Poglavlje 3

Višestruki integrali

Definiciju višestrukih integrala nećemo ovdje dati jer nije jednostavna te se višestruki integrali u praksi nikad ne računaju po definiciji. Skica definicije se može vidjeti u [4].

3.1 Dvostruki integrali

Kažemo da je funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$ *integrabilna* na $D \subseteq \mathbb{R}^2$, ako postoji integral $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ i on je konačan. U nastavku je dan pregled svojstava koje se koriste prilikom računanja dvostrukih integrala.

- Ako je f neprekidna na ograničenom i zatvorenom skupu D, tada je f integrabilna na D. Ako je f neprekidna i ograničena na skupu D koji ima konačnu površinu, tada je također f integrabilna na D.
- *Linearnost*: Ako su f i g integrabilne na D i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tada je funkcija $\alpha f + \beta g$ također integrabilna na D, te vrijedi formula

$$\iint\limits_D \left(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\right)\,dx\,dy =$$

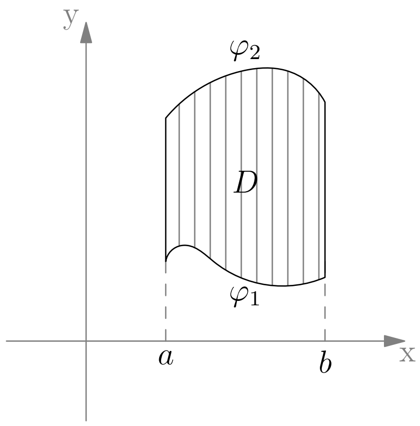
$$= \alpha \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

- *Aditivnost po području integracije*: Neka je f integrabilna na skupu D, te neka je $D = D_1 \cup D_2$, pri čemu presjek $D_1 \cap D_2$ ima površinu nula (npr. dužina, jedna točka ili prazan skup). Tada je

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

- *Fubinijev teorem*: Ako skup D ima oblik

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\right\}$$

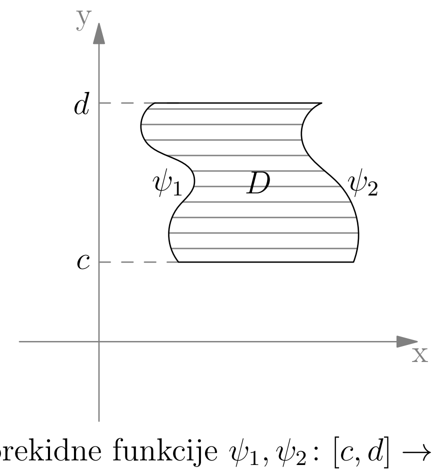


za neke $a, b \in \mathbb{R}$ i neprekidne funkcije $\varphi_1, \varphi_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, tada je

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx. \tag{3.1}$$

Ako skup D ima oblik

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\right\}$$



za neke $c, d \in \mathbb{R}$ i neprekidne funkcije $\psi_1, \psi_2 \colon [c,d] \to \mathbb{R}$, tada je

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy. \tag{3.2}$$

- Ako je D zatvoren i ograničen skup, tada je njegova površina jednaka integralu $\iint\limits_D 1\, dx\, dy$.

Formule (3.1) i (3.2) služe da se dvostruki integrali svedu na dva jednostruka. Jednostruke integrale računamo kao na Matematici 1, prvo unutarnji pa vanjski integral.

Kad računamo unutarnji integral, ako integriramo po varijabli x (tj. ako piše dx), onda varijablu y tretiramo kao konstantu i obratno. Ponekad varijable mogu imati druge nazive, npr. r i φ.

Ako je skup D i jednog i drugog od gornja dva oblika, onda se integral može računati objema formulama, tj. mogu se zamijeniti vanjski i unutarnji integral uz odgovarajuću reparametrizaciju područja D tako da granice vanjskog integrala budu fiksni brojevi.

Napomena. Integral oblika $\displaystyle\int_A^B \int_C^D f(x,y)\, dx\, dy$ se može zapisati i kao

$$\int_A^B dy \int_C^D f(x,y)\, dx,$$

tj. u stilu "diferencijal pokraj svojih granica". U ovoj skripti nećemo tako pisati, nego ćemo redovito diferencijale sortirati "na kraju". Zapisi su međutim potpuno ekvivalentni, te su samo stvar dogovora.

Zadatak 3.1. Izračunajte sljedeće integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 \left(x^2 + 2y\right) dx\, dy$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_{a\sin\varphi}^{a} r\, dr\, d\varphi$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dy\, dx$

(d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{\cos x}^{0} (1-x)\, dy\, dx.$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^1 \left(x^2+2y\right) dxdy &= \int_0^2 \left(\int_0^1 \left(x^2+2y\right) dx \right) dy \\
&= \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + 2xy \right) \Big|_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + 2y - 0 \right) dy \\
&= \left(\frac{y}{3} + y^2 \right) \Big|_{y=0}^{y=2} dy = \frac{2}{3} + 4 - 0 = \frac{14}{3}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_{a\sin\varphi}^{a} r\, dr d\varphi &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{a\sin\varphi}^{a} r\, dr \right) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} \Big|_{r=a\sin\varphi}^{r=a} \right) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2 \sin^2\varphi}{2} \right) d\varphi \\
&= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 - \sin^2\varphi\right) d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \\
&= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\, d\varphi \\
&= \frac{a^2}{2} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{2\pi}{2} + 0 - 0 - 0 \right) \\
&= \frac{a^2\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(c)

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dydx = \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dy \right)}_{\substack{y=\sqrt{1-x^2}\cdot\sin t \\ dy=\sqrt{1-x^2}\cdot\cos t\, dt \\ y=\sqrt{1-x^2} \;\Rightarrow\; t=\frac{\pi}{2} \\ y=0 \;\Rightarrow\; t=0}} dx$$

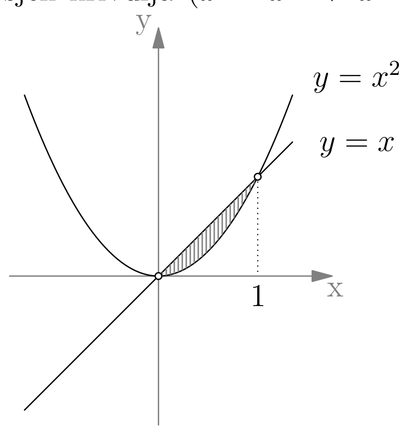
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-x^2) - (1-x^2)\sin^2 t} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \cos t \, dt \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-x^2)\sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \, dt \right) dx$$
$$= \int_0^1 (1-x^2) \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt \right)}_{\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}} dx = \int_0^1 (1-x^2) \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right) \Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} dx$$
$$= \frac{\pi}{4} \int_0^1 (1-x^2) \, dx = \frac{\pi}{4} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{6}.$$

(d) Zadaća.

□

Zadatak 3.2. Izračunajte $\iint_D \sin x \, dx \, dy$, ako je D skup ograničen krivuljama $y = x$ i $y = x^2$. Skicirajte D.

Rješenje: Nađemo presjek krivulja ($x = x^2 \Rightarrow x = 0, 1$), te skiciramo D:



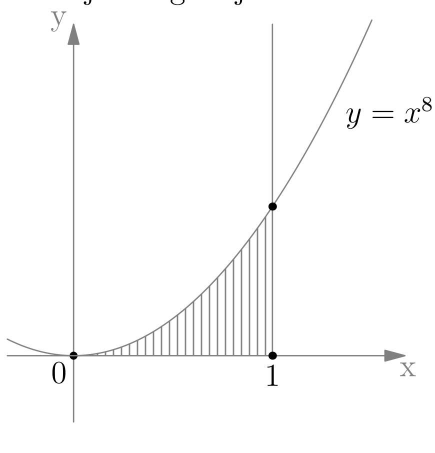
Uočimo da područje integracije ima isti oblik kao u Fubinijevom teoremu (zamislimo da se "ravnim" stranicama na skicama u formulama podudaraju krajnje točke, tj. čitave te dužine su zapravo točke $(0,0)$ i $(1,1)$). Primijenit ćemo formulu (3.1). Granice za vanjski integral su $0 \le x \le 1$, a za fiksni $x \in [0,1]$, granice unutarnjeg integrala su $x^2 \le y \le x$ (okomite linije na skici). Računamo:

$$\iint_D \sin x\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \sin x\,dy\,dx = \int_0^1 (y\sin x)\Big|_{y=x^2}^{y=x} dx$$
$$= \underbrace{\int_0^1 x\sin x\,dx}_{u=x,\,dv=\sin x dx} - \underbrace{\int_0^1 x^2\sin x\,dx}_{u=x^2,\,dv=\sin x dx} = \dots$$
$$= (-x\cos x+\sin x)\Big|_0^1 - (-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x)\Big|_0^1$$
$$= -\sin 1 - 2\cos 1 + 2.$$

□

Zadatak 3.3. Izračunajte integral $\iint_D e^{y/x^5}\,dx\,dy$, ako je područje integracije D ograničeno krivuljom $y = x^8$ i pravcima $x = 1$ i $y = 0$. Skicirajte D.

Rješenje: Skiciramo područje integracije:



$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^8\big\}.$$

Uočimo da je područje integracije istog oblika kao u formuli (3.1), s time da se lijevoj stranici podudaraju krajnje točke, tj. cijela stranica je zapravo točka $(0,0)$. Sa skice vidimo da su granice integracije za vanjski integral $0 \le x \le 1$, a za fiksni $x \in [0,1]$, granice unutarnjeg integrala su $0 \le y \le x^8$.

Računamo:

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{y/x^5}\,dxdy &= \int_0^1 \underbrace{\int_0^{x^8} e^{y/x^5}\,dy}_{t=y/x^5,\ dt=dy/x^5}\,dx = \int_0^1 \left(x^5 \int_0^{x^3} e^t\,dt\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x^5 e^t \Big|_{t=0}^{t=x^3}\right) dx = \int_0^1 x^5(e^{x^3}-1)dx \\
&= \underbrace{\int_0^1 x^5 e^{x^3} dx}_{t=x^3,\ dt=3x^2dx} - \int_0^1 x^5\,dx = \frac{1}{3}\underbrace{\int_0^1 te^t dt}_{u=t,\ dv=e^t dt} - \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{3}\left(te^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt\right) - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}(e-e+1) - \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Uočimo da se može primijeniti i formula (3.2) jer područje ima odgovarajući oblik, s time da je tada gornja stranica degenerirana u točku $(1,1)$. No, tada ne možemo izračunati unutarnji integral. □

Zadatak 3.4. Skicirajte područje integracije i promijenite poredak varijabli u integralu:

(a) $\displaystyle\int_0^4 \int_y^{10-y} f(x,y)\,dx\,dy$

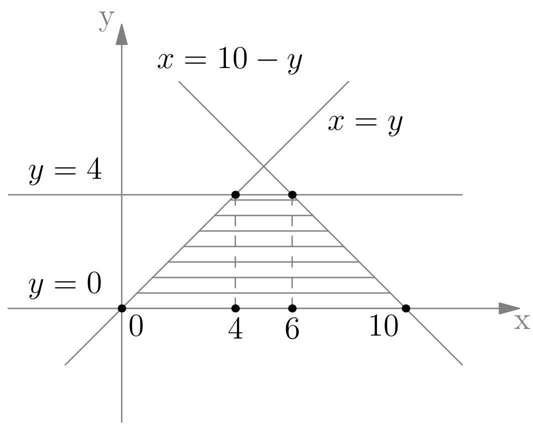
(b) $\displaystyle\int_1^3 \int_{x^2}^{x+9} f(x,y)\,dy\,dx.$

Rješenje:

(a) Područje integracije je

$$D = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon 0\le y\le 4,\ y\le x\le 10-y\big\}.$$

Skicirajmo ga:



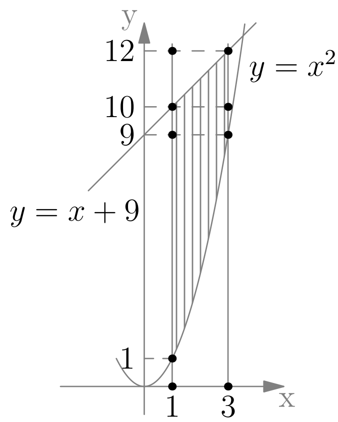
Ovo područje nema odgovarajući oblik kao u formuli (3.1). Zato ćemo ga particionirati na tri dijela koja su tog oblika (dva trokuta D_1 i D_3 te pravokutnik D_2) i iskoristiti aditivnost po području integracije.
Sa skice očitamo da su za lijevi trokut D_1 granice vanjskog integrala $0 \le x \le 4$, a za fiksni $x \in [0, 4]$, granice unutarnjeg integrala su $0 \le y \le x$. Isto napravimo za pravokutnik D_2 i za desni trokut D_3.
Primjenom formule za aditivnost po području integracije i zatim formule (3.1) na svaki od tri integrala dobivamo

$$\begin{aligned}\int_0^4 \int_y^{10-y} f(x,y)\,dx\,dy &= \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_3} f(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^4 \int_0^x f(x,y)\,dydx + \int_4^6 \int_0^4 f(x,y)\,dydx + \int_6^{10} \int_0^{10-x} f(x,y)\,dydx\end{aligned}$$

(b) Područje integracije je

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le x \le 3,\ x^2 \le y \le x + 9\big\}.$$

Skicirajmo ga:



Područje nema oblik kao u formuli (3.2) pa ćemo ga podijeliti na tri dijela kao na skici: područje D_1 omeđeno parabolom i dvama pravcima, pravokutnik D_2 i trokut D_3. Primjenom aditivnosti po području integracije i formule (3.2) dobivamo da je integral iz zadatka jednak

$$\int_1^9 \int_1^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy + \int_9^{10} \int_1^3 f(x,y)\,dxdy + \int_{10}^{12} \int_{y-9}^3 f(x,y)\,dxdy.$$

□

Zadatak 3.5. Skicirajte područje integracije i promijenite poredak varijabli u integralu:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^{e^x} f(x,y)\,dy\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^e \int_{\ln x}^1 f(x,y)\,dy\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dx\,dy$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy.$

Rješenje: Zadaća. □

Zadatak 3.6. Odredite površinu dijela ravnine omeđenog grafom funkcije $f(x) = \sin x$ za $0 \leq x \leq 2\pi$ i x-osi.

Rješenje: Zadaća. Rj. 4. □

Zadatak 3.7. Odredite površinu dijela ravnine omeđenog hiperbolom $y = \frac{1}{x}$ te pravcima $y = x - 2$ i $y = x + 2$.

Rješenje: Zadaća. Rj. $4\sqrt{2} + 4\ln(1+\sqrt{2})$. □