
[30]žilavost, rastezljivost

Tražimo odziv elastoplastičnog sustava $u(t)$ (slika 146. gore):

$$m\ddot{u}(t) + f_S[u(t)] = -m\ddot{u}_g(t) / : mg = w. \quad (239)$$

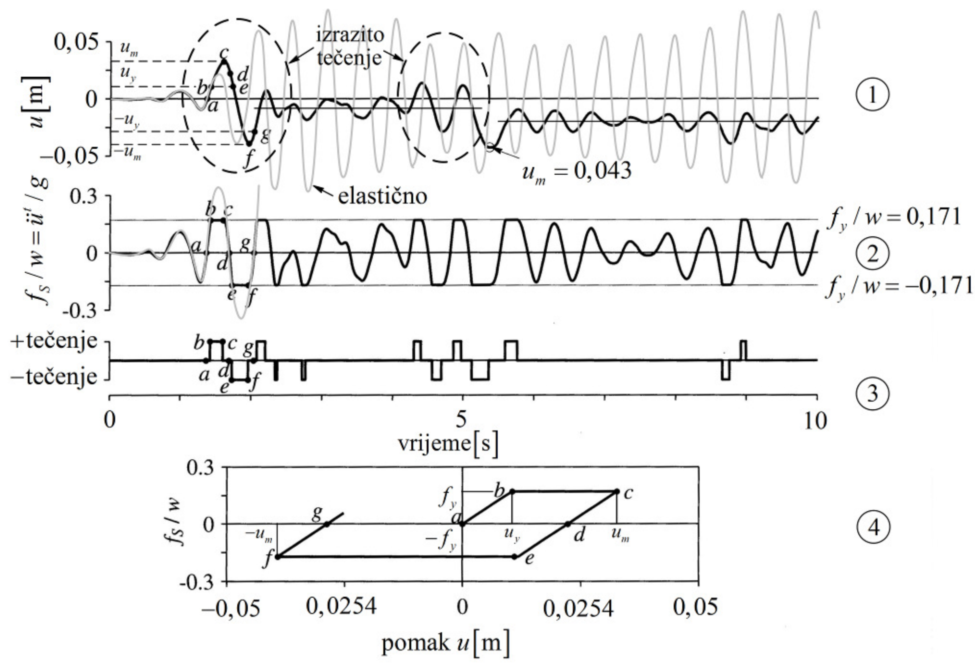
Za linearni sustav vrijedi (slika 146. dolje):

$$f_S/w = -\ddot{u}^t(t)/g \text{ , za } f_S = ku \text{ , linearno elastični odziv.} \quad (240)$$



Slika 146.: Odziv linearnog sustava s T_n=0,5 s i ζ=0 na pobudu potresnim zapisom El Centro

Ako pretpostavimo da je normirana granica tečenja elastoplastičnog sustava $\overline{f}_y = 1/8$ ($R_y = 8$), dobivamo $f_y = 1/8 f_0 = 1/8(1{,}37w) = 0{,}171w$. U tablici 5. Opisane su karakteristične faze odziva elastoplastičnog sustava na pobudu potresnim zapisom El Centro, dan na slici 147.



Slika 147.: Odziv elastoplastičnog sustava s T_n=0,5 s, ζ=0 i $\overline{f}_y$ = 0,125 na pobudu potresnim zapisom El Centro: pomak, elastoplastični odziv, vremenski intervali tečenja i odnos sila-pomak

Tablica 5.: Odziv elastoplastičnog sustava (slika 147.)

a	$u = 0$	$f_S = 0$	elastično do b
b	$u = u_y$	$f_S = f_y$	početak tečenja
b – c	$u > u_y$	$f_S = f_y = \text{const.}$	tečenje, plastična grana $f_S - u$ dijagrama
c	$u = u_m$	$f_S = f_y$	lokalni maksimum ($\dot{u} = 0$), točka vraćanja
c – d	$u < u_m$	$f_S < f_y$	elastično rasterećenje, bez tečenja
d	–	$f_S = 0$	sustav rasterećen
d – e	–	$f_S < 0$	unutarnja sila u suprotnom smjeru
e	–	$f_S = -f_y$	početak tečenja
e – f	–	$f_S = -f_y = \text{const.}$	tečenje, plastična grana $f_S - u$ dijagrama
f	$u = -u_m$	$f_S = -f_y$	lokalni min. ($\dot{u} = 0$), točka vraćanja
f – g	$u > -u_m$	$f_S > -f_y$	elastično rasterećenje, bez tečenja
g	–	$f_S = 0$	sustav rasterećen
g –	–	$f_S > 0$	elastično do $u = u_y$

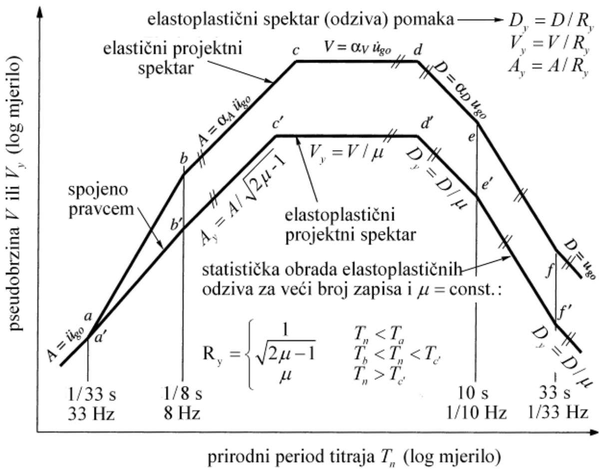
Za razliku od linearnoga, nelinearni sustav nakon početka tečenja ne titra oko početnoga (uspravnog) položaja ravnoteže, već oko otklonjenog položaja. Zbog toga prolaskom pobude sustav ostaje otklonjen uz trajne deformacije. Intuitivno je jasno da kod sustava s nižom granicom tečenja (s većim R_y) nastupa više ciklusa tečenja i ti su ciklusi duži. Trenutak nastupanja i iznos ekstrema različiti su u odnosu na linearni sustav (primjerice, ekstrem nelinearnog sustava je $u_m = 4,3\text{cm}$, dok je ekstrem pripadajućeg linearnog sustava $u_0 = 8,5\text{cm}$). Koeficijent duktilnosti prikazanog sustava je uz $u_y = \overline{f}_y u_0 = u_0 / R_y$ iz izraza (237):

$$\mu = \frac{u_m}{u_y} = \frac{1}{\overline{f}_y}\frac{u_m}{u_0} = R_y\frac{u_m}{u_0} = 8\frac{4,3}{8,5} = 4,05,$$

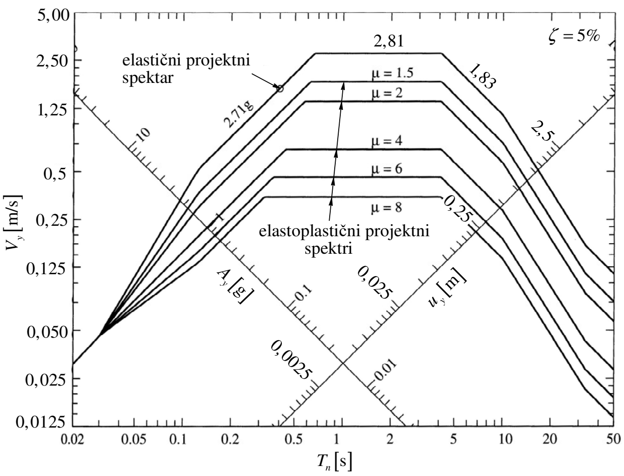
što predstavlja potrebnu[31] duktilnost sustava pri potresnoj pobudi (duktilni odziv za pomak 4 puta veći od u_y !). Ako je duktilnost manja, doći će do krhkoga loma za danu pobudu (što je opasno, a sanacija, ako je moguća, je vrlo teška).

Pri projektiranju, koeficijent duktilnosti μ biramo unaprijed. Veća vrijednost daje manje sile potresa, što možemo uočiti na elastoplastičnim spektrima odziva prikazanim na slikama 148.-150. Ali veći je i zahtjev na duktilnosti konstrukcije, pa pazite na **izbor statičkog sustava, materijala i detalja konstrukcije**!

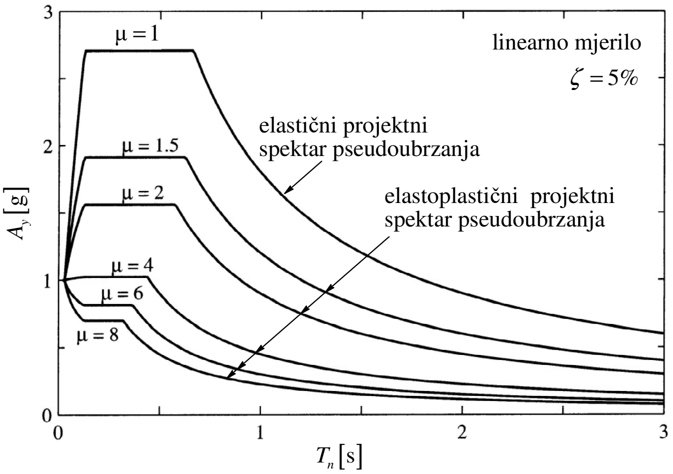
[31] zahtijevana



Slika 148.: Tvorba elastoplastičnog spektra odziva



Slika 149.: Elastoplastični spektar odziva (fraktila: 84,1 %) za različite koeficijente duktilnosti *μ* i *ζ*=0,05

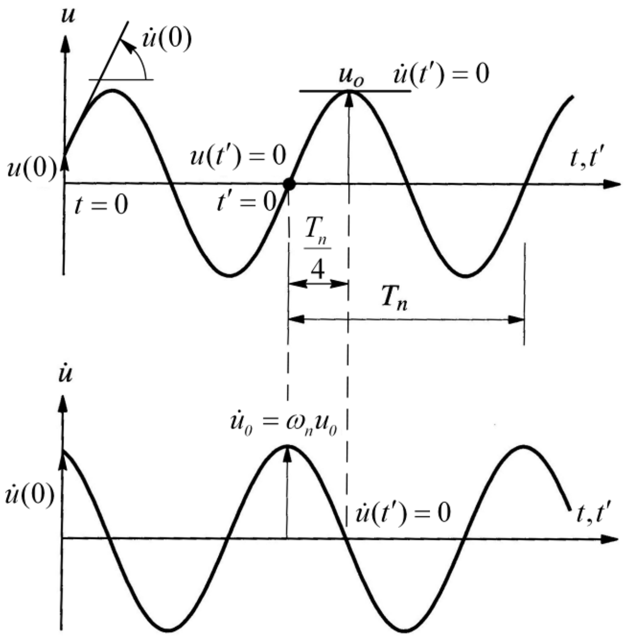


Slika 150.: Elastoplastični projektni spektri (fraktila: 84,1 %) potresnih zapisa s $\ddot{u}_{g0} = 1g$, $\dot{u}_{g0} = 1,22\text{m/s}$, $u_{g0} = 0,91\text{m}$, za različite koeficijente duktilnosti *μ* i *ζ*=0,05

7. Poopćeni sustav s jednim stupnjem slobode

Poopćeni sustav jest složeni sustav aproksimiran jednim stupnjem slobode. Postoji više pristupa rješavanju takvih sustava, a bit je pretpostaviti mjerodavni oblik titranja

7.1. Rayleighijev postupak (kvocijent)



Slika 151.: Jednostavno harmonijsko gibanje sustava s jednim stupnjem bez prigušenja

Lord Rayleigh je 1873. godine objavio postupak proračuna vlastite frekvencije titranja temeljen na zakonu o očuvanju energije. Promotrimo jednostavno harmonijsko gibanje sustava s jednim stupnjem slobode (slika 151.), uz početne uvjete $u(0)$ i $\dot{u}(0)$. Zbog jednostavnosti možemo pretpostaviti da gibanje počinje u trenutku $t'=0$ (isto $\forall t$) pa je:

$$u(t') \quad = u_0 \sin \omega_n t', \tag{241}$$

$$\dot{u}(t') \quad = \underbrace{u_0 \omega_n}_{\dot{u}_0} \cos \omega_n t'. \tag{242}$$

Potencijalna energija iznosi:

$$E_S = 1/2ku^2 \text{, ekstrem: } E_{S0} = 1/2ku_0^2. \tag{243}$$

Vrijeme pojave ekstrema $u(t') = u_0$ jest u trenucima $t' = T_n/4$, $3T_n/4$, $5T_n/4, \ldots$ Istodobno je brzina jednaka nuli, $\dot{u}(t') = 0$, pa je i kinetička energija jednaka nuli, $E_K = 1/2m\dot{u}^2 = 0$. Tada je ukupna energija $E_I = E_S + E_K = E_{S0}$ (jer je prigušenje $\zeta = 0$). Ekstrem kinetičke energije jest:

$$E_{K0} = 1/2m\dot{u}_0^2, \tag{244}$$

a vrijeme pojave ekstrema $\dot{u}(t') = \dot{u}_0$ je u trenucima $t' = 0$, $T_n/2$, $T_n, \dots$ Istodobno, kad je pomak $u(t') = 0$, potencijalna energija $E_S = 1/2ku^2 = 0$. Tada je ukupna energija: $E_I = E_S + E_K = E_{K0}$ (jer je prigušenje $\zeta = 0$). Znači, za ekstremne vrijednosti pomaka u_0 i brzine $\dot{u}_0$ ukupna energija mora biti istoga iznosa i jednaka je maksimumu kinetičke energije i potencijalne energije ($E_I = E_{S0} = E_{K0}$), odnosno $1/2ku_0^2 = 1/2m\dot{u}_0^2$ i konačno,

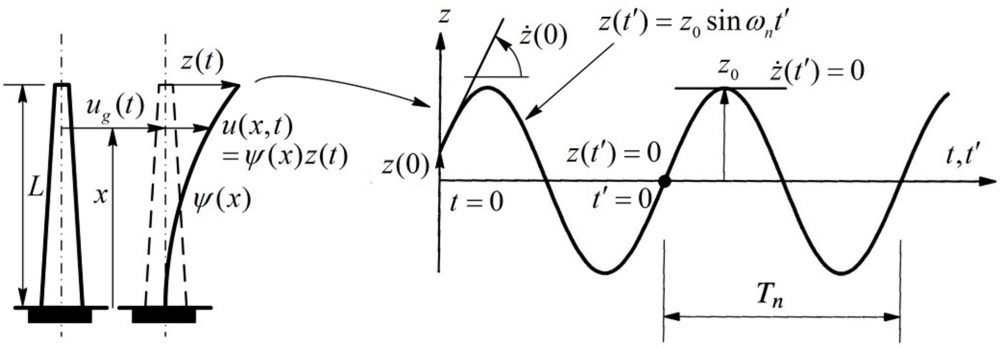
$$ku_0^2 = m\underbrace{u_0^2\omega_n^2}_{\dot{u}_0^2} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{245}$$

Iz zakona o očuvanju energije, došli smo do poznatoga izraza za prirodnu frekvenciju pa možemo zaključiti da Rayleighijev postupak nema nekih prednosti za sustav s jednim stupnjem slobode. Kao što ćemo vidjeti u nastavku, opisani postupak ima važnu ulogu kod sustava s više stupnjeva slobode koje ćemo aproksimirati sustavom s jednim stupnjem slobode.

Poznato je da složeni sustav može titrati različitim oblicima. Bit aproksimacije jest:

- pretpostaviti jedan oblik titranja (progiba) pri čemu je $\psi(x)$ funkcija oblika,
- odabrati (značajni) pomak promjenjiv u vremenu $z(t)$ kojega nazivamo poopćeni pomak.

Zbog toga, sustav prisilno titra oblikom $u(x,t) = \psi(x)z(t)$ koji je približno jednak funkciji oblika $\psi(x)$.



Slika 152.: Pretpostavka oblika titranja preko funkcije oblika i poopćenog pomaka

Oblik titranja $\psi(x)$ određuje ponašanje u prostoru, dok zakon titranja $z(t)$ određuje ponašanje u vremenu (slika 152.).

7.1.1. Primjena na sustav s kontinuiranom masom

Promotrimo jednostavan primjer titranja konzole. Pretpostavit ćemo da je pomak:

$$u(x,t') = z(t)\psi(x) = z_0 \sin\omega_n t'\psi(x), \tag{246}$$

pri čemu je oblik titranja $\psi(x)$, a zakon titranja $z(t') = z_0 \sin\omega_n t'$ s amplitudom z_0.

Brzina titranja jest:

$$\dot{u}(x,t') = \omega_n z_0 \cos \omega_n t' \psi(x). \tag{247}$$

Maksimalna potencijalna energija [32] konzole (za maksimalni pomak u_0) iznosi:

$$E_{S0} = \int_0^L \frac{1}{2} EI(x)[u_0''(x)]^2 dx, \quad u_0(x) = z_0\psi(x), \quad (\sin \omega_n t' = 1)\,, \tag{248}$$

a maksimalna kinetička energija konzole (za maksimalnu brzinu u_0) jest:

$$E_{K0} = \int_0^L \frac{1}{2} m(x)[\dot{u}_0(x)]^2 dx, \quad \dot{u}_0(x) = \omega_n z_0 \psi(x) \quad (\cos \omega_n t' = 1). \tag{249}$$

Ako uvrstimo $[u_0''(x)]^2 = z_0^2[\psi''(x)]^2$ i $[\dot{u}_0(x)]^2 = \omega_n^2 z_0^2[\psi(x)]^2$ i izjednačimo energije $E_{S0} = E_{K0}$, dobit ćemo ($1/2$ i z_0^2 iščezavaju) izraz poznat kao Rayleighijev kvocijent:

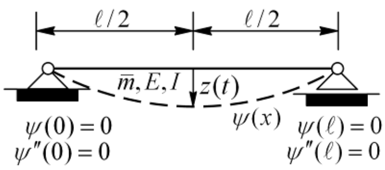
$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^L EI(x)[\psi''(x)]^2 dx}{\int_0^L m(x)[\psi(x)]^2 dx}.. \tag{250}$$

Rayleighijev kvocijent vrijedi za bilo kakav kontinuirani statički sustav i može služiti kao procjena prvoga[33] perioda titranja (fizikalno gledano, u smjeru najmanje krutosti!). Znači, pretpostavimo oblik titranja, a uz poznatu fleksijsku krutost EI i masu m, lako odredimo ω_n (T_n).

Primjerice, na prostoj gredi prikazanoj na slici 153.,

– uz pretpostavljeni oblik $\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{\ell}$, Rayleighijev kvocijent je: $\omega_n^2 = \frac{\pi^4 EI}{\overline{m}\ell^4}$, a

– uz pretpostavljeni oblik: $\psi(x) = \frac{x}{\ell}\left(\frac{x}{\ell} - 1\right)$, on iznosi $\omega_n^2 = \frac{120EI}{\overline{m}\ell^4}$.



Slika 153.: Pretpostavka oblika titranja na prostoj gredi

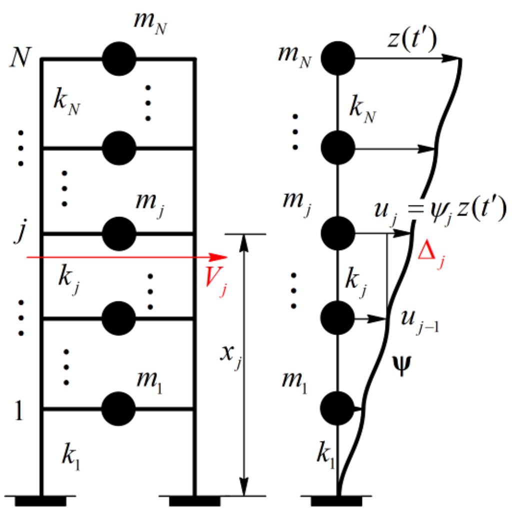
Napomenimo da oblik pretpostavljen pomoću sinusne funkcije zadovoljava i geometrijske (po pomacima) i prirodne (po silama) rubne uvjete, dok oblik pretpostavljen pomoću parabole ne zadovoljava prirodne rubne uvjete. Zbog toga funkcijom sinus dobivamo točno rješenje za frekvenciju titranja, a parabolom samo približno.

7.1.2. Primjena na sustav s diskretnim masama

Kao primjer sustava s diskretnim masama pokazat ćemo model zgrade s apsolutno krutim gredama i koncentriranim masama, prikazan na slici 154.

[32] http://www.grad.unizg.hr/predmet/nmk/predavanja

[33] temeljnog, osnovnog, fundamentalnog (jer ih složeni sustav ima više)



Slika 154.: Posmična zgrada: model i pretpostavka oblika titranja

Titranje zgrade opisuje vektor:

$$\mathbf{u}(t') = z_0 \sin \omega_n t' \boldsymbol{\psi}, \tag{251}$$

pri čemu je vektor $\boldsymbol{\psi}$ pretpostavljena funkcija oblika: $\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 & \dots & \psi_j & \dots & \psi_N \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, čije komponente određuju položaje masa.

Brzinu titranja opisuje vektor:

$$\dot{\mathbf{u}}(t') = \omega_n z_0 \cos \omega_n t' \boldsymbol{\psi}. \tag{252}$$

Maksimalna potencijalna energija sustava $E_{\mathrm{S}0}$ nastupa pri maksimalnim pomacima: $\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} u_{10} & \dots & u_{j0} & \dots & u_{N0} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, pa dobivamo:

$$E_{\mathrm{S}0} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} k_j (u_{j0} - u_{j-1,0})^2, \tag{253}$$

pri čemu je $u_{j0} - u_{j-1,0}$ maksimalni pomak etaže *j*.

Maksimalna kinetička energija sustava $E_{\mathrm{K}0}$ nastupa pri maksimalnim brzinama: $\dot{\mathbf{u}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{u}_{10} & \dots & \dot{u}_{j0} & \dots & \dot{u}_{N0} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, odnosno:

$$E_{\mathrm{K}0} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m_j \dot{u}_{j0}^2, \tag{254}$$

pri čemu je $\dot{u}_{j0}^2$ maksimalna brzina (na mjestu!) mase *j*.

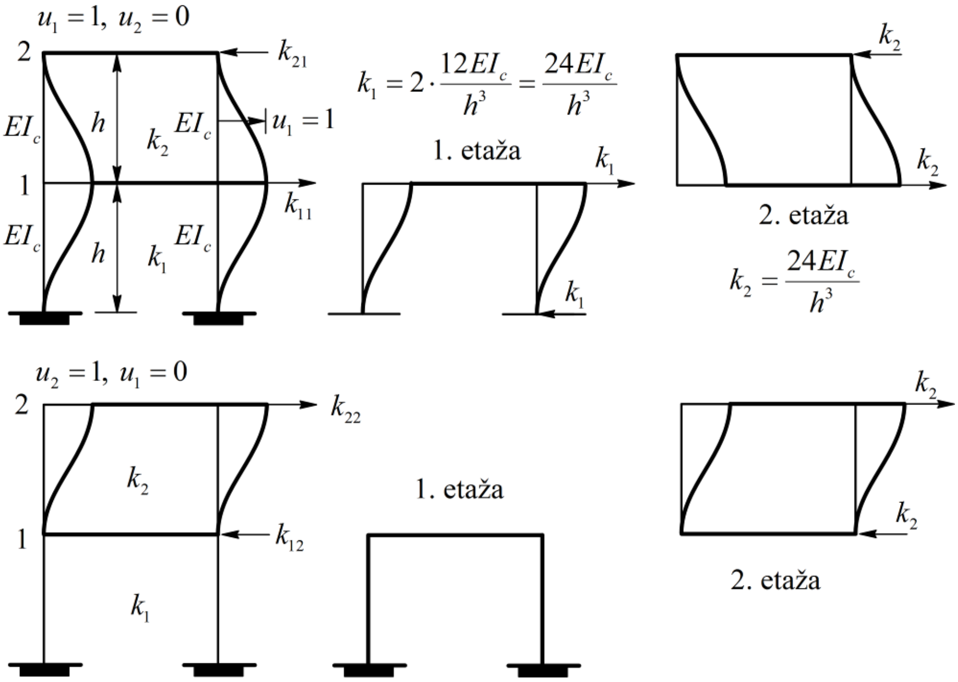
Ekstremi su $u_{j0} = z_0 \psi_j$ ($\sin \omega_n t' = 1$) i $\dot{u}_{j0} = \omega_n z_0 \psi_j$ ($\cos \omega_n t' = 1$).

Ako uvrstimo izraze za energije (253) i (254) te ih izjednačimo ($1/2$ i z_0^2 pritom iščezavaju), dobivamo:

$$\omega_n^2 = \frac{\sum_{j=1}^{N} k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2}{\sum_{j=1}^{N} m_j \psi_j^2} = \frac{\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}} \mathbf{k} \boldsymbol{\psi}}{\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}} \mathbf{m} \boldsymbol{\psi}}$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \cdots \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & m_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{255}$$

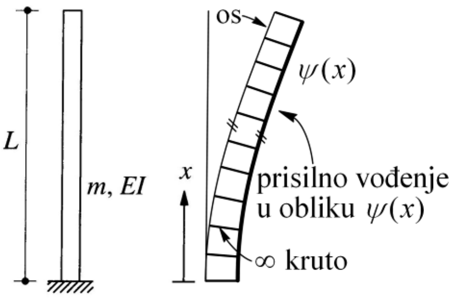
Ako pretpostavimo da su grede beskonačno krute (aksijalna krutost $EA \to \infty$, fleksijska krutost $EI \to \infty$), za etažu j, poprečna sila iznosi $V_j = k_j \Delta_j = k_j (u_j - u_{j-1})$. Takav model kod kojeg se zgrada odupire horizontalnim djelovanjima poprečnim silama zovemo POSMIČNOM ZGRADOM (ovakav model možemo nazvati tradicijskim, jer se redovito upotrebljavao prije pojave računala). Na slici 155. pokazano je kako se određuju krutosti posmične zgrade.



Slika 155.: Određivanje krutosti posmične zgrade

7.1.3. Svojstva Rayleighijeva kvocijenta

Prvo svojstvo Rayleighijeva kvocijenta jest da približna frekvencija mora UVIJEK biti veća od točne. Naime, izborom funkcije oblika $\psi(x)$ uvodimo prisilu među pomake sustava (slika 156.) što znači da prisiljavamo model na gibanje drugačijim oblikom od točnoga. Sustav činimo krućim (k raste) pa je i veća frekvencija ($\omega_n = \sqrt{k/m}$). U tablici 6. je pokazana procjena prve prirodne frekvencije konzole, za pretpostavljene različite funkcije oblika. Točnu vrijednost dobivamo za $\alpha_n = 3,516$.



Slika 156.: Funkcija oblika konzole

Tablica 6.: Procjena prirodne frekvencije konzole

Oblik rješenja: $\omega_n = \alpha_n \sqrt{EI/(mL^4)}$		
$\psi(x)$	α_n	greška [%]
$\dfrac{3x^2}{2L^2} - \dfrac{x^3}{2L^3}$	3,57	1,5
$1 - \cos\dfrac{\pi x}{L}$	3,66	4
$\dfrac{x^2}{L^2}$	4,47	27

Očekivano, sve procjene α_n su veće od točne vrijednosti. Možemo primijetiti da za treći primjer ($\psi(x) = x^2 / L^2$) dobivamo izrazito lošu procjenu α_n. Tomu je razlog prekršeni rubni uvjet po silama na vrhu ($M(\ell) = 0$). Za pretpostavljenu funkciju oblika moment je konstantan duž konzole: $\psi''(x) = 2 / L^2 = \text{const.}$, a znamo da moment na slobodnom rubu ne može postojati osim ako se tamo nalazi masa s rotacijskim momentom tromosti. Znači, pri izboru funkcije oblika $\psi(x)$ poželjno je zadovoljiti geometrijske i prirodne rubne uvjete.

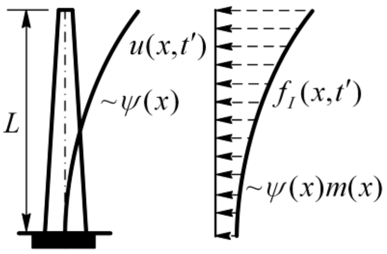
Drugo svojstvo Rayleighijeva kvocijenta je da možemo dobiti dobru aproksimaciju i uz lošiji izbor funkcije oblika. Pod pretpostavkom da poznajemo točno rješenje $\boldsymbol{\psi}$, možemo odrediti vektor odstupanja (pogreške) $\Delta\boldsymbol{\psi}$ kao $\Delta\boldsymbol{\psi} = \tilde{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\psi}$, gdje $\tilde{}$ označava približno rješenje. Iznos odstupanja (duljina vektora pogreške) jest $|\Delta\boldsymbol{\psi}| = \sqrt{\Delta\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\psi}}$. Bez dokaza, pogreška Rayleighijeva kvocijenta iznosi $(\tilde{\omega}_n^2 - \omega_n^2)/\omega_n^2 \sim |\Delta\boldsymbol{\psi}|^2$. Vidimo da pogreška ovisi o kvadratu duljine vektora odstupanja koja je još manja u odnosu na samu duljinu. Zbog toga i uz veću grešku funkcije oblika imamo dobru procjenu frekvencije. Ako upotrijebimo točni $\boldsymbol{\psi}$, dobivamo točan iznos ω_n uz $\Delta\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}$, ali problem je što točni $\boldsymbol{\psi}$ nije poznat unaprijed već rabimo približni, $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$.

7.1.4. Izbor funkcije oblika

Točnost kvocijenta ovisi o izboru funkcije oblika $\tilde{\psi}(x)$. Veliku točnost dobivamo ako je funkcija oblika približno prvoga oblika titranja. To je lako dokazati ako promotrimo silu inercije pri titranju pomakom $u(x,t') \sim \psi(x)$:

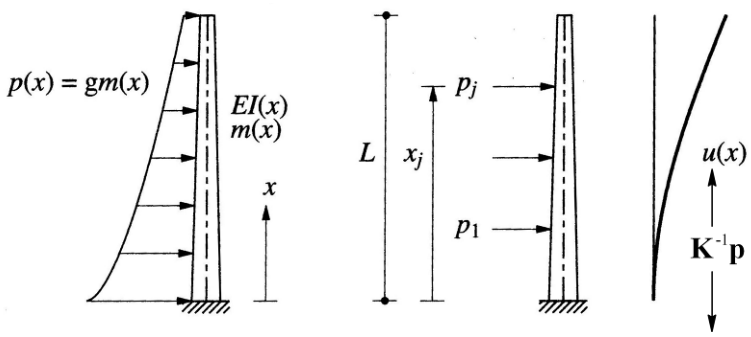
$$f_I(x,t') = -m(x)\ddot{u}(x,t') = \omega_n^2 z_0 m(x)\psi(x)\sin\omega_n t'. \tag{256}$$

Razdioba sile je približno $m(x)\psi(x)$ pri čemu je $\omega_n^2 z_0$ konstanta, a $\sin\omega_n t'$ je funkcija vremena. Kad bi $\psi(x)$ bio točan oblik titranja, statički unos sile inercije (256) u svakom trenutku bi prouzročio progib (246). Na žalost, točan oblik titranja nije unaprijed poznat, ali približnu funkciju oblika možemo odrediti kao progib $\tilde{\psi}(x)$ zbog statičke sile $p(x) = m(x)\tilde{\psi}(x)$. Iteracija po $\tilde{\psi}(x)$, $\tilde{\psi}_i(x) = m(x)\tilde{\psi}_{i-1}(x)/k$, nije u duhu Rayleighijeva kvocijenta – postupka koji sam po sebi ne mora biti precizan.



Slika 157.: Sile inercije pri titranju pomakom $u(x,t') \sim \psi(x)$

Statičku silu $p(x)$ biramo kao aproksimaciju sile inercije. Pretpostavimo je izravno i vrlo približno u smjeru prvoga oblika titranja i zatim, izračunamo statički progib $u(x) = \tilde{\psi}(x)$. Kad smo odredili približnu funkciju oblika, iz Rayleighijeva kvocijenta odredimo prirodnu kružnu frekvenciju ω_n. Često se za statičku silu $p(x)$ uzima težina u poprečnom smjeru: $p(x) = gm(x)$, pa je $\tilde{\psi}(x) = g$, a ponekad i koncentrirane sile $p(x) = \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ (primjerice težine etaža, ali ne nužno).



Slika 158.: Funkcija oblika dobivena preko pomaka od statičkog djelovanja

Ako se funkcija oblika odredi kao progib od statičkih sila, tada ona zadovoljava rubne uvjete po silama i pomacima jer zadovoljavaju uvjete ravnoteže **Ku=p**. Primijetimo, lakše je odrediti potencijalnu energiju kao rad sila $p(x)$ na $u(x)$ nego iz deformacija $u_0''(x)$ prema (248):

$$E_{S0} = \frac{1}{2}\int_0^L p(x)u(x)dx. \tag{257}$$

Uz E_{K0} kao ranije (izraz (249)) i $\dot{u}_0(x) = \omega_n u_0(x)$, Rayleighijev kvocijent iznosi:

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^L p(x)u(x)dx}{\int_0^L m(x)[u(x)]^2 dx}. \tag{258}$$

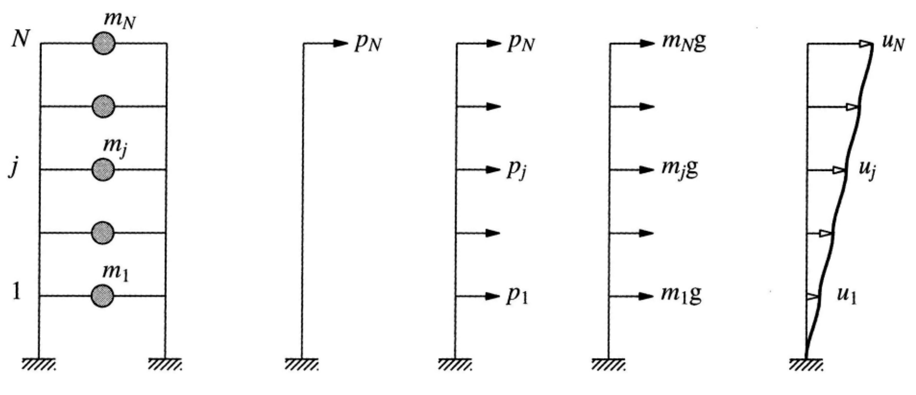
U nekim propisima (primjerice, američki propis AASHTO), prvi prirodni period T_n se procjenjuje za silu $p(x) = p_0$ (jednoliko opterećenje). Ako je $p(x) = gm(x)$, tada je Rayleighijev kvocijent:

$$\omega_n^2 = g\frac{\int_0^L m(x)u(x)dx}{\int_0^L m(x)[u(x)]^2 dx}. \tag{259}$$

U slučaju da je $p(x) = \mathbf{p}$, potencijalna energija postaje $E_{S0} = 0,5\sum p_j u(x_j)$, a Rayleighijev kvocijent poprima oblik:

$$\omega_n^2 = \frac{\sum p_j u(x_j)}{\int_0^L m(x)[u(x)]^2 dx}. \tag{260}$$

Prikladno je funkciju oblika $I(x)$ kod promjenjivih poprečnih presjeka zamijeniti funkcijom za $I = \text{const.}$ jer nema smisla tražiti preciznu funkciju oblika i frekvenciju. Ponovimo da je zamisao Rayleighijevog kvocijenta jednostavna i brza procjena prirodne frekvencije, pa i funkcija oblika $\tilde{\psi}(x)$ treba biti jednostavna funkcija koja zadovoljava sve rubne uvjete. Princip primjene statičkog progiba kao funkcije oblika vrijedi i za sustave s diskretnim masama ($\int \rightarrow \sum$).



Slika 159.: Sustav s diskretnim masama: model, statičko opterećenje i pomaci

Potencijalne energije u slučaju opterećenja i progiba posmične zgrade sa slike 159. jesu:

$$E_{S0} = \frac{1}{2}p_N u_N \qquad E_{S0} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} p_j u_j \qquad E_{S0} = \frac{1}{2}g\sum_{j=1}^{N} m_j u_j,$$

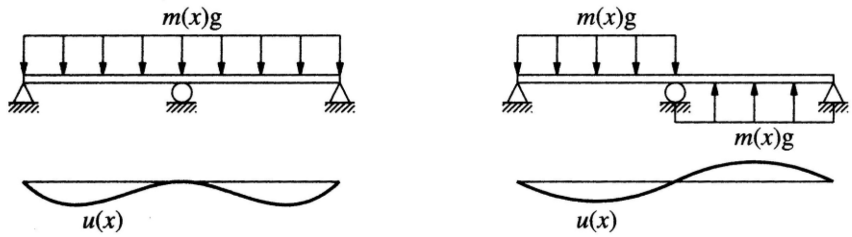
a kinetička energija jest:

$$E_{\mathrm{K}0} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m_j \dot{u}_{j0}^2 = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m_j (\omega_n u_{j0})^2, \qquad \text{jer je } \dot{u}_{j0} = \omega_n \underbrace{z_0 \psi_j}_{u_{j0}} .$$

Izjednačenjem energija kao i ranije (izostavljamo N i 0) dobivamo:

$$\omega_n^2 = \frac{p_N u_N}{\sum m_j u_j^2}, \qquad \omega_n^2 = \frac{\sum p_j u_j}{\sum m_j u_j^2}, \qquad \omega_n^2 = g \frac{\sum m_j u_j}{\sum m_j u_j^2}. \tag{261}$$

Izrazi (261) su slični izrazima za posmičnu zgradu (255), ali brojnik je oblika energije $E_{\mathrm{S}0}$, a nazivnik vrijedi jer smo za funkciju oblika odabrali progibnu liniju. Prvi je izraz prevelika (ali ipak upotrebljiva) aproksimacija, a posljednja dva izraza možemo naći u propisima za procjenu ω_n. Izrazi vrijede za bilo kakvu građevinu (ne samo posmičnu zgradu), a uspjeh aproksimacije ovisi o predočenju prvoga oblika titranja. To je lako napraviti (pretpostaviti) za jednostavni sustav (prostu gredu ili posmičnu zgradu) jer su sve ordinate prvoga oblika istog predznaka. Kod složenih sustava, teško je predočiti prvi oblik titranja. Primjerice, već kod kontinuiranoga nosača sa slike 160., statički progib od težine je neprikladan, jer potiče drugi oblik titranja, ali ako težinu zadamo antimetrično, dobivamo dobru procjenu prvoga oblika titranja.



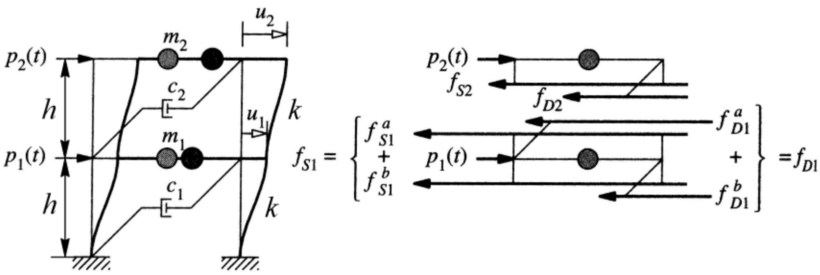
Slika 160.: Funkcije oblika zadane kao pomaci od vlastite težine

II. Sustavi s više stupnjeva slobode

8. Formulacija problema i postupci proračuna sustava s više stupnjeva slobode

8.1. Sustav s više stupnjeva slobode: jednostavni primjer

Analizirajmo prvo jednostavni sustav s više stupnjeva slobode – idealizirani dvokatni posmični okvir na kojega djeluju sile $p_1(t)$ i $p_2(t)$. Model je prikazan na slici 161. Horizontalni nosivi elementi su beskonačno aksijalno i fleksijski kruti ($EA \to \infty$, $EI \to \infty$), a vertikalni nosivi elementi su beskonačne aksijalne ($EA \to \infty$) i konačne fleksijske krutosti ($EI > 0$). Zanemarujemo utjecaj uzdužnih sila na krutost stupova. Ovo su pretpostavke ranije spomenute posmične zgrade (pogledati poglavlje 7.1.2).



Slika 161.: Dvokatni posmični okvir: model, vanjske i unutarnje sile

Masa sustava je sudjelujuća masa etaže (kata) koncentrirana u sredini grede. Pretpostavimo viskozno prigušenje koje je proporcionalno relativnoj brzini etaže. Bočnu krutost etaže dobivamo kao zbroj krutosti stupova na savijanje. Dinamički stupnjevi slobode su horizontalni pomaci (masa) u_1 i u_2.

8.1.1. Jednadžba gibanja: 2. Newtonov zakon

Na slici 161. su prikazane sile koje djeluju na masu m_j: vanjska sila $p_j(t)$, elastična sila f_{Sj} i viskozna sila f_{Dj} suprotne pobudi. Zakon gibanja mase (promatramo sve sile koje djeluju na m_j) jest:

$$p_j - f_{Sj} - f_{Dj} = m_j \ddot{u}_j \quad \text{ili} \quad m_j \ddot{u}_j + f_{Dj} + f_{Sj} = p_j(t), \quad j = 1,2; \tag{262}$$

ili matrično:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}. \tag{263}$$

Skraćeno:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{p}(t), \tag{264}$$

uz:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{f}_D = \begin{bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{bmatrix}, \ \mathbf{f}_S = \begin{bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{bmatrix}, \ \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix},$$

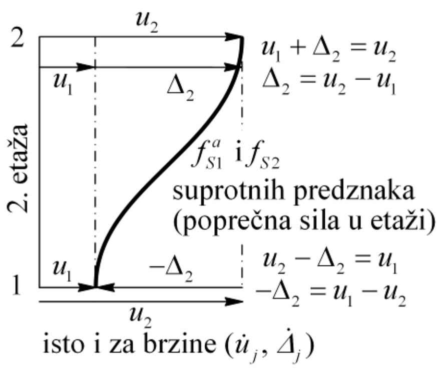
pri čemu je $\mathbf{m}$ matrica masa (primijetite: dijagonalna!).

Linearno elastične sile

Krutost (upeti krajevi), pomak i poprečna sila etaže iznose:

$$k_j = \sum_{\text{stupovi}} \frac{12EI}{h^3}, \qquad \Delta_j = u_j - u_{j-1}, \qquad V_j = k_j \Delta_j. \tag{265}$$

Veza elastičnih sila i pomaka u razini greda jest:



$$\begin{aligned}
f_{S1} &= f^b_{S1} + f^a_{S1} = k_1\Delta_1 + k_2(-\Delta_2) \\
\Delta_1 &= u_1 - u_0 = u_1, \ (u_0 = 0, \text{ležaj}) \\
f_{S1} &= k_1 u_1 + k_2(u_1 - u_2) \\
f_{S2} &= k_2\Delta_2 = k_2(u_2 - u_1) \\
\begin{bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{f}_S &= \mathbf{ku}, \qquad \mathbf{k} - \text{matrica krutosti}
\end{aligned} \tag{266}$$

Slika 162.: Poprečne sile i pomaci u drugoj etaži

Linearno viskozne sile

Uz koeficijent prigušenja c_j i brzinu $\dot{u}_j$, poprečne sile su:

$$V_j = c_j \dot{\Delta}_j, \qquad f_{D1} = c_1\dot{u}_1 + c_2(\dot{u}_1 - \dot{u}_2), \qquad f_{D2} = c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1), \tag{267}$$

ili matrično (isti oblik kao elastične sile):

$$\begin{bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_D = \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}, \quad \text{gdje je } \mathbf{c} \text{ matrica prigušenja.} \tag{268}$$

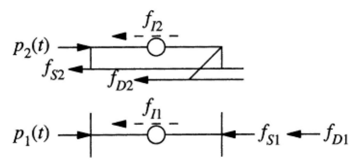
Uz $\mathbf{f}_S = \mathbf{ku}$ sustav postaje:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{ku} = \mathbf{p}(t). \tag{269}$$

Matrična jednadžba se sastoji od dvije obične diferencijalne jednadžbe od kojih svaka sadrži u_1 i u_2 jer matrice $\mathbf{c}$ i $\mathbf{k}$ nisu dijagonalne. Znači, jednadžbe su međusobno ovisne i moraju se rješavati zajedno.

8.1.2. D'Alembertov princip dinamičke ravnoteže

Prema D'Alembertovom principu, dinamički sustav je u svakomu trenutku u ravnoteži. Sile inercije su jednake umnošku mase i ubrzanja ($f_{Ij} = m_j \ddot{u}_j$) i djeluju u smjeru protivnomu ubrzanju.



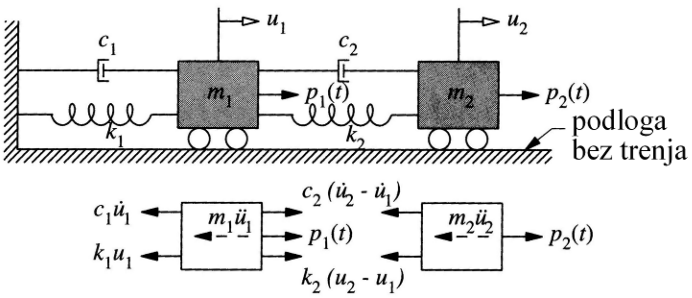
Slika 163.: Ravnoteža sila posmičnoga okvira

Grede su u statičkoj ravnoteži za svaki t. Iz ravnoteže svih sila u horizontalnom smjeru ($\sum x = 0$), opet dobivamo istu jednadžbu gibanja:

$$m_j \ddot{u}_j + f_{Dj} + f_{Sj} = p_j(t), \quad j = 1,2. \tag{270}$$

8.1.3. Ekvivalentni model

Ekvivalentni model s dva stupnja slobode sastoji se od dvije opterećene mase spojene oprugama i prigušivačima (slika 164.). Svojstva elemenata neka su jednaka istoznačnim svojstvima okvira.



Slika 164.: Ekvivalentni model sustava s dva stupnja slobode

Ako primijenimo D'Alembertov princip za svaku masu m_i i grupiramo po $\dot{u}_i$ i u_i ($i = 1,2$), dobivamo:

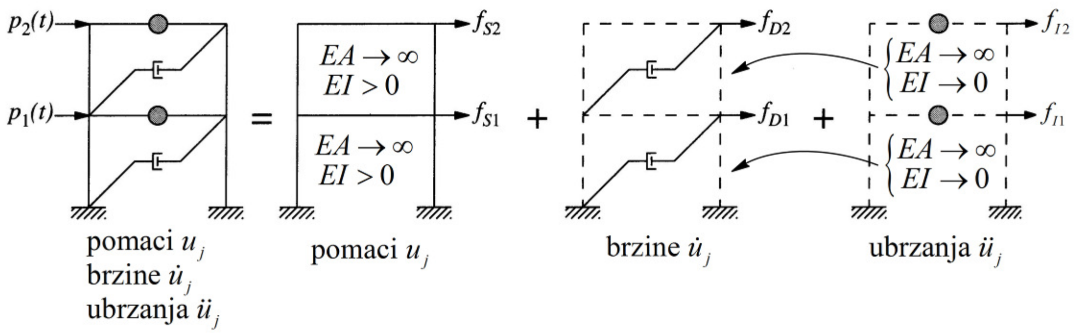
$$\begin{aligned} \text{za } m_1: &\quad m_1\ddot{u}_1 + \dot{u}_1(c_1 + c_2) - c_2\dot{u}_2 + u_1(k_1 + k_2) - k_2u_2 = p_1(t), \\ \text{za } m_2: &\quad m_2\ddot{u}_2 + c_2\dot{u}_2 - c_2\dot{u}_1 + k_2u_2 - k_2u_1 = p_2(t). \end{aligned} \tag{271}$$

Vrijedi isti matrični zapis (izraz (269)) i obje jednadžbe sadrže u_1 i u_2. Primijetite: krutost k_2 i prigušenje c_2 se aktivira samo uz pojavu relativnog pomaka i brzine među masama.

8.1.4. Rastav na neovisne podmodele

Promotrimo sada isti sustav dvoetažnoga okvira, ali kroz drugačiji pristup. Znamo da opterećenje $p_j(t)$ uzrokuje pomake $u_j(t)$, brzine $\dot{u}_j(t)$ i ubrzanja $\ddot{u}_j(t)$ sustava. Pomak djeluje samo na krutost k pri čemu nastaje elastična sila $f_{Sj} = k_j u_j(t)$. Brzina djeluje samo na prigušenje c pri čemu se javlja sila prigušenja $f_{Dj} = c_j \dot{u}_j(t)$. Ubrzanje djeluje samo na masu m uz pojavu sile inercije $f_{Ij} = m_j \ddot{u}_j(t)$. Znači, sustav možemo rastaviti na tri podmodela (EA uvijek ∞) prikazana na slici 165.:

- okvir bez mase i prigušenja (zadane krutosti na savijanje),
- okvir bez krutosti i mase (gipki okvir, samo pridržanje prigušivača) i
- okvir bez krutosti i prigušenja (gipki okvir, samo pridržanje mase).



Slika 165.: Rastav dvokatnog posmičnog okvira na neovisne podmodele

Svaki podmodel uzrokuje jednu vanjsku silu: $\mathbf{f}_S$, $\mathbf{f}_D$ i $\mathbf{f}_I = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}$. Budući da vrijedi ravnoteža s vanjskim opterećenjem, možemo pisati:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{p}(t) \tag{272}$$

8.2. Sustav s više stupnjeva slobode: poopćenje

8.2.1. Opći linearni sustav

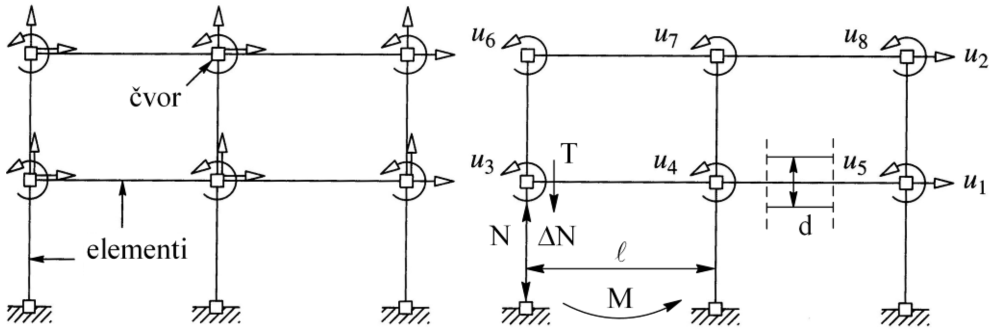
Posmična zgrada nije opći model (sadrži previše pretpostavaka) i ne može se primijeniti na složenije sustave. Pretpostavke o neizmjernoj krutosti u načelu nisu nužne, ali mogu biti opravdane. U svakom slučaju, kod općega modela treba utvrditi diskretizaciju i stupnjeve slobode.

8.2.2. Diskretizacija

Fizikalni problem opisujemo matematičkim modelom uz različite pretpostavke i pojednostavljenja. Matematički model diskretiziramo u numerički model radi lakšega proračuna (s konačnim brojem nepoznanica). Nosive elemente aproksimiramo štapnim i/ili plošnim elementima, a spojeni su u čvorovima i duž bridova modela. Stupnjevi slobode su translacije i rotacije čvorova.

Čvor okvira u ravnini ima tri stupnja slobode (dvije translacije i rotaciju), dok čvor prostornoga modela sadrži šest stupnjeva slobode (tri translacije i tri rotacije).

Promotrimo dvoetažni, dvobrodni okvir sa $6 \cdot 3 = 18$ stupnjeva slobode, prikazan na slici 166.



Slika 166.: Stupnjevi slobode za slučajeve kad su uzdužne deformacije uzete u obzir (18) i kad su zanemarene (8)

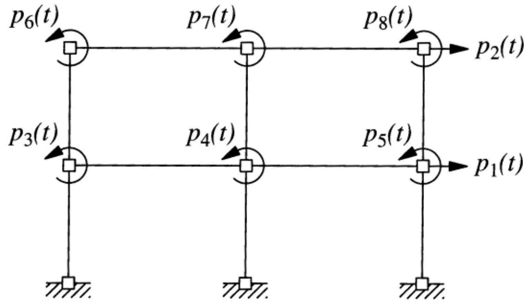
Česta je pretpostavka prema kojoj grede i stupovi nisu rastezljivi, jer je njihova uzdužna krutost velika u odnosu na bočnu krutost etaže ($EA \gg EI$). Kao nepoznanice tada ostaju pomaci etaža i zaokreti čvorova (inženjerska metoda pomaka). Kod dvoetažnog, dvobrodnog okvira sa 16 stupnjeva slobode preostaje ih osam (slika 166.). Pretpostavka o nerastezljivosti elemenata opravdana je za standardne dimenzije zgrade jer:

- su stupovi na velikomu razmaku ℓ, pa je mali prirast uzdužne sile (ΔN) od momenta prevrtanja M ,
- kod niskih greda (mali d / ℓ), poprečna sila T u gredi malo utječe na prirast uzdužne sile u stupovima.

Iznimke su:

- bliski stupovi (uske zgrade) i/ili visoke grede jer je tad mali krak ℓ za preuzimanje momenta prevrtanja i/ili veliki d / ℓ (uz veliku poprečnu silu T); zbog toga se javlja značajan doprinos prirasta uzdužne sile zbog momenta prevrtanja i/ili poprečne sile,
- visoke građevine kod kojih je veliki moment prevrtanja pa je i veliki prirast uzdužne sile,
- velika uzdužna sila od stalnoga opterećenja, zbog čega pada krutost građevine pa postaje izražen $P-\Delta$ učinak.

Dinamičko opterećenje djeluje u smjeru stupnjeva slobode. Spomenimo da se u građevinarstvu momenti najčešće ne zadaju kao dinamička opterećenja (slika 167.).

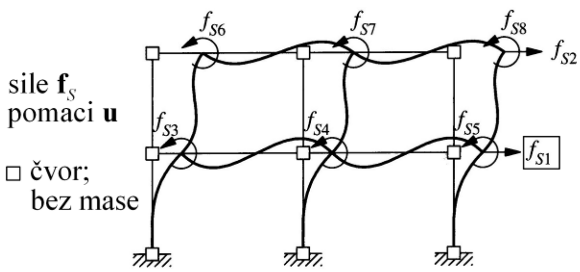


$$p_j(t), \qquad j = 1,\ldots,8$$
$$p_j(t) = 0, \quad j = 3,\ldots,8$$

Slika 167.: Dinamičko opterećenje

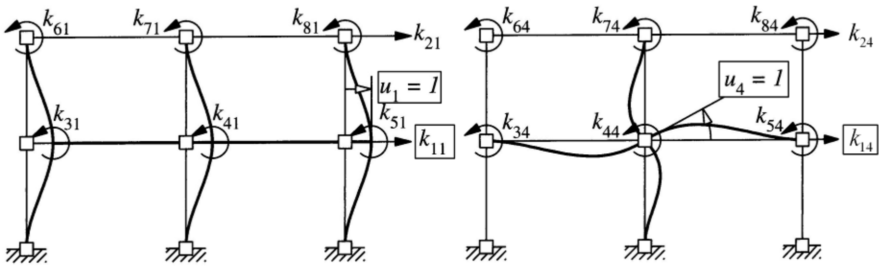
8.2.3. Analiza prvoga podmodela: elastične sile

Promotrimo prvo podmodel u kojem djeluju samo elastične sile (slika 168.). Vanjske sile f_{Sj} uzrokuju pomake u_j



Slika 168.: Prvi podmodel: elastične sile

Ako zadamo jedinični pomak u smjeru stupnja slobode j, a spriječimo ostale pomake, za održavanje takvoga stanja pomaka, sile moraju djelovati općenito u smjeru svih stupnjeva slobode. Znači, štapovi se deformiraju i nastaju unutarnje sile M i T koje su u ravnoteži sa silama k_{ij} koje drže progib od jediničnoga pomaka $u_j = 1$ (k_{ij} postoje u svim čvorovima). Primjerice, na slici 169. je pokazano kako sile k_{i1}, ($i = 1,\ldots,8$), drže progib za horizontalni pomak prve etaže $u_1 = 1$ (ostali pomaci su spriječeni). Slično, sile k_{i4}, ($i = 1,\ldots,8$), drže progib za jedinični kut zaokreta srednjega čvora prve etaže $u_4 = 1$ (ostali pomaci su spriječeni).



Slika 169.: Sile k_{i1} koje drže progib za u_1=1 i sile k_{i4} koje drže progib za u_4=1

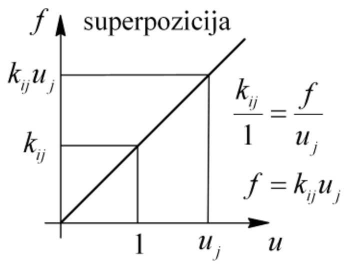
Članovi k_{ij} su pozitivnog ili negativnog predznaka, ovisno o obliku progiba koji čuvaju i naravno, pretpostavljenom pozitivnom smjeru. Sila od stvarnoga pomaka jednaka je umnošku sile od jediničnoga i stvarnoga pomaka. Ukupna sila u smjeru i jednaka je zbroju sila u smjeru i od pomaka u_j svakoga čvora ($j = 1,\ldots,N$):

$$f_{Si} = k_{i1}u_1 + \cdots + k_{iN}u_N \text{, } (k_{ij} \text{ u smjeru } i). \tag{273}$$

Primjerice, u smjeru 1 ($i = 1$) je jednaka $f_{S1} = k_{11}u_1 + \cdots + k_{14}u_4 + \cdots + k_{1N}u_N$. Oblik pribrojnika (umnožak krutosti i pomaka) pojašnjen je na slici 170. Svakomu smjeru $i = 1,\ldots,N$ pripada jedna jednadžba. Matrično možemo pisati:

$$\begin{bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \\ \vdots \\ f_{SN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{14} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & \cdots & k_{24} & \cdots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{N1} & \cdots & k_{N4} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}, \tag{274}$$

$$\text{ili skraćeno } \mathbf{f}_S = \mathbf{ku}. \tag{275}$$



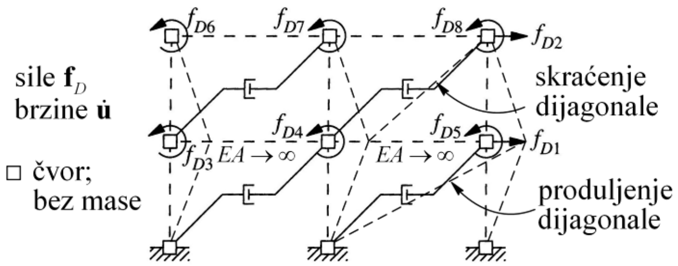
Slika 170.: Linearna veza sile i pomaka

Matricu $\mathbf{k}$ (simetrična je, odnosno $k_{ij} = k_{ji}$) za jednostavnije sustave tvorimo izravno, postupkom kojim dobivamo stupce matrice $\mathbf{k}$, opisanim za prvi (k_{i1}) i četvrti (k_{i4}) stupac matrice, ($i = 1, \ldots, N$). Za složene sustave matricu $\mathbf{k}$ određujemo zbrajanjem matrica krutosti elemenata (sjetite se metode pomaka!). Za opći pristup prema metodi pomaka prema kojemu možemo razmatrati ne samo štapne, već i plošne i volumne elemente, upotrebljavamo metodu konačnih elemenata.

8.2.4. Analiza drugoga podmodela: sile prigušenja

Model trošenja energije možemo idealizirati viskoznim prigušivačem. Vanjske sile f_{Dj} nastaju zbog brzina $\dot{u}_j$ (promjena duljine dijagonala u vremenu). Ako zadamo jediničnu brzinu u smjeru stupnja slobode *j*, $\dot{u}_j = 1$, a ostale spriječimo, nastaju unutarnje sile (sile u prigušivačima) koje su u ravnoteži s vanjskim čvornim silama c_{ij}. Vanjske čvorne sile c_{ij} drže brzinu okvira od $\dot{u}_j = 1$ i općenito postoje u svim čvorovima.
Ukupna sila u smjeru *i* (za c_{ij} u smjeru *i*) jest:

$$f_{Di} = c_{i1}\dot{u}_1 + c_{i2}\dot{u}_2 + \cdots + c_{ij}\dot{u}_j + \cdots + c_{iN}\dot{u}_N \,. \tag{276}$$



Slika 171.: Drugi podmodel: sile prigušenja

Svakomu smjeru pripada jedna jednadžba. Matrično:

$$\begin{bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ \vdots \\ f_{DN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_N \end{bmatrix}, \tag{277}$$

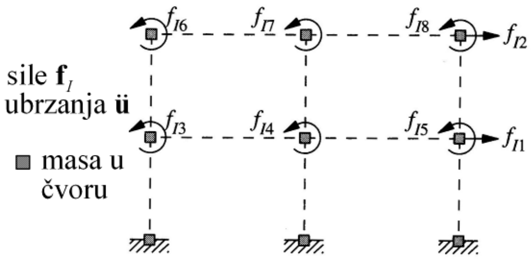
$$\text{ili skraćeno} \quad \mathbf{f}_D = \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}. \tag{278}$$

Članovi c_{ij} se ne određuju iz svojstava i dimenzija zgrade. Obično se pokusom utvrđuje koeficijent prigušenja ζ i postoje posebni postupci proračuna matrice prigušenja $\mathbf{c}$ iz ζ.

8.2.5. Analiza trećega podmodela: sile inercije

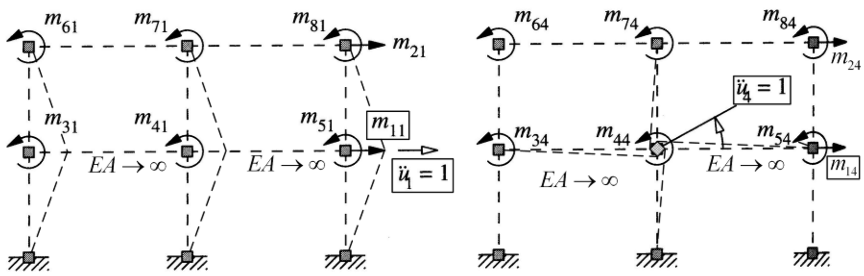
Vanjske sile $f_{Ij}(t)$ nastaju zbog ubrzanja $\ddot{u}_j(t)$ masa štapova.

Ako zadamo jedinično ubrzanje u smjeru stupnja slobode j, $\ddot{u}_j = 1$, a ostala ubrzanja spriječimo, pojavljuju se sile DUŽ štapova[34]. Prema D'Alembertu, to su sile inercije protivne ubrzanju.



Slika 172.: Treći podmodel: sile inercije

Vanjske sile m_{ij} moraju uravnotežiti sile inercije duž štapova i one drže ubrzanje okvira od $\ddot{u}_i = 1$ te općenito postoje u svim čvorovima.



Slika 173.: Vanjske sile m_{i1} zbog $\ddot{u}_1 = 1$; vanjske sile m_{i4} zbog $\ddot{u}_4 = 1$

Vanjska sila m_{ij} je sila u smjeru i zbog jediničnog ubrzanja u smjeru j, $\ddot{u}_j = 1$, ($i = 1,\ldots,N$). Primjerice, na slici 173. lijevo prikazana je razdioba sila m_{i1}, ($i = 1,\ldots,8$) u ravnoteži sa silama inercije duž štapova zbog jediničnoga horizontalnog ubrzanja prve etaže $\ddot{u}_1 = 1$ (ostala 0). Slično, sile m_{i4}, ($i = 1,\ldots,8$) nastaju zbog jediničnoga rotacijskog ubrzanja srednjega čvora prve etaže $\ddot{u}_4 = 1$ (ostala 0). Općenito, sila f_{Ii} u smjeru i nastaje zbog $\ddot{u}_j = 1$, ($j = 1,\ldots,N$) i iznosi:

$$f_{Ii} = m_{i1}\ddot{u}_1 + m_{i2}\ddot{u}_2 + \cdots + m_{ij}\ddot{u}_j + \cdots + m_{iN}\ddot{u}_N\,. \tag{279}$$

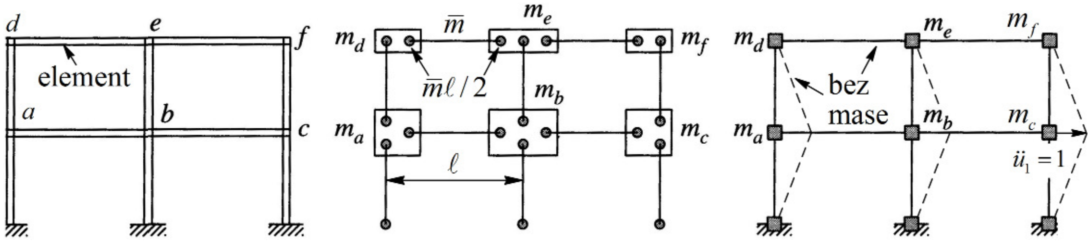
Svakomu smjeru ($i = 1,\ldots,N$) pripada jedna jednadžba:

$$\begin{bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ \vdots \\ f_{IN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{bmatrix}, \tag{280}$$

$$\text{ili skraćeno} \quad \mathbf{f}_I = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}. \tag{281}$$

[34] masa distribuirana duž štapova

Premda je masa uvijek distribuirana, u građevinarstvu je dovoljna diskretizacija u čvorove - aproksimacija koncentriranim (diskretnim) masama. One se određuju statički: prema dijelu težine koji pripada čvoru. Na slici 174. je prikazana diskretizacija masa elemenata okvira u čvorove. Primjerice, iz reakcije grede dobiju se dvije koncentrirane mase u čvorovima, a ukupnu masu određujemo kao zbroj doprinosa svih elemenata. Znači, u čvorovima dobivamo mase $m_a,\ldots,m_f$, a mase duž štapova nema.

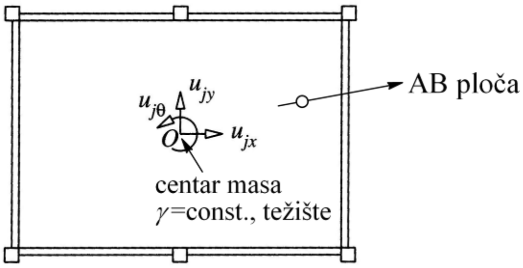


Slika 174.: Diskretizacija mase u čvorove

Matricu masa tvorimo po stupcima primjenom jediničnih ubrzanja. Vanjske sile za translacijsko ubrzanje $\ddot{u}_1 = 1$ su $m_{11} = m_a + m_b + m_c$, a ostale mase nisu pomične, $m_{i1} = 0$, $i = 2,\ldots,8$ (gipki okvir). Slično dobivamo za rotacijsko ubrzanje $\ddot{u}_4 = 1$. Rotacijska inercija mase u srednjemu čvoru koja ovisi o obliku mase je $m_{44} = m_4$ i primjerice, za kružni disk iznosi $I_0 = mR^2/2$, a ostale mase nisu pomične, $m_{i4} = 0$, ($i \neq 4$) (gipki okvir). Budući da je mali doprinos silama inercije, redovito uzimamo $m_{44} = 0$. Prvi razlog je da translacija pokreće veću masu (cijelu etažu, vidjeti m_1), a drugi jest da su rijetke i slabe rotacijske pobude oko horizontalne osi. Zaključimo da upotrebom koncentriranih masa dobivamo dijagonalnu matricu masa:

$$m_{ij} = 0, \qquad i \neq j, \qquad m_{jj} = m_j \text{ ili } 0 \text{ (za rotaciju)} . \tag{282}$$

Matricu tvorimo najčešće samo od translacijskih masa koje su pridružene smjerovima x i y u ravnini, i smjerovima x, y i z u prostoru. Za AB zgrade često upotrebljavamo pojednostavnjenje prema kojemu je ploča beskonačno kruta u svojoj ravnini, jer je njezina krutost velika prema fleksijskoj krutosti zidova i stupova. Ploča ostaje fleksibilna (zadržava krutost) prema savijanju u vertikalnom smjeru. Zbog ove pretpostavke, svi čvorovi u ravnini ploče imaju tri ista stupnja slobode jednaka stupnjevima slobode gibanja ploče kao krutoga diska (slika 175.). Za ploču kata j, to su translacije (u_{jx}, u_{jy}) i rotacija ($u_{j\theta}$) centra masa.



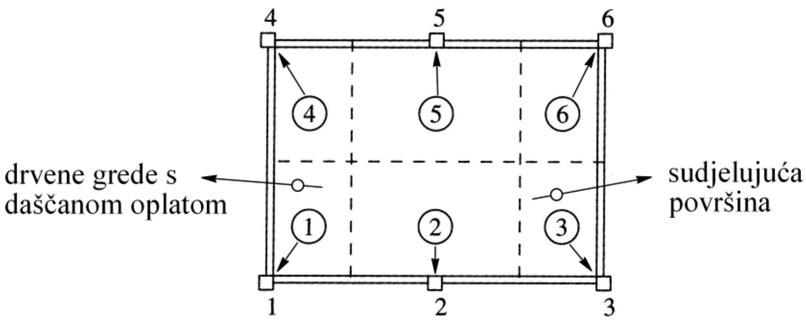
Slika 175.: Stupnjevi slobode krute dijafragme

Mase u smjerovima stupnjeva slobode su translacijske u smjeru x i y te rotacijska oko uspravne osi z. Primjerice, za pravokutnu ploču površinske mase $\bar{m}$ i tlocrtnih dimenzija a, b, mase iznose:

$$m = m_{jx} = m_{jy} = \bar{m}ab, \qquad m_{j\theta} = m\frac{a^2+b^2}{12}. \tag{283}$$

U masu ploče ulazi vlastita težina, stalno i dio pokretnog opterećenja ploče (u skladu s propisima i nacionalnim dodacima), a treba dodati i sudjelujući dio stupova i zidova etaže (nosivih i pregradnih).

Idealizacija mase zgrade postaje složenija ako se ploča etaže ne može pretpostaviti beskonačno krutom u svojoj ravnini, primjerice kod uzdužno podatljivih stropova poput grednika s oplatom. Tada se mase u čvorovima računaju prema sudjelujućim površinama 1 do 6, prema slici 176. Matrica krutosti sadrži i AKSIJALNU i fleksijsku krutost svih čvorova.



Slika 176.: Sudjelujuće površine za raspodjelu mase dijafragme čvorovima

8.2.6. Međusobna ovisnost jednadžbi

Superpozicijom navedenih podmodela dobivamo:

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{p}(t), \tag{284}$$

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t), \tag{285}$$

što predstavlja sustav od N diferencijalnih jednadžbi (pri čemu je N broj stupnjeva slobode). Rješenje matrične jednadžbe (285) jest vektor $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_N \end{bmatrix}^\mathrm{T}$, a derivacijom određujemo $\dot{\mathbf{u}}(t)$ i $\ddot{\mathbf{u}}(t)$.

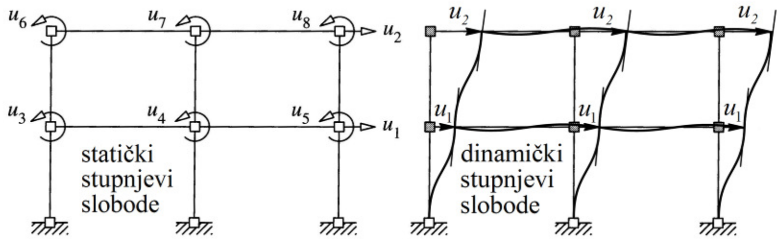
Matrični zapis je ekvivalentan jednadžbi za jedan stupanj slobode ako skalarne vrijednosti zamijenimo matricama i vektorima reda N:

$$m \to \mathbf{m}, \quad c \to \mathbf{c}, \quad k \to \mathbf{k},$$
$$\ddot{u} \to \ddot{\mathbf{u}}, \quad \dot{u} \to \dot{\mathbf{u}}, \quad u \to \mathbf{u}, \quad p(t) \to \mathbf{p}(t).$$

Općenito, ako su matrice pune, jednadžbe su međusobno ovisne što znači da u jednoj jednadžbi imamo više nepoznanica u_j. U posebnim slučajevima, matrice mogu biti dijagonalne, a jednadžbe neovisne, što znači da jedna jednadžba sadrži jednu nepoznanicu i može se riješiti neovisno o ostalima.

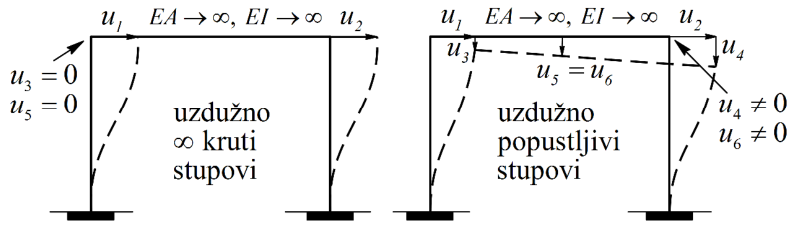
8.3. Statička kondenzacija

Statička kondenzacija je postupak eliminacije dinamičkih stupnjeva slobode za koje je $m_i = 0$, ali svi stupnjevi slobode ostaju u statičkoj analizi za tvorbu matrice $\mathbf{k}$. U statičkom modelu zanemarene su samo uzdužne deformacije štapova (inženjerska metoda pomaka) pa preostaje 8 stupnjeva slobode. U dinamičkom modelu najčešće zadajemo translacijske mase u čvorovima pa je matrica $\mathbf{m}$ dijagonalna i članovi na dijagonali su nula za rotacijske stupnjeve slobode ($m_i = 0$), koji se mogu eliminirati iz dinamičkoga proračuna ako pobuda ne sadrži rotacijske komponente p_i (potres).



Slika 177.: Statički i dinamički stupnjevi slobode uz zanemarene uzdužne deformacije

Premda statički model često sadrži i vertikalne stupnjeve slobode (slika 178.), kada su važne uzdužne deformacije stupova (u skladu s iznimkama navedenim na stranici 125.), oni se mogu eliminirati iz dinamičkoga proračuna jer su sile inercije u vertikalnom smjeru obično male pri translacijskoj pobudi.



Slika 178.: Uzdužno ∞ kruti i uzdužno popustljivi stupovi

U postupku statičke kondenzacije jednadžbe grupiramo po statičkim $\mathbf{u}_0$ i dinamičkim $\mathbf{u}_t$ stupnjevima slobode:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{tt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_t \\ \ddot{\mathbf{u}}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{tt} & \mathbf{k}_{t0} \\ \mathbf{k}_{0t} & \mathbf{k}_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_t(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{286}$$

Pretpostavljamo da mase djeluju u čvorovima pa je matrica masa $\mathbf{m}$ ($\mathbf{m}_{tt}$) dijagonalna jer nema rotacijske mase niti rotacijske pobude. Tada su translacije (t) dinamički, a rotacije (0) statički stupnjevi slobode (bez pridružene mase). Ako raspišemo (286), dobivamo:

$$\mathbf{m}_{tt}\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{k}_{tt}\mathbf{u}_t + \mathbf{k}_{t0}\mathbf{u}_0 = \mathbf{p}_t(t), \qquad \mathbf{k}_{0t}\mathbf{u}_t + \mathbf{k}_{00}\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}. \tag{287}$$

U drugoj jednadžbi nema sila inercije i pobude pa nakon množenja s $\mathbf{k}_{00}^{-1}$ dobivamo statičku ovisnost rotacijskih $\mathbf{u}_0$ o translacijskim pomacima $\mathbf{u}_t$:

$$\mathbf{u}_0 = -\mathbf{k}_{00}^{-1}\mathbf{k}_{0t}\mathbf{u}_t. \tag{288}$$

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu (uz $\mathbf{k}_{t0} = \mathbf{k}_{0t}^{\mathrm{T}}$, jer je $\mathbf{k}$ simetrična), dobivamo:

$$\begin{aligned} &\mathbf{m}_{tt}\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{k}_{tt}\mathbf{u}_t - \mathbf{k}_{0t}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_{00}^{-1}\mathbf{k}_{0t}\mathbf{u}_t = \mathbf{p}_t(t) \quad \text{i} \\ &\mathbf{m}_{tt}\ddot{\mathbf{u}}_t + \hat{\mathbf{k}}_{tt}\mathbf{u}_t = \mathbf{p}_t(t) \quad \text{uz} \quad \hat{\mathbf{k}}_{tt} = \mathbf{k}_{tt} - \mathbf{k}_{0t}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_{00}^{-1}\mathbf{k}_{0t}, \end{aligned} \tag{289}$$

pri čemu je $\hat{\mathbf{k}}_{tt}$ kondenzirana matrica krutosti. Konačni izraz:

$$\mathbf{m}_{tt}\ddot{\mathbf{u}}_t + \hat{\mathbf{k}}_{tt}\mathbf{u}_t = \mathbf{p}_t(t) \tag{290}$$

sadrži manji sustav jednadžbi od polaznoga.

Primjerice, za zadani dvobrodni, dvoetažni okvir sa slike 177., statičkom kondenzacijom od matrice $\mathbf{k}$ reda 8, dobivamo matricu $\hat{\mathbf{k}}_{tt}$ reda 2:

$$\mathbf{k}_{0t}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_{00}^{-1}\mathbf{k}_{0t} = 2\underset{6}{\boxed{\mathbf{k}_{0t}^{\mathrm{T}}}} \cdot 6 \underset{6}{\boxed{\mathbf{k}_{00}^{-1}}} \cdot 6 \underset{2}{\boxed{\mathbf{k}_{0t}}} = 2\underset{2}{\boxed{\hat{\mathbf{k}}_{tt}}} \quad \text{matrica reda 2!}$$

Za rješenje problema bitni su dinamički stupnjevi slobode $\mathbf{u}_t$, a iz ovisnosti (288) mogu se dobiti kondenzirani stupnjevi slobode $\mathbf{u}_0$ u bilo kojem t. Osnovni i konačni sustav oblikovno su slični (bez prigušenja):

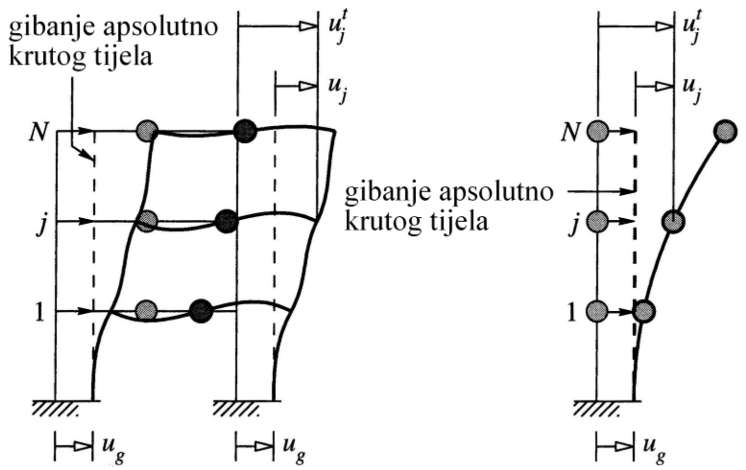
$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t), \quad \mathbf{m}_{tt}\ddot{\mathbf{u}}_t + \hat{\mathbf{k}}_{tt}\mathbf{u}_t = \mathbf{p}_t(t) \tag{291}$$

Smatrajmo zbog toga u nastavku teksta da je statička kondenzacija obavljena i da osnovni sustav sad sadrži samo dinamičke stupnjeve slobode (u daljnjem tekstu nećemo upotrebljavati indekse *t* i *tt*, odnosno oznake ^).

8.4. Ravninski model

8.4.1. Ravninski sustav: translacijska pobuda potresom

Glavno svojstvo ovakvoga sustava jesu dinamički stupnjevi slobode u smjeru pobude, primjerice kod modela zgrade ili dimnjaka prikazanih na slici 179.



Slika 179.: Model zgrade i dimnjaka

Pomaci mase j su $u_j^t(t) = u_j(t) + u_g(t)$ ili vektorski za sve mase:

$$\mathbf{u}^t(t) = \mathbf{u}(t) + u_g(t)\mathbf{1}, \qquad \mathbf{1} = \begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{292}$$

Vrijedi dinamička ravnoteža, ali bez vanjskoga opterećenja:

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{0}. \tag{293}$$

Samo relativni pomaci između masa i temelja koji nastaju zbog deformacija sustava (primjerice, savijanja stupova) uzrokuju elastične sile i sile prigušenja, a kod gibanja modela kao krutoga tijela nema savijanja stupova i rada prigušivača pa ni unutarnjih sila. Znači, sile prigušenja $\mathbf{f}_D$ i elastične sile $\mathbf{f}_S$ nastaju samo od relativnog gibanja ($\mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{u}}$) kao za jedan stupanj slobode, ali sile inercije nastaju zbog ukupnog ubrzanja:

$$\mathbf{f}_I = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}^t. \tag{294}$$

Konačno dobivamo:

$$\mathbf{m}\underbrace{[\ddot{\mathbf{u}} + \ddot{u}_g\mathbf{1}]}_{\ddot{\mathbf{u}}^t} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\mathbf{1}\ddot{u}_g(t), \tag{295}$$

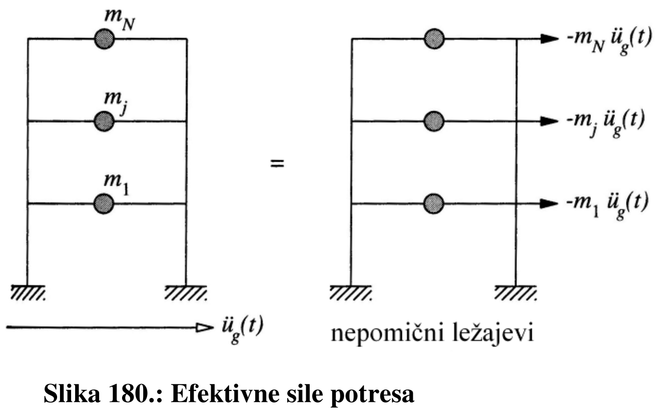
sustav od N diferencijalnih jednadžbi ($\mathbf{k}$ kondenzirana, reda N, $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{k}}_{tt}$) pri čemu smo eliminirali vertikalne pomake i kutove zaokreta, pa se sustav odnosi samo na dinamičke (horizontalne, bočne) pomake $\mathbf{u}$. Zbog toga matricu $\mathbf{k}$ često nazivamo MATRICOM BOČNE KRUTOSTI.

U slučaju djelovanja vanjskih sila, jednadžba gibanja jest: $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t)$. Primijetimo iste lijeve strane diferencijalnih jednadžbi, pa su i desne strane jednake. Dakle, možemo pisati:

$$\mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -\mathbf{m}\mathbf{1}\ddot{u}_g(t), \tag{296}$$

gdje je $\mathbf{p}_{\text{eff}}(t)$ efektivna sila potresa.

ekvivalentni modeli



Slika 180.: Efektivne sile potresa

Sad ćemo poopćiti problem na slučaj kad stupnjevi slobode nisu u smjeru gibanja potresa:

$$u_j^t(t) = u_j^s(t) + u_j(t), \qquad \mathbf{u}^t(t) = \mathbf{u}^s(t) + \mathbf{u}(t), \tag{297}$$

pri čemu je u_j^s kvazistatički[35] pomak zbog statičkoga (sporoga) pomaka tla, a pomak u_j je dinamički pomak, relativan prema u_j^s. Vrijedi $\mathbf{u}^s(t) = \ell u_g(t)$, pri čemu je ℓ utjecajni vektor koji sadrži pomake masa zbog jediničnog statičkog (sporog) pomaka tla $u_g = 1$:

$$\ell = [\ell_1 \quad \cdots \quad \ell_n]^T$$

Ukupni je pomak:

$$\mathbf{u}^t(t) = \ell u_g(t) + \mathbf{u}(t), \tag{298}$$

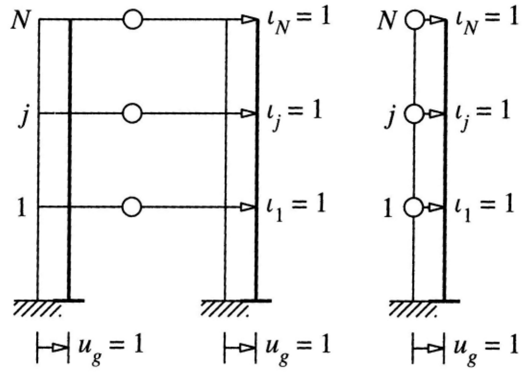
pa prema ranijem postupku dobivamo:

$$\mathbf{m}\underbrace{[\ddot{\mathbf{u}} + \ddot{u}_g \ell]}_{\ddot{\mathbf{u}}^t} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\ell \ddot{u}_g(t). \tag{299}$$

Sada je efektivna sila potresa:

$$\mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -\mathbf{m}\ell \ddot{u}_g(t). \tag{300}$$

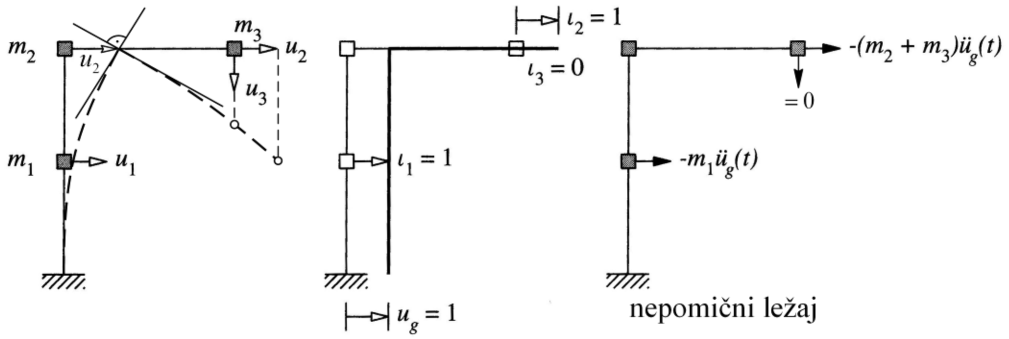
U prethodnomu primjeru kod kojega se stupnjevi slobode podudaraju s jediničnim statičkim pomakom tla $u_g = 1$, dobivamo utjecajni vektor $\ell = \mathbf{1}$. Od pomaka $u_g = 1$ sustav se giba kao kruto tijelo, bez ubrzanja masa (slika 181.). Za $\ell = \mathbf{1}$ dobivamo izvorni sustav (295).



Slika 181.: Utjecajni vektor ℓ za statički pomak od u_g=1

Kod L okvira, prikazanog na slici 182., dinamički stupanj slobode u_3 nije u smjeru pobude. Ako pretpostavimo da su štapovi uzdužno apsolutno kruti, isti je horizontalni pomak (u_2) masa m_2 i m_3, a iz istoga razloga su vertikalni pomaci m_1 i m_2 jednaki nuli.
Dinamički stupnjevi slobode su $\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^{\mathrm{T}}$.

[35] zbog statičkog djelovanja dinamičkog opterećenja



Slika 182.: L-okvir: model, utjecajni vektor i efektivne sile potresa

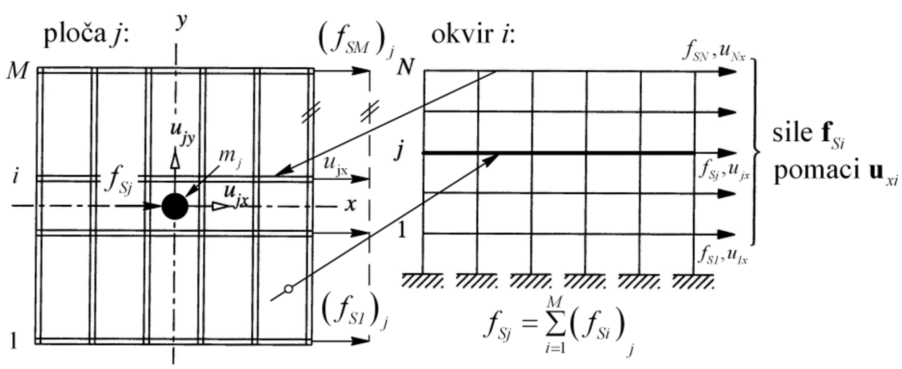
Za statički pomak tla $u_g = 1$ dobivamo utjecajni vektor $\boldsymbol{\ell} = [1 \quad 1 \quad 0]^{\mathrm{T}}$, pa je

$$\mathbf{p}_{\mathrm{eff}}(t) = -\mathbf{m}\boldsymbol{\ell}\ddot{u}_g(t) = -\ddot{u}_g(t)\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{p}_{\mathrm{eff}}(t) = -\ddot{u}_g(t)\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 + m_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{301}$$

Primijetimo da su mase m_2 i m_3 istoga ubrzanja, jer je greda uzdužno kruta pa je za jedinično ubrzanje $\ddot{u}_2 = 1$ pripadna masa $m_2 + m_3$. Dodatno, uočimo da od horizontalne pobude nema efektivne sile u vertikalnom smjeru.

8.4.2. Tlocrtno simetrična zgrada: translacijska pobuda potresom

Promotrimo zgradu s N etaža prikazanu na slici 183. Model zgrade je prostorni okvir kod kojeg su stupovi, grede i ploče beskonačno aksijalno kruti. Tlocrtna razdioba masa i krutosti je simetrična pa je možemo neovisno analizirati u bočnim smjerovima x i y.



Slika 183.: Tlocrtno simetrična zgrada: tlocrt kata i okvir *i*

Jednadžba gibanja u horizontalnom smjeru, primjerice x, je $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\mathbf{1}\ddot{u}_g(t)$. Matrica masa $\mathbf{m}$ je dijagonalna, s članovima na dijagonali $m_{jj} = m_j$, pri čemu je m_j masa etaže u centru masa ploče *j*. Matrica krutosti $\mathbf{k}$ sadrži bočne krutosti zgrade u smjeru x.

Tvorimo je kao zbroj bočnih krutosti okvira smjera x. Bočna krutost okvira i je određena matricom $\mathbf{k}_{xi}$ koja je kondenzirana: nema rotacija i vertikalnih pomaka čvorova. Veza bočnih sila i pomaka jednog okvira jest:

$$\mathbf{f}_{Si} = \mathbf{k}_{xi}\mathbf{u}_{xi}\,. \tag{302}$$

Budući da su ploče apsolutno krute, jednak je bočni pomak svih okvira, odnosno

$$\mathbf{u}_{xi} = \mathbf{u}_x, \qquad \mathbf{u}_x = \begin{bmatrix} u_{1x} & \cdots & u_{jx} & \cdots & u_{Nx} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{303}$$

pri čemu je pomak u_{jx} bočni (horizontalni) pomak ploče j u centru masa.

Ukupna bočna sila na zgradu (zbroj bočnih sila u okvirima) jest:

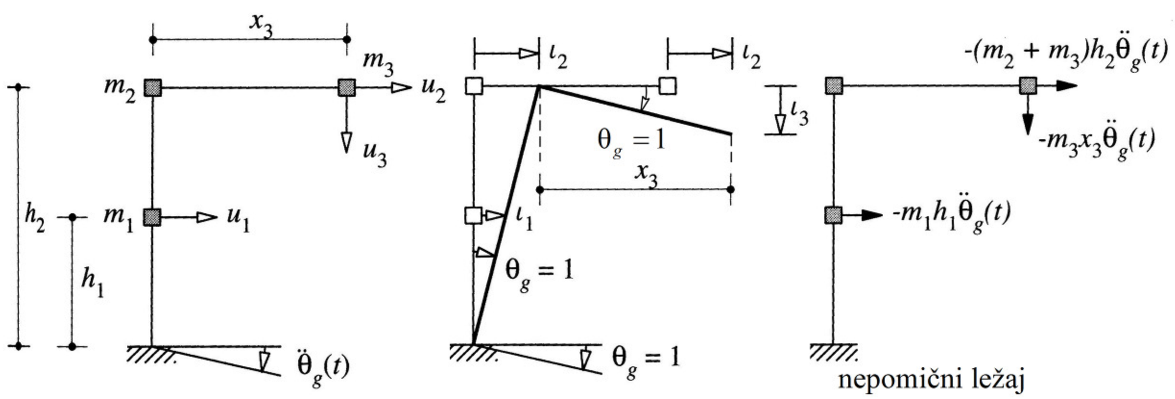
$$\begin{gathered} \mathbf{f}_S = \sum_{i=1}^{M}\mathbf{f}_{Si} = \sum_{i=1}^{M}\mathbf{k}_{xi}\mathbf{u}_{xi} = \mathbf{u}_x\sum_{i=1}^{M}\mathbf{k}_{xi} = \underbrace{(\mathbf{k}_{x1}+\cdots+\mathbf{k}_{xM})}_{\mathbf{k}_x}\mathbf{u}_x, \\ \text{odnosno} \quad \mathbf{f}_S = \mathbf{k}_x\mathbf{u}_x, \qquad \mathbf{k}_x = \sum_{i=1}^{M}\mathbf{k}_{xi}, \end{gathered} \tag{304}$$

pri čemu je matrica $\mathbf{k}_x$ (reda N) bočna krutost zgrade u smjeru x i tvorimo je kao zbroj matrica $\mathbf{k}_{xi}$ pojedinačnih okvira (reda N). Pokazali smo primjer za smjer x ($\mathbf{k} = \mathbf{k}_x$), a sličan postupak možemo provesti za okvire u smjeru y, uz $\mathbf{k} = \mathbf{k}_y$ i istu matricu $\mathbf{m}$.

8.4.3. Ravninski sustav: rotacijska pobuda potresom

Iako se rotacijska komponenta gibanja tla ne mjeri se izravno, ona se može procijeniti iz translacijskih pobuda na poznatim dubinama.

Promotrimo opet L okvir prikazan na slici 184., pobuđen rotacijskim ubrzanjem tla $\ddot{\theta}_g(t)$.



Slika 184.: L-okvir: model, utjecajni vektor i efektivne sile potresa

Ukupni je pomak:

$$\mathbf{u}^t(t) = \mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\ell}\theta_g(t), \tag{305}$$

pri čemu je pomak $\mathbf{u}(t)$ povezan s deformacijom modela, a pomak $\mathbf{u}^s(t) = \boldsymbol{\ell}\theta_g(t)$ je apsolutno kruti pomak sustava koji nastaje zbog statičkoga djelovanja θ_g. Utjecajni vektor za pomak $\theta_g = 1$ iznosi $\boldsymbol{\ell} = \tan\theta_g \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & x_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Pod pretpostavkom malih kutova zaokreta, vrijedi $\tan\theta_g \approx \theta_g = 1$, pa je $\boldsymbol{\ell} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & x_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Deriviranjem ukupnoga pomaka dobivamo:

$$\mathbf{m}\underbrace{[\ddot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\ell}\ddot{\theta}_g]}_{\ddot{\mathbf{u}}^t} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\boldsymbol{\ell}\ddot{\theta}_g(t). \tag{306}$$

Efektivna je sila potresa:

$$\mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -\mathbf{m}\boldsymbol{\ell}\ddot{\theta}_g(t) = -\ddot{\theta}_g(t)\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \tag{307}$$

odnosno:

$$\mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -\ddot{\theta}_g(t)\begin{bmatrix} m_1 h_1 \\ (m_2 + m_3)h_2 \\ m_3 x_3 \end{bmatrix}. \tag{308}$$

Primijetimo, iako je pobuda rotacijska, dolazi do translacije masa. Mase m_2 i m_3 su istoga horizontalnog ubrzanja jer je greda uzdužno kruta. Dodatno, uočimo pojavu komponente efektivne sile u vertikalnom smjeru od rotacijske pobude.

8.5. Neelastični sustav

Kod neelastičnih sustava funkcija $f_S - u$ nije linearna (slika 28.). Za veći iznosi sile dolazi do krivljenja početnoga dijela krivulje. Pri rasterećenju (opterećenju) krivulje se više ne podudaraju, a funkcija nije jednoznačna pa je važna povijest pomaka. Simbolički zapis ovisnosti (petlje histereze) jest:

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{f}_S(\mathbf{u}). \tag{309}$$

Uvijek (za svaki t) vrijedi jednadžba (ravnoteža!) gibanja:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \underbrace{\mathbf{f}_S(\mathbf{u})}_{\neq \mathbf{k}\mathbf{u}} = -\mathbf{m}\boldsymbol{\ell}\ddot{u}_g(t). \tag{310}$$

Izraz (310) predstavlja jednadžbu gibanja za neelastični sustav pri istodobnoj potresnoj pobudi svih ležajeva (∞ kruto tlo). Model energijskih gubitaka je određen matricom prigušenja $\mathbf{c}$. Njome u elastičnom području (slika 26.) modeliramo različite oblike trenja, otpora zraka i slično, a u plastičnom području (slika 28.) razliku prema dinamičkom pokusu. Dodatni gubitci u plastičnom području mogu se uzeti u obzir izravno, zadavanjem krivulja $\mathbf{f}_S$, a problem rješavamo numerički, metodama vremenskoga prirasta.

8.6. Slijed proračuna

8.6.1. Proračun pomaka, brzina i ubrzanja

Uz zadane matrice masa **m**, prigušenja **c**, krutosti **k** ili ovisnosti $\mathbf{f}_S(\mathbf{u})$ za neelastične sustave, pobudu $\mathbf{p}(t)$ ili $\ddot{u}_g(t)$, osnovni je problem dinamike konstrukcija odrediti odziv: ponašanje neke veličine u vremenu. Ponovimo, vrlo su važne relativne vrijednosti: $\mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{u}}$ i $\ddot{\mathbf{u}}$, no za potres su značajne i ukupne vrijednosti: $\mathbf{u}^t$, $\dot{\mathbf{u}}^t$ i $\ddot{\mathbf{u}}^t$. Ipak, najvažniji su pomaci $\mathbf{u}(t)$ jer o njima izravno ovise unutarnje sile.

8.6.2. Proračun unutarnjih sila

Nakon što smo dinamičkom analizom (nekim od tri pristupa opisanim u poglavlju 8.7) odredili $\mathbf{u}(t)$, statičkom analizom možemo odrediti unutarnje sile i naprezanja. Kao i za jedan stupanj slobode, postoje dva pristupa (za svaki t) uz poznati $\mathbf{u}(t)$:

a) ako su bili eliminirani neki statički stupnjevi slobode, treba ih odrediti iz odnosa $\mathbf{u}_0 = -\mathbf{k}_{00}^{-1}\mathbf{k}_{0t}\mathbf{u}_t$ te zatim preko svojstava krutosti elemenata odrediti unutarnje sile, a iz unutarnjih sila naprezanja (skraćeno: $\mathbf{u}_t(t) \rightarrow \mathbf{u}_0 = -\mathbf{k}_{00}^{-1}\mathbf{k}_{0t}\mathbf{u}_t \rightarrow$ unutarnje sile $\rightarrow$ naprezanja) ili,
   ako nije provedena kondenzacija, izravno se primjenom svojstava krutosti elemenata mogu odrediti unutarnje sile, a iz unutarnjih sila naprezanja (skraćeno, bez kondenzacije: $\mathbf{u}(t)$ $\rightarrow$ unutarnje sile $\rightarrow$ naprezanja).
b) uvesti ekvivalentne statičke sile jednake:

$$\mathbf{f}_S(t) = \mathbf{k}\mathbf{u}(t) \tag{311}$$

   gdje $\mathbf{f}_S(t)$ predstavlja vanjsko opterećenje. Zatim provodimo statičku analizu za $\mathbf{f}_S(t)$ u bilo kojemu trenutku t kojom možemo izračunati unutarnje sile i naprezanja.

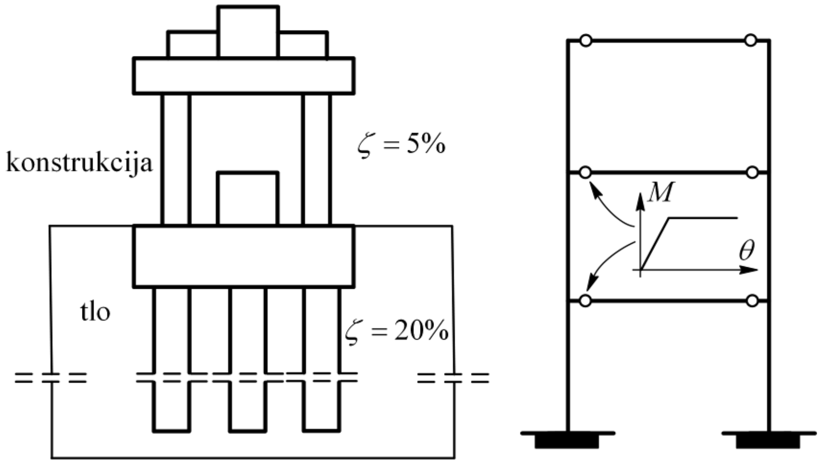
8.7. Sustav s više stupnjeva slobode: postupci proračuna

8.7.1. Klasična modalna analiza

Klasična modalna analiza ima široku primjenu za linearne sustave s klasičnim prigušenjem kod kojih postoje klasični prirodni periodi i oblici titranja. Jednadžbe gibanja takvih sustava mogu se transformirati iz izvornih u takozvane modalne koordinate što se svodi na niz neovisnih jednadžbi s jednim stupnjem slobode. Znači, svaka jednadžba sadrži jedan oblik, period i prigušenje titranja. Pobuda može biti jednostavna (formula) ili složena (niz podataka) pa proračun pojedine jednadžbe vršimo analitički ili numerički, a ukupni odziv sustava dobivamo kao zbroj odziva za svaku jednadžbu. Klasična modalna analiza ne vrijedi ako ne postoji rastav na niz neovisnih jednadžbi, primjerice:

– kod sustava s izrazito različitim prigušenjima pojedinih dijelova [primjer na slici 185. lijevo: model konstrukcije ($\zeta = 5\%$) i okolnog tla ($\zeta = 20\%$)]

– kod neelastičnih sustava, bez obzira na oblik prigušenja (primjer na slici 185. desno: elastoplastična ovisnost sile i pomaka)



Slika 185.: Model konstrukcije i okolna tla; neelastični sustav

8.7.2. Kompleksni problem vlastitih vrijednosti

Za linearne sustave koji nemaju klasično prigušenje može se koristiti proširenje klasične modalne analize u kojem također vršimo transformaciju iz izvornih u modalne koordinate. Ovim pristupom možemo riješiti problem vlastitih vrijednosti s općim, ne samo klasičnim, prigušenjem. To je kompleksni problem vlastitih vrijednosti, jer su vlastite vrijednosti i vlastiti vektori iz kompleksnoga područja proračuna.

8.7.3. Izravno rješavanje izvornoga sustava

Izravno rješavanje izvornoga sustava jednadžbi provodimo numerički, metodama vremenskoga prirasta. Rješenje nije analitičko, čak i za jednostavnu pobudu. Ovakav je pristup rješavanju dinamičkog problema općenit: vrijedi za linearne i nelinearne modele.

Tablica 7.: Analiza sustava s više stupnjeva slobode

Klasična modalna analiza	Izravna analiza
• rastav na neovisne jednadžbe	• polaznih, ovisnih jednadžbi
Vrijedi za:	Vrijedi za:
• linearni sustav	• linearni ili nelinearni sustav
• klasično prigušenje	• klasično ili opće prigušenje
Rješenje:	Rješenje:
• analitičko (jednostavna pobuda)	• isključivo numeričko
• numeričko (složena pobuda)	

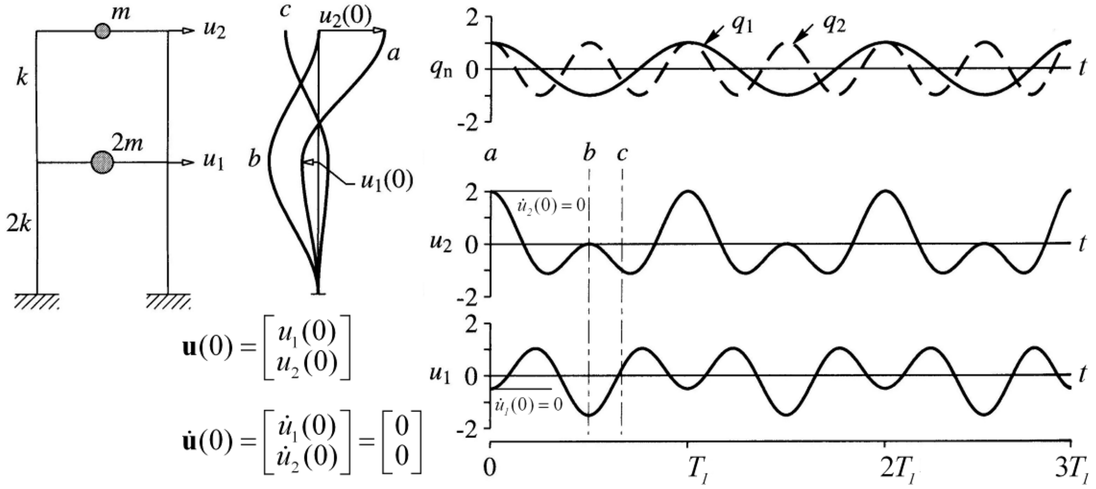
9. Slobodno titranje sustava s više stupnjeva slobode

9.1. Slobodno titranje bez prigušenja

Slobodno titranje nastaje zbog otklona sustava iz ravnotežnog položaja primjenom početnih pomaka i/ili brzina, znači, bez vanjske pobude ili pobude oslonaca. Slobodno titranje ($\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$), bez prigušenja ($\mathbf{c} = \mathbf{0}$) sustava s više stupnjeva slobode opisujemo jednadžbom:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{312}$$

koja predstavlja zapis sustava od N homogenih, povezanih diferencijalnih jednadžbi. Jednadžbe su povezane jer u općemu slučaju matrice $\mathbf{m}$ i/ili $\mathbf{k}$ nisu dijagonalne. Rješenje $\mathbf{u}(t)$ zadovoljava početne uvjete $\mathbf{u}(0)$ i $\dot{\mathbf{u}}(0)$ (jedine pobude).



$$\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{u}}(0) = \begin{bmatrix} \dot{u}_1(0) \\ \dot{u}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Slika 186.: Slobodno titranje neprigušenog sustava pobuđenoga početnim pomacima: dvoetažni posmični okvir; progibna linija u trenucima *a*, *b* i *c*; modalne koordinate $q_n(t)$; pomaci $u_1(t)$ i $u_2(t)$

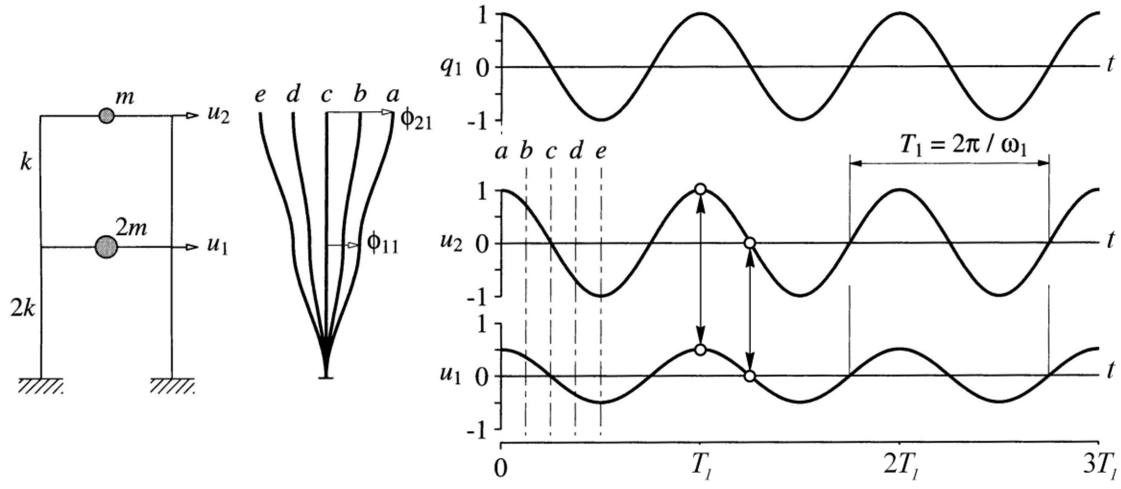
Promatramo slobodno titranje dvoetažnog posmičnog okvira prikazanog na slici 186. Krutosti etaža su $2k$ i k, a mase u razini greda su $2m$ i m. Titranje nastaje zbog početnoga oblika pomaka a (nije jedini mogući!). Protivno slobodnomu titranju modela s jednim stupnjem slobode pomaci u_1 i u_2 nisu jednostavna harmonijska gibanja masa, a periodi titranja masa nisu definirani. Omjer u_1 / u_2 nije sačuvan (oblici a, b i c nisu slični), odnosno:

$$u_1(a)/u_2(a) \neq u_1(b)/u_2(b) \neq u_1(c)/u_2(c), \tag{313}$$

jer oblici gibanja nisu povezani DO NA KOEFICIJENT. Neprigušena konstrukcija će titrati jednostavnim harmonijskim gibanjem bez promjene oblika (omjer u_1 / u_2 ostaje sačuvan prilikom titranja) ako slobodno titranje pobudimo prikladnom razdiobom početnih pomaka okvira. Kod sustava s dva stupnja slobode postoje dva takva oblika koje nazivamo PRIRODNIM OBLICIMA TITRANJA (vektori $\boldsymbol{\phi}_1$ i $\boldsymbol{\phi}_2$):

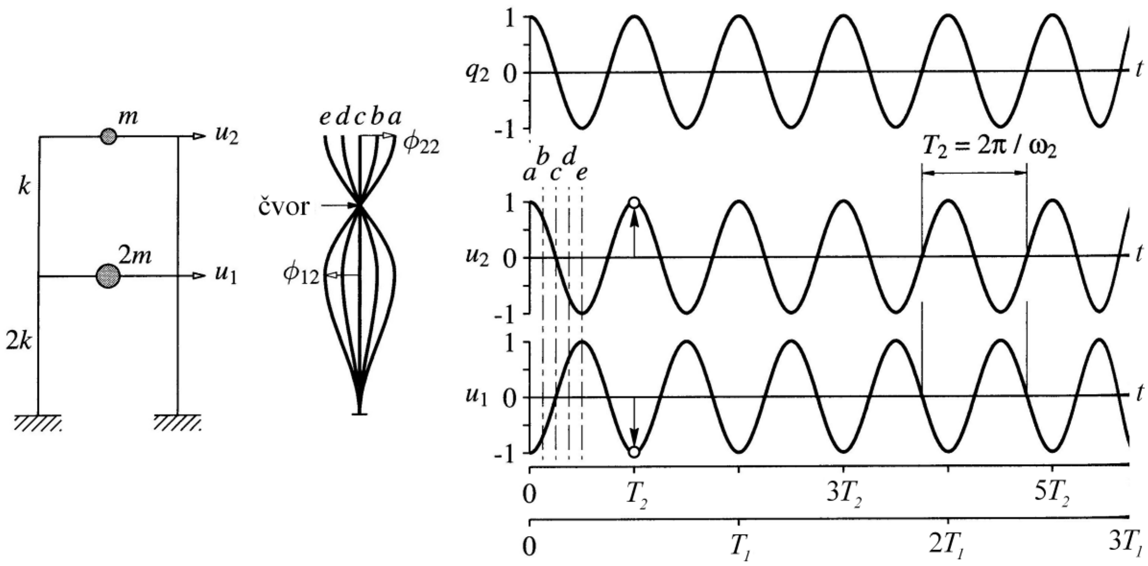
$$\mathbf{u}(0) = \boldsymbol{\phi}_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \text{ ili } \mathbf{u}(0) = \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{bmatrix} \phi_{12} & \phi_{22} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}. \tag{314}$$

Mase titraju istim periodom i istodobno dostižu ekstremne pomake. Znači, istodobno prolaze i kroz uspravni položaj okvira ($u_1 = 0$ i $u_2 = 0$). Kod prvoga oblika titranja (slika 187.), omjer u_1/u_2 je konstantan i pomaci masa su jednako usmjereni.



Slika 187.: Slobodno titranje neprigušenog sustava prvim vlastitim oblikom titranja: dvoetažni posmični okvir; progibna linija u trenucima *a*, *b*, *c*, *d* i *e*; modalne koordinate $q_1(t)$; pomaci $u_1(t)$ i $u_2(t)$

Kod drugoga oblika titranja (slika 188.), omjer u_1/u_2 je također konstantan, ali su pomaci masa nasuprotni. Postoji nultočka (čvor): nepomična točka pri titranju. Napomenimo da broj nultočaka raste s porastom rednoga broja oblika titranja.



Slika 188.: Slobodno titranje neprigušenog sustava drugim vlastitim oblikom titranja: dvoetažni posmični okvir; progibna linija u trenucima *a*, *b*, *c*, *d* i *e*; modalne koordinate $q_2(t)$; pomaci $u_1(t)$ i $u_2(t)$

Prirodni period titraja je vrijeme potrebno za jedan titraj ($a \rightleftarrows e$):

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}\,[\mathrm{s}]. \tag{315}$$

Prirodna (ciklička) frekvencija titraja jest:

$$f_n = \frac{1}{T_n}\,[\text{Hz}], \tag{316}$$

pri čemu indeks n označava redni broj[36] oblika titranja ($n = 1, 2$). Za oblike titranja vrijedi:

$$\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_n, \qquad (T_1 > T_2 > \cdots > T_n). \tag{317}$$

Sjetimo se da sustav s jednim stupnjem slobode izravno možemo pobuditi harmonijski jer nakon otpuštanja titra jedinim, prirodnim oblikom titranja. Sustav s više stupnjeva slobode možemo pobuditi na različite načine, a za harmonijsko gibanje početni pomaci moraju biti u obliku prirodnoga oblika titranja.

9.2. Proračun prirodnih frekvencija i oblika titranja

Zapis slobodnog titranja u obliku JEDNOG $\boldsymbol{\phi}_n$:

$$\mathbf{u}(t) = q_n(t)\boldsymbol{\phi}_n, \qquad (\text{u primjeru: } n = 1 \text{ ili } 2). \tag{318}$$

OBLIK (prostorna razdioba) titranja je određen vektorom $\boldsymbol{\phi}_n = \begin{bmatrix}\phi_{1n} & \phi_{2n}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ koji sadrži ekstremne ordinate ϕ_{jn} (u primjeru: $j = 1, 2$), koje nisu promjenjive u vremenu (ne ovise o t). VREMENSKU PROMJENU ORDINATA opisuje harmonijska funkcija:

$$q_n(t) = A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t, \quad (\text{kao za jedan st. sl.}), \tag{319}$$

koja predstavlja logično rješenje, jer mase titraju lijevo – desno nakon otpuštanja. Određivanje konstanata A_n i B_n iz izraza (319) je jednoznačno, iz dva početna uvjeta. Primijetite, sve mase titraju prema istomu zakonu $q_n(t)$. Konačno dobivamo:

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi}_n(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t), \tag{320}$$

pri čemu su nepoznanice problema ω_n i $\boldsymbol{\phi}_n$. Kad uvrstimo rješenje (320) u polaznu jednadžbu $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0}$, uz: $\ddot{\mathbf{u}}(t) = -\omega_n^2\boldsymbol{\phi}_n(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t) = -\omega_n^2\boldsymbol{\phi}_n q_n(t)$, dobivamo:

$$[-\omega_n^2\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n + \mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n]q_n(t) = \mathbf{0}. \tag{321}$$

Trivijalno rješenje je $q_n(t) = 0$, odnosno $\mathbf{u}(t) = q_n(t)\boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0}$, što znači da nema gibanja. Netrivijalno rješenje dobivamo ako je izraz u zagradi jednak nuli, pa nepoznanice ω_n i $\boldsymbol{\phi}_n$ zadovoljavaju

$$\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n. \tag{322}$$

Izraz (322) je poznat kao MATRIČNI PROBLEM VLASTITIH VRIJEDNOSTI ili preciznije, realni problem vlastitih vrijednosti jer su ω_n^2 i komponente vektora $\boldsymbol{\phi}_n$ realni brojevi. Budući da su matrice $\mathbf{m}$ i $\mathbf{k}$ poznate, treba odrediti ω_n^2 i $\boldsymbol{\phi}_n$. Drugi zapis problema vlastitih vrijednosti jest:

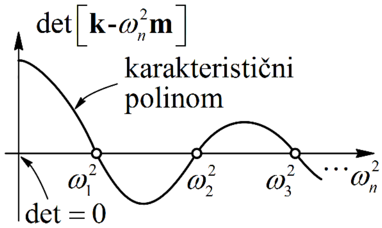
$$[\mathbf{k} - \omega_n^2\mathbf{m}]\boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0}, \tag{323}$$

[36] ipak i dalje nas podsjeća na engleski natural

što predstavlja sustav od N homogenih (jer je $\mathbf{p}(t)=\mathbf{0}$) algebarskih jednadžbi kojih su nepoznanice N komponenata vektora $\boldsymbol{\phi}_n=[\phi_{1n} \quad \cdots \quad \phi_{Nn}]^{\mathrm{T}}$ i pripadajuća frekvencija ω_n. Trivijalno je rješenje nulvektor $\boldsymbol{\phi}_n=\mathbf{0}$, jer tada nema titranja, a netrivijalno rješenje homogenoga sustava dobivamo iz:

$$\det[\mathbf{k}-\omega_n^2\mathbf{m}]=0\,. \tag{324}$$

Raspisom determinante dolazimo do polinoma N-toga stupnja po ω_n^2 koji se naziva KARAKTERISTIČNI ili FREKVENCIJSKI POLINOM (slika 189.).



Slika 189.: Karakteristični polinom

Primjerice, za dva stupnja slobode dobivamo: $a\omega_n^4+b\omega_n^2+c=0$, kvadratnu jednadžbu po ω_n^2 s dvije nultočke ω_1^2 i ω_2^2. Korijeni (nultočke – determinanta jednaka nuli) polinoma su realni i pozitivni brojevi ω_n^2 jer su matrice $\mathbf{m}$ i $\mathbf{k}$ simetrične i pozitivno definitne. Postoje uvjeti za pozitivnu definitnost u građevinarstvu: za matricu $\mathbf{k}$ to je ispravna mreža, broj i raspored ležajeva (moraju biti spriječeni pomaci krutoga tijela), a za matricu $\mathbf{m}$ mora biti provedena statička kondenzacija čime se eliminiraju stupnjevi slobode bez pridružene koncentrirane mase. Imamo N korijena ω_n^2 koji određuju frekvencije ω_n ($n=1,\ldots,N$). Ti korijeni se nazivaju korijeni karakterističnog polinoma ili VLASTITE VRIJEDNOSTI.

Nakon što smo odredili frekvenciju ω_n iz $[\mathbf{k}-\omega_n^2\mathbf{m}]\boldsymbol{\phi}_n=\mathbf{0}$ određujemo vektor $\boldsymbol{\phi}_n$ koji je određen do na konstantu a (znači, i $a\boldsymbol{\phi}_n$ je rješenje problema). Zapamtite, APSOLUTNI iznosi ordinata ϕ_{jn} nisu određeni, već je definiran samo OBLIK titranja $\boldsymbol{\phi}_n$, preciznije, relativni odnosi (omjeri) među ordinatama (komponentama) ϕ_{jn}. Svakoj frekvenciji ω_n pripada jedan prirodni oblik titranja $\boldsymbol{\phi}_n$. Riječ PRIRODNI naglašava titranje bez pobude jer ovisi samo o svojstvima modela $\mathbf{m}$ i $\mathbf{k}$. Drugi naziv za prirodni oblik titranja $\boldsymbol{\phi}_n$ jest vlastiti (svojstveni) vektor. Prvi oblik titranja $\boldsymbol{\phi}_1$ često zovemo i TEMELJNIM (OSNOVNIM) OBLIKOM TITRANJA.

9.3. Matrični zapis problema: modalna i spektralna matrica

Uporabom matričnoga pristupa možemo dobiti skraćeni zapis svih ω_n i $\boldsymbol{\phi}_n$. Oblici titranja su stupci matrice $\boldsymbol{\phi}_n=[\phi_{1n} \quad \cdots \quad \phi_{Nn}]^{\mathrm{T}}$, $n=1,\ldots,N$. Govorimo o stupcima MODALNE MATRICE problema vlastitih vrijednosti:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_1 & \boldsymbol{\phi}_2 & \cdots & \boldsymbol{\phi}_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix}. \tag{325}$$

SPEKTRALNA MATRICA problema vlastitih vrijednosti jest dijagonalna matrica:

$$\boldsymbol{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \omega_N^2 \end{bmatrix}, \tag{326}$$

čiji su članovi vlastite vrijednosti ω_n^2. Prepišimo sad izraz (322):

$$\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2 \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n, \text{ odnosno } \mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n \omega_n^2, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{327}$$

Desna strana je umnožak skalara i vektora, a znamo da vrijedi komutacija.

Zapis svih N jednadžbi jednom formulom ($\boldsymbol{\phi}_n \to \boldsymbol{\Phi}$, $\omega_n^2 \to \boldsymbol{\Omega}^2$):

$$\mathbf{k}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{m}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Omega}^2. \tag{328}$$

Raspisano za dvoetažni okvir ($N = 2$):

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} k_{11}\phi_{11} + k_{12}\phi_{21} & k_{11}\phi_{12} + k_{12}\phi_{22} \\ k_{21}\phi_{11} + k_{22}\phi_{21} & k_{21}\phi_{12} + k_{22}\phi_{22} \end{array}\right]$$

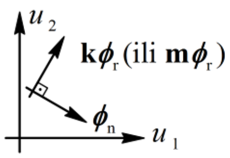
$$= \left[\begin{array}{c|c} m_{11}\phi_{11} + m_{12}\phi_{21} & m_{11}\phi_{12} + m_{12}\phi_{22} \\ m_{21}\phi_{11} + m_{22}\phi_{21} & m_{21}\phi_{12} + m_{22}\phi_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \tag{329}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \omega_1^2 (m_{11}\phi_{11} + m_{12}\phi_{21}) & \omega_2^2 (m_{11}\phi_{12} + m_{12}\phi_{22}) \\ \omega_1^2 (m_{21}\phi_{11} + m_{22}\phi_{21}) & \omega_2^2 (m_{21}\phi_{12} + m_{22}\phi_{22}) \end{array}\right]$$

$$\left[\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_1 \middle| \mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_2\right] = \left[\omega_1^2 \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_1 \middle| \omega_2^2 \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_2\right].$$

9.4. Ortogonalnost vlastitih vektora

Oblici titranja zadovoljavaju uvjete ortogonalnosti:



Slika 190.: Uvjet ortogonalnosti vlastitih vektora

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{k} \boldsymbol{\phi}_r &= 0 \\ \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_r &= 0 \\ \text{za: } \omega_n &\neq \omega_r \end{aligned} \tag{330}$$

pri čemu su komponente od $\boldsymbol{\phi}_n$ i $\boldsymbol{\phi}_r$ u smjeru pomaka: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_N \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Znači, skalarni produkt vektora $\boldsymbol{\phi}_n$ i $\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_r$ (ili $\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_r$) je jednak nuli. Dokažimo tvrdnju. Za ω_n i $\boldsymbol{\phi}_n$ problem vlastitih vrijednosti glasi:

$$\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2 \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n \,/\cdot\, \boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2 \boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n. \tag{331}$$

Slično vrijedi i za ω_r i $\boldsymbol{\phi}_r$ (množimo s $\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}$):

$$\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_r = \omega_r^2 \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_r. \tag{332}$$

Ako transponiramo izraz za ω_n i $\boldsymbol{\phi}_n$:

$$\boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2 \boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n \,/^{\mathrm{T}} \tag{333}$$

i uz pravila $(\mathbf{a}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{a}$ i $(\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b})^{\mathrm{T}} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}$, slijedi da je lijeva strana:

$$(\boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \underline{\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_r}, \tag{334}$$

jer je $\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \mathbf{k}$ (simetrična matrica).
Slično dobivamo i za desnu stranu izraza za ω_n i $\boldsymbol{\phi}_n$ (i $\mathbf{m}$ je simetrična):

$$(\omega_n^2 \boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n)^{\mathrm{T}} = \omega_n^2 \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \underline{\omega_n^2 \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_r}. \tag{335}$$

Konačno (podcrtani izrazi):

$$\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_r = \omega_n^2 \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_r. \tag{336}$$

Oduzimanjem izraza (332) za ω_r i $\boldsymbol{\phi}_n$ od (336) (iste lijeve strane), dobivamo:

$$\left(\omega_n^2 - \omega_r^2\right)\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_r = 0. \tag{337}$$

Vrijedi $\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_r = 0$ ako je $\omega_n^2 \neq \omega_r^2$ (ili $\omega_n \neq \omega_r$ jer su > 0). Ako je $\omega_n \neq \omega_r$ iz izraza za ω_r i $\boldsymbol{\phi}_n$ vrijedi i:

$$\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_r = \omega_r^2 \underbrace{\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_r}_{0} = 0. \tag{338}$$

Znači, ortogonalnost je dokazana ako su frekvencije različite.
Ipak spomenimo česti slučaj iz prakse da jednoj frekvenciji pripada više (j) oblika titranja, primjerice kod osnosimetričnih građevina (kupola, vodosprema, silos, dimnjak) ili pojavu grozdova oblika titranja s istom (bliskom) frekvencijom kod zgrada (tablica 8.).

Tablica 8.: Grozdovi oblika titranja s istom (bliskom) frekvencijom

ω_1	ω_2	$\cdots$	ω_i	ω_i	$\cdots$	ω_i	$\cdots$	ω_N
$\boldsymbol{\phi}_1$	$\boldsymbol{\phi}_2$	$\cdots$	$\boldsymbol{\phi}_i$	$\boldsymbol{\phi}_{i+1}$	$\cdots$	$\boldsymbol{\phi}_{i+j}$	$\cdots$	$\boldsymbol{\phi}_N$

Ako oblici titranja nisu međusobno ortogonalni ($\omega_n = \omega_r$), moguća je njihova ortogonalizacija. Primjerice, odaberemo prvi oblik titranja ($\boldsymbol{\phi}_i$) pa drugi ($\boldsymbol{\phi}_{i+1}$) ortogonaliziramo na prvi. Zatim, treći ($\boldsymbol{\phi}_{i+2}$) ortogonaliziramo na prethodna dva, i tako dalje.

Ortogonaliziramo svih j oblika titranja s istom frekvencijom s preostalim oblicima: N ortogonalnih oblika (stupci matrice $\mathbf{\Phi}$). Realizacija se vrši inačicama Gramm–Schmidtovog postupka ortogonalizacije.

Posljedica je ortogonalnosti da su KVADRATNE matrice $\mathbf{K}$ i $\mathbf{M}$ dijagonalne:

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\mathbf{\Phi}, \left(K_{nr} = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_r\right), \quad \mathbf{M} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\mathbf{\Phi}, \left(M_{nr} = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_r\right). \tag{339}$$

Znači, članovi izvan dijagonale ($n \neq r$) su jednake nuli: $K_{nr} = 0$ i $M_{nr} = 0$, a članovi na dijagonali ($n = r$) su skalari

$$K_n = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n \text{ i } M_n = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n. \tag{340}$$

K_n i M_n su strogo pozitivni dijagonalni članovi jer su $\mathbf{k}$ i $\mathbf{m}$ pozitivno definitne matrice. Veza među dijagonalnim članovima matrica $\mathbf{K}$ i $\mathbf{M}$ glasi:

$$K_n = \omega_n^2 M_n. \tag{341}$$

Dokaz je jednostavan (rabimo $\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n$):

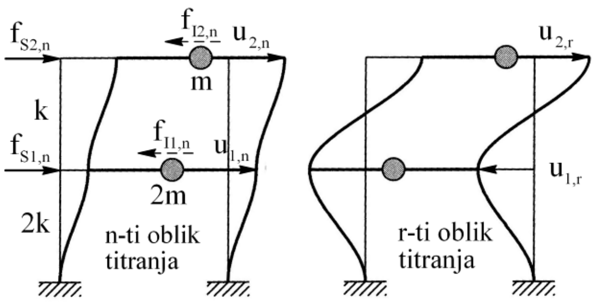
$$K_n = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\underbrace{(\omega_n^2\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n)}_{\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n} = \omega_n^2\underbrace{(\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n)}_{M_n} = \omega_n^2 M_n. \tag{342}$$

Pobliže o problemu vlastitih vrijednosti možete vidjeti u nastavnim materijalima na poveznicama kolegija Matematika 3 i Numerička analiza (PMF):

- http://www.grad.hr/nastava/matematika/mat3/node39.html,
- http://web.math.pmf.unizg.hr/~rogina/2001096/num_anal.pdf.

9.5. Fizikalne posljedice uvjeta ortogonalnosti

Kao prvu posljedicu uvjeta ortogonalnosti navest ćemo da je rad sila inercije n–toga oblika na pomacima r–toga oblika jednak nuli, što ćemo pokazati na primjeru dvokatnoga posmičnog okvira sa slike 191.



Slika 191.: Dvokatni posmični okvir: n-ti i r-ti oblik titranja

Pomaci konstrukcije pri gibanju u obliku $\boldsymbol{\phi}_n$ su:

$$\mathbf{u}_n(t) = q_n(t)\boldsymbol{\phi}_n \tag{343}$$

a pripadajuća ubrzanja i sile inercije:

$$\ddot{\mathbf{u}}_n(t) = \ddot{q}_n(t)\boldsymbol{\phi}_n, \qquad (\mathbf{f}_I)_n = -\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_n(t) = -\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n\ddot{q}_n(t). \tag{344}$$

Pomaci pri gibanju u nekom drugom obliku, $\boldsymbol{\phi}_r$ su:

$$\mathbf{u}_r(t) = q_r(t)\boldsymbol{\phi}_r. \tag{345}$$

Rad sila inercije n–tog oblika na pomacima r–tog oblika jest:

$$(\mathbf{f}_I)_n^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_r = -\underbrace{(\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_r)}_{0}\ddot{q}_n(t)q_r(t) = 0, \quad \left[\text{primijetite } (\mathbf{f}_I)_n^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\ddot{q}_n(t)\right]. \tag{346}$$

Ekvivalentne statičke sile pri gibanju u obliku $\boldsymbol{\phi}_n$ su:

$$(\mathbf{f}_S)_n = \mathbf{k}\mathbf{u}_n(t) = \mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n q_n(t). \tag{347}$$

Druga je posljedica uvjeta ortogonalnosti da je rad statičkih sila n–tog oblika na pomacima r–tog oblika jednak nuli:

$$(\mathbf{f}_S)_n^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_r = \underbrace{(\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_r)}_{0}q_n(t)q_r(t) = 0, \quad \left[\text{primijetite } (\mathbf{f}_S)_n^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{k}q_n(t)\right]. \tag{348}$$

Treća je interpretacija potvrda Bettijeva stavka[37]:

$$(\mathbf{f}_I)_n^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_r = (\mathbf{f}_I)_r^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_n, \text{ uz: } \ddot{q}_n = -\omega_n^2 q_n. \tag{349}$$

9.6. Normiranje vlastitih vektora

Vlastiti vektori $\boldsymbol{\phi}_n$ određeni su do na konstantu, pa je i proporcionalni (kolinearni) vektor $a\boldsymbol{\phi}_n$ također vlastiti vektor što možemo jednostavno dokazati:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}\underline{\boldsymbol{\phi}_n} &= \omega_n^2\mathbf{m}\underline{\boldsymbol{\phi}_n}, \\ \mathbf{k}(\underline{a\boldsymbol{\phi}_n}) &= a(\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n) = a\left(\omega_n^2\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n\right) = \omega_n^2\mathbf{m}(\underline{a\boldsymbol{\phi}_n}). \end{aligned} \tag{350}$$

Konstantu a možemo primijeniti za prikladno normiranje komponenata, primjerice najveću komponentu vlastitoga vektora izjednačimo s jedinicom ili nekoj važnoj komponenti odziva (pomaku vrha) pridružimo vrijednost 1.

Spomenimo, računalni programi najčešće normiraju modalnu masu na jediničnu vrijednost, odnosno $M_n = 1$ (jer je numerički učinkovito). Prema izrazu (340) slijedi:

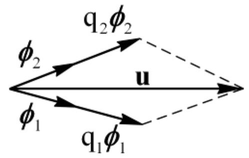
$$M_n = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n = 1, \text{ pa je matrica } \mathbf{M} = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I}. \tag{351}$$

Iz izraza (351) možemo zaključiti da su oblici titranja ortogonalni i normirani s obzirom na masu. Matematički ga nazivamo ortonormirani skup (baza) normiran na masu. Za tako normirane oblike vrijedi:

$$K_n = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2 M_n = \omega_n^2, \text{ pa je matrica } \mathbf{K} = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Omega}^2. \tag{352}$$

[37] Šimić: Otpornost materijala 2, Školska knjiga, Zagreb, str. 197

9.7. Raspis vektora pomaka po vlastitim vektorima



Slika 192.: Raspis vektora pomaka po vlastitim vektorima

Ključna zamisao je raspisati vektor pomaka pomoću vlastitih vektora:

$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^{N} q_r \boldsymbol{\phi}_r , \quad \text{ili raspisano:} \tag{353}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = q_1 \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{N1} \end{bmatrix} + q_2 \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \vdots \\ \phi_{N2} \end{bmatrix} + \cdots + q_N \begin{bmatrix} \phi_{1N} \\ \phi_{2N} \\ \vdots \\ \phi_{NN} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_1\phi_{11} + q_2\phi_{12} + \cdots + q_N\phi_{1N} \\ q_1\phi_{21} + q_2\phi_{22} + \cdots + q_N\phi_{2N} \\ \vdots \\ q_1\phi_{N1} + q_2\phi_{N2} + \cdots + q_N\phi_{NN} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} \tag{354}$$

Prema tome, vrijedi

$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^{N} q_r \boldsymbol{\phi}_r = \mathbf{\Phi q}. \tag{355}$$

Skalarni članovi (komponente) q_r se nazivaju MODALNE (NORMALNE) KOORDINATE. Ako su vlastiti vektori $\boldsymbol{\phi}_r$ poznati, za zadani pomak **u** možemo odrediti modalne koordinate q_r množeći obje strane izraza (353) sa $\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}$:

$$\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{mu} = \sum_{r=1}^{N} (\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_r) q_r . \tag{356}$$

Zbog ortogonalnosti iščezavaju svi članovi osim za $r = n$:

$$\underbrace{\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{mu}}_{\text{skalar}} = \underbrace{(\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n)}_{\text{skalar}} q_n, \quad \text{odnosno:} \quad q_n = \frac{\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{mu}}{\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n} = \frac{\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{mu}}{M_n}. \tag{357}$$

Ovakav modalni raspis vektora **u** ima široku uporabu u dinamici konstrukcija, primjerice kod određivanja rješenja za slobodno titranje, vanjsku pobudu i potres.

Kao primjer ćemo pokazati raspis vektora pomaka $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ dvoetažnoga okvira.

Poznajemo matricu masa i oblike titranja:

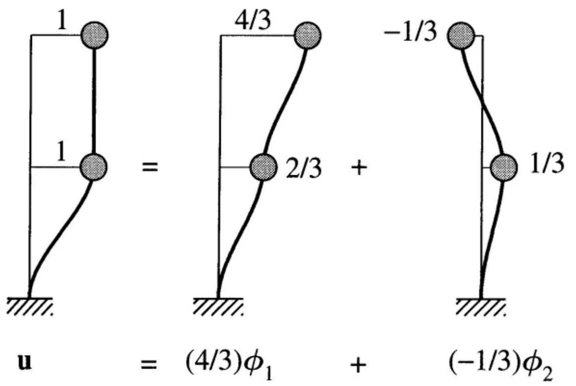
$$\boldsymbol{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Pripadni skalari (ovise o načinu normiranja ϕ_i!) su:

$$q_1 = \frac{\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{2m}{3/2m} = 4/3,$$

$$q_2 = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{-m}{3m} = -1/3.$$

Konačni raspis: $\mathbf{u} = q_1\boldsymbol{\phi}_1 + q_2\boldsymbol{\phi}_2 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 4/3\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} - 1/3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$



Slika 193.: Raspis pomaka dvoetažnoga okvira po vlastitim vektorima

Znači, SVE ordinate ϕ_{jn} jednog $\boldsymbol{\phi}_n$ množimo ISTIM brojem q_n. U prikazanom primjeru ordinate prvog oblika množimo s $\frac{4}{3}$, a ordinate drugog oblika s $-\frac{1}{3}$.

9.8. Rješenje problema slobodnoga titranja bez prigušenja

Da bismo odredili rješenje problema slobodnoga titranja bez prigušenja, trebamo riješiti jednadžbu gibanja uz zadane početne uvjete [izraz (312)]. Za primjer posmičnog okvira takvo rješenje, (q_i, u_i) za $u_i(0)$, ($i = 1, 2$), je prikazano na slici 186. U postupku trebamo riješiti realni problem vlastitih vrijednosti određen izrazom (322), čime određujemo vlastite frekvencije ω_n i oblike $\boldsymbol{\phi}_n$ ($n = 1, \ldots, N$). Opće rješenje dobivamo superpozicijom (zbrojem) odziva za pojedini oblik:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{u}_n(t) = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_n \underbrace{(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)}_{q_n}. \tag{358}$$

Napomenimo da princip superpozicije vrijedi ako je problem linearan. Brzina slobodnog titranja ($\boldsymbol{\phi}_n$ ne ovisi o vremenu) jest:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_n \omega_n (-A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t). \tag{359}$$

Izrazi (358) i (359) za $t=0$ postaju:

$$\mathbf{u}(0)=\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\phi}_n A_n, \qquad \dot{\mathbf{u}}(0)=\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\phi}_n\omega_n B_n, \tag{360}$$

dakle dva sustava od N jednadžbi po A_n i B_n [uz poznate $\mathbf{u}(0)$ i $\dot{\mathbf{u}}(0)$]. Sustavi se ne rješavaju se izravno, već rabimo razvoj $\mathbf{u}(0)$ po $\boldsymbol{\phi}_n$ (vrijedi i u $t=0$):

$$\mathbf{u}(0)=\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\phi}_n q_n(0), \quad \text{derivacijom:} \quad \dot{\mathbf{u}}(0)=\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\phi}_n\dot{q}_n(0). \tag{361}$$

Izraz za q_n vrijedi u bilo kojem trenutku t [$\mathbf{u}(t)$], pa i za $t=0$ [$\mathbf{u}(0)$]:

$$q_n(0)=\frac{\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\mathbf{u}(0)}{M_n}, \quad \text{derivacijom:} \quad \dot{q}_n(0)=\frac{\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}(0)}{M_n}. \tag{362}$$

Izrazi (360) i (361) su ekvivalentni pa je $A_n=q_n(0)$ i $B_n=\dot{q}_n(0)/\omega_n$. Ako to uvrstimo u opće rješenje, dobivamo:

$$\mathbf{u}(t)=\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\phi}_n\left[q_n(0)\cos\omega_n t+\frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n}\sin\omega_n t\right]. \tag{363}$$

Skraćeno, ako poznajemo ω_n i $\boldsymbol{\phi}_n$, možemo odrediti $q_n(0)$ i $\dot{q}_n(0)$ iz izraza (362) i pomak $\mathbf{u}(t)$ iz izraza (363). Rješenje zbog početne pobude $\mathbf{u}(0)$ i/ili $\dot{\mathbf{u}}(0)$ prikazano je na slici 186. Ako je početni pomak jednak vlastitom vektoru, ,$\mathbf{u}(0)=\boldsymbol{\phi}_n$ i $\dot{\mathbf{u}}(0)=\mathbf{0}$, različita od nule je samo modalna koordinata q_n (slika 187. i slika 188.). Skraćeni zapis rješenja (363) jest:

$$\mathbf{u}(t)=\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\phi}_n q_n(t), \tag{364}$$

zapravo poznati raspis vrijedi za svaki t.
Vremenska promjena modalne koordinate nekoga oblika titranja jest:

$$q_n(t)=q_n(0)\cos\omega_n t+\frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n}\sin\omega_n t, \tag{365}$$

što je (uz $u\to q$) poput slobodnoga titranja sustava s jednim stupnjem slobode.

9.9. Slobodno titranje s prigušenjem

Slobodno titranje ($\mathbf{p}=\mathbf{0}$) s prigušenjem ($\mathbf{c}\neq\mathbf{0}$) definiramo kao:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}+\mathbf{k}\mathbf{u}=\mathbf{0}, \quad \text{uz početne uvjete } \mathbf{u}=\mathbf{u}(0), \dot{\mathbf{u}}=\dot{\mathbf{u}}(0). \tag{366}$$

Ako uvrstimo raspis $\mathbf{u}=\boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}$ (problem vlastitih vrijednosti, $\boldsymbol{\Phi}$ ne ovisi o c), dobivamo:

$$\mathbf{m}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{c}\boldsymbol{\Phi}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{k}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}=\mathbf{0}\,/\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}, \quad \underbrace{\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\Phi}}_{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}}+\underbrace{\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}\boldsymbol{\Phi}}_{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}+\underbrace{\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\boldsymbol{\Phi}}_{\mathbf{K}}\mathbf{q}=\mathbf{0}, \tag{367}$$

odnosno:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\mathbf{q}=\mathbf{0}. \tag{368}$$

Matrice $\mathbf{M}$ i $\mathbf{K}$ su dijagonalne matrice (zbog uvjeta ortogonalnosti) određene izrazom (339), a kvadratna matrica $\mathbf{C}=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}\boldsymbol{\Phi}$ može i ne mora biti dijagonalna. Oblik matrice $\mathbf{C}$ ovisi o razdiobi prigušenja unutar sustava. Ako je $\mathbf{C}$ dijagonalna, sustav se rastavlja na N neovisnih jednadžbi po modalnim koordinatama i kažemo da se radi o sustavu s KLASIČNIM prigušenjem, jer vrijedi klasična modalna analiza. Važno je napomenuti da su oblici titranja isti kao za sustav bez prigušenja. Ako matrica $\mathbf{C}$ nije dijagonalna, radi se o sustavu s OPĆIM prigušenjem za kojeg ne vrijedi klasična modalna analiza i oblici titranja su različiti u odnosu na sustav bez prigušenja.

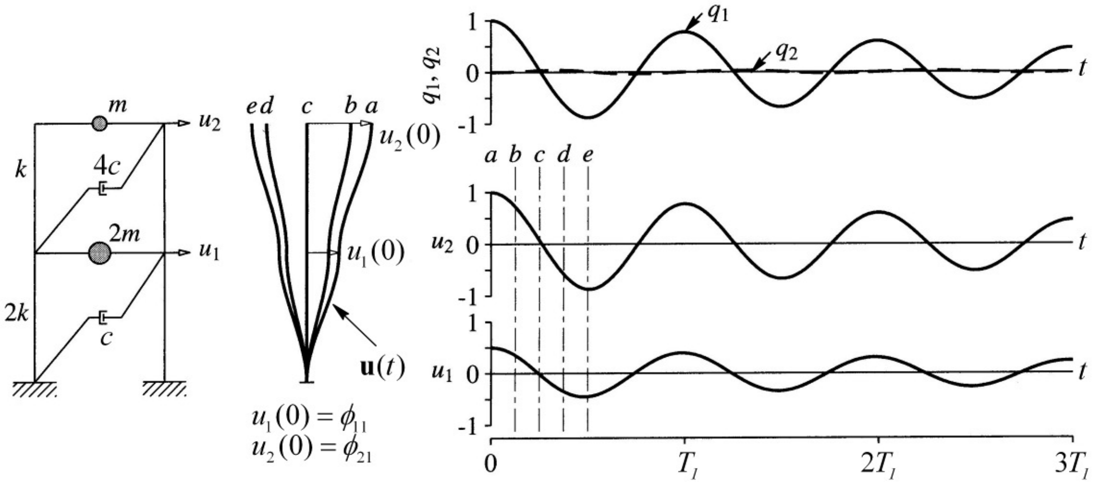
9.9.1. Sustav s općim oblikom prigušenja

Na slici 194. pokazan je primjer dvoetažnoga posmičnog okvira, kao za sustav bez prigušenja iz poglavlja 9.1, uz $c_1 = c$ i $c_2 = 4c$. Uočite veliku razliku u prigušenjima c_1 i c_2. Dakle, radi se o primjeru kod kojega ne vrijedi klasična modalna analiza (str. 139.).
Od ranije su nam poznate matrica masa, krutosti i prigušenja:

$$\mathbf{m} = m\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = k\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = c\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \tag{369}$$

Oblici titranja (za sustav bez prigušenja, slika 194. i slika 195.) su poznati od ranije:

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{370}$$



Slika 194.: Slobodno titranje sustava s općim oblikom prigušenja zbog početnog pomaka u obliku prvoga vlastitog oblika titranja: dvoetažni posmični okvir; progibna linija u trenucima *a*, *b*, *c*, *d* i *e*; modalne koordinate $q_n(t)$; pomaci $u_1(t)$ i $u_2(t)$

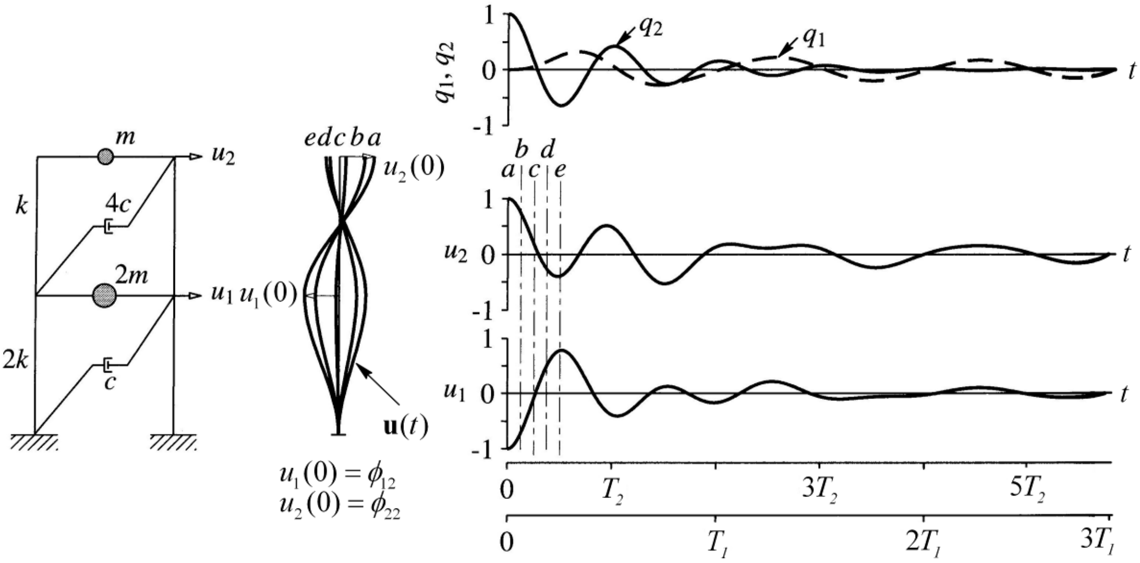
Nakon što odredimo $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{K}$ iz izraza (367), dobivamo,

$$m\begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 3,0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1,25 & 3,50 \\ 3,50 & 17,00 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 0,75 & 0 \\ 0 & 6,00 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{371}$$

Primijetite, $\mathbf{C}$ nije dijagonalna matrica pa su diferencijalne jednadžbe po $q_1(t)$ i $q_2(t)$ međusobno povezane. Možemo ih riješiti izravnom analizom sustava, znači isključivo nekim numeričkim postupkom. Ako je zadano: $c = \sqrt{km/200}$ i početni pomak $\mathbf{u}(0)$ u obliku vlastitih vektora:

$$\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \text{ zatim } \mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

rješenja $q_1(t)$, $q_2(t)$ i $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \sum_{r=1}^{2} \phi_r q_r(t)$, dobivena izravnom analizom, prikazana su na slikama 194. odnosno 195.



Slika 195.: Slobodno titranje sustava s općim oblikom prigušenja zbog početnogq pomaka u obliku drugoga vlastitog oblika titranja: dvoetažni posmični okvir; progibna linija u trenucima *a*, *b*, *c*, *d* i *e*; modalne koordinate $q_n(t)$; pomaci $u_1(t)$ i $u_2(t)$

Svojstva rješenja su sljedeća:

(a) $q_2 \neq 0$ u prvom (slika 194.) i $q_1 \neq 0$ u drugom primjeru (slika 195.),

(b) početni oblik pomaka nije sačuvan prilikom titranja,

(c) titranje nije jednostavno harmonijsko gibanje s prigušenjem (periodi titranja masa T_D nisu definirani).

9.9.2. Sustav s klasičnim oblikom prigušenja

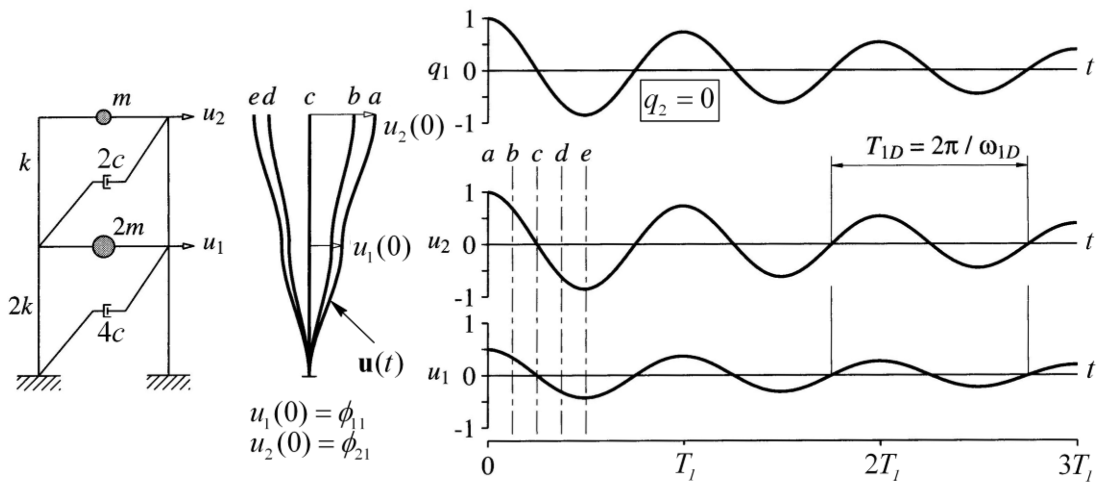
Sad ćemo pokazati primjer sličan prethodnomu, ali uz drugačije koeficijente prigušenja $c_1 = 4c$ i $c_2 = 2c$, $(c = \sqrt{km/200})$. Matrice $\mathbf{m}$ i $\mathbf{k}$ su kao u prethodnom primjeru, a matrica $\mathbf{c}$ jest:

$$\mathbf{c} = c \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}. \tag{372}$$

Sustav jednadžbi po modalnim koordinatama (uz $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{K}$):

$$m \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 3,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 12,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0,75 & 0 \\ 0 & 6,00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{373}$$

Primijetimo da je sada i matrica $\mathbf{C}$ dijagonalna pa su jednadžbe po $q_1(t)$ i $q_2(t)$ neovisne.



Slika 196.: Slobodno titranje sustava s klasičnim prigušenjem zbog početnoga pomaka u obliku prvoga vlastitog oblika titranja: dvoetažni posmični okvir; progibna linija u trenucima *a*, *b*, *c*, *d* i *e*; modalna koordinata $q_1(t)$; pomaci $u_1(t)$ i $u_2(t)$

Simbolički zapis neke jednadžbe sustava $\mathbf{M\ddot{q}} + \mathbf{C\dot{q}} + \mathbf{Kq} = \mathbf{0}$ jest:

$$M_n \ddot{q}_n + C_n \dot{q}_n + K_n q_n = 0 /: M_n, \quad \ddot{q}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0, \ n = 1, \ldots, N, \tag{374}$$

pri čemu su skalari K_n i M_n članovi na dijagonali dati izrazom (340), a

$$C_n = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{c} \boldsymbol{\phi}_n. \tag{375}$$

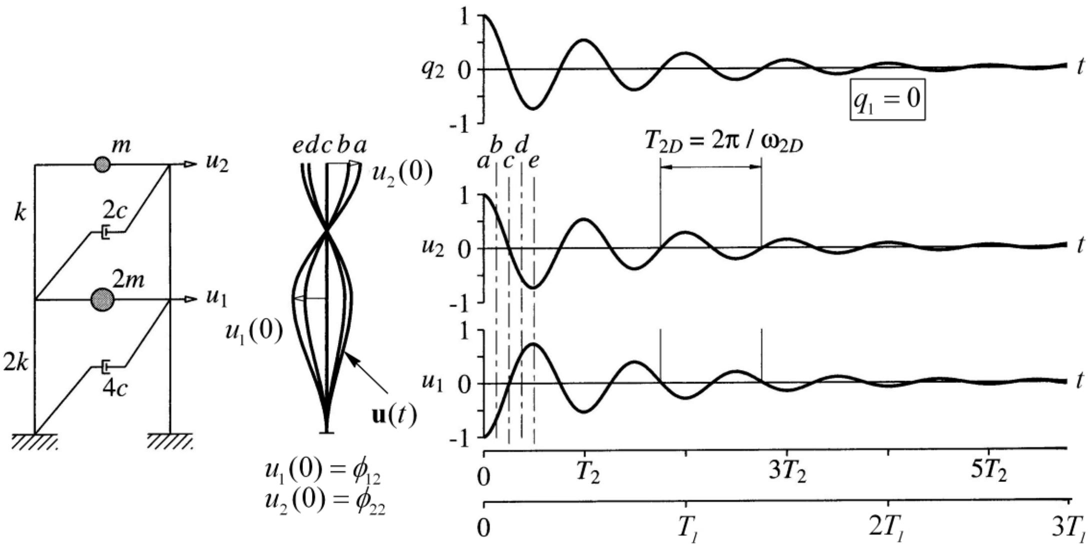
Izraz (374) ima oblik jednadžbe kao za jedan stupanj slobode s prigušenjem ($u \to q_n$). MODALNI koeficijent relativnog prigušenja, uz istu analogiju, jest:

$$\zeta_n = \frac{C_n}{2M_n \omega_n}, \qquad \left(\text{za jedan st. sl. (izraz (77)): } \zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \right). \tag{376}$$

Postupak rješavanja je isti kao za jedan stupanj slobode.

Za prvu jednadžbu su $M_1 = 1{,}5m$, $C_1 = 1{,}5c$, $K_1 = 0{,}75k$ pa je $\omega_1 = \sqrt{K_1 / M_1} = \sqrt{k / (2m)}$, $\zeta_1 = C_1 / (2M_1 \omega_1) = 0{,}05$. Slično odredimo M_2, C_2, K_2 i ζ_2 za drugu jednadžbu.

Pobuda $\mathbf{u}(0)$ neka je u obliku $\boldsymbol{\phi}_n$, kao u primjeru bez prigušenja pa su rješenja $q_1(t)$ i $q_2(t)$, $\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\phi}_r q_r$, prikazana na slikama 196. i 197.



Slika 197.: Slobodno titranje sustava s klasičnim prigušenjem zbog početnog pomaka u obliku drugog vlastitog oblika titranja: dvoetažni posmični okvir; progibna linija u trenucima *a*, *b*, *c*, *d* i *e*; modalna koordinata $q_2(t)$; pomaci $u_1(t)$ i $u_2(t)$

Svojstva rješenja su sljedeća:

1. nema doprinosa drugih oblika titranja: $q_r = 0$, $r \neq n$,
2. sačuvan je početni oblik pomaka: samo $q_n \neq 0$ (kao bez prigušenja), pa je $\boldsymbol{\phi}_n$ prirodni oblik titranja i za sustav s prigušenjem,
3. gibanje svake mase: kao za jedan stupanj slobode s prigušenjem; sličan sustavu bez prigušenja, ali amplitude opadaju zbog utjecaja prigušenja,
4. gibanje greda je jednostavno harmonijsko gibanje s prigušenjem s istim periodom gibanja svake mase: T_{1D} ili T_{2D} (vidjeti slike).

9.10. Rješenje problema slobodnog titranja s prigušenjem

Promatramo klasično prigušenje koje ne utječe na oblike titranja. Znači, odredimo vlastite frekvencije ω_n i oblike $\boldsymbol{\phi}_n$ za sustav bez prigušenja, a utjecaj prigušenja ζ uzimamo u obzir kao u slučaju jednoga stupnja slobode.

Podijelimo jednadžbu $M_n\ddot{q}_n + C_n\dot{q}_n + K_n q_n = 0$ s M_n:

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0, \quad (C_n/M_n = 2\zeta_n\omega_n,\ \omega_n = \sqrt{K_n/M_n}), \tag{377}$$

čime dobivamo jednadžbu kao u slučaju jednoga stupnja slobode s prigušenjem ($q_n \to u$). Prema analogiji s rješenjem za jedan stupanj slobode prema izrazu (90):

$$q_n(t) = e^{-\zeta_n\omega_n t}\left[q_n(0)\cos\omega_{nD}t + \frac{\dot{q}_n(0) + \zeta_n\omega_n q_n(0)}{\omega_{nD}}\sin\omega_{nD}t\right]. \tag{378}$$

Prema istoj analogiji vrijedi i $\omega_{nD} = \omega_n\sqrt{1-\zeta_n^2}$. Ukupno rješenje dobivamo superpozicijom odziva za pojedini oblik titranja,

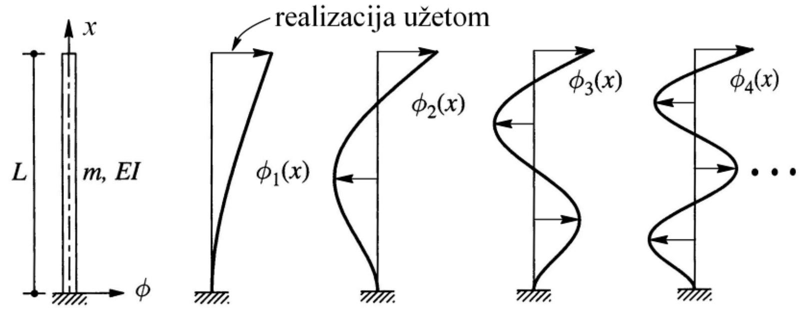
$$\mathbf{u}(t)=\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\phi}_n e^{-\zeta_n\omega_n t}\left[q_n(0)\cos\omega_{nD}t+\frac{\dot{q}_n(0)+\zeta_n\omega_n q_n(0)}{\omega_{nD}}\sin\omega_{nD}t\right]. \tag{379}$$

Znači, skraćeno, da bismo izračunali pomak (379), prvo riješimo problem vlastitih vrijednosti i odredimo ω_n i $\boldsymbol{\phi}_n$ sustava bez prigušenja. Koeficijent relativnog prigušenja ζ_n dobivamo iz pokusa [ne iz $C_n/(2M_n\omega_n)$] jer matrica prigušenja $\mathbf{c}$, pa i $C_n=\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{c}\boldsymbol{\phi}_n$ nisu poznati. Zatim odredimo ω_{nD}, te $q_n(0)$ i $\dot{q}_n(0)$ zbog početnoga pomaka $\mathbf{u}(0)$ i/ili brzine $\dot{\mathbf{u}}(0)$, (izraz (362)):

$$q_n(0)=\frac{\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\mathbf{u}(0)}{M_n},\quad \text{derivacijom:}\quad \dot{q}_n(0)=\frac{\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}(0)}{M_n}, \tag{380}$$

i na kraju odredimo pomak $\mathbf{u}(t)$ zbog $\mathbf{u}(0)$ i/ili $\dot{\mathbf{u}}(0)$ iz izraza (379). Prema obliku formule, isti je utjecaj ζ_n kao u slučaju jednog stupnja slobode. Podsjetimo se da koeficijent relativnog prigušenja $\zeta_n<20\%$ ima mali utjecaj na prirodne frekvencije i periode (slika 52.). Znamo, brzina opadanja amplitude u_0 pri titranju nekim vlastitim oblikom $\boldsymbol{\phi}_n$ je veća za veći koeficijent relativnog prigušenja ζ_n (slika 53.), a zakon opadanja je definiran logaritamskim dekrementom δ_n određenim prema (99).

Jedan od način određivanja koeficijenta relativnog prigušenja ζ_n jest slobodnim titranjem građevine (poglavlje 2.2.4). Građevinu pobudimo tako da je potegnemo užetom i pustimo da slobodno titra oko ravnotežnog položaja. Problem kod takvog postupka kod više stupnjeva slobode je pobuditi titranje u samo jednom obliku, znači kako praktično realizirati pomake u obliku vlastitog vektora.



Slika 198.: Vlastiti oblici titranja konzole

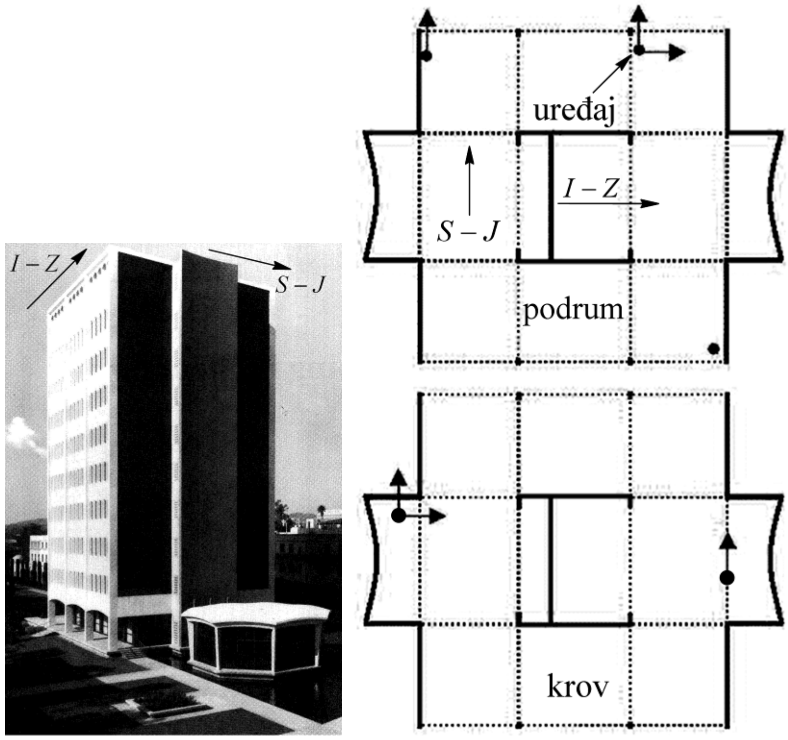
Zbog toga ovaj postupak je slabo primjenjiv, osim za određivanje prigušenja temeljnog oblika titranja kojeg je najlakše pobuditi. Pričekamo dok (zbog ζ_n) ne iščeznu (mali) utjecaji viših oblika i na kraju ostaje titranje samo temeljnim oblikom pa iz logaritamskog dekrementa δ_n odredimo vlastiti period T_1 i koeficijent relativnog prigušenja ζ_1.

10. Prigušenje u građevinskim konstrukcijama

Poznate su pojave koje uzrokuju prigušenje u konstrukcijama (poglavlje 1.4). Budući da se teško računa iz dimenzija konstrukcije i prigušenja u materijalu, utvrđuje se pokusom u obliku koeficijenta relativnog prigušenja.

10.1. Eksperimentalne vrijednosti prigušenja: praktični primjer

Kako bismo pokazali mehanizam i svojstvo prigušenja, analiziramo deveteroetažnu AB zgradu knjižnice Millikan – CALTECH (slika 199.).



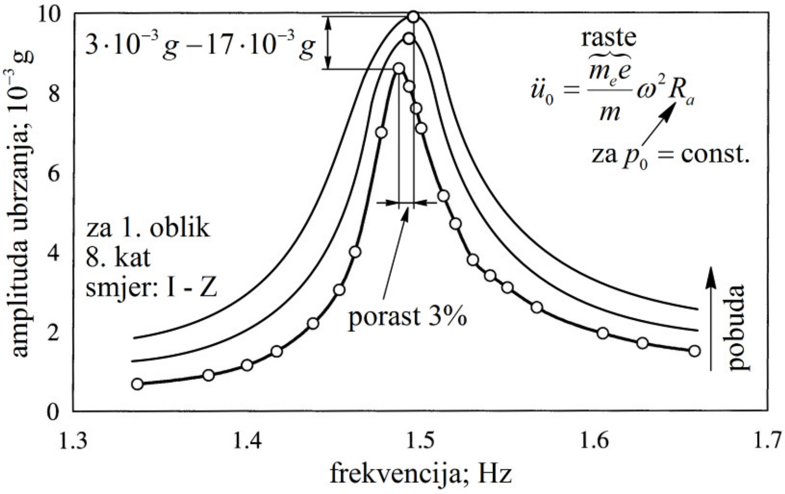
Slika 199.: Deveteroetažna AB zgrada knjižnice Millikan, Pasadena, SAD

Tlocrtnih je dimenzija 21 na 23 m, visine 44 m iznad razine tla i 48 m od razine temeljne ploče. Na posljednjoj etaži se nalazi krovna konstrukcija s postrojenjem za klimatizaciju. Bočnu stabilizaciju u smjeru sjever – jug čine AB zidovi na krajevima zgrade, debljine 30 cm. U smjeru istok – zapad postoje AB zidovi stubišne i liftne jezgre debljine također 30 cm. Krajnje zidove s otvorima čine predgotovljene AB zidne ploče (paneli) koje doprinose arhitektonskom učinku i ne smatraju se nosivima, no za male amplitude ipak doprinose krutosti u smjeru istok – zapad. Zgrada je izvedena tijekom 1966. – 1967. godine.

Budući da su joj dinamička svojstva utvrđena prisilnim harmonijskim titranjem zgrade (pri raznim razinama pobude), uzrokovanim vibracijskim pobuđivačem, ali i pri nekim potresima, predstavlja važan primjer za pojašnjenje prigušenja. Tako su određene frekvencijske funkcije odziva, periodi i relativna prigušenja. Period (frekvencija) se dobije iz frekvencijske funkcije odziva kao iznos apscise za vršnu vrijednost ubrzanja (slika 200.), a relativno prigušenje iz analize područja rezonancije. Oblici titranja su određeni mjerenjem horizontalnih pomaka po katnim pločama.

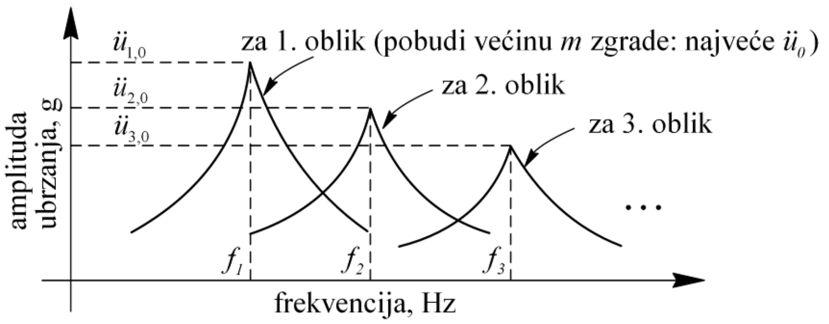
Temeljni period u smjeru I – Z iznosi $T_1 \approx 0{,}66\text{s}$ (sa slike 200., $f_1 = 1{,}49\,\text{Hz}$).

Temeljna frekvencija f_1 se povećala ($T_1 = 1/f_1$ pada) oko 3% kroz područje amplituda rezonancije krova koje su iznosile $3\cdot10^{-3}\text{g}$ – $17\cdot10^{-3}\text{g}$. Sjetimo se da porast amplituda rezonancije možemo dobiti povećanjem m_e i/ili e pobuđivača. Pripadajuće prigušenje ζ_1 iznosi od 0,7 do 1,5% (dolazi do povećanja s porastom amplitude).



Slika 200.: Frekvencijska funkcija odziva u području temeljnog perioda

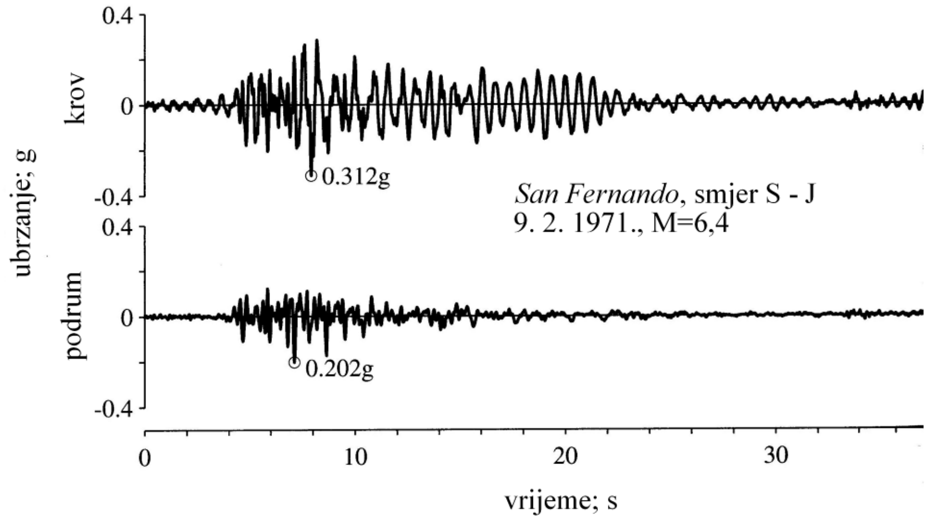
U smjeru S – J, temeljni period iznosi $T_1 \approx 0{,}51\,\text{s}$, i pada 4% kroz područje amplituda rezonancije krova koje iznosi $5\cdot10^{-3}\text{g}$ – $20\cdot10^{-3}\text{g}$. Pripadno prigušenje ζ_1 je od 1,2 do 1,8% (raste s amplitudom). Teorijske frekvencijske funkcije za tri perioda i oblika titranja, skicirane su na slici 201.



Slika 201.: Teorijske frekvencijske funkcije odziva

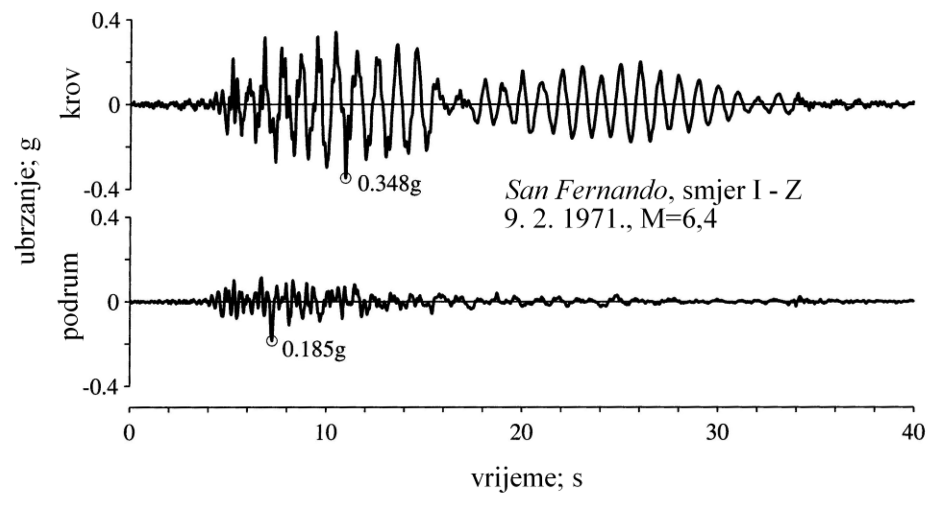
Ovdje ističemo još jednom: teško je pobuditi zgradu na ČISTO titranje višim oblikom. Na temeljnoj i krovnoj ploči su postavljeni akcelerometri kojima su zabilježena ubrzanja zgrade za nekoliko potresa, primjerice potres SAN FERNANDO, 1971., magnitude $M = 6{,}4$ i udaljenosti oko 31 km od lokacije i potres LYTLE CREEK, 1970., magnitude M=5,4 i udaljenosti oko 64 km od lokacije. Oštećenja nosivih elemenata nastaju pri magnitudama $M \geq 5$ (ili vršnim ubrzanjima tla $\ddot{u}_g(t) \geq 0,09\text{g}$)

Pri potresu San Fernando, za zapis S – J, vršno ubrzanje temeljne ploče iznosilo je $0,202\text{g}$, a povećano je na vršnu vrijednost od $0,312\text{g}$ na krovnoj ploči (slika 202.).



Slika 202.: Ubrzanje u smjeru sjever-jug zabilježeno na knjižnici Millikan pri potresu San Fernando, 1971.

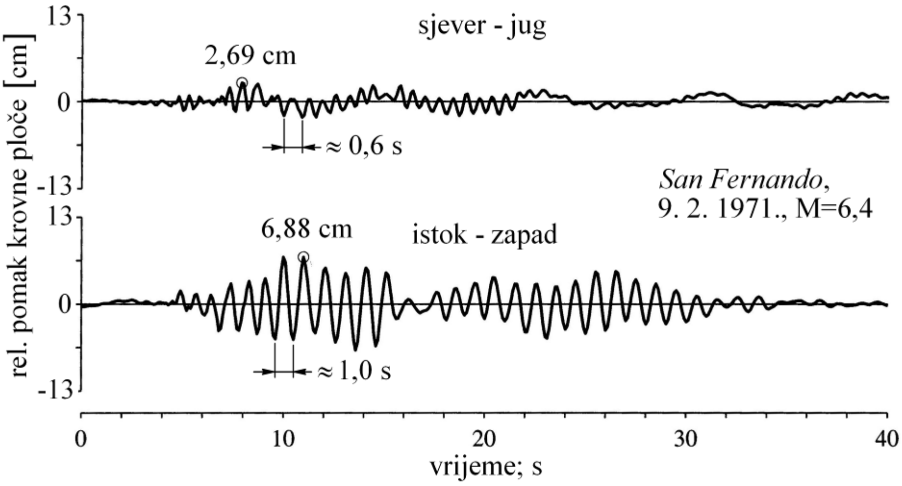
Za zapis I– Z, vršno ubrzanje temeljne ploče iznosilo je 0,185g, povećano je na vršnu vrijednost od $0,348\text{g}$ na krovnoj ploči (slika 203.).



Slika 203.:Ubrzanje u smjeru istok-zapad zabilježeno na knjižnici Millikan pri potresu San Fernando, 1971.

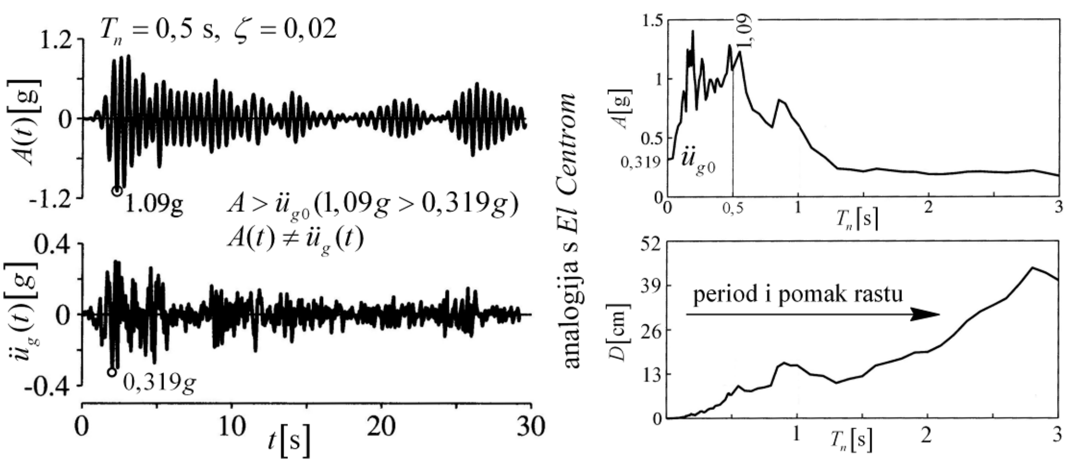
Ubrzanje krovne ploče se sastoji od ubrzanja tla i relativnog ubrzanja ploče u odnosu na tlo $[\ddot{u}^t(t) = \ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t)]$. Ukupni pomak krovne ploče dobivamo dvostrukom integracijom zapisa ukupnog ubrzanja.

Ubrzanje temeljne ploče jednako je ubrzanju tla $\ddot{u}_g(t)$, jer je relativno ubrzanje u razini temelja jednako nuli $[\ddot{u}(t)=0]$. Dvostrukom integracijom zapisa na temeljnoj ploči dobiven je pomak tla $u_g(t)$. Relativni pomak krovne ploče $u(t)$ određen je kao razlika pomaka krova i temelja (slika 204.).



Slika 204.: Relativni pomak krovne ploče: smjer sjever-jug i smjer istok-zapad

Primijetimo da je veće ubrzanje krovne nego temeljne ploče: $A > \ddot{u}_{g0}$ i različite su funkcije ubrzanja ploča u vremenu: $A(t) \neq \ddot{u}_g(t)$. Ta su svojstva vidljiva na slikama 205. lijevo i 205. desno gore. To se događa jer je konstrukcija fleksibilna (nije apsolutno kruta). U smjeru S – J, relativni pomak krova iznosi $2,69\text{cm}$, a period titranja je oko $0,6\text{s}$. U smjeru I – Z, a relativni pomak je $6,88\text{cm}$, period titranja je oko $1,0\text{s}$ (znači, mekša konstrukcija – dulji period, slika 205. desno dolje). Uočimo da je smjer S – J krući (zidovi) pa je manji pomak i period titranja, nego u smjeru I – Z.



Slika 205.: Usporedba A i $\ddot{u}_g(t)$: analogija s potresom El Centro

U tablici 9. su približni rezultati mjerenja knjižnice Millikan pri različitim pobudama.

Tablica 9.: Periodi i koeficijenti relativnog prigušenja knjižnice Millikan

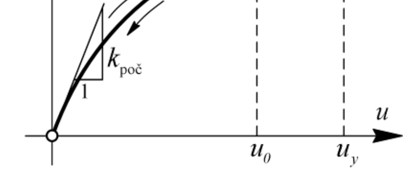
<table>
<tr><td rowspan="2">Izvor pobude</td><td rowspan="2">Ubrzanje krova [g]</td><td colspan="2">Temeljni oblik titranja</td><td colspan="2">2. oblik titranja</td></tr>
<tr><td>T_1[s]</td><td>ζ_1[%]</td><td>T_2[s]</td><td>ζ_2[%]</td></tr>
<tr><td colspan="6">Smjer sjever – jug</td></tr>
<tr><td>Pobuđivač</td><td>$5\cdot10^{-3}$ do $20\cdot10^{-3}$</td><td>0,51 – 0,53</td><td>1,2 – 1,8</td><td colspan="2">nije mjereno</td></tr>
<tr><td>Potres Lytle Creek</td><td>0,05</td><td>0,52</td><td>2,9</td><td>0,12</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td>Potres San Fernando</td><td>0,312</td><td>0,62</td><td>6,4</td><td>0,13</td><td>4,7</td></tr>
<tr><td colspan="6">Smjer istok – zapad</td></tr>
<tr><td>Pobuđivač</td><td>$3\cdot10^{-3}$ do $17\cdot10^{-3}$</td><td>0,66 – 0,68</td><td>0,7 – 1,5</td><td colspan="2">nije pouzdano</td></tr>
<tr><td>Potres Lytle Creek</td><td>0,035</td><td>0,71</td><td>2,2</td><td>0,18</td><td>3,6</td></tr>
<tr><td>Potres San Fernando</td><td>0,348</td><td>0,98</td><td>7,0</td><td>0,20</td><td>5,9</td></tr>
</table>

Zapisi ubrzanja također su zabilježeni pri potresu LYTLE CREEK. Vršno ubrzanje tla iznosilo je svega $\ddot{u}_{g0} = 0,02\text{g}$, a na krovu je ubrzanje bilo $\ddot{u}_0 = 0,05\text{g}$. Potres je bio tek nešto jači od najveće pobude uređajem, na krovu od $\ddot{u}_0 = 0,02\text{g}$.

Temeljni periodi od $0,52\text{s}$ i $0,71\text{s}$ su bili malo veći od onih utvrđenih pokusom, dok su koeficijenti prigušenja 2,9% i 2,2% bili veći od utvrđenih pokusom.

Primijetimo da je potres SAN FERNANDO bio jak, s vršnim ubrzanjem tla od $\ddot{u}_{g0} = 0,202\text{g}$ i ubrzanja krova od $\ddot{u}_0 = 0,348\text{g}$, pa je postojalo značajno povećanje perioda i prigušenja u odnosu na pokus. Primjerice, u smjeru S – J period titranja T_1 se povećao sa $0,51\text{s}$ na $0,62\text{s}$ i prigušenja na $6,4\%$, a u smjeru I – Z je T_1 porastao sa $0,66\text{s}$ na $0,98\text{s}$ i prigušenja na 7%.

Uočimo da se porast perioda događa pri većim amplitudama gibanja jer se smanjuje krutost k zgrade ($T = 2\pi\sqrt{m/k}$). Primarni uzrok smanjenja krutosti knjižnice je bilo njeno nelinearno elastično ponašanje (ne pukotine!), što dokazuje i nosiva konstrukcija bez vidljivih oštećenja. Jedino što je stradalo pri potresu San Fernando su bile police za knjige i otpalo je nešto žbuke. Pri većim amplitudama, izraženiji su uzroci prigušenja i dolazi do njegova povećanja. Budući da su izmjereni periodi nakon potresa bili kraći nego pri potresu, možemo zaključiti da se krutost vratila jer su plastične deformacije male. Potpuni ili djelomični povratak krutosti ovisi o iznosu amplituda. Zamijetimo da porast T nije mali (nije u skladu s porastom ζ) i ne vrijedi linearni model i odnos: $T_D = T_n / \sqrt{1-\zeta^2}$ zbog NEVISKOZNOG prigušenja i NELINEARNOG ELASTIČNOG ponašanja materijala (Istaknuli smo da zgrada nije „ušla“ u plastično područje ponašanja materijala).



Slika 206.: Nelinearna elastična veza sila - pomak

Na slici 206. prikazana je nelinearna elastična veza sila-pomak. Uočimo da krutost nije konstanta, već opada s porastom amplituda, ali jest idealno povratna (povratak po istoj krivulji). Znači, nema petlje histereze i radi se o materijalu BEZ MEMORIJE. Ako je koeficijent relativnog prigušenja ζ određen za gibanje blizu granice tečenja (primjerice pri potresu San Fernando), ne sadrži učinke plastičnog popuštanja konstrukcije i kao takav predstavlja vrlo vrijedan podatak.

10.2. Preporučene vrijednosti koeficijenta relativnog prigušenja

Za postojeće zgrade je skupa i spora primjena opisanog postupka, a za buduće zgrade postupak nije moguće primijeniti. Jedino što preostaje je procjena ζ na temelju pokusa na sličnim zgradama. Iako postoji mnogo prikupljenih podataka, nisu svi prikladni za seizmički proračun. Naime, pri slabim pobudama (pobuđivač ili slabi potres) dobivaju se premali iznosi prigušenja, a pri vrlo snažnim pobudama (jači potres) koeficijent relativnog prigušenja ζ sadrži i trošenje energije zbog tečenja. Znači, najkorisniji podatci se dobivaju iz jakih trešnji pri granici tečenja, a utjecaj tečenja uzima se posebno, radnim dijagramom $f_S - u$.
Ipak, nemamo dovoljno ζ za različite konstrukcije i materijale, jer je malo postavljenih uređaja i prikladnih potresa, pa rabimo postojeće iznose i procjene stručnjaka (tablica 10). Od nedavno se koriste koeficijenti prigušenja od 3% za nearmirano ziđe i 7% za armirano ziđe. Mnogi propisi ne razlikuju prigušenja za različite materijale, a recimo za spektre se uobičajeno upotrebljava koeficijent relativnog prigušenja od 5%.

Tablica 10.: Preporučeni iznosi koeficijenta relativnog prigušenja

Razina naprezanja	Vrsta i stanje konstrukcije	$\zeta[\%]$
radno naprezanje: ne više od polovine granice tečenja (za posebne konstrukcije)	vareni čelik, prednapeti beton, dobro armirani beton sa sitnim pukotinama	2 – 3
	armirani beton sa značajnim pukotinama	3 – 5
	vijčani i/ili zakovani spojevi u čeliku, vijčani ili čavlani spojevi u drvetu	5 – 7
malo ispod ili na granici tečenja (za uobičajene konstrukcije)	vareni čelik, prednapeti beton (bez potpunog gubitka prednapona)	5 – 7
	prednapeti beton s potpunim gubitkom prednapona, armirani beton	7 – 10
	vijčani i/ili zakovani spojevi u čeliku, vijčani spojevi u drvetu	10 – 15
	čavlani spojevi u drvetu	15 – 20

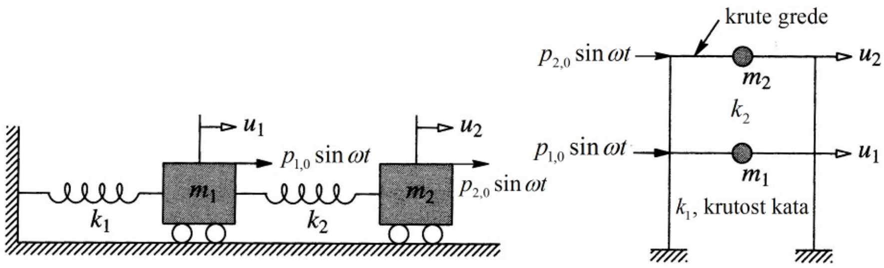
11. Dinamička analiza i odziv linearnog sustava: pobuda silama

11.1. Sustav bez prigušenja

Treba riješiti sustav bez prigušenja uz zadanu pobudu:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t) \tag{381}$$

11.1.1. Harmonijska pobuda



Slika 207.: Sustav s dva stupnja slobode: općenit sustav i dvokatni okvir

Na slici 207. lijevo je prikazan klasični sustav s dva stupnja slobode bez prigušenja, koji se sastoji od dvije mase povezane linearnim oprugama, pri harmonijskoj pobudi. Na slici 207. desno je prikazan dvokatni okvir idealiziran modelom s dva stupnja slobode bez prigušenja pri harmonijskoj pobudi. Za prikazane sustave s dva stupnja slobode izraz (381) se sastoji od dvije zavisne jednadžbe s po dvije nepoznanice. Harmonijska pobuda je oblika $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 \sin\omega t$ ili općenito:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 \sin(\omega t - \phi), \tag{382}$$

pri čemu su amplitude pobude $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} p_{1,0} & \cdots & p_{N,0} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Logično je pretpostaviti rješenje istoga oblika:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 \sin\omega t, \tag{383}$$

s amplitudama titranja (pomaka) $\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} u_{1,0} & \cdots & u_{N,0} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Ubrzanje sustava iznosi $\ddot{\mathbf{u}}(t) = -\omega^2 \mathbf{u}_0 \sin\omega t$.

Kad uvrstimo $\mathbf{u}$ i $\ddot{\mathbf{u}}$ u polaznu jednadžbu (svi članovi sadrže $\sin\omega t$), dobivamo:

$$(\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m})\mathbf{u}_0 = \mathbf{p}_0 \quad \text{ili} \quad \overline{\mathbf{k}}\mathbf{u}_0 = \mathbf{p}_0, \quad (\text{uz: } \overline{\mathbf{k}} = \underbrace{\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}}_{\text{poznato}}). \tag{384}$$

Dolazimo do statičkoga problema prema metodi pomaka gdje trebamo odrediti $\mathbf{u}_0 = \overline{\mathbf{k}}^{(-1)}\mathbf{p}_0$ i zatim jednim od dva pristupa (poglavlje 1.9.2.) odredimo unutarnje sile, primjerice, primjenom ekvivalentne bočne sile $\mathbf{f}_S = \mathbf{k}\mathbf{u}_0$, (pazite, ne $\overline{\mathbf{k}}$). Rješenja su amplitude odziva $\mathbf{M}_0$, $\mathbf{T}_0$, $\boldsymbol{\sigma}_0, \ldots$, a zakonitost vremenske promjene je isto $\sin\omega t$, primjerice $\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}_0 \sin\omega t$. Uočimo da nije potreban problem vlastitih vrijednosti ω_n i $\boldsymbol{\phi}_n$, a rješenje je prisilni (ustaljeni) dio titranja (analogija s jednim stupnjem slobode, izraz (130)). Prolazni dio najčešće nije važan jer brzo iščezava s prigušenjem. Podsjetite se da na početku odziva ukupno rješenje može biti mjerodavno (str. 54.). Modalna analiza predstavlja opći pristup određivanju ukupnoga rješenja koji ćemo objasniti u odjeljcima koji slijede.

11.2. Modalna analiza za sustav bez prigušenja

Modalnu analizu upotrebljavamo kao opći pristup linearnom modelu za proizvoljnu pobudu $\mathbf{p}(t)$. Rabimo raspis vektora pomaka po vlastitim vektorima:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{r=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_r q_r(t) = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}(t). \qquad (385)$$

Ako izraz (385) uvrstimo u jednadžbu gibanja (381) $[\text{uz}: \ddot{\mathbf{u}}(t) = \sum_{r=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_r \ddot{q}_r(t)]$, dobivamo:

$$\sum_{r=1}^{N} \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N} \mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_r q_r(t) = \mathbf{p}(t) \;/\cdot \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}, \qquad (386)$$

$$\sum_{r=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_r q_r(t) = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{p}(t). \qquad (387)$$

Zbog uvjeta ortogonalnosti ostaju samo članovi za $r = n$:

$$\left(\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n\right)\ddot{q}_n(t) + \left(\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n\right) q_n(t) = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{p}(t). \qquad (388)$$

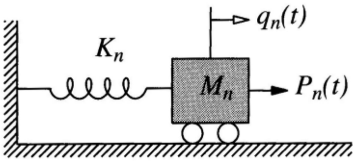
Od ranije znamo da su:

$$M_n = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n, \; K_n = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n \quad \text{i dodatno} \;\; P_n(t) = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{p}(t), \qquad (389)$$

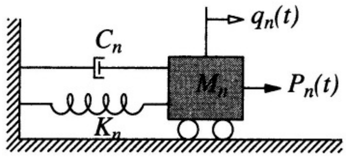
pa izraz (388) postaje:

$$M_n \ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n(t), \qquad n = 1, \ldots, N, \qquad (390)$$

sustav jednadžbi gibanja s jednim stupnjem slobode po $q_n(t)$, uz skalare M_n, K_n i $P_n(t)$ koji znače masu, krutost i opterećenje sustava i nazivaju se POOPĆENA masa, krutost i opterećenje za n – ti oblik titranja. (slika 208.)



Slika 208.: Poopćeni neprigušeni sustav za *n*-ti oblik titranja



Slika 209.: Poopćeni prigušeni sustav za *n*-ti oblik titranja

Prostorna promjena pomaka je opisana pomoću vlastitih oblika titranja $\boldsymbol{\phi}_n$, a vremenska promjena pomoću pomaka $q_n(t)$ jednoga stupnja slobode. Poopćene vrijednosti su konstante za odabrani oblik titranja $\boldsymbol{\phi}_n$.

Ako poznajemo $\boldsymbol{\phi}_n$, možemo odrediti M_n, K_n, $P_n(t)$, pa i jednadžbu gibanja, odnosno $q_n(t)$. Primijetimo da prilikom razmatranja jedne jednadžbe nije potrebno poznavati ostale oblike titranja. Ako jednadžbu (390) podijelimo s M_n $[\text{uz}: \omega_n^2 = K_n / M_n]$, dobivamo:

$$\ddot{q}_n(t)+\omega_n^2 q_n(t)=\frac{P_n(t)}{M_n}, \qquad n=1,\ldots,N. \tag{391}$$

Važno je uočiti da se radi o jednoj jednadžbi s jednom nepoznanicom $q_n(t)$, a postoji N jednadžbi, po jedna za svaki oblik titranja $\boldsymbol{\phi}_n$. Bit raspisa pomaka $\mathbf{u}(t)$ [izraz (385)] je transformacija N međusobno ovisnih jednadžbi po pomacima $u_j(t)$, ($j=1,\ldots,N$) u N neovisnih jednadžbi po modalnim koordinatama $q_j(t)$, ($j=1,\ldots,N$). Matrični zapis svih N jednadžbi jest:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\mathbf{q}=\mathbf{P}(t), \tag{392}$$

pri čemu su dijagonalne matrice $\mathbf{M}$ i $\mathbf{K}$ poznate:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & M_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{K}=\begin{bmatrix} K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & K_n \end{bmatrix} \tag{393}$$

i

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_N \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{P}(t)=\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_N \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{394}$$

11.3. Modalna analiza za sustav s prigušenjem

Treba riješiti sustav s prigušenjem uz zadanu pobudu:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}+\mathbf{k}\mathbf{u}=\mathbf{p}(t). \tag{395}$$

Ako uvrstimo raspis $\mathbf{u}(t)=\sum_{r=1}^{N}\boldsymbol{\phi}_r q_r(t)$ u jednadžbu gibanja (395), dobivamo:

$$\sum_{r=1}^{N}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_r\ddot{q}_r(t)+\sum_{r=1}^{N}\mathbf{c}\boldsymbol{\phi}_r\dot{q}_r(t)\sum_{r=1}^{N}\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_r q_r(t)=\mathbf{p}(t)\ /\cdot\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}, \tag{396}$$

$$\sum_{r=1}^{N}\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_r\ddot{q}_r(t)+\sum_{r=1}^{N}\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{c}\boldsymbol{\phi}_r\dot{q}_r(t)+\sum_{r=1}^{N}\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_r q_r(t)=\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(t). \tag{397}$$

Uz ranije uvedene izraze za M_n, K_n i $P_n(t)$ dobivamo:

$$M_n\ddot{q}_r(t)+\sum_{r=1}^{N}C_{nr}\dot{q}_r(t)+K_n q_n(t)=P_n(t), \qquad n=1,\ldots,N. \tag{398}$$

Općenito za prigušenje vrijedi:

$$C_{nr}=\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{c}\boldsymbol{\phi}_r\neq 0, \text{ za } n\neq r. \tag{399}$$

Matrični zapis sustava [$\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{q}$ i $\mathbf{P}(t)$ poznati] jest:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\mathbf{q}=\mathbf{P}(t), \tag{400}$$

a matrica $\mathbf{C}$ nije dijagonalna ($C_{nr}\neq 0$), pa svaka jednadžba sadrži više brzina $\dot{q}_r(t)$ (srednji član u izrazu (398) jest suma). Znači, jednadžbe nisu neovisne, već su međusobno povezane brzinama. Za sustav s klasičnim prigušenjem, $C_{nr} = 0$ za $n \neq r$, pa je matrica $\mathbf{C}$ dijagonalna ($C_n = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{c} \boldsymbol{\phi}_n$). Od sume preostaje samo jedan član, C_n i nastaje niz neovisnih jednadžbi,

$$M_n \ddot{q}_n(t) + C_n \dot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n(t), \qquad n = 1, \dots, N. \tag{401}$$

Dijeljenjem izraza (401) s M_n uz $C_n / M_n = 2\zeta_n \omega_n$ i $\omega_n = \sqrt{K_n / M_n}$, dobivamo:

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{P_n(t)}{M_n}, \qquad n = 1, \dots, N, \tag{402}$$

što predstavlja gibanje sustava s jednim stupnjem slobode $q_n(t)$ (slika 209.). Koeficijent prigušenja za titranje u n–tom obliku ζ_n se ne određuje iz $\zeta_n = C_n / (2 M_n \omega_n)$ nego pokusom. Prigušenje obuhvaća složene pojave i ne možemo IZRAČUNATI matricu $\mathbf{c}$ (pa ni C_n). Skalari M_n, C_n, K_n i $P_n(t)$ ovise o jednom obliku titranja $\boldsymbol{\phi}_n$. Oblik titranja $\boldsymbol{\phi}_n$ određuje OBLIK gibanja (pomaka) zgrade i svakoj jednadžbi pripada jedan takav oblik, dok je vremenska promjena gibanja (pomaka) određena rješenjem $q_n(t)$ i ISTA je za sve komponente ϕ_{jn} jednoga oblika titranja $\boldsymbol{\phi}_n$.

11.4. Proračun pomaka

Za zadanu pobudu $\mathbf{p}(t)$ treba riješiti MODALNU JEDNADŽBU po $q_n(t)$ koja ima oblik kao za jedan stupanj slobode. Postupci rješavanja mogu biti analitički ili numerički. Pomak (odziv) zbog gibanja u obliku $\boldsymbol{\phi}_n$ jest:

$$\mathbf{u}_n(t) = \boldsymbol{\phi}_n q_n(t), \tag{403}$$

a ukupni pomak dobivamo superpozicijom MODALNIH POMAKA $\mathbf{u}_n(t)$,

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{u}_n(t) = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_n q_n(t). \tag{404}$$

Ovaj postupak je poznat kao KLASIČNA MODALNA ANALIZA ili METODA KLASIČNE MODALNE SUPERPOZICIJE. Naziv proizlazi iz uporabe neovisnih pomaka združenih u ukupni odziv. Puni naziv bi bio METODA KLASIČNE SUPERPOZICIJE MODALNIH POMAKA, no skraćeni (i uvriježeni) naziv jest MODALNA ANALIZA. Napomenimo opet da vrijedi za klasično prigušenje i linearne sustave jer rabimo neovisne jednadžbe i princip superpozicije (zbroj).

11.5. Proračun unutarnjih sila

Nakon što smo dinamičkim proračunom odredili pomak $\mathbf{u}_n(t)$, treba odrediti vremensku promjenu unutarnje sile $r(t) \equiv M(t), T(t), \dots$ bilo gdje na konstrukciji (najčešće mjesta ekstrema). Proračun $r(t)$ se vrši iz pomaka čvorova ili ekvivalentnih statičkih sila. Uobičajeno je odrediti doprinos svakoga oblika titranja ukupnom odzivu $r(t)$. Prvi način je da primjenom krutosti elementa iz $\mathbf{u}_n(t)$ odredimo silu $r_n(t)$, a ukupne sile dobijemo kao zbroj sila $r_n(t)$ od doprinosa modalnih pomaka,

$$r(t)=\sum_{n=1}^{N} r_n(t). \tag{405}$$

Drugi način je primijeniti statičku analizu za ekvivalentno opterećenje,[38]

$$\mathbf{f}_n(t)=\mathbf{k}\mathbf{u}_n(t)=\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n q_n(t)=\omega_n^2\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n q_n(t), \quad (\text{uz}: \mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n=\omega_n^2\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n). \tag{406}$$

Modalnim pomacima $\mathbf{u}_n(t)$ pripada opterećenje $\mathbf{f}_n(t)$. Sjetite se neovisnih podmodela! (prvi podmodel iz poglavlja 8.1.4.). Statičkim proračunom za $\mathbf{f}_n(t)$ dobivamo unutarnju silu $r_n(t)$, a ukupne sile iz iste formule (405) kao zbroj $r_n(t)$ od svakoga opterećenja. Opisani postupak je sličan i za potresno opterećenje, a jedinu razliku čini desna strana jer nemamo $\mathbf{p}(t)$, nego $\mathbf{p}_{\text{eff}}(t)$. Prema tome, polazna jednadžba jest:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}+\mathbf{k}\mathbf{u}=\mathbf{p}_{\text{eff}}(t), \tag{407}$$

a efektivna sila potresa:

$$\mathbf{p}_{\text{eff}}(t)=-\mathbf{m}\boldsymbol{\ell}\ddot{u}_g(t). \tag{408}$$

11.6. Sažetak modalne analize

Postupak proračuna sustava opterećenog vanjskom pobudom $\mathbf{p}(t)$:

1. utvrdimo svojstva dinamičkog sustava:
   a) odredimo matricu masa $\mathbf{m}$ i krutosti $\mathbf{k}$
   b) procijenimo koeficijent relativnog prigušenja ζ
2. izračunamo prirodne frekvencije ω_n i oblike titranja $\boldsymbol{\phi}_n$ (treba riješiti problem vlastitih vrijednosti $\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n=\omega_n^2\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n$)
3. za svaki oblik titranja treba:
   a) postaviti jednadžbu gibanja i izračunati $q_n(t)$
   [riješiti $\ddot{q}_n(t)+2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n(t)+\omega_n^2 q_n(t)=P_n(t)/M_n$]
   b) izračunati modalne pomake $\mathbf{u}_n(t)=\boldsymbol{\phi}_n q_n(t)$
   c) jednim od dva načina odrediti $r_n(t)$ zbog $\mathbf{u}_n(t)$
4. zbrojimo doprinos svih oblika titranja u ukupne pomake i sile [$\mathbf{u}(t)=\sum\mathbf{u}_n(t)$ i $r(t)=\sum r_n(t)$]

[38] ne pišemo $\mathbf{f}_{Sn}$, izostavljamo indeks S

12. Odziv linearnog sustava na pobudu potresom: detalji

12.1. Modalna analiza

12.1.1. Jednadžbe gibanja

Promatramo translacijsku pobudu zapisom ubrzanja tla $\ddot{u}_g(t)$. Pretpostavljamo da je tlo apsolutno kruto pa je istodobna pobuda svih ležajeva istim zapisom. Treba riješiti sustav jednadžbi:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}_{\text{eff}}(t), \tag{409}$$

pri čemu je efektivna sila potresa:

$$\mathbf{p}_{\text{eff}} = -\mathbf{m}\boldsymbol{\ell}\ddot{u}_g(t), \tag{410}$$

a matrice $\mathbf{m}$, $\mathbf{k}$ i utjecajni vektor $\boldsymbol{\ell}$ određujemo kao i ranije. Matrica prigušenja $\mathbf{c}$ nije potrebna, već je dovoljan modalni koeficijent relativnog prigušenja ζ (pokusi).

12.1.2. Raspis pomaka i opterećenja po vlastitim vektorima

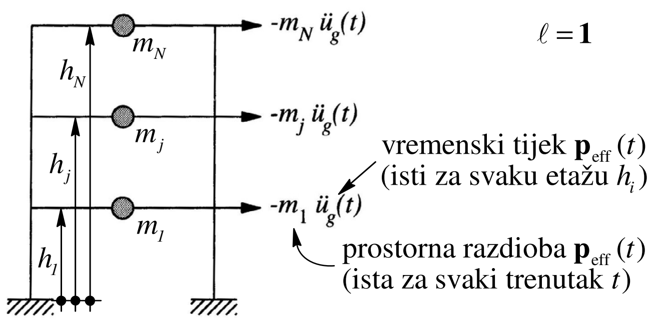
Vrijedi modalna analiza pa rabimo superpoziciju modalnih doprinosa:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{u}_n(t) = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_n q_n(t) \tag{411}$$

i uvodimo rastav:

$$\mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -\mathbf{s}\ddot{u}_g(t), \text{ (očito je } \mathbf{s} = \mathbf{m}\boldsymbol{\ell}) . \tag{412}$$

pri čemu je $\mathbf{s}$ vektor prostorne razdiobe opterećenja (ne ovisi o vremenu). Znači, vektor $\mathbf{s}$ označava prostornu razdiobu efektivne sile potresa (radi se o prostornoj razdiobi mase koja je konstantna u vremenu). Zapis ubrzanja tla $\ddot{u}_g(t)$ je skalarna funkcija (ne ovisi o prostornim koordinatama) i označava promjenu efektivne sile potresa u vremenu. Znači, radi se o vremenskom tijeku potresa (slika 210.).



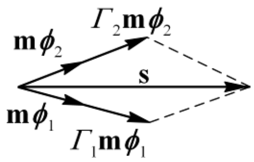
Slika 210.: Efektivna sila potresa

(pogledati sliku na stranici 134.)

Uvodimo raspis prostorne razdiobe opterećenja po silama inercije (slika 211.):

$$\mathbf{s} = \mathbf{m}\boldsymbol{\ell} = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{s}_n = \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n, \tag{413}$$

pri čemu vektor $\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n$ daje prostornu razdiobu sila inercije, a indeks n označava titranje n – tim oblikom.



Slika 211.: Raspis pomaka i sila po vlastitim vektorima

Skalar Γ_n označava dio toga opterećenja u smjeru n – te sile inercije,

$$\mathbf{m}\boldsymbol{\ell} = \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n / \cdot \boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{T}}, \quad \underbrace{\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{m}\boldsymbol{\ell}}_{L_n} = \Gamma_n \underbrace{\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n}_{M_n}, \quad \Gamma_n = \frac{L_n}{M_n}. \tag{414}$$

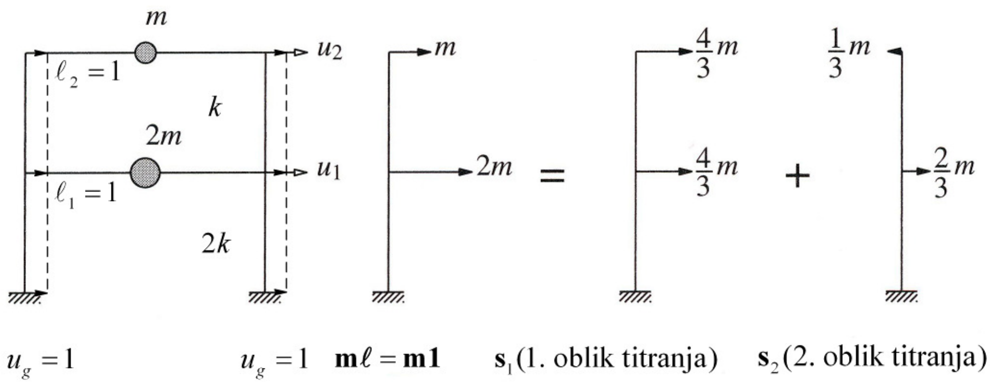
Primijetite da zbog ortogonalnosti preostaje samo član za $r = n$. Znači članovi su:

$$L_n = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{m}\boldsymbol{\ell}, \quad M_n = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n, \quad \mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n \tag{415}$$

i ovise o obliku vlastitoga vektora. Član $\mathbf{s}_n$ pokazuje doprinos n–tog oblika titranja ukupnom opterećenju $\mathbf{m}\boldsymbol{\ell}$. Ne ovisi o normiranju oblika titranja (i brojnik i nazivnik sadrže $\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}$ i $\boldsymbol{\phi}_n$). Primjerice, normiranjem vlastitog vektora $\boldsymbol{\phi}_n$ i $a\boldsymbol{\phi}_n$ dobit ćemo isto jer ćemo skalar a^2 pokratiti (raspišite $\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n$). Za razliku od $\mathbf{s}_n$ koeficijenti L_n i M_n ovise o načinu normiranja.

Kao primjer upotrijebimo opet dvoetažni okvir (slika 212.) kojeg poznajemo matricu masa i oblike titranja:

$$\text{raspis } \mathbf{m}\boldsymbol{\ell} = m\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dvoetažnoga okvira.}$$



Slika 212.: Prostorni raspis sila potresa dvoetažnoga okvira po oblicima titranja

Oblici titranja su: $\boldsymbol{\phi}_1 = [1/2 \quad 1]^{\mathrm{T}}$ i $\boldsymbol{\phi}_2 = [-1 \quad 1]^{\mathrm{T}}$, pa dobivamo Γ_1 i Γ_2, te raspis potresnih sila po oblicima titranja:

$$\Gamma_1 = \frac{\boldsymbol{\phi}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\ell}}{\boldsymbol{\phi}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_1} = \frac{\begin{bmatrix}1/2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1/2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2\\ 1\end{bmatrix}} = \frac{4}{3}, \quad \Gamma_2 = \frac{\boldsymbol{\phi}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\ell}}{\boldsymbol{\phi}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_1} = -\frac{1}{3},$$

$$\mathbf{s}_1 = \Gamma_1\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_1 = \frac{4}{3}m\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2\\ 1\end{bmatrix} = \frac{4}{3}m\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \Gamma_2\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_2 = -\frac{1}{3}m\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}.$$

12.1.3. Modalne jednadžbe

Vrijedi jednadžba iz izraza (390), ali $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_{\mathrm{eff}}(t)$ jer djeluje potres i:

$$P_n(t) = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(t) = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_{\mathrm{eff}}(t) = -\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\underbrace{\mathbf{m}\boldsymbol{\ell}\ddot{u}_g(t)}_{\mathbf{p}_{\mathrm{eff}}(t)} = -L_n\ddot{u}_g(t). \tag{416}$$

Desna strana modalne jednadžbe (402) jest:

$$P_n(t)/M_n = -L_n/M_n\,\ddot{u}_g(t). \tag{417}$$

Modalna jednadžba (uz $L_n / M_n = \Gamma_n$) glasi:

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\Gamma_n\ddot{u}_g(t), \qquad n = 1,\ldots,N. \tag{418}$$

Ako je usporedimo s jednadžbom gibanja za jedan stupanj slobode [izraz (218)], dobivamo:

$$\ddot{D}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{D}_n + \omega_n^2 D_n = -\ddot{u}_g(t), \tag{419}$$

pri čemu smo zamijenili u sa D_n da bismo naglasili titranje n – tim oblikom. Pazite, nismo stavili $u = u_n$ jer modalni pomak nije pomak u_n nekoga čvora [izraz (423)]. Ako pomnožimo jednadžbu s Γ_n i usporedimo je s (418):

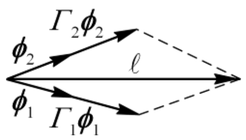
$$\underbrace{\Gamma_n\ddot{D}_n}_{\ddot{q}_n} + 2\zeta_n\omega_n\underbrace{\Gamma_n\dot{D}_n}_{\dot{q}_n} + \omega_n^2\underbrace{\Gamma_n D_n}_{q_n} = -\Gamma_n\ddot{u}_g(t)\,, \tag{420}$$

možemo primijetiti da su iste desne pa i lijeve strane jednadžbi, pa mora vrijediti:

$$q_n(t) = \Gamma_n D_n(t)\,. \tag{421}$$

Budući da je pobuda $\ddot{u}_g(t)$ definirana numerički (niz točaka spojenih pravcima), moramo numerički riješiti jednadžbu po $D_n(t)$. Nakon toga, uz $\boldsymbol{\phi}_n$ (riješen problem vlastitih vrijednosti), $\mathbf{m}$ i $\boldsymbol{\ell}$, izračunamo $\Gamma_n = L_n / M_n$ i $q_n(t)$. Skalar Γ_n možemo prikazati i kao dio utjecajnoga vektora u smjeru n –toga oblika titranja (slika 213.):

$$\mathbf{m}\boldsymbol{\ell} = \sum_{n=1}^{N}\Gamma_n\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n / \cdot\,\mathbf{m}^{-1} \Rightarrow \quad \boldsymbol{\ell} = \sum_{n=1}^{N}\Gamma_n\boldsymbol{\phi}_n\,, \tag{422}$$



Slika 213.: Raspis utjecajnoga vektora po oblicima titranja

Zbog toga se Γ_n često naziva MODALNI KOEFICIJENT DOPRINOSA (učešća, udjela) što bi označavalo mjeru doprinosa nekoga oblika titranja statičkomu odzivu (za u_g=1,0) što nije točno jer taj koeficijent ovisi o načinu normiranja oblika titranja. Znači, to nije neovisna mjera doprinosa nekomu odzivu (pomaku, momentu,...) jer L_n sadrži $\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}$, a M_n još i $\boldsymbol{\phi}_n$ (zbog toga u razlomku L_n / M_n nije moguće kratiti a).

12.1.4. Modalni odzivi

Doprinos n – toga oblika titranja vektoru pomaka $\mathbf{u}(t)$ jest:

$$\mathbf{u}_n(t) = \boldsymbol{\phi}_n q_n(t) = \Gamma_n \boldsymbol{\phi}_n D_n(t), \qquad \left[q_n(t), \text{izraz}(421)\right]. \tag{423}$$

Uz poznato $\mathbf{u}_n(t)$, postoje dva pristupa proračunu unutarnjih sila. Prvi pristup je primjenom ekvivalentne statičke sile:

$$\mathbf{f}_n(t) = \mathbf{k}\mathbf{u}_n(t) = \Gamma_n \mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n D_n(t) \tag{424}$$

koja predstavlja bit proračuna seizmičkih sila prema većini propisa. U ekvivalentnu statičku silu $\mathbf{f}_n(t)$ uvrstimo problem vlastitih vrijednosti $\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2 \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n$. Uz član $\mathbf{s}_n$ i pseudoubrzanje $A(t)$ dobivamo:

$$\mathbf{f}_n(t) = \underbrace{\Gamma_n \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n}_{\mathbf{s}_n} \omega_n^2 D_n(t) = \mathbf{s}_n \underbrace{\omega_n^2 D_n(t)}_{A_n(t)} = \mathbf{s}_n A_n(t). \tag{425}$$

Ekvivalentne statičke sile su produkt dva člana:

- $\mathbf{s}_n$: doprinosa n–toga oblika titranja prostornoj razdiobi $\mathbf{m}\boldsymbol{\ell}$ pobude $\mathbf{p}_{\text{eff}}(t)$,
- $A_n(t)$: pseudoubrzanja sustava pri pobudi $\ddot{u}_g(t)$ i titranju n – tim oblikom (problem s jednim stupnjem slobode).

Proračun doprinosa $r_n(t)$ n–toga oblika titranja ukupnomu odzivu $r(t)$ provodimo statičkim proračunom konstrukcije opterećene silama $\mathbf{f}_n(t)$. Primijetimo da je $\mathbf{f}_n(t)$ umnožak vektora $\mathbf{s}_n$ i skalarne funkcije $A_n(t)$. Budući da za linearni model vrijedi princip superpozicije, prvo napravimo statički proračun za opterećenje $\mathbf{s}_n$ pa rezultat r_n^{st} (M_n^{st}, T_n^{st}, ... u nekomu presjeku) množimo s $A_n(t)$:

$$r_n(t) = r_n^{\text{st}} A_n(t). \tag{426}$$

Član r_n^{st} može biti pozitivan ili negativan neovisno o načinu normiranja vlastitih vektora.

12.1.5. Ukupni odziv

Ukupne pomake dobivamo superpozicijom modalnih doprinosa $\mathbf{u}_n(t)$ [izraz (423)]:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{u}_n(t) = \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n \boldsymbol{\phi}_n D_n(t), \tag{427}$$

a ukupni odziv promatrane unutarnje sile ($M(t)$, $T(t)$, ...) kao:

$$r(t)=\sum_{n=1}^{N} r_n(t)=\sum_{n=1}^{N} r_n^{\mathrm{st}} A_n(t). \tag{428}$$

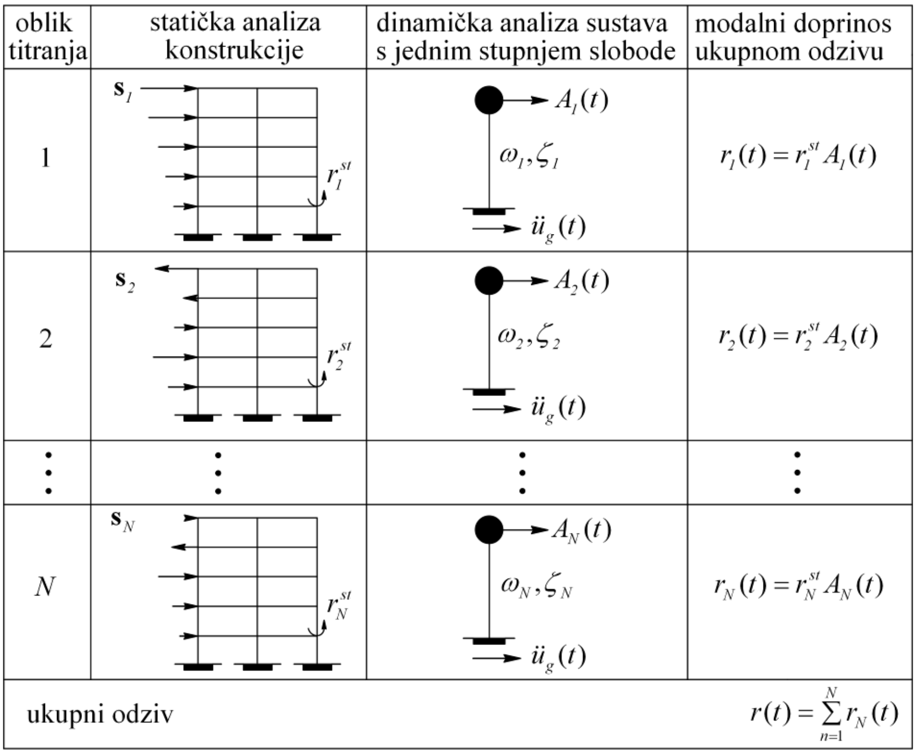
12.1.6. Pojašnjenje modalne analize

Prvo trebamo riješiti problem vlastitih vrijednosti (trebamo $\boldsymbol{\phi}_n$ i ω_n). Zatim odredimo statička opterećenja i raspišemo ih u modalne komponente $\mathbf{m}\boldsymbol{\ell}=\sum \mathbf{s}_n$. Ostatak proračuna je shematski prikazan na slici 214.

Doprinos n–toga oblika titranja dinamičkom odzivu možemo dobiti kao umnožak rezultata dviju analiza

- r_n^{st}: statičke analize konstrukcije pri opterećenju $\mathbf{s}_n$ i
- $A_n(t)$: dinamičke analize jednoga stupnja slobode pri pobudi $\ddot{u}_g(t)$.

Znači, modalna analiza se sastoji od statičke analize ISTE konstrukcije za N opterećenja $\mathbf{s}_n$ ($n=1,\dots,N$) i dinamičke analize N RAZLIČITIH sustava s jednim stupnjem slobode (svakome pripada drugačiji ω_n (T_n), ζ_n i Γ_n). Tako množimo dva rezultata [primjerice M dijagram $\times$ $A(t)$] za svaki n. Prvim je određena prostorna, a drugim vremenska razdioba odziva. Zatim zbrojimo N umnožaka $r_n^{\mathrm{st}}A_n(t)$ u ukupni dinamički odziv zgrade.



Slika 214.: Shematski prikaz postupka modalne analize

12.1.7. Analiza odziva na rotacijsku pobudu

Jednadžba gibanja pri pobudi rotacijskim ubrzanjem $\ddot{\theta}_g(t)$ jest:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}+\mathbf{k}\mathbf{u}=-\mathbf{m}\boldsymbol{\ell}\ddot{\theta}_g(t), \qquad \mathbf{p}_{\mathrm{eff}}(t)=-\mathbf{m}\boldsymbol{\ell}\ddot{\theta}_g(t). \tag{429}$$

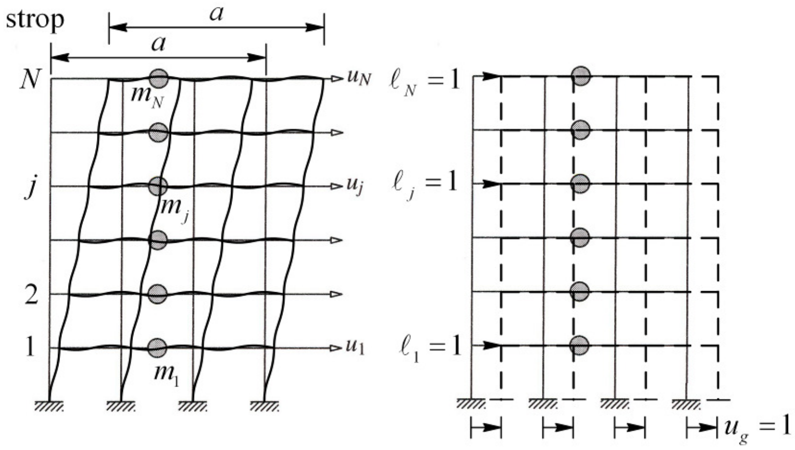
U primjeru L okvira iz poglavlja 8.4.3 pokazali smo da je utjecajni vektor statičkih pomaka u smjeru svih stupnjeva slobode zbog $\theta_g = 1$, $\boldsymbol{\ell} = [h_1 \quad h_2 \quad x_3]^{\mathrm{T}}$ (za translaciju $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{1}$). Nakon što smo odredili utjecajni vektor $\boldsymbol{\ell}$, proračun vršimo kao za translaciju, ali uz zamjenu horizontalnoga rotacijskim ubrzanjem tla ($\ddot{u}_g(t) \to \ddot{\theta}_g(t)$).

12.2. Tlocrtno simetrične zgrade: translacijska pobuda

U ovom ćemo poglavlju pokazati dinamički proračun višeetažne, simetrične zgrade s uzdužno apsolutno krutim pločama. Pobuda djeluje horizontalno duž jedne osi simetrije. Diferencijalna jednadžba gibanja sustava jest:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\mathbf{1}\ddot{u}_g(t), \tag{430}$$

pri čemu vektor $\mathbf{u}$ sadržava bočne pomake katnih ploča (relativno prema tlu), kako je prikazano na slici 215.



Slika 215.: Bočni pomaci višeetažnog okvira zbog translacijske pobude potresom

Matrica $\mathbf{m}$ je dijagonalna, s članovima m_j (masa etaže) koncentriranih u centru masa ploče j. Matrica $\mathbf{k}$ je matrica bočne krutosti i tvorimo je kao zbroj bočnih krutosti pojedinačnih okvira. Utjecajni je vektor $\mathbf{1} = [1 \quad 1 \cdots 1]^{\mathbf{T}}$. Primijetimo da je sustav jednadžbi isti kao za modalnu analizu. Pokažimo postupak proračuna na jednom okviru.

12.2.1. Raspis efektivnih sila potresa po vlastitim vektorima

Rabimo raspis iz izraza (413) za $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{1}$, pa vrijedi:

$$\mathbf{m}\mathbf{1} = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{s}_n = \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n. \tag{431}$$

Koeficijenti za n–ti oblik titranja su:

$$\Gamma_n = L_n^h / M_n, \tag{432}$$

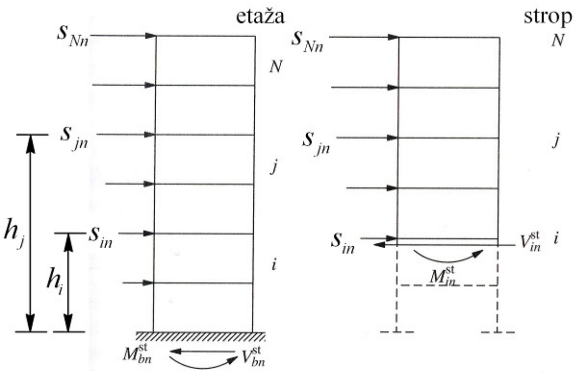
$$L_n^h = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{m} \boldsymbol{\ell} \quad = \begin{bmatrix} \phi_{1n} & \phi_{2n} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots \\ 0 & m_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jn},$$

$$M_n = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n \quad = \begin{bmatrix} \phi_{1n} & \phi_{2n} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots \\ 0 & m_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \\ \vdots \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jn}^2. \tag{433}$$

Dio opterećenja **m1** u smjeru n–toga oblika titranja (vektor) iznosi:

$$\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n = \Gamma_n \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots \\ 0 & m_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \\ \vdots \end{bmatrix} = \Gamma_n \begin{bmatrix} m_1 \phi_{1n} \\ m_2 \phi_{2n} \\ \vdots \end{bmatrix}, \tag{434}$$

pri čemu su komponente $s_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn}$ bočne sile u razinama katnih ploča.



Slika 216.: Bočne sile u razinama katnih ploča; poprečne sile i momenti prevrtanja

12.2.2. Modalni odzivi zgrade

Numerički trebamo riješiti jednadžbu za n–ti oblik titranja:

$$\ddot{D}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{D}_n + \omega_n^2 D_n = -\ddot{u}_g(t). \tag{435}$$

Prvo odredimo $\boldsymbol{\phi}_n$ i ω_n, pa skalare L_n^h, M_n, Γ_n i doprinos n–toga oblika titranja bočnim pomacima $\mathbf{u}(t)$:

$$\mathbf{u}_n(t) = \Gamma_n \boldsymbol{\phi}_n D_n(t), \quad [\text{podsjetimo se}: \mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{u}_n(t)], \tag{436}$$

pri čemu je komponenta $u_{jn}(t)$ bočni pomak stropa j,

$$\begin{bmatrix} u_{1n}(t) \\ \vdots \\ u_{nn}(t) \end{bmatrix} = \Gamma_n \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \vdots \\ \phi_{nn} \end{bmatrix} D_n(t) \;\Rightarrow\; u_{jn}(t) = \Gamma_n \phi_{jn} D_n(t). \tag{437}$$

Znači, to je pomak stropa ako pri potresu zgrada titra samo n–tim oblikom. Relativni pomak etaže j (engl. STORY DRIFT) jest:

$$\Delta_{jn}(t) = u_{jn}(t) - u_{j-1,n}(t) = \Gamma_n(\phi_{jn} - \phi_{j-1,n})D_n(t)\,, \tag{438}$$

i predstavlja razliku bočnih pomaka susjednih ploča ($j-1$ i j). Ekvivalentne statičke (bočne) sile su:

$$\mathbf{f}_n(t) = \mathbf{s}_n A_n(t), \qquad [\text{podsjetimo se}: A_n(t) = \omega_n^2 D_n(t)], \tag{439}$$

pri čemu je komponenta $f_{jn}(t)$ sila u razini stropa j ,

$$\begin{bmatrix} f_{1n}(t) \\ \vdots \\ f_{nn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{bmatrix} A_n(t) \;\Rightarrow\; f_{jn}(t) = s_{jn}A_n(t)\,. \tag{440}$$

To je opterećenje stropa ako pri potresu zgrada titra samo n –tim oblikom. Odzivi (*M*(*t*), *T*(*t*), ...) zbog opterećenja $\mathbf{f}_n(t)$ su dati izrazom $r_n(t) = r_n^{\text{st}} A_n(t)$. Najprije statičkom analizom za opterećenje $\mathbf{s}_n$ odredimo r_n^{st}, pri čemu je predznak opterećenja određen predznakom ϕ_n . Primjerice, za temeljni (prvi) oblik titranja sile s_{j1} djeluju u istome smjeru, a za ostale oblike mijenjaju smjer po visini zgrade. Promotrimo šest odziva važnih za zgrade opterećene potresom, priloženih u tablici 11., pri čemu je V_{in}^{st} suma katnih opterećenja s_{jn} od krova do i –tog kata, a M_{in}^{st} moment tih opterećenja na i –ti kat (krak $h_j - h_i$).

Tablica 11.: Važni statički odzivi zgrade pri djelovanju potresa

Promatrani odziv r	Oznaka	Statički odziv r_n^{st} za n – ti oblik
poprečne sile u etažama	V_i	$V_{in}^{\text{st}} = \sum_{j=i}^{N} s_{jn}$
momenti u etažama	M_i	$M_{in}^{\text{st}} = \sum_{j=i}^{N}(h_j - h_i)s_{jn}$
poprečna reakcija	V_b	$V_{bn}^{\text{st}} = \sum_{j=1}^{N} s_{jn} = \Gamma_n L_n^h \equiv M_n^*$
moment prevrtanja	M_b	$M_{bn}^{\text{st}} = \sum_{j=1}^{N} h_j s_{jn} = \Gamma_n L_n^\theta \equiv h_n^* M_n^*$
pomaci stropova	u_j	$u_{jn}^{\text{st}} = (\Gamma_n / \omega_n^2)\phi_{jn}$
relativni pomaci etaža	Δ_j	$\Delta_{jn}^{st} = (\Gamma_n / \omega_n^2)(\phi_{jn} - \phi_{j-1,n})$

Prve četiri veličine dobivene su iz statičkog proračuna zgrade za opterećenje $\mathbf{s}_n$, a posljednje dvije veličine su nastale usporedbom $r_n(t) = r_n^{\text{st}} A_n(t)$ sa

$$u_{jn}(t) = \Gamma_n \phi_{jn} \underbrace{\frac{A_n(t)}{\omega_n^2}}_{D_n(t)} \quad \text{i} \quad \Delta_{jn}(t) = \Gamma_n(\phi_{jn} - \phi_{j-1,n}) \underbrace{\frac{A_n(t)}{\omega_n^2}}_{D_n(t)}. \tag{441}$$

Dobivamo:

$$r_{jn}^{\text{st}} = u_{jn}^{\text{st}} = \Gamma_n \phi_{jn} / \omega_n^2 \;\; \text{i} \;\; r_{jn}^{\text{st}} = \Delta_{jn}^{\text{st}} = \Gamma_n(\phi_{jn} - \phi_{j-1,n})/\omega_n^2. \tag{442}$$

Definirajmo veličine M_n^* i h_n^* (Γ_n ne ovisi o sumi po etažama):

$$V_{bn}^{\mathrm{st}} = \sum_{j=1}^{N} s_{jn} = \sum_{j=1}^{N} \Gamma_n m_j \phi_{jn} = \Gamma_n \underbrace{\sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jn}}_{L_n^h} = \underbrace{\Gamma_n}_{\frac{L_n^h}{M_n}} L_n^h = \frac{(L_n^h)^2}{M_n} = M_n^*, \tag{443}$$

$$h_n^* = \frac{L_n^\theta}{L_n^h}, \quad \text{uz}: \quad L_n^\theta = \sum_{j=1}^{N} h_j m_j \phi_{jn} \qquad \text{(skalar).} \tag{444}$$

Zbog gornjih izraza, vrijedi:

$$\begin{aligned} M_{bn}^{\mathrm{st}} &= \sum_{j=1}^{N} h_j s_{jn} = \sum_{j=1}^{N} h_j \underbrace{\Gamma_n m_j \phi_{jn}}_{s_{jn}} = \Gamma_n \underbrace{\sum_{j=1}^{N} h_j m_j \phi_{jn}}_{L_n^\theta} \\ &= \Gamma_n \underbrace{L_n^\theta}_{h_n^* L_n^h} = h_n^* \underbrace{\Gamma_n L_n^h}_{M_n^*} = h_n^* M_n^*. \end{aligned} \tag{445}$$

Veličine M_n^* i h_n^* ne ovise o načinu normiranja vlastitih vektora:

$$M_n^* = \frac{(L_n^h)^2}{M_n} = \frac{(\sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jn})^2}{\sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jn}^2}, \qquad h_n^* = \frac{L_n^\theta}{L_n^h} = \frac{\sum_{j=1}^{N} h_j m_j \phi_{jn}}{\sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jn}}, \tag{446}$$

jer brojnik i nazivnik sadrže ϕ_{jn}^2, odnosno ϕ_{jn} (svejedno je koristimo li ϕ_{jn} ili $a\phi_{jn}$). Koeficijenti M_n, L_n^h, L_n^θ i Γ_n sadrže samo ϕ_{jn} pa ovise o načinu normiranja.

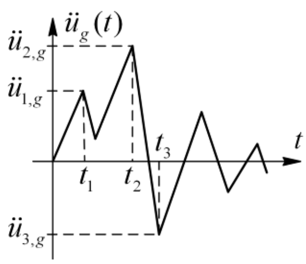
12.2.3. Ukupni odziv

Ukupni odziv se dobiva superpozicijom doprinosa svih oblika titranja:

$$r(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n^{\mathrm{st}} A(t). \tag{447}$$

12.2.4. Sažetak modalne analize u primjeni na zgrade

Promatramo odziv zgrade s dvije tlocrtne osi simetrije na pobudu potresnim zapisom koji djeluje u smjeru jedne osi. Zapis je određen nizom točaka $(t_i, \ddot{u}_{i,g})$ spojenih pravcima. Postoji točno numeričko rješenje ovoga problema za svaki korak Δt. Rezultat je odziv (neke veličine) u vremenu pa u bilo kojoj točki imamo: $M(t)$, $T(t)$,...



Slika 217.: Definiranje potresnog zapisa

Proračun odziva vršimo po sljedećim koracima:

1. odaberemo potresni zapis $\ddot{u}_g(t)$ definiran nizom točaka $(t_i, \ddot{u}_{g,i})$
2. odredimo svojstva konstrukcije:
   a) matricu masa $\mathbf{m}$ i bočne krutosti $\mathbf{k}$
   b) procijenimo koeficijent relativnog prigušenja ζ
3. izračunamo prirodne frekvencije ω_n i oblike titranja ϕ_n
   (treba riješiti problem vlastitih vrijednosti $\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2 \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n$)
4. odredimo modalne komponente $\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n$ efektivnih sila potresa
5. izračunamo doprinos n–toga oblika titranja ukupnom odzivu:
   a) provedemo statički proračun za opterećenje $\mathbf{s}_n$ [odredimo statički doprinos r_n^{st} odzivu $r_n(t)$]
   b) izračunamo pseudoubrzanje sustava s jednim stupnjem slobode [odredimo dinamički doprinos $A_n(t)$ odzivu $r_n(t)$]
   c) odredimo odziv $r_n(t) = r_n^{\text{st}} A_n(t)$
6. zbrojimo doprinos svih oblika titranja u ukupni odziv $[r(t) = \sum r_n(t)]$

Uobičajeno (za zgrade), prvih nekoliko oblika najviše doprinosi odzivu, pa je korake 3 – 6 dovoljno napraviti za manji broj oblika titranja.

12.2.5. Efektivna modalna masa i efektivna modalna visina

Koeficijenti M_n^* i h_n^* imaju fizikalno značenje. Poprečna reakcija pri titranju n–tim oblikom jest:

$$V_{bn}(t) = V_{bn}^{\text{st}} A_n(t)\,. \tag{448}$$

Izraz je u skladu s općim zapisom:

$$r_n(t) = r_n^{\text{st}} A_n(t) \tag{449}$$

i prema prethodnoj tablici:

$$V_{bn}^{\text{st}} = M_n^*, \tag{450}$$

pa je

$$V_{bn}(t) = M_n^* A_n(t). \tag{451}$$

Za model s jednim stupnjem slobode vrijedi:

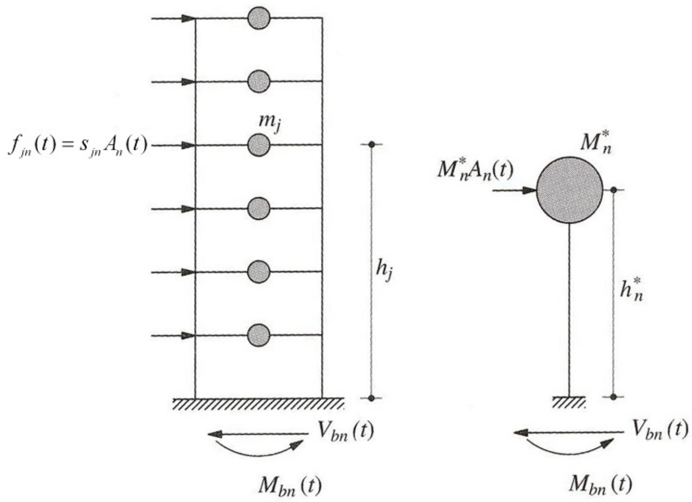
$$V_b(t) = mA(t)\,. \tag{452}$$

Ako su svojstva modela s jednim stupnjem slobode ω_n i ζ_n (jednaka svojstvima zgrade pri titranju n – tim oblikom) i pripadni spektar pseudoubrzanja označimo s $A_n(t)$, poprečna je reakcija za takva svojstva:

$$V_b(t) = mA_n(t). \tag{453}$$

Uočite, ako je $m = M_n^*$ ista je poprečna reakcija za oba modela: sustava s jednim stupnjem slobode (koncentrirana masa) i višeetažne zgrade s masom distribuiranom po etažama. Zato

M_n^* zovemo EFEKTIVNA MODALNA MASA (poprečne reakcije). To je efektivni[39] dio ukupne mase koji uzrokuje poprečnu silu u n – tomu obliku titranja $V_{bn}(t)$.



Slika 218.: Ekvivalentne statičke sile višeetažnog okvira; efektivna modalna masa i visina

Općenito, efektivna modalna masa nije masa zgrade, već ukupna masa aktivna samo za jedan stupanj slobode, jer se radi o masi i ekvivalentnoj bočnoj sili na jednom mjestu. Iz ravnoteže slijedi da je bočna reakcija V_b jednaka bočnoj sili f_S. Kod višeetažne zgrade su mase m_j distribuirane po visini i ekvivalentne bočne sile su s_{jn} promjenjive po visini, s oblikom promjene $m_j\phi_{jn}$ (zbog $s_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn}$, Γ_n skalar). Iz ravnoteže slijedi da je bočna reakcija V_{bn}^{st} jednaka sumi bočnih sila s_{jn}. Znači, i V_{bn}^{st} ovisi o razdiobi masa m_j i komponenata ϕ_{jn}. Budući da vrijedi $M_n^* = V_{bn}^{\mathrm{st}}$ (M_n^* je rezultanta sila s_{jn}), M_n^* mora ovisiti o razdiobi masa i obliku vlastitoga vektora. To je lako potvrditi jer je

$$\text{potvrda}: \quad M_n^* = \frac{(L_n^h)^2}{M_n} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jn}\right)^2}{\sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jn}^2}. \tag{454}$$

Važno je uočiti da je suma efektivnih modalnih masa jednaka masi konstrukcije:

$$\sum_{n=1}^{N} M_n^* = \sum_{j=1}^{N} m_j, \tag{455}$$

što možemo dokazati množeći raspis $\mathbf{m1}$ sa $\mathbf{1}^{\mathrm{T}} \Rightarrow \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{m1} = \sum_{n=1}^{N}\Gamma_n(\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n)$. Matrica $\mathbf{m}$ je dijagonalna, pa množenjem dobivamo:

$$\sum_{n=1}^{N} m_j = \sum_{n=1}^{N}\Gamma_n \underbrace{\sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jn}}_{L_n^h} = \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\Gamma_n L_n^h}_{M_n^*} = \sum_{n=1}^{N} M_n^*. \tag{456}$$

[39] djelotvorni, aktivni

Sad ćemo usporediti moment prevrtanja za višeetažne i jednoetažne sisteme. Moment prevrtanja višeetažne zgrade pri titranju n – tim oblikom jest:

$$M_{bn}(t) = M_{bn}^{\text{st}} A_n(t) \quad [\text{u obliku } r_n(t) = r_n^{\text{st}} A_n(t)]. \tag{457}$$

i ako uvrstimo prema tablici: $M_{bn}^{\text{st}} = h_n^* M_n^*$, dobivamo

$$M_{bn}(t) = h_n^* \underbrace{M_n^* A_n(t)}_{V_{bn}(t)} = h_n^* V_{bn}(t). \tag{458}$$

Za model zgrade s jednim stupnjem slobode:

$$M_b(t) = hV_b(t). \tag{459}$$

Iz izraza (458) i (459) slijedi: ako je masa modela s jednim stupnjem slobode M_n^* i djeluje na visini h_n^*, moment prevrtanja $M_b(t)$ je jednak momentu prevrtanja zgrade pri titranju n – tim oblikom s masom distribuiranom po etažama, M_{bn}. Zato h_n^* zovemo EFEKTIVNA MODALNA VISINA (momenta prevrtanja). Možemo je interpretirati kao visinu hvatišta rezultante bočnih sila s_{jn} (ili f_{jn}). Općenito, efektivna modalna visina nije visina građevine, već ukupna visina aktivna samo za model s jednim stupnjem slobode. Kod sustava s jednim stupnjem slobode ukupna masa i ekvivalentna bočna sila djeluju na vrhu, a kod višeetažne zgrade su mase m_j i bočne sile s_{jn} distribuirane po visini, pa je očito hvatište h_n^* bočnih sila niže od ukupne visine h. Razdioba s_{jn} jest $m_j\phi_{jn}$, ovisi o masi i komponentama vlastitoga vektora ϕ_{jn}. Ta razdioba utječe na hvatište sila – efektivnu modalnu visinu. Znači, i h_n^* ovisi o razdiobi masa i obliku vlastitog vektora. To je lako vidljivo iz formule:

$$\text{potvrda}: \quad h_n^* = \frac{L_n^\theta}{L_n^h} = \frac{\sum_{j=1}^{N} h_j m_j \phi_{jn}}{\sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jn}}. \tag{460}$$

Važno je napomenuti da suma momenata masa M_n^* i m_j oko temelja mora biti jednaka (uz krakove h_n^* i h, a sume po vlastitim vektorima, odnosno etažama):

$$\sum_{n=1}^{N} h_n^* M_n^* = \sum_{j=1}^{N} h_j m_j, \tag{461}$$

što ćemo dokazati tako da uvedemo vektor $\mathbf{mh}$, gdje je $\mathbf{h} = [h_1 \quad \cdots \quad h_N]^{\text{T}}$ i raspišemo ga po silama inercije (uz $\ell = \mathbf{h}$):

$$\mathbf{mh} = \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n = \sum_{n=1}^{N} \overbrace{\frac{L_n}{M_n}}^{\Gamma_n} \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{\overbrace{\boldsymbol{\phi}_n^{\text{T}} \mathbf{mh}}^{L_n^\theta}}{M_n} \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{L_n^\theta}{M_n} \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n. \tag{462}$$

Primijetite, matrica $\mathbf{m}$ je dijagonalna, pa je

$$\boldsymbol{\phi}_n^{\text{T}} \mathbf{mh} = \sum_{j=1}^{N} \phi_{jn} m_j h_j = L_n^\theta. \tag{463}$$

Množenjem raspisa s $\mathbf{1}^{\mathrm{T}}$ dobivamo $\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{mh} = \sum_{n=1}^{N} L_n^{\theta} / M_n \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n$ ili raspisano (uz dijagonalnu matricu $\mathbf{m}$):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} m_j h_j &= \sum_{n=1}^{N} \frac{L_n^{\theta}}{M_n} \underbrace{\sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jn}}_{L_n^h} = \sum_{n=1}^{N} \frac{L_n^{\theta}}{M_n} L_n^h \frac{L_n^h}{L_n^h} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\frac{(L_n^h)^2}{M_n}}_{M_n^*} \underbrace{\frac{L_n^{\theta}}{L_n^h}}_{h_n^*} = \sum_{n=1}^{N} M_n^* h_n^*. \end{aligned} \tag{464}$$

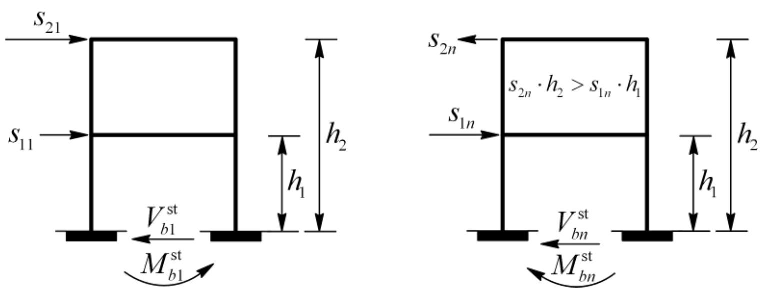
Za više oblike titranja (drugi, treći,...) efektivna modalna visina h_n^* može biti negativna jer su V_{bn}^{st} i M_{bn}^{st} suprotnih predznaka,

$$h_n^* = \frac{M_{bn}(t)}{V_{bn}(t)} = \frac{M_{bn}^{\mathrm{st}} A_n(t)}{V_{bn}^{\mathrm{st}} A_n(t)} = \frac{M_{bn}^{\mathrm{st}}}{V_{bn}^{\mathrm{st}}}. \tag{465}$$

Za temeljni oblik titranja su V_{b1}^{st} i M_{b1}^{st} prema definiciji pozitivni.

Prema tablici 11. slijedi:

$$\begin{aligned} V_{b1}^{\mathrm{st}} &= \sum_{j=1}^{N} s_{j1} > 0, \text{ (sile } s_{j1} > 0), \\ M_{b1}^{\mathrm{st}} &= \sum_{j=1}^{N} h_j s_{j1} > 0, \text{ (visine } h_j > 0), \end{aligned} \tag{466}$$



Slika 219.: Poprečna reakcija i moment prevrtanja

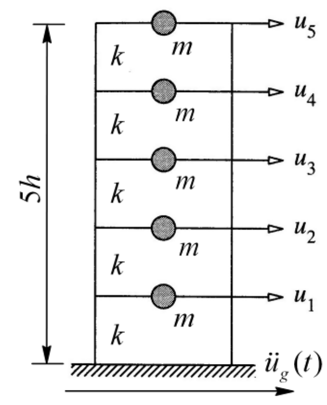
ili su sve komponente $\phi_{j1} > 0$, pa je

$$h_1^* = \frac{\sum_{j=1}^{N} h_j m_j \phi_{j1}}{\sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{j1}} > 0, \tag{467}$$

$$(h_j > 0 \; i \; m_j > 0).$$

12.2.6. Primjer proračuna: peteroetažna posmična zgrada

Na primjeru peteroetažne posmične zgrade, prikazane na slici 220., pokazat ćemo postupak opisan u poglavlju 12.2.5.

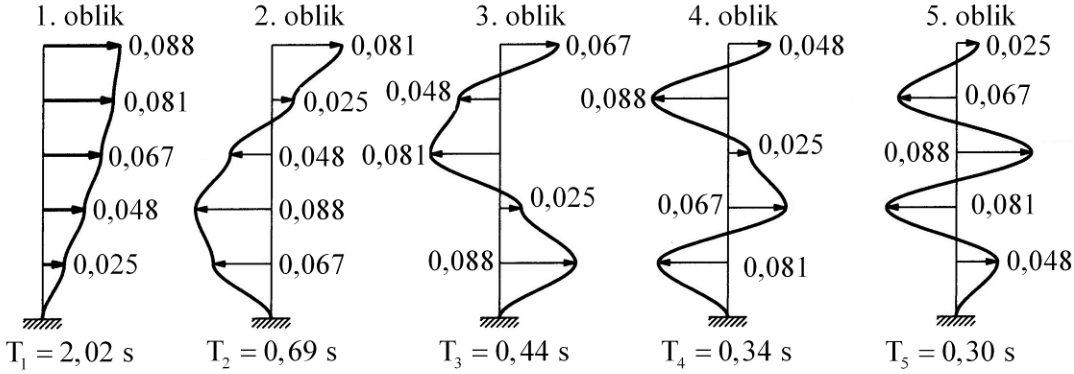


Slika 220.: Model peteroetažne posmične zgrade

Masa etaže iznosi $m = 450\,\text{kN/g}$, uz tlocrtnu površinu $9 \times 5 = 45\,\text{m}^2$ i težinu od 10 kN/m^2. Visina etaže je $h = 3{,}7\,\text{m}$, dok je krutost etaže: $k = 5500\,\text{kN/m}$. Za 6 stupova kvadratnoga poprečnog presjeka krutost je $k = 6 \cdot 12 EI_c / h^3$, a uz moment tromosti $I_c = a^4/12$, stranica presjeka jest $a = (1/6kh^3/E)^{1/4}$. Za AB stupove, uz modul elastičnosti betona od $E = 30\text{GPa}$ stranica stupa jest $a = 0{,}2\,\text{m}$. Opterećenje definiramo zapisom ubrzanja tla pri potresu El Centro, $\ddot{u}_g(t)$, a koeficijent relativnog prigušenja iznosi $\zeta = 5\%$ (uobičajeno za AB zgradu). Matrice masa i krutosti su:

$$\mathbf{m} = m\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prvo moramo riješiti problem vlastitih vrijednosti $\det[\mathbf{k} - \omega_n^2\mathbf{m}] = 0$. Raspisom determinante dolazimo do karakterističnog polinoma 5. stupnja po ω_n^2. Rješenja su nultočke polinoma $\omega_1, \ldots, \omega_5$ ($T_1 = 2\pi/\omega_1, \ldots, T_5 = 2\pi/\omega_5$). Nakon što smo odredili vlastite vrijednosti ω_n, vlastite oblike možemo odrediti iz $[\mathbf{k} - \omega_n^2\mathbf{m}]\boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0}$ i normirati ih ($M_n = 1$). Vlastiti periodi i oblici titranja su prikazani na slici 221.



$$\boldsymbol{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 0,025 \\ 0,048 \\ 0,067 \\ 0,081 \\ 0,088 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{bmatrix} -0,067 \\ -0,088 \\ -0,048 \\ 0,025 \\ 0,081 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\phi}_3 = \begin{bmatrix} 0,088 \\ 0,025 \\ -0,081 \\ -0,048 \\ 0,067 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\phi}_4 = \begin{bmatrix} -0,081 \\ 0,067 \\ 0,025 \\ -0,088 \\ 0,048 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\phi}_5 = \begin{bmatrix} 0,048 \\ -0,081 \\ 0,088 \\ -0,067 \\ 0,025 \end{bmatrix}$$

Slika 221 Oblici titranja peteroetažne posmične zgrade

Prvi period je relativno dugačak jer su stupovi (20/20) vitkiji od uobičajenih. Tada su veći doprinosi ostalih perioda odzivu zgrade. Proračunom vlastitih oblika završili smo prva tri koraka proračuna (prema sažetku iz poglavlja 12.2.4.). U četvrtom koraku proračuna određujemo modalne komponente efektivnih sila potresa $\mathbf{s}_n$ (raspis **m1** po vlastitim vektorima). Prvo odredimo skalare:

$$\text{skalari:} \quad L_n^h = \sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jn},$$

$$M_n = \sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jn}^2 \quad \text{i}$$

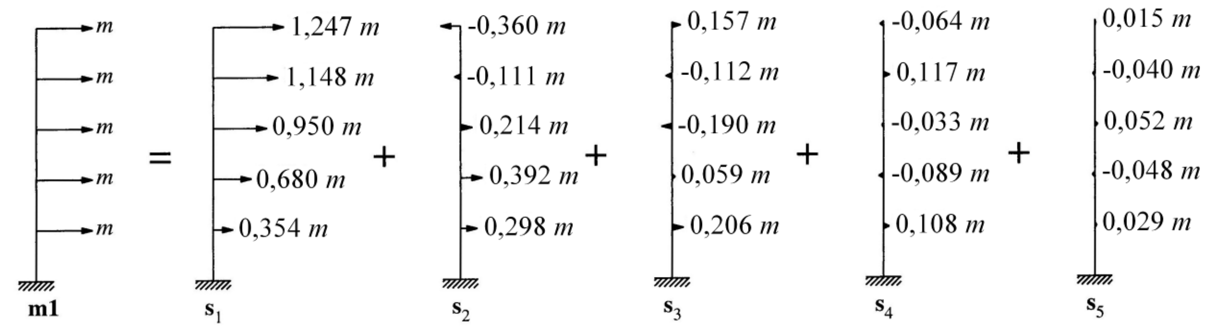
$$\text{skalar:} \quad L_n^\theta = \sum_{j=1}^{N} h_j m_j \phi_{jn}.$$

Vrijednosti po oblicima titranja su prikazane u tablici 12.

Tablica 12.: Svojstva oblika titranja

Oblik	M_n	L_n^h / m	$L_n^\theta / (hm)$
1.	1,000	0,309	1,086
2.	1,000	-0,097	0,118
3.	1,000	0,051	0,038
4.	1,000	-0,029	0,016
5.	1,000	0,013	0,007

Primijetite da su mase $m_j = m$ i visine $h_j = jh$, pa član m_j u izrazu za L_n^h i član $h_j m_j$ u izrazu za L_n^θ možemo staviti ispred $\sum$. Prema tablici odredimo $\Gamma_n = L_n^h / M_n = L_n^h$, ($M_n = 1$) i bočne sile $\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n$, ($s_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn}$ komponente po katovima), prikazane na slici 222. Uočimo da je doprinos temeljnoga oblika rastavu $\mathbf{s} = \mathbf{m1}$ najveći i da modalni doprinosi opadaju s povećanjem oblika titranja.



Slika 222.: Bočne sile rastavljene prema oblicima titranja peteroetažne posmične zgrade

Također, promjena smjera bočnih sila $\mathbf{s}_n$ po visini je određena promjenom vlastitoga oblika $\boldsymbol{\phi}_n$ po visini. Komponente prvoga oblika titranja i katne sile $\mathbf{s}_1$ su istoga smjera, dok komponente ostalih oblika i katne sile mijenjaju smjer po visini. Skalar Γ_n mijenja predznak svih sila, a ne uzrokuje promjenu po visini.

U petomu koraku proračuna pod a) određuju se važni statički odzivi.

I dalje vrijedi $\Gamma_n = L_n^h$, jer je $M_n = 1$.

$$V_{bn}^{st} = \sum_{j=1}^{5} s_{jn} = (L_n^h)^2,$$

$$V_{5n}^{st} = \sum_{j=5}^{5} s_{jn} = s_{5n},$$

$$M_{bn}^{st} = \sum_{j=1}^{5} h_j s_{jn} = L_n^h L_n^\theta,$$

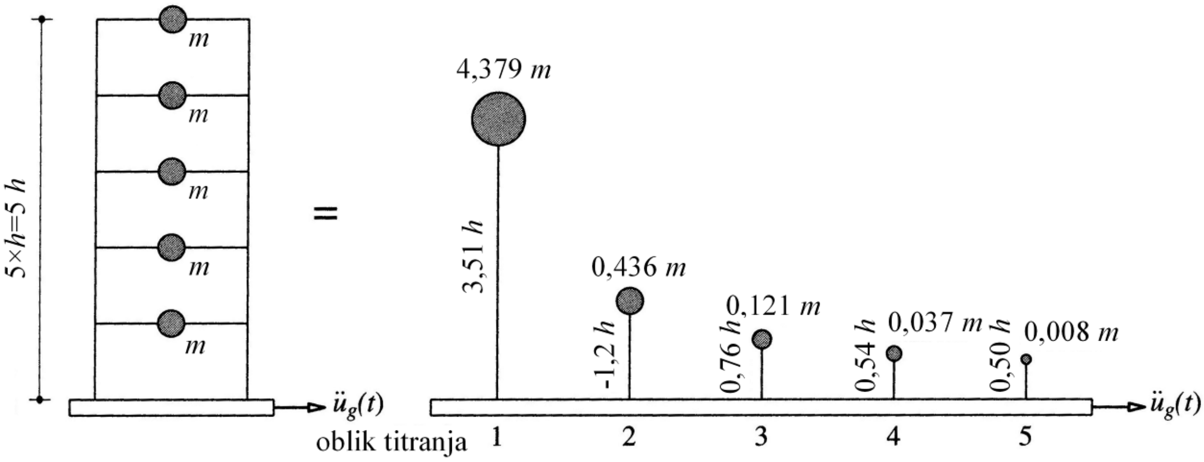
$$u_{5n}^{st} = (\Gamma_n / \omega_n^2)\phi_{5n} = [L_n^h / (2\pi/T_n)^2]\phi_{5n}.$$

Tablica 13.: Promatrani statički odzivi

Oblik	V_{bn}^{st} / m	V_{5n}^{st} / m	$M_{bn}^{st} / (mh)$	u_{5n}^{st}
1.	4,379	1,247	15,391	0,129
2.	0,433	-0,360	-0,520	-0,004
3.	0,120	0,157	0,091	0,0008
4.	0,039	-0,064	-0,021	-0,0002
5.	0,008	0,015	0,004	0,00003

Primijetimo da su statički odzivi najveći za prvi oblik titranja, a za ostale oblike dolazi do postupnog smanjenja odziva.

Efektivne modalne mase i visine, prikazane na slici 223., su $M_n^* = V_{bn}^{\mathrm{st}}$ i $h_n^* = M_{bn}^{\mathrm{st}} / V_{bn}^{\mathrm{st}}$. Vrijednosti h_n^* su risane na istu stranu (bez promjene predznaka).



Slika 223.: Efektivne modalne mase i visine

Uočite da su $\sum M_n^* = 5m = \sum m_j$ i $\sum h_n^* M_n^* = 15mh = \sum h_j m_j$. Ranije je dokazano da je suma efektivnih modalnih masa jednaka masi konstrukcije (izraz (455): $\sum M_n^* = \sum m_j$) i da je suma momenata masa M_n^* i m_j oko temelja jednaka (izraz (461): $\sum h_n^* M_n^* = \sum h_j m_j$). Usput, suma članova 2. stupca daje ukupnu statičku poprečnu silu:

$$V_{bn}^{\mathrm{st}} = M_n^* / \sum_{n=1}^{5} \qquad V_b^{\mathrm{st}} = \sum_{n=1}^{5} V_{bn}^{\mathrm{st}} = \sum_{n=1}^{5} M_n^* = 5m,$$

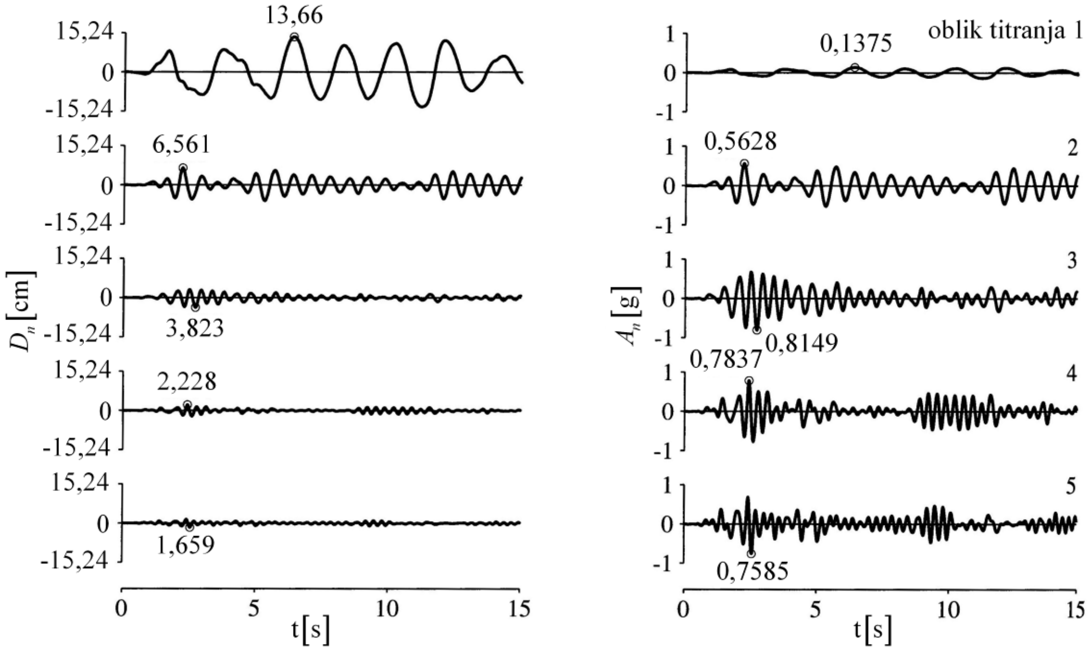
a suma članova 4. stupca ukupni statički moment prevrtanja:

$$M_{bn}^{\mathrm{st}} = h_n^* M_n^* / \sum_{n=1}^{5} \qquad M_b = \sum_{n=1}^{5} M_{bn}^{\mathrm{st}} = \sum_{n=1}^{5} h_n^* M_n^* = 15mh.$$

Potresni zapis je određen nizom točaka $(t_i, u_{g,i})$ i vrijedi $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. Uz prirast $\Delta t = 0{,}01$ i trajanje zapisa od 30 s, potrebno je 3000 točaka. Vremenski prirast mora biti dovoljno mali radi preciznog definiranja zapisa i odziva.

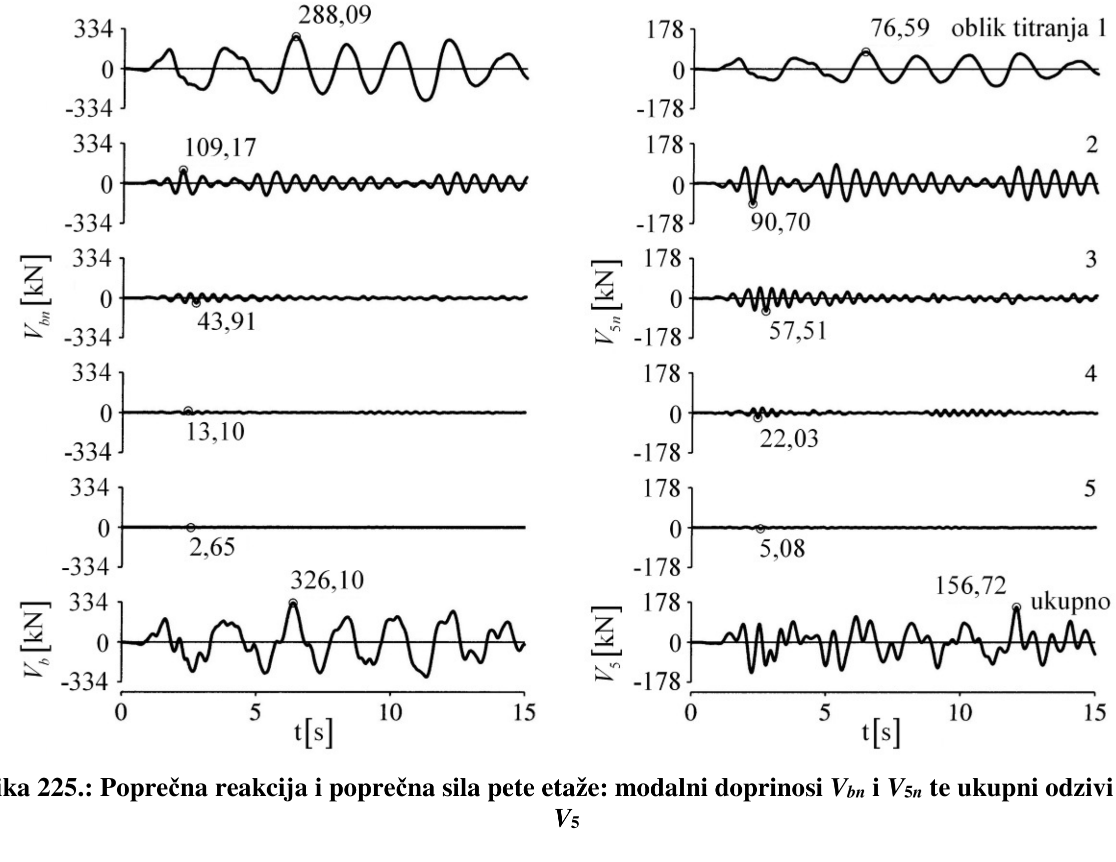
U 5. koraku proračuna pod b) prvo trebamo odrediti pseudoubrzanje sustava s jednim stupnjem slobode $A_n(t)$. Svakomu sustavu (za pojedini oblik titranja) pripadaju vlastiti period T_n i koeficijent relativnoga prigušenja ζ_n. Numerički proračun odziva se vrši metodama vremenskoga prirasta. Na kraju svakoga vremenskog odsječka Δt izračunamo odziv D_n [diskretna vrijednost od $D_n(t)$], a zatim prema formuli odredimo $A_n = \omega_n^2 D_n$. Napredujemo po prirastima do kraja potresnoga zapisa. Potom točke (njih 3000) spojimo pravcima (aproksimacija krivulja odziva $D_n(t)$ i $A_n(t)$ poligonom). Budući da su točke vrlo bliske, poligon izgleda poput krivulje. Opisani postupak moramo provesti za svaki od pet sustava s jednim stupnjem slobode ($n = 1, \ldots, 5$).

Na slici 224. prikazan je samo dio odziva koji sadrži ekstreme (prvih 15 s) za pet sustava s jednim stupnjem slobode.

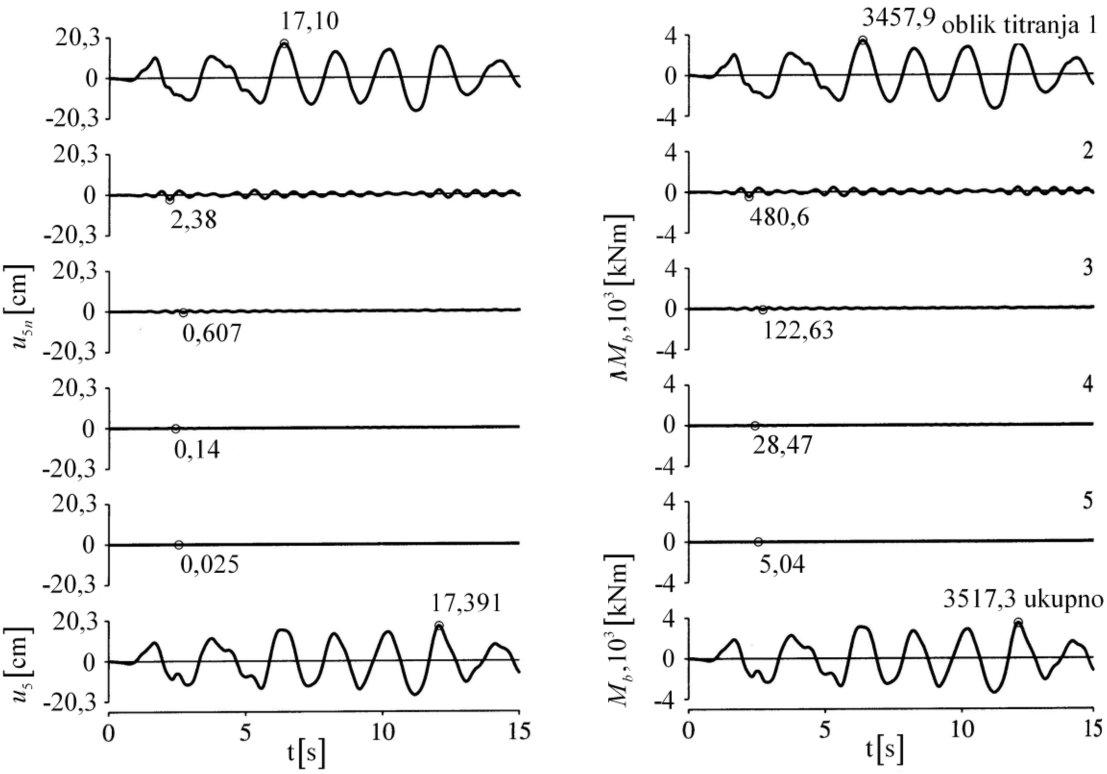


Slika 224.: Pomak i pseudoubrzanje poopćenog sustava

U 5. koraku proračuna pod c) trebamo odrediti ukupne modalne odzive kao $r_n(t) = r_n^{\mathrm{st}} A_n(t)$. U svakomu trenutku t_i, statičke vrijednosti (tablica 13.) množimo s pripadajućim pseudoubrzanjem A_n i tako dobivamo ukupne modalne odzive V_{bn} i V_{5n} (slika 225.), te u_{5n} i M_{bn} (slika 226.).



Slika 225.: Poprečna reakcija i poprečna sila pete etaže: modalni doprinosi V_{bn} i V_{5n} te ukupni odzivi V_b i V_5



Slika 226.: Pomak krova i moment prevrtanja poopćenog sustava i ukupni odzivi

Uočite relativne doprinose pojedinih oblika titranja. Prema tablici statičkih odziva, doprinos 1. oblika titranja je najveći, pa je prvi oblik često dobra procjena, ali ne uvijek (pogledajte primjerice V_{5n}). U 6. koraku proračuna zbrojimo doprinose svih oblika titranja u ukupni odziv $r(t) = \sum_{n=1}^{5} r_n(t)$. Znači, zbrojimo pet funkcija u ukupnu funkciju odziva (posljednja funkcija na slikama 225. i 226. za V_b, V_5, u_5 i M_b). Uočite, nisu potrebni doprinosi svih oblika titranja, primjerice kod ove zgrade su doprinosi četvrtoga i petoga oblika zanemarivi.

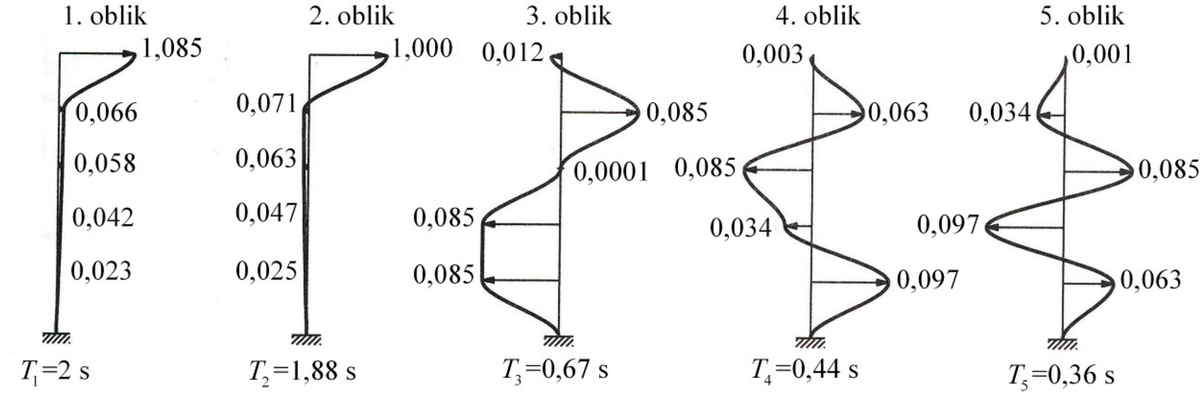
Završne napomene

1. važno: ekstreme od $D_n(t)$ i $A_n(t)$ odredimo izravno iz spektra
   - za pripadajuće T_n i ζ_n očitamo ih sa spektralne krivulje
   - znači: vršne vrijednosti odredimo bez dinamičkoga proračuna
2. ekstremi od $A_n(t)$ i $r_n(t)$ nastupaju istodobno
   - dokaz: vrijedi formula $r_n(t) = r_n^{\mathrm{st}} A_n(t)$ (r_n^{st} ne ovisi o vremenu)
3. ne nastupaju istodobno ekstremi:
   - ukupnoga i modalnih odziva neke veličine (npr. V_b i V_{bn})
   - ukupnoga odziva nekih veličina (npr. V_b i V_5); iako su isti $A_n(t)$.

12.2.7. Primjer proračuna: podatljivi (slabi) peti kat

U ovom ćemo poglavlju pokazati proračun peteroetažne zgrade kod koje je posljednji kat manje krutosti i mase od ostalih. Takva konstrukcija najčešće služi kao strojarnica za smještaj pogona (za liftove, klimatizaciju, ...). Kod ovakve zgrade postoje bliski periodi titranja zgrade (ovdje T_1 i T_2).

Zadane su krutosti $k_5 = 0,0012k$, uz $k = 4000$ kN/m i masu $m_5 = 0,01m$. Masa m, visina h, prigušenje ζ i pobuda $\ddot{u}_g(t)$ su iste kao u prethodnomu primjeru. Na slici 227. je prikazano prvih pet vlastitih perioda i oblika titranja zgrade, a u tablici 14. su priloženi promatrani statički odzivi zgrade.



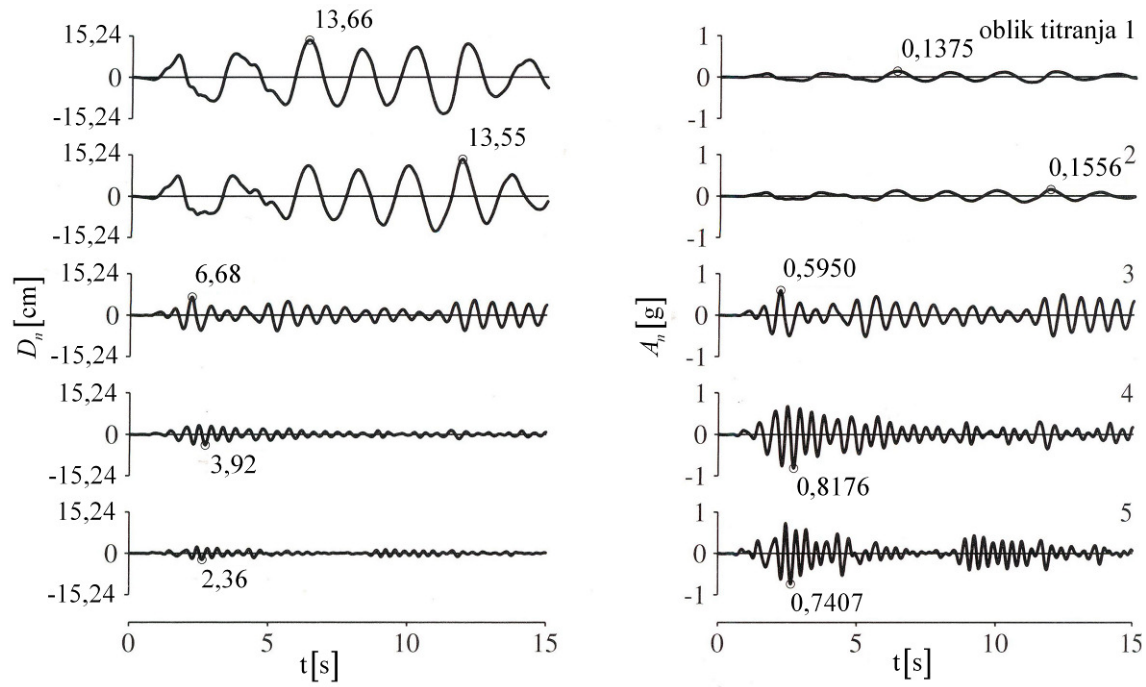
Slika 227.: Vlastiti periodi i oblici titranja zgrade s podatljivim katom

Tablica 14.: Promatrani statički odzivi

	Oblik titranja				
Odzivi	1.	2.	3.	4.	5.
V_{bn}^{st} / m	1,951	1,633	0,333	0,078	0,015
V_{5n}^{st} / m_5	9,938	-8,979	0,046	-0,007	0,0001

Uočimo da su 1. i 2. oblik titranja, T_1 i T_2 bliski, uz velike deformacije petoga kata. Oba oblika uzrokuju statičke odzive sličnih iznosa, poprečnu reakciju V_{bn}^{st} istoga predznaka i poprečnu silu u slabomu katu V_{5n}^{st} suprotnih predznaka. Slični su i dinamički odzivi $D_n(t)$ za oba oblika (praktički su u fazi) jer im pripada slična dinamička jednadžba zbog sličnoga perioda T_n (pa i ω_n), istih početnih uvjeta (mirovanje), koeficijenata prigušenja ζ i potresnog zapisa $\ddot{u}_g(t)$.

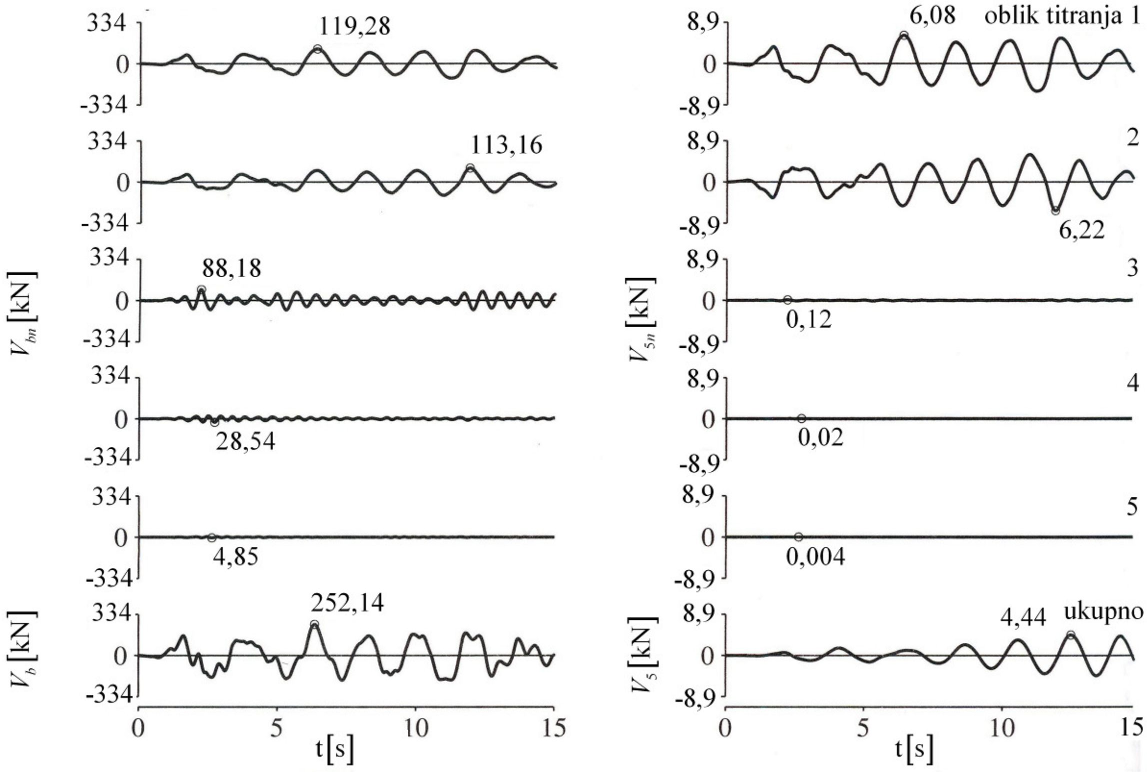
Zbog sličnih perioda T_n, pseudoubrzanja $A_n(t) = \omega_n^2 D_n(t) = (2\pi / T_n)^2 D_n(t)$ su također u fazi.



Slika 228.: Pomak i pseudoubrzanje poopćenog sustava

Doprinosi prvih dvaju oblika titranja su slični po iznosu (slika 228.), a također su sličnih iznosa statički doprinosi r_n^{st} (V_{bn}^{st} i V_{5n}^{st}) (tablica 14.). Slične su i funkcije dinamičkih odziva $A_n(t)$. Za poprečnu reakciju $V_b(t)$, statički doprinosi r_n^{st} su istoga predznaka (tablica), a dinamički odzivi $A_n(t)$ su u fazi pa su slični doprinosi $r_n^{\mathrm{st}} A_n(t)$ prvih dvaju oblika (slika 229.). Zbog toga se u ukupnoj sumi $\sum r_n^{\mathrm{st}} A_n(t)$ doprinosi pribrajaju pa je poprečna reakcija puno veća od pojedinačnih doprinosa (slika 229.).

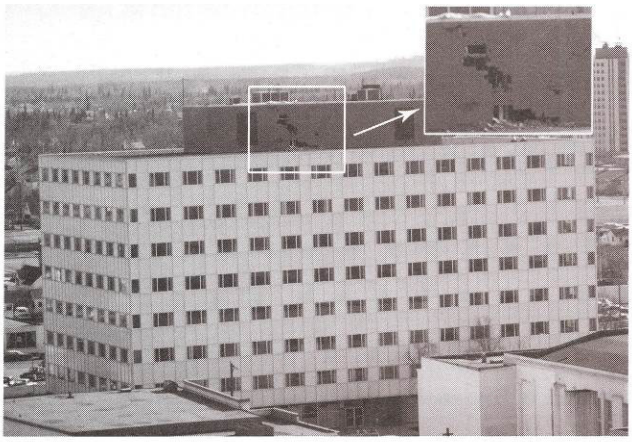
Za poprečnu silu u petomu (slabomu) katu $V_5(t)$, statički su doprinosi različitih predznaka (tablica), a vrijede isti dinamički odzivi (u fazi su). Znači, doprinosi $r_n^{\mathrm{st}} A_n(t)$ su različitih predznaka (slika 229.), pa u ukupnoj sumi teže međusobnu poništenju. Važno je da preostala poprečna sila može biti velika. Primjerice, ovdje je približno jednaka težini kata ($V_5 = 4{,}44\ \mathrm{kN}$, $m_5 = 4{,}5\ \mathrm{kN/g}$). Ako omjer bočne sile i težine kata blizak jedinici, nastaju oštećenja pri potresu.



Slika 229.: Poprečna reakcija i poprečna sila pete etaže poopćenog sustava i ukupni odzivi

Slika 230.: Primjer oštećenja zgrade u Mexico Cityju s vodospremnikom na vrhu

izvor: http://www.fgg.uni-lj.si/~/pmoze/ESDEP/master/wg17/l0100.htm



Slika 231.: Primjer oštećenja zgrade s podatljivim katom

12.3. Proračun primjenom spektra odziva

Postupak prikazan u prošlom poglavlju jest proračun odziva u vremenu ($r(t)$ je funkcija vremena), međutim, dimenzioniranje obično temeljimo na vršnim silama i pomacima. Ključno je pitanje možemo li odrediti vršnu vrijednost izravno iz spektra odziva? Za sustav s jednim stupnjem slobode odgovor je da (poglavlje 5.4), a za sustav s više stupnjeva slobode UVJETNO DA. To znači da ekstrem nije točan, jednak vršnoj vrijednosti funkcije $r(t)$, ali su procjene dovoljno dobre za potrebe dimenzioniranja konstrukcije.

12.3.1. Vršne vrijednosti modalnih odziva

Vršna vrijednost r_{n0} modalnog odziva $r_n(t)$ je poznata iz spektra odziva. Podsjetimo se iz izraza (447) da je odziv u vremenu $r_n(t) = r_n^{\mathrm{st}} A_n(t)$. Uz vršnu vrijednost pseudoubrzanja A_n vršna vrijednost odziva je $r_{n0} = r_n^{\mathrm{st}} A_n$. Iznos pseudoubrzanja A_n je poznat iz stvarnog (slika 114.) ili projektnog spektra (slika 135.). Primijetite da se gubi ovisnost odziva r_n o vremenu (r_n^{st} ne ovisi o t) jer funkciju $r_n(t)$ zamjenjujemo vršnom vrijednosti, skalarom r_{n0}. Predznak vršne vrijednosti r_{n0} je jednak predznaku r_n^{st} jer je iznos pseudoubrzanja A_n prema definiciji pozitivan (ordinata spektra pseudoubrzanja). Ekstremi r_{n0} bilo kojega modalnog odziva $r_n(t)$ istodobno nastupaju, a vrijeme nastupa je jednako trenutku nastupa ekstrema od $A_n(t)$ i nastupa ekstrema od $D_n(t)$ (jer je $A_n(t) = \omega_n^2 D_n(t)$ i ω_n^2 ne ovisi o t). Primjerice, odaberite broj oblika titranja n iz primjera peteroetažne posmične zgrade i uočite vrijeme pojave ekstrema (slika 224.). Za isti oblik titranja n ono je jednako za sve ekstreme odziva (slika 225. i slika 226.). Slično tome, usporedite vrijeme vršnih vrijednosti na slikama 228. i 229.

12.3.2. Pravila modalnih kombiniranja

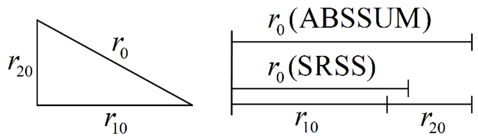
Ako poznajemo vršne vrijednosti modalnih odziva r_{n0} ($n = 1, \ldots, N$), dolazimo do problema kako odrediti ekstrem (amplitudu) ukupnog odziva $r_0 = \max_t |r(t)|$ jer vršne vrijednosti r_{n0}, ali i r_0, nastupaju u različitim vremenima. Primjerice, usporedite vremena nastupa na slikama 225., 226. ili 229. za razne oblike titranja n. Ako su vršne vrijednosti modalnih odziva r_{n0} određene primjenom spektra, vrijeme nastupa nije poznato. Znači, za međusobno kombiniranje nužne su aproksimacije. Gornja međa ekstrema ukupnoga odziva jest zbroj apsolutnih vrijednosti svih ekstrema:

$$r_0 \leq \sum_{n=1}^{N} |r_{n0}|, \qquad (468)$$

pod pretpostavkom da su sve vršne vrijednosti istih predznaka i da nastupaju istodobno. Primijetimo da je to izrazito konzervativna pretpostavka (previše na sigurnu stranu) i nije ekonomična pa se rijetko rabi za proračune konstrukcija (osim za proračune nuklearnih elektrana prema nekim propisima). Takva aproksimacija se naziva pravilo apsolutne sume (ABSSUM). Prijedlog E. Rosenbluetha (1951. godine) za određivanje ekstrema jest:

$$r_0 \approx \sqrt{\sum_{n=1}^{N} r_{n0}^2} \,. \tag{469}$$

Geometrijsko pojašnjenje Rosenbluethova pravila je pokazano na slici 232.



Slika 232.: Geometrijsko pojašnjenje pravila modalnih kombiniranja

Takvu aproksimaciju nazivamo pravilo drugoga korijena sume kvadrata ili skraćeno SRSS (od engl. SQUARE ROOT OF SUM OF SQUARES). Izraz (469) je odlična aproksimacija za konstrukcije s dobro razmaknutim periodima, a loša procjena za konstrukcije s bliskim periodima. Česti primjer bliskih perioda jest zgrada nesimetrična tlocrta. Taj problem je riješen aproksimacijom:

$$r_0 \approx \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \rho_{in} r_{i0} r_{n0}} \,, \tag{470}$$

koju nazivamo pravilo potpune kvadratne kombinacije ili skraćeno CQC (od engl. COMPLETE QUADRATIC COMBINATION). Svaki od N^2 članova izraza jest korijen produkta vršnih odziva r_{i0} i r_{n0} pri titranju zgrade i – tim i n – tim oblikom i koeficijenta korelacije (međuovisnosti) tih oblika ρ_{in} (vrijedi: $0 \le \rho_{in} \le 1$ i $\rho_{in} = 1$ za $i = n$).
Radi usporedbe s pravilom SRSS raspišimo izraz CQC u obliku:

$$r_0 \approx \sqrt{\sum_{n=1}^{N} r_{n0}^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}}_{i \ne n} \rho_{in} r_{i0} r_{n0}} \,. \tag{471}$$

Prva suma (članovi za $i = n$) je poput pravila SRSS, pri čemu su svi članovi pozitivni, dok su kod dvostruke sume (preostali članovi, za $i \ne n$) članovi pozitivni ili negativni. Članovi su negativni ako su modalni statički odzivi r_i^{st} i r_n^{st} suprotnih predznaka što je jednako predznacima od r_{i0} i r_{n0} jer je pseudoubrzanje A_n prema definiciji pozitivno. Znači, iznos dvostruke sume smanjuje ili povećava iznos prve sume pa CQC procjena odziva r_0 može biti veća ili manja od SRSS procjene. Može se pokazati da je dvostruka suma u izrazu (470) uvijek pozitivna. Prema definiciji koeficijenta korelacije postoji nekoliko CQC inačica. Danas je najviše u uporabi ona prema Der Kiureghianu:

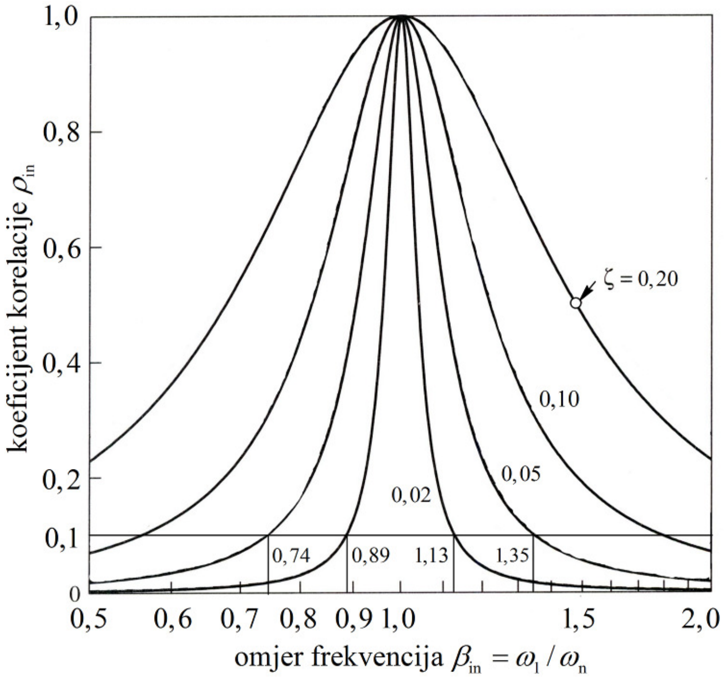
$$\rho_{in} = \frac{8\sqrt{\zeta_i \zeta_n}\,(\beta_{in}\zeta_i + \zeta_n)\beta_{in}^{3/2}}{(1-\beta_{in}^2)^2 + 4\zeta_i\zeta_n\beta_{in}(1+\beta_{in}^2) + 4(\zeta_i^2 + \zeta_n^2)\beta_{in}^2} \,. \tag{472}$$

Vrijedi (uz $\beta_{in} = \omega_i / \omega_n$) da je koeficijent korelacije $0 \le \rho_{in} \le 1$, $\rho_{in} = \rho_{ni}$ i $\rho_{in} = 1$ za $i = n$.
Za dva oblika titranja istih perioda i prigušenja koeficijent korelacije ρ_{in} je također 1.

Ako je isti iznos prigušenja za sve oblike titranja ($\zeta_i = \zeta_n = \zeta$), koeficijent korelacije jest:

$$\rho_{in} = \frac{8\zeta^2(1+\beta_{in})\beta_{in}^{3/2}}{(1-\beta_{in}^2)^2 + 4\zeta^2\beta_{in}(1+\beta_{in})^2} \tag{473}$$

Na slici 233. je pokazan koeficijent korelacije kao funkcija omjera dviju vlastitih frekvencija, za četiri iznosa koeficijenta relativnog prigušenja. Primijetite da iznos koeficijenta naglo opada ako su frekvencije razmaknute. To je posebno izraženo za manje iznose prigušenja što je tipičan slučaj. Također, uočite usko područje oko $\beta_{in} = 1$ sa značajnim iznosima ρ_{in} .



Slika 233.: Promjena koeficijenta korelacije s omjerom modalnih frekvencija u logaritamskim mjerilu

Primjerice, za $\zeta = 5\%$ iznos $\rho_{in} > 0,1$ vrijedi tek za omjere frekvencija u području $1/1,35 \le \beta_{in} \le 1,35$, a ako je $\zeta = 2\%$ isti iznos vrijedi za još uže područje frekvencija $1/1,13 \le \beta_{in} \le 1,13$. Za konstrukcije s dobro razmaknutim periodima $\rho_{in} \approx 0$ pa svi članovi dvostruke sume (za $i \neq j$) iz izraza (471) iščezavaju, a ostaje samo prva suma. Znači, izraz za CQC reducira se na izraz za SRSS što potvrđuje tvrdnju da pravilo SRSS vrijedi samo za dobro razmaknute periode.

Istaknimo da su pravila SRSS i CQC temeljena na teoriji slučajnih titranja. Vršni odziv r_0 je srednja vrijednost ekstremnih odziva iz skupa potresnih zapisa, pa je pravila najbolje upotrijebiti uz projektni (glatki) spektar određen kao srednja vrijednost spektara većeg broja zapisa ili konzervativno, iz srednje vrijednosti plus jedne standardne devijacije. Pravila su procjena, no postoje pogreške koje nisu na sigurnu stranu. Iznos pogreške ovisi o periodima, oblicima titranja i obliku spektra. Analizom velikoga broja zgrada ustanovljena je pogreška do 25%, a najveća pogreška nastaje pri ocjeni lokalnoga odziva (primjerice, katni pomak, poprečna sila ili moment u višim etažama). Pogreška može biti veća ili manja ako rabimo nazubljeni spektar jednoga zapisa.

12.3.3. Pojašnjenje spektralne analize

Spektralna analiza je postupak za dinamički proračun konstrukcije. Iako je dinamičke prirode, reducira se na niz statičkih proračuna. Za svaki promatrani oblik titranja:

- provodimo statičku analizu konstrukcije opterećene silama $\mathbf{s}_n$,
- dobivamo statičke odzive r_n^{st} (primjerice moment u nekom presjeku),
- množimo ih ordinatom spektra pseudoubrzanja A_n [ekstrem od $A_n(t)$!],
- dobivamo vršni modalni odziv u nekom presjeku $r_{n0} = r_n^{\mathrm{st}} A_n$,
- radi određivanja $A_n = \max_t |A_n(t)|$ nije potreban proračun u vremenu.

Međutim, postupak ipak jest dinamički jer rabi periode, oblike titranja, prigušenje i dinamička svojstva potresnog zapisa (primjenom spektra odziva), no proračuni u vremenu nisu potrebni jer su već obavljeni pri tvorbi spektra.

12.4. Spektralna analiza višeetažnih simetričnih zgrada

Promatramo višekatnice dvoosno simetričnog tlocrta pobuđene potresom duž jedne osi simetrije. Vršna vrijednost[40] doprinosa n–toga oblika titranja jest $r_n = r_n^{\mathrm{st}} A_n$, pri čemu se modalni statički odzivi r_n^{st} određuju statičkim proračunom za opterećenje silama $\mathbf{s}_n$. Izrazi za važnije r_n^{st} (primjerice u_{jn}^{st}, $\Delta_{jn}^{\mathrm{st}}$, V_{bn}^{st}, M_{bn}^{st}) su dati u tablici 11.

Ukupni vršni modalni odzivi (u skladu s izrazom za r_n) su:

$$\begin{aligned}
u_{jn} &= u_{jn}^{\mathrm{st}} A_n = \underbrace{\left(\Gamma_n/\omega_n^2\right)\phi_{jn}}_{\text{Tablica 11.}} \underbrace{\omega_n^2 D_n}_{A_n} = \Gamma_n \phi_{jn} D_n, \\
\Delta_{jn} &= \Delta_{jn}^{\mathrm{st}} A_n = \underbrace{\left(\Gamma_n/\omega_n^2\right)\left(\phi_{jn} - \phi_{j-1,n}\right)}_{\text{Tablica 11.}} \underbrace{\omega_n^2 D_n}_{A_n} = \Gamma_n \left(\phi_{jn} - \phi_{j-1,n}\right) D_n, \\
V_{bn} &= V_{bn}^{\mathrm{st}} A_n = M_n^* A_n \qquad M_{bn} = M_{bn}^{\mathrm{st}} A_n = h_n^* M_n^* A_n,
\end{aligned} \tag{474}$$

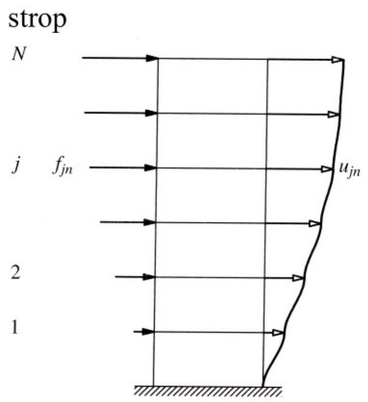
pri čemu je vrijednost $D_n = D(T_n, \zeta_n)$ ordinata spektra pomaka za T_n i ζ_n, a vrijednost $A_n = A(T_n, \zeta_n)$ je ordinata spektra pseudoubrzanja za T_n i ζ_n. Drugi način određivanja A_n je primjenom D_n kao umnoška $\omega_n^2 D_n$. Odzivi su vršni jer su D_n i A_n vršne vrijednosti od $D_n(t)$ i $A_n(t)$. Statički doprinosi r_n^{st} su konstantni u vremenu i ne određuju ekstrem. Slično, ekvivalentne statičke sile koje uzrokuju vršne modalne odzive su (slika 234.):

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{s}_n A_n, \qquad f_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn} A_n, \tag{475}$$

pri čemu vektor $\mathbf{f}_n = \left[f_{1n} \ \ \ldots \ \ f_{Nn}\right]^{\mathrm{T}}$ opisuje bočne sile koje uzrokuju vršne odzive. U $\mathbf{f}_n(t) = \mathbf{s}_n A_n(t)$ iz izraza (425), vrijednost $A_n(t)$ je zamijenjena vršnom vrijednosti A_n. Prema tomu, vektor $\mathbf{f}_n$ sadrži vršne vrijednosti vektora $\mathbf{f}_n(t)$. Sile $s_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn}$ iz izraza (434) ne

[40] izostavimo indeks 0: umjesto r_{n0} pišemo samo r_n

ovise o vremenu t i ne određuju ekstrem. Budući da jednu statičku analizu provodimo za svaki oblik titranja n, kod spektralne analize je praktično rabiti izravno sile $\mathbf{f}_n$ jer je rezultat odmah ukupni vršni modalni odziv r_n. Ako se rabe prvo sile $\mathbf{s}_n$, rezultat proračuna je vršni statički modalni odziv r_n^{st} kojeg potom moramo množiti s A_n. Nasuprot spektralnoj analizi, kod analize odziva u vremenu (poglavlja 12.1 i 12.2) ističe se uporaba statičkog modalnog odziva r_n^{st} jer naglašava činjenicu da je statičku analizu za opterećenje $\mathbf{s}_n$ potrebno provesti samo jednom, a unatoč tomu vršni modalni odziv $r_n(t)$ dobivamo u funkciji vremena (u svakomu t).



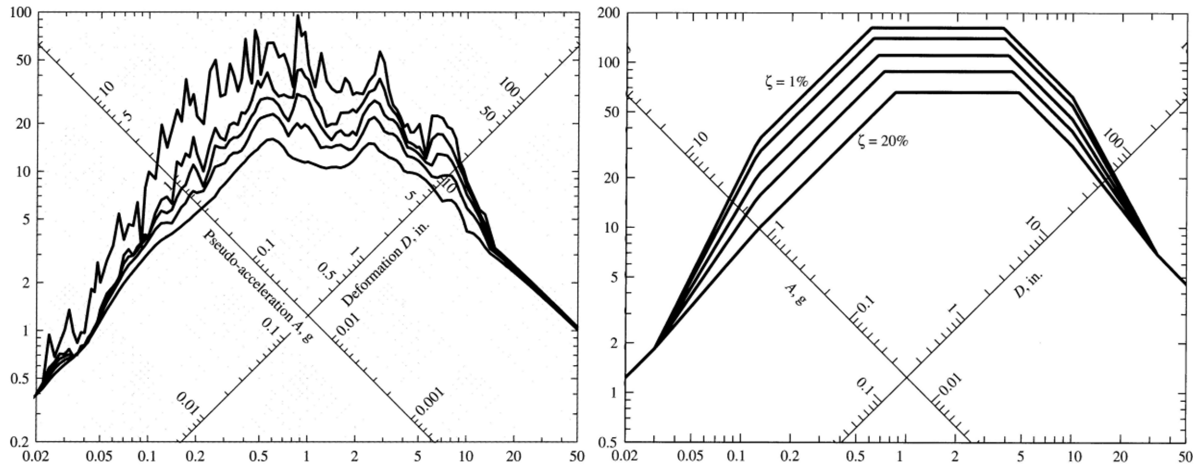
Slika 234.: Ekvivalentne statičke sile koje uzrokuju vršne modalne odzive

Znači, vršni doprinos r_n ukupnomu odzivu r dobivamo statičkom analizom za sile $\mathbf{f}_n$. Smjer djelovanja komponenata f_{jn} je određen smjerom komponenata ϕ_{jn}. Za temeljni (prvi) oblik titranja one djeluju u istomu smjeru, a za više oblike titranja sile mijenjaju smjer po visini zgrade. Primijetite da za određivanje u_{jn} i Δ_{jn} nije potrebna statička analiza. Ova tvrdnja proizlazi iz strukture formula u izrazu (474). Dovoljno je riješiti problem vlastitih vrijednosti, odrediti Γ_n i očitati D_n.

Vršne vrijednosti odziva procjenjujemo primjenom pravila CQC ili SRSS, pri čemu trebamo uključiti sve oblike titranja koji značajno utječu na odziv.

Sažetak spektralne analize višeetažnih simetričnih zgrada

Ako promatramo zgradu od N katova s dvije osi simetrije u tlocrtu i pobudom u smjeru jedne osi koja je određena spektralnom krivuljom (primjerice, slika 235.), odziv možemo odrediti spektralnom analizom u sljedećim koracima:



Slika 235.: Spektar odziva i projektni spektar za različita prigušenja

1. odaberemo spektralnu krivulju i odredimo svojstva konstrukcije:
   a) matricu masa $\mathbf{m}$ i bočne krutosti $\mathbf{k}$
   b) procijenimo koeficijent relativnog prigušenja ζ
2. izračunamo frekvencije ω_n $(T_n = 2\pi / \omega_n)$ i oblike titranja ϕ_n
   (treba riješiti problem vlastitih vrijednosti $\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2 \mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_n$)
3. izračunamo vršni odziv r_n pri titranju n–tim oblikom:
   a) odredimo pomak i pseudoubrzanje D_n i A_n
      (za pripadne T_n i ζ_n očitamo ordinate spektra)
   b) izračunamo pomake stropova i relativne pomake etaža
      (odredimo $\Gamma_n = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{m} \ell / (\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n)$, potom u_{jn} i Δ_{jn})
   c) odredimo ekvivalentne statičke bočne sile $\mathbf{f}_n$
      (opterećenje $\mathbf{f}_n = \mathbf{s}_n A_n$, komponente $f_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn} A_n$)
   d) provedemo statički proračun za opterećenje $\mathbf{f}_n$
      (odredimo r_n : reakcije i unutarnje sile u konstrukciji)
4. pravilom SRSS ili CQC procijenimo ukupni vršni iznos odziva r_0
   (ako su periodi razmaknuti vrijedi SRSS, za bliske periode CQC).

Korake 2 – 4 je dovoljno napraviti za manji broj oblika titranja.

LITERATURA

[1] Chopra, K. A.: DYNAMICS OF STRUCTURES, Theory and Application to Earthquake Engineering, Fourth Edition, Prentice Hall, New Jersey, 2007.

[2] Penzien, J.; Clough, R.: DYNAMICS OF STRUCTURES, Second Edition (Revised), Computers & Structures, Inc., Berkeley, USA, 2003.

[3] Humar, L. J.: DYNAMICS OF STRUCTURES, Second Edition, A. A. Balkema Publishers, Lisse, 2002.

[4] Tedesco, W. J.; McDougal, G. W.; Ross, A. C.: STRUCTURAL DYNAMICS, Theory and Applications, Addison–Wesley, Menlo Park, California, 1999.

[5] Mihanović, A.: DINAMIKA KONSTRUKCIJA, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 1995.

[6] Čaušević, M.: DINAMIKA KONSTRUKCIJA, diskretni sustavi, Školska knjiga, Zagreb, 2005.

[7] Paz, M.; Leigh, W.: STRUCTURAL DYNAMICS, Theory and Computation, Fifth Edition, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2004.

[8] Den Hartog, J. P.: MECHANICAL VIBRATIONS, Third Edition, McGraw–Hill Book Company, New York, 1947.

POPIS SLIKA

POPIS TABLICA