2.8 Derivacije i diferencijali višeg reda

Neka funkcija $z = f(x,y)$ ima parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$. Te su derivacije i same funkcije dviju varijabli, pa i one mogu imati svoje parcijalne derivacije u nekim (ili u svim) točkama.
Ako postoji $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ onda kažemo da f ima drugu parcijalnu derivaciju po x i pišemo $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

Slično, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$.

Funkcije $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ su **mješovite** parcijalne derivacije.

Primjer 2.17. $f(x,y) = x^3y^2 - xy^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - y^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 3xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x^2y - 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3 - 6xy, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 3y^2$$

U gornjem primjeru je $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Je li to slučajno?

Teorem 2.10. *(Schwarz)*
Neka funkcija $f(x,y)$ ima parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ u nekoj okolini točke $M_0 = (x_0, y_0)$ i neka su $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ neprekidne u M_0.

Tada je $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ u M_0.

Analogno se definiraju i parcijalne derivacije viših redova. Za mješovite parcijalne derivacije vrijedi analogon Schwarzovog teorema.

Neka je sada $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna na nekom području Ω. Dakle, za svaki $P \in \Omega$ postoji $Df(P)$. Uočimo, $Df : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Sada, kao i za realne funkcije, postavljaju se pitanja neprekidnosti i diferencijabilnosti od $Df(P)$.

Definicija 2.19. *Neka je $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna na području Ω. Za funkciju $f(P)$ kažemo da je klase C^1 na Ω, i pišemo $f \in C^1(\Omega)$, ako je funkcija $Df(P)$ neprekidna na Ω.*

Može se pokazati da je $f \in C^1(\Omega)$ ako i samo ako $f(P)$ ima parcijalne derivacije koje su neprekidne na Ω. Analogno kao i uslučaju realnih funkcije jedne realne varijable postavlja se pitanje diferencijabilnosti višeg reda.

Definicija 2.20. *Neka je $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ klase C^1 na području Ω i neka je $P_0 \in \Omega$. Ukoliko je funkcija $Df : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ diferencijabilna u P_0 (dakle postoji $D(Df)(P_0)$) onda kažemo da funkcija $f(P)$ ima drugi diferencijal u P_0, kojeg označavamo s $D^2f(P_0)$ i definiramo kao $D^2f(P_0) = D(Df)(P_0)$.*

Pišući u terminima parcijalnih derivacija,

$$D^2f(P_0) = D(Df)(P_0) = \left(D\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), D\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(P_0) \end{pmatrix}.$$

Uočimo da $D^2f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$.

Definicija 2.21. *Neka je $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definirana na području Ω. Ako za svaki $P \in \Omega$ postoji $D^2f(P)$ i ako je $D^2f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ neprekidno na Ω, onda kažemo da je $f(P)$ klase C^2 na Ω i pišemo $f \in C^2(\Omega)$.*

Može se pokazati da je $f \in C^2(\Omega)$ ako i samo ako parcijalne derivacije drugog reda od $f(P)$ postoje i neprekidne su na Ω. Induktivno definiramo diferencijale viših redova funkcije $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ u točki P_0: $D^m f(P_0) = D(D^{m-1}f)(P_0)$ za $m \geq 1$. Uočimo, $D^m f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2^m}$. Općenito, za funkciju $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $D^m f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n^m}$.

Definicija 2.22. *Neka je $m \geq 1$ i neka je $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definirana na području Ω. Ako za svaki $P \in \Omega$ postoji $D^m f(P)$ i ako je $D^m f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2^m}$ neprekidno na Ω, onda kažemo da je $f(P)$ klase C^m na Ω i pišemo $f \in C^m(\Omega)$.*

Može se pokazati da je $f \in C^m(\Omega)$ ako i samo ako parcijalne derivacije m-tog reda od $f(P)$ postoje i neprekidne su na Ω. Napomenimo da je parcijalna derivacija m-tog reda, $m \geq 2$, od $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dana s

$$\frac{\partial^m f}{\partial^k x \partial^l y}(P)$$

za $k, l \geq 0$ takve da $k + l = m$. Također napomenimo da za $f \in C^m(\Omega)$ vrijedi Schwarzov teorem višeg reda koji kaže da su parcijalne derivacije m-tog (ili nižeg) reda po istim varijablama jednake, bez obzira kojim se redom derivira. Uočimo sljedeće: za $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ koja je klase C^2 na području Ω vrijedi

$$
\begin{aligned}
Df(P)\vec{h} &:= Df(P)\vec{h}^t = \left(\frac{\partial f}{\partial x}h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}h_2\right)(P) \\
Df(P)\vec{h}^2 &:= \vec{h}\left(D^2 f(P)\vec{h}^t\right) = (h_1, h_2)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(P) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}h_2\right)^2 (P).
\end{aligned}
$$

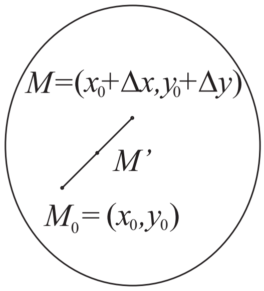
Analogno, ako je $f \in C^m(\Omega)$, može se pokazati da vrijedi

$$
Df(P)\vec{h}^m := \vec{h}\left(\ldots\left(\left(D^m f(P)\vec{h}^t\right)\vec{h}^t\right)\ldots\vec{h}^t\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}h_2\right)^m (P),
$$

gdje se $D^m f(P)$ množi s $\vec{h}^t$, zdesna, $m - 1$ puta.

2.9 Taylorov teorem

Neka funkcija $z = f(x, y)$ ima neprekidne parcijalne derivacije do reda uključivo n na nekoj okolini točke (x_0, y_0) i neka je točka $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ u toj okolini. Zanima nas kako se mijenja vrijednost funkcije f ako se iz (x_0, y_0) pomaknemo u $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Što više informacija imamo o funkciji u M_0 (tj. što više njenih derivacija znamo), to bolju informaciju možemo dobiti o vrijednosti u M. Postupamo po analogiji sa slučajem funkcije jedne varijable, samo što umjesto vrijednosti derivacija u x_0 moramo uzimati diferencijale.



Slika 2.21: Spojnica $\overline{M_0M}$

Teorem 2.11.

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) &= f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right) f\Big|_{(x_0,y_0)} \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f\Big|_{(x_0,y_0)} + \dots \\ &+ \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n-1} f\Big|_{(x_0,y_0)} \\ &+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f\Big|_{(x',y')} \end{aligned}$$

pri čemu je točka $M' = (x', y')$ na spojnici točaka $\overline{M_0M}$.

Ovo je **Taylorova formula** za funkciju dviju varijabli. Sastoji se od polinomijalnog komada tzv. Taylorovog polinoma i ostatka.
Taylorov polinom je polinom u varijablama Δx i Δy, koeficijenti su mu vrijednosti parcijalnih derivacija funkcije $z = f(x, y)$ u točki $M_0 = (x_0, y_0)$.
Ostatak je vrijednost $n-$tog diferencijala, no njegovi su koeficijenti vrijednosti

parcijalnih derivacija funkcije f u **nepoznatoj** točki M'. Kako se točka M' nalazi između M_0 i M, gornji se teorem još zove i Taylorov teorem srednje vrijednosti.

Primjer 2.18. *Taylorov polinom 2. stupnja funkcije $f(x,y)$ u točki (x_0,y_0) je*

$$\begin{aligned}(T_2 f(x_0,y_0))(\Delta x,\Delta y) &= f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y\\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y\right.\\ &+ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\Delta y^2\right)\end{aligned}$$

Sada imamo $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = (T_2 f(x_0,y_0))(\Delta x,\Delta y) + R_3$, gdje R_3 uključuje vrijednosti trećih parcijalnih derivacija funkcije $f(x,y)$ u nepoznatoj točki koja se nalazi između (x_0,y_0) i $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$.

Taylorov polinom funkcije $f(x,y)$ u točki $(0,0)$ zove se Maclaurinov polinom. Za dovoljno glatke funkcije imamo i razvoj u Taylorov (Maclaurinov) red.