2.10 Ekstremi funkcija više varijabli

Promatramo funkciju $z = f(x, y)$ definiranu na području D i točku $M_0 = (x_0, y_0)$ u tom području.
Ako postoji okolina Ω točke M_0 takva da je

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) \leq 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega,$$

kažemo da u točki M_0 funkcija ima **lokalni maksimum**.
Ako za sve $(x, y) \in \Omega$ vrijedi

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) \geq 0,$$

kažemo da funkcija u M_0 ima **lokalni minimum**. Lokalni maksimum i lokalni minimum su **lokalni ekstremi**.
Ako su nejednakosti stroge, govorimo o strogim lokalnim ekstremima.
Dakle, točka $M_0 = (x_0, y_0)$ je točka lokalnog ekstrema ako postoji okolina Ω od M_0 tako da za sve točke $(x, y) \in \Omega$ prirast $\Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ ima konstantan predznak.

Primjer 2.19. *$f(x, y) = x^2 + y^2$ ima (strogi) lokalni minimum u $(0, 0)$.*

Primjer 2.20. *$f(x, y) = -x^2 - y^2$ ima (strogi) lokalni maksimum u $(0, 0)$.*

Primjer 2.21. *$f(x, y) = y^2$ ima lokalni minimum u svakoj točki oblika $(x, 0)$.*

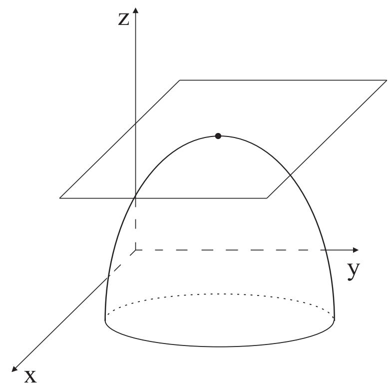
Sljedeći teorem je dvodimenzionalni analogon Fermatove leme.

Teorem 2.12. *(Nužan uvjet ekstrema)*
Ako glatka funkcija $f(x, y)$ ima lokalni ekstrem u točki $M_0 = (x_0, y_0)$ tada se sve prve parcijalne derivacije poništavaju u toj točki:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Dokaz: Znamo da f ima lokalni ekstrem u $M_0 = (x_0, y_0)$ pa zaključujemo da kad fiksiramo $y = y_0$, funkcija jedna varijable $f(x, y_0)$ ima lokalni ekstrem u x_0. Po Fermatovoj lemi slijedi da je $f'(x, y_0)\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. Tvrdnja za parcijalnu derivaciju po drugoj varijabli slijedi analogno i teorem je dokazan.

Točka u kojoj se sve prve parcijalne derivacije poništavaju zove se **stacionarna točka.**
Geometrijski, stacionarna točka je točka u kojoj je tangencijalna ravnina na graf funkcije horizontalna.



Slika 2.22: Tangencijalna ravnina u točki globalnog maksimuma

Gornji teorem ne daje dovoljne uvjete, tj. ne mora svaka stacionarna točka biti točka lokalnog ekstrema.

Primjer 2.22. *Pogledajmo funkciju* $f(x,y) = xy$. *Računamo parcijalne derivacije:* $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$. *Zaključujemo da je* $(0,0)$ *stacionarna točka. No kada pogledamo priraste:*

$$\Delta f(0,0) = xy - 0 = xy \begin{cases} > 0 & za\ x\ i\ y\ istog\ predznaka \\ < 0 & za\ x\ i\ y\ različitog\ predznaka \end{cases}$$

vidimo da se graf penje dok se udaljava od ishodišta u 1. *i* 3. *kvadrantu, a spušta u* 2. *i* 4. *kvadrantu. Zaključak je da* $(0,0)$ *nije lokalni ekstrem od* f. *Ishodište je za ovu plohu* ***sedlasta točka****.*

Sedlasta točka funkcije f je stacionarna točka koja nije ekstrem funkcije f.

Jedna od pretpostavki gornjeg teorema je glatkoća funkcije. Ukoliko tu pretpostavku izbacimo, teorem se modificira na sljedeći način:

Teorem 2.13. *Ako funkcija* $f(x,y)$ *ima lokalni ekstrem u* (x_0, y_0), *onda se svaka prva parcijalna derivacija ili poništava u* (x_0, y_0) *ili ne postoji u* (x_0, y_0).

Primjer 2.23. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Parcijalne derivacije nisu definirane u $(0,0)$*, a u toj točki* f *ima lokalni minimum. Ishodište zbog nepostojanja parcijalnih derivacija nije regularna točka pa u toj točki nema normale ni tangencijalne ravnine.*

Dovoljni uvjeti za postojanje ekstrema dani su sljedećim teoremom.

Teorem 2.14. *Neka je* $M_0 = (x_0, y_0)$ *stacionarna točka funkcije* $f(x,y)$*, pri čemu je* $f \in C^2(\Omega)$*. Neka je* D *determinanta definirana s*

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix}.$$

(i) Ako je $D > 0$ *tada:*

a) Za $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$ f *ima u* M_0 *lokalni minimum.*

b) Za $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$ f *ima u* M_0 *lokalni maksimum.*

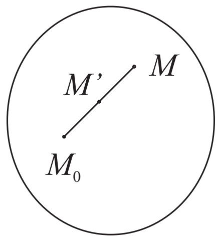
(ii) Ako je $D < 0$*, onda* f *u* M_0 *nema lokalni ekstrem.*

(iii) Ako je $D = 0$*, ne možemo zaključiti ima li* f *u* M_0 *lokalni ekstrem bez dodatnih razmatranja.*

Skica dokaza.

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) &= f(x_0,y_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y}_{0} \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x',y')(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x',y')\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x',y')(\Delta y)^2\right], \end{aligned}$$

pri čemu je $M'(x',y')$ točka negdje na spojnici točaka $M_0 = (x_0,y_0)$ i $M = (x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$.



Slika 2.23: Spojnica $\overline{M_0M}$

Sada je

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)\\ &= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M')}_{A}(\Delta x)^2 + 2\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M')}_{B}\Delta x\Delta y + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M')}_{C}(\Delta y)^2\right].\end{aligned}$$

Ako je u M_0 zadovoljeno $AC - B^2 > 0$, onda, zbog neprekidnosti drugih parcijalnih derivacija ($f \in C^2(\Omega)$) mora biti $AC - B^2 > 0$ i na nekoj okolini od M_0.
Ako je $A > 0$ u M_0, onda mora biti pozitivno i na nekoj okolini.
Mi želimo ocijeniti predznak izraza $A(\Delta x)^2 + 2B\Delta x\Delta y + C(\Delta y)^2$. Taj izraz možemo pisati kao

$$A(\Delta x)^2 + 2B\Delta x\Delta y + C(\Delta y)^2 = \underbrace{\frac{1}{A}[\underbrace{(A\Delta x + B\Delta y)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\underbrace{(AC - B^2)}_{>0}(\Delta y)^2]}_{>0}}_{>0}.$$

No predznak od Δf je isti kao i predznak gornjeg izraza, dakle u M_0 f ima lokalni minimum.
Ostale se tvrdnje dokazuju analogno. $\square$

Glatka funkcija dviju varijabli u okolini stacionarne točke (lokalno) izgleda ili kao eliptički paraboloid ($D > 0$) okrenut prema gore ($A > 0$) ili dolje ($A < 0$) ili kao hiperbolički paraboloid ($D < 0$), ili ima $D = 0$.
Što ako je $D = 0$? Pogledajmo funkcije $f_1(x,y) = x^4 + y^4$, $f_2(x,y) = x^3y^3$.
Funkcija f_1 ima lokalni minimum u 0, a f_2 ima sedlo. Dobra je ideja gledati

ponašanje na zrakama $y = kx$. Za $x^4 + y^4$ gledamo

$$\Delta f(0,0) = f(x,y) - f(0,0) = x^4 + y^4 > 0$$

pa vidimo da f ima u $(0,0)$ strogi lokalni minimum.

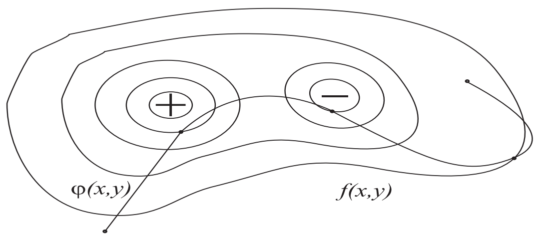
2.10.1 Uvjetni (vezani) ekstremi

Često se pojavljuje potreba određivanja ekstrema funkcije više varijabli ne na cijelom području definicije nego na nekom podskupu definiranom dodatnim uvjetima.
Promatrat ćemo situaciju u kojoj su ti dodatni uvjeti opisani krivuljom u području definicije funkcije čije ekstreme tražimo.

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) \quad \rightarrow \quad extr. \\ \varphi(x,y) = 0 \end{array}\right\} problem\ uvjetnog\ ekstrema$$

Jedan takav problem je sljedeći:

Primjer 2.24. *Zanimaju nas najviša i najniža točka na stazi opisanoj krivuljom $\varphi(x,y) = 0$ koja se nalazi na terenu čija je nadmorska visina opisana funkcijom $f(x,y)$.*



Slika 2.24: Slika terena

U jednostavnim slučajevima problem se može svesti na nalaženje ekstrema funkcije jedne varijable.

Primjer 2.25. *Nađimo ektreme funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2$ na krivulji u ravnini zadanoj sa $\varphi(x,y) = x + y - 1 = 0$.*
Izrazimo y iz $\varphi(x,y)$ preko x, $y = 1 - x$, uvrstimo u funkciju

$$f(x,y) = x^2 + (1-x)^2 = 1 - 2x + 2x^2$$

i nađemo ekstreme od $f(x)$. $f'(x) = -2 + 4x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$ *je stacionarna točka,* $f''(\frac{1}{2}) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$ *je lokalni minimum, pa je rješenje našeg problema točka* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$*, i* $f_{min} = \frac{1}{2}$.

Što ako se $\varphi(x, y)$ ne može riješiti po x ili y? Vratimo se Primjeru 2.24. Što možemo očitati sa slike terena?
Ekstremalne vrijednosti na stazi se postižu tamo gdje ona dira izohipse, tj. tamo gdje je paralelna s njima. Paralelnost krivulja znači paralelnost tangenata, a komponente vektora smjera tangenata su parcijalne derivacije. Dakle, tražimo točke u kojima su parcijalne derivacije od $f(x, y)$ i $\varphi(x, y)$ proporcionalne.
Ova metoda zove se metoda Lagrangeovih multiplikatora. Počinjemo uvođenjem veličine λ koju zovemo **Lagrangeov multiplikator** (množitelj) i formiramo Lagrangeovu funkciju:

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y).$$

Nakon toga tražimo stacionarne točke funkcije $F(x, y)$ koje zadovoljavaju traženi uvjet:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \quad \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{array}\right\}$$

Iz ovoga nađemo λ i koordinate (x_0, y_0) moguće točke ekstrema. Postojanje i prirodu ekstrema provjeravamo ispitujući predznak drugog diferencijala Lagrangeove funkcije,

$$d^2F(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2,$$

u okolini točke (x_0, y_0) i λ, uz uvjet $\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$.
Ako je $d^2F < 0$ imamo uvjetni maksimum, ako je $d^2F > 0$ imamo uvjetni minimum.
Ako je u stacionarnoj točki (x_0, y_0) determinanta

$$D(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0,$$

onda imamo uvjetni ekstrem, uvjetni maksimum za $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, odnosno uvjetni minimum za $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$.
Pogledajmo traženje uvjetnih ekstrema metodom Lagrangeovih multiplikatora na konkretnim primjerima:

Primjer 2.26. $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad extr. \\ x + y = 1 \end{array}\right\}$

$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{\lambda}{2} \\ y = -\dfrac{\lambda}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = x \quad \Rightarrow \quad 2x = 1 \quad \Rightarrow$$

$x = y = \frac{1}{2}, \ \lambda = -1 \quad \Rightarrow \quad F(x, y, -1) = x^2 + y^2 - x - y + 1.$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0; \quad D = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

$D > 0 \ \ \& \ \ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0 \quad \Rightarrow$ *točka* $M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *je točka lokalnog minimuma.*

Ako Lagrangeova funkcija ima bezuvjetni ekstrem, onda f ima uvjetni ekstrem. Postupak koji smo opisali daje dovoljne uvjete; no može se dogoditi da Lagrangeova funkcija nema bezuvjetni ekstrem, a da $f(x, y)$ ima uvjetni ekstrem.

Primjer 2.27. $\left.\begin{array}{l} f(x, y) = xy \quad \rightarrow \quad extr. \\ \varphi(x, y) = y - x = 0 \end{array}\right\}$

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda y - \lambda x, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = y - \lambda, \ \frac{\partial F}{\partial y} = x + \lambda, \ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = y - x$$

Izjednačavanjem s 0 dobijemo $x + y = 0$. *Zajedno s trećom jednadžbom to daje* $x = y = 0$. *Odavde je i* $\lambda = 0$. *Lagrangeova funkcija je onda* $F(x, y, 0) = xy$. *Znamo da ta funkcija u* $(0, 0)$ *nema ekstrem. No iz* $\varphi(x, y) = y - x = 0$ *dobivamo* $y = x$, *pa funkcija* $f(x, y)\Big|_{x=y} = x^2$ *ima ekstrem (minimum) za* $x = 0$.

Metoda Lagrangeovih množitelja može se primijeniti i na funkcije više od dva argumenta.

$z = f(x_1, \ldots, x_n) \quad \to \quad extr.$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots \\ \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{array}\right\} ograni\check{c}enja \quad m < n.$$

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_m\varphi_m.$

Izjednačimo s nulom sve parcijalne derivacije od F. Dobijemo sustav od $n + m$ jednadžbi iz kojih nađemo $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ i $x_1, \ldots, x_n$.

Dovoljni uvjeti ekstrema daju se u terminima determinante složene od drugih derivacija funkcije u stacionarnoj točki.

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

Označimo s $\delta_1,\ \delta_2, \ldots, \delta_n$ vodeće determinante reda $1, 2, \ldots, n$ u D.
Ako je f derivabilna u nekoj okolini stacionarne točke M_0 i dvaput derivabilna u M_0, onda

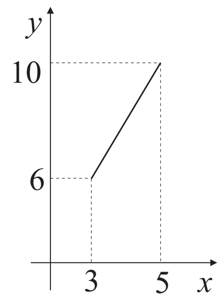
(i) za $\delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0, \ldots, \delta_n > 0$ f ima lokalni minimum u M_0,

(ii) za $\delta_1 < 0,\ \delta_2 > 0,\ \delta_3 < 0, \delta_4 > 0, \ldots$ f ima lokalni maksimum u M_0.

2.10.2 Globalni ekstremi neprekidne funkcije

Promatramo zatvoreno područje $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$ na kojem je definirana neprekidna funkcija $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^2$. Po Bolzano-Weierstrassovom teoremu znamo da f na $\overline{D}$ poprima najveću i najmanju vrijednost. Ako je funkcija f glatka i ako se maksimum (minimum) postiže u unutrašnjosti područja, onda će se on postizati u stacionarnoj točki. (Ako f nije glatka, onda se postiže ili u stacionarnoj ili u singularnoj točki.) No ekstrem se može postizati i na rubu, a takve točke ne možemo naći preko stacionarnih točaka.

Primjer 2.28. *Pogledajmo situaciju u $\mathbb{R}$. Tu je potrebno naći sve stacionarne točke i ispitati ih te još provjeriti vrijednosti na rubovima. Gledamo sljedeću funkciju $f(x) = 2x$, $\overline{D} = [3, 5]$.*

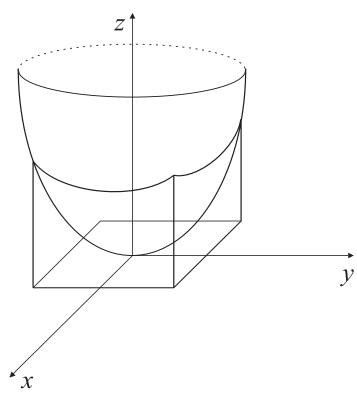


Slika 2.25: Graf funkcije $f(x) = 2x$

Sa grafa vidimo da se minimum postiže u lijevom, a maksimum u desnom rubu.

Za nalaženje globalnih ekstrema funkcije $f(x, y)$ na zatvorenom i ograničenom skupu $\overline{D}$ moramo naći sve lokalne ekstreme u D i sve ekstreme na rubu ∂D. Najveća (najmanja) od tih vrijednosti je globalni maksimum (minimum) na $\overline{D}$.

Primjer 2.29. *Naći globalne ekstreme funkcije $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ na $\overline{D} = [-1, 1] \times [-1, 1]$.*



Slika 2.26: Ploha $z = x^2 + y^2$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0\end{aligned}\right\} (0,0) \text{ je stacionarna točka}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad D = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0,$$

$\Rightarrow \quad (0,0)$ *je lokalni minimum.*

Dalje gledamo rub. Za $x = 1$ *imamo* $f(1,y) = 1 + y^2$. *Na* $[-1,1]$ *ta funkcija ima minimum u* $y = 0$ *(lokalni), a maksimum za* $y = 1$ *i* $y = -1$. *Vidimo da u točkama* $(1,1)$ *i* $(1,-1)$ *funkcija* f *ima maksimume,* $f(1,1) = f(1,-1) = 2$. *Slično i za* $x = -1,\ y = 1,\ y = -1$.

Dakle, f *na* $[-1,1] \times [-1,1]$ *ima globalni minimum čija je vrijednost* 0 *u* $(0,0)$ *i 4 globalna maksimuma koja iznose* 2 *u točkama* $(\pm 1, \pm 1)$.