

**Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet**

Preddiplomski studij

GEOTEHNIČKO INŽENJERSTVO

Predavanje 2.

Stanje naprezanja i deformacija u stijenskoj masi

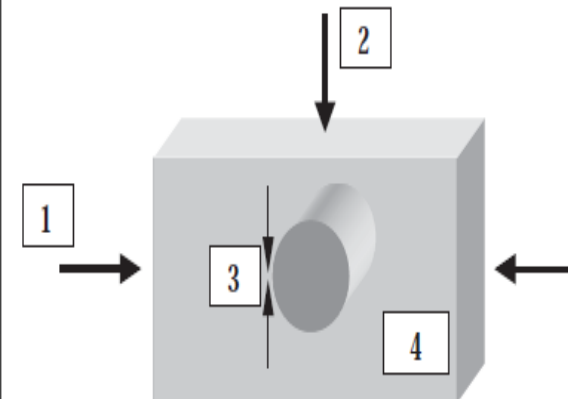
Zašto je potrebno poznavati stanje naprezanja u mehanici stijena i stijenskom inženjerstvu?

- Pojam naprezanja je od temeljne važnosti u mehanici stijena.
- Tri su osnovna razloga za razumijevanje naprezanja u kontekstu mehanike stijena:
 1. U stijeni, kao i u tlu, postoji početno, **primarno stanje naprezanja** koje se mora razumjeti jer je od bitne važnosti pri analizama i projektiranju u stijenskom inženjerstvu.
 2. Uslijed zahvata u stijeni dolazi do promjene stanja naprezanja, točnije do preraspodjele naprezanja u okolini zahvata. Novonastalo stanje naprezanja se naziva **sekundarnim stanjem naprezanja**.
 3. Naprezanje je tenzorska veličina i kao takva se ne može susresti u svakodnevnom životu. Stoga je potrebno upoznati njegove osnovne karakteristike radi boljeg razumijevanja njegovog ponašanja.

- Postoji fundamentalna razlika između **tenzora** i pojmova kao što su **skalar** i **vektor**.
- Matematički, **skalar** je određen samo veličinom i opisuju se u potpunosti pomoću jedne dimenzije (stupanj, sekunda, kilogram...).
- **Vektor** je određen veličinom i smjerom. Vektori su, na primjer, sile, brzine, akceleracije.... i u potpunosti su opisane s **3 komponente** npr. x , y , z kojima je određen i smjer i veličina vektora.
- **Tenzor** je pak, osim veličinom i smjerom, određen s ravninom u odnosu na koju se promatra. Primjeri tenzora su naprezanja, deformacije, moment inercije... i u potpunosti su opisani sa šest vrijednosti.

- Ne postoji međunarodno prihvaćena terminologija koja se koristi u opisivanju stanja naprezanja u stijenskoj masi.
- Terminologija koja se preporuča je sljedeća:

1	TEKTONSKO NAPREZANJE	STANJE NAPREZANJA UZROKOVANO POMACIMA TEKTONSKIH PLOČA
2	GRAVITACIJSKO NAPREZANJE	STANJE NAPREZANJA UZROKOVANO TEŽINOM STIJENE KOJA SE NALAZI IZNAD
1 i 2	PRIRODNO (IN-SITU) NAPREZANJE	STANJE NAPREZANJA KOJI POSTOJI U STIJENI PRIJE INŽENJERSKOG ZAHVATA
1 i 2	REGIONALNO NAPREZANJE	STANJE NAPREZANJA U RELATIVNO VELIKOJ GEOLOŠKOJ DOMENI
1 i 2	NAPREZANJE U UDALJENOJ ZONI	STANJE NAPREZANJA VAN 'BLISKE' ZONE
3	LOKALNO NAPREZANJE	STANJE NAPREZANJA U MALOJ DOMENI
3	NAPREZANJE U BLISKOJ ZONI	STANJE NAPREZANJA U BLIZINI HETEROGENOSTI (NAJČEŠĆI UZROK JE INŽENJERSKI ZAHVAT)
3	INDUCIRANO NAPREZANJE	STANJE NAPREZANJA UZROKOVANO INŽENJERSKIM DJELOVANJEM
4	REZIDUALNO NAPREZANJE	'ZAKLJUČANO' STANJE NAPREZANJA UZROKOVANO PRIJAŠNJIM TEKTONSKIM AKTIVNOSTIMA, ALI KOJE TRENUTNO DJELUJE
4	TERMALNO NAPREZANJE	STANJE NAPREZANJA UZROKOVANO TEMPERATURNIM PROMJENAMA
-	PALEONAPREZANJE	STANJE NAPREZANJA U PROŠLOSTI KOJE VIŠE NE DJELUJE



- U **laboratorijskim ispitivanjima** uzoraka stijene, terminologija koja se koristi je sljedeća:

JEDNOOSNO STANJE NAPREZANJA

uzorak pod djelovanjem jednog glavnog naprezanja, ostala su jednaka nuli

$$\sigma_1 \neq 0 \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

DVOOSNO STANJE NAPREZANJA

uzorak pod djelovanjem dvaju glavnih naprezanja, treće je jednako nuli

$$\sigma_1 \neq 0 \quad \sigma_2 \neq 0 \quad \sigma_3 = 0$$

TROOSNOO STANJE NAPREZANJA

sva tri glavna naprezanja djeluju na uzorak, ali dva imaju istu vrijednost. *Ovaj izraz je ušao u upotrebu kroz povijest ispitivanja u laboratoriju; cilindar stijene je tlačen s jednim glavnim naprezanjem duž osi, a pritisak fluida je nametnut na stranama.*

$$\sigma_1 \neq 0 \quad \sigma_2 = \sigma_3 \neq 0$$

VIŠEOSNO ILI STVARNO TROOSNO STANJE NAPREZANJA

sva tri glavna naprezanja djeluju na uzorak i obično imaju različite vrijednosti

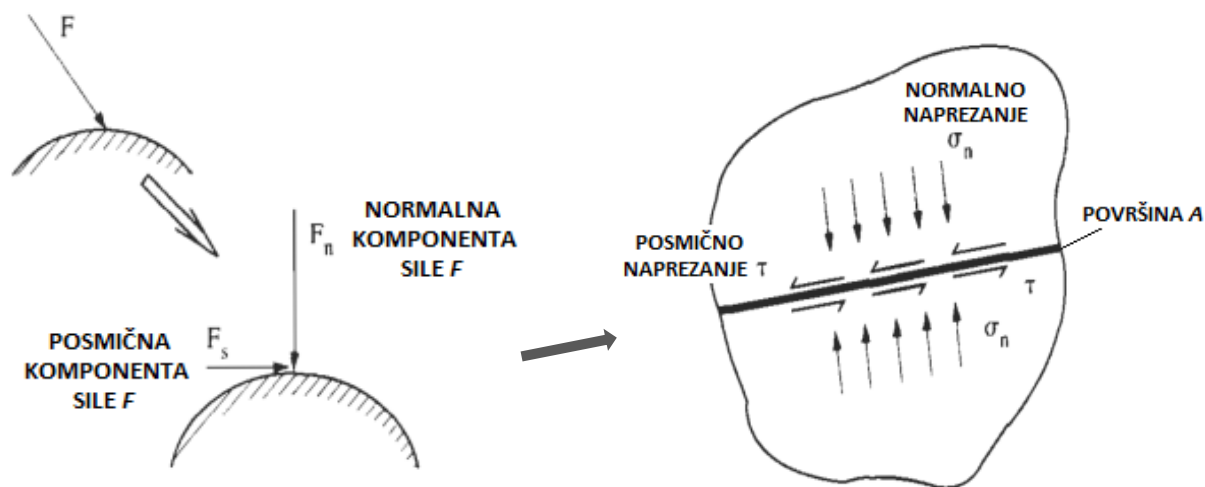
$$\sigma_1 \neq 0 \quad \sigma_2 \neq 0 \quad \sigma_3 \neq 0$$

- Na stvarnoj ili imaginarnoj ravnini bilo kojeg materijala, mogu postojati:

Normalne sile, tj. okomite na ravninu - označimo s F_n

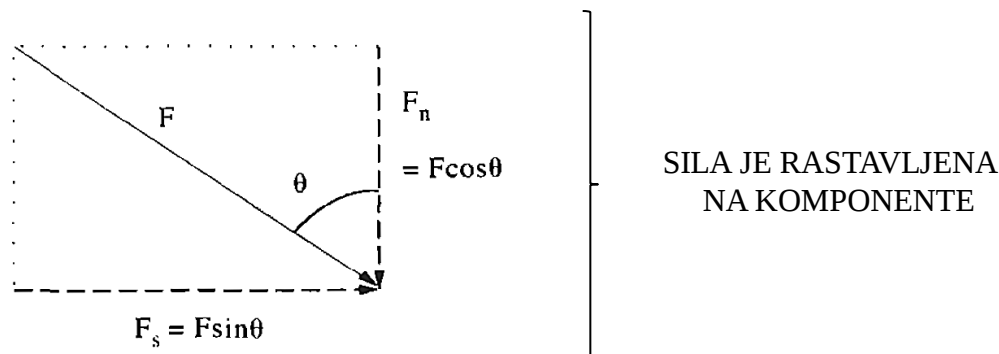
Posmične sile - označimo s F_s (mogu pojaviti kod krutih tijela, dok kod fluida (tekućine i plinovi) nema prisutstva posmičnih sila)

- Sukladno tome, možemo definirati **normalno naprezanje** σ_n kao vrijednost normalne sile po jedinici površine, te **posmično naprezanje** τ kao vrijednost posmične sile po jedinici površine. (dimenzija $1 \text{ Pascal} = 1 \text{ N/m}^2$)

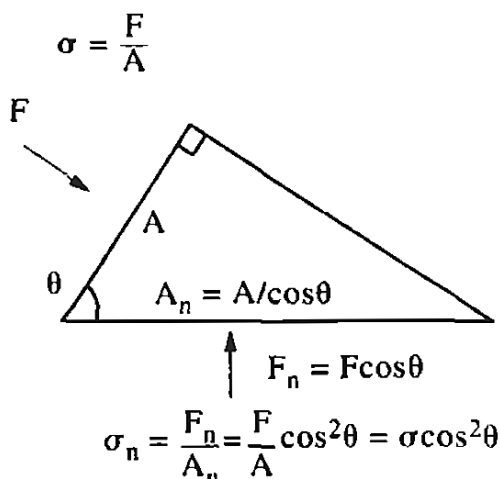


- Normalno naprezanje može biti **tlačno** ili **vlačno**. U mehanici stijena se vlačno naprezanja označava s negativnim predznakom, iako postoje neki računalni programi koji tlačno naprezanje uzimaju kao negativno.

Kada je sila F_n otklonjena za kut θ u odnosu na silu F , tada je njezina vrijednost jednaka $F \cdot \cos \theta$



Međutim, vrijednost komponente normalnog naprezanja σ_n iznosi $\sigma \cdot \cos^2 \theta$



SILA I POVRŠINA SU
RASTAVLJENA
NA KOMPONENTE

‘KLJUČ’ RAZUMIJEVANJA
KOMPONENTI NAPREZANJA I
TRANSFORMACIJSKIH
JEDNADŽBI

—
TENZOR KOJI JE OVISAN O
RAVNINI KOJU PROMATRAMO

- Prikladnije je promatrati normalne i posmične komponente naprezanja u odnosu na određene osi, najpraktičnije u odnosu na 3 međusobno okomite osi u Kartezijevom sustavu.
- U ovom slučaju, tijelo se može zamisliti kao kocka čije su stranice međusobno okomite ravnine presjeka. Da bi se odredile komponente naprezanja, promatraju se normalna i posmična naprezanja na tri ravnine ove infinitezimalne kocke.

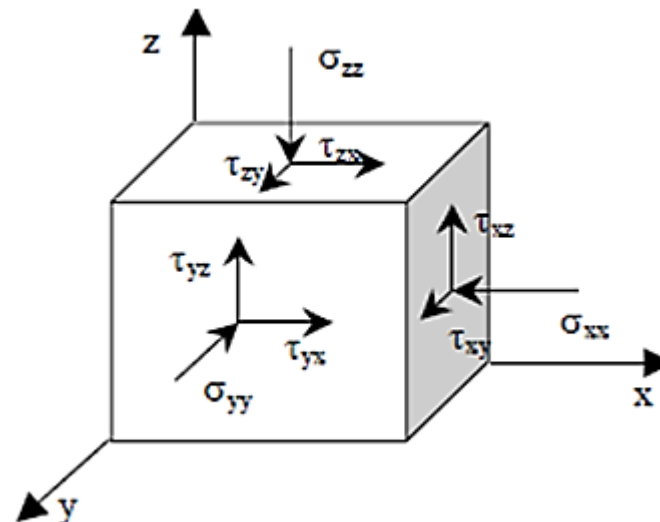
TENZOR NAPREZANJA

U REDU SU KOMPONENTE KOJE
DJELOUJU NA ISTOJ RAVNINI

σ_{xx}	τ_{xy}	τ_{xz}
τ_{yx}	σ_{yy}	τ_{yz}
τ_{zx}	τ_{zy}	σ_{zz}

U STUPCU SU KOMPONENTE KOJE
DJELOUJU DUŽ ISTE OSI

KOCKA S PRIKAZANE 3 MEĐUSOBNO OKOMITE RAVNINE

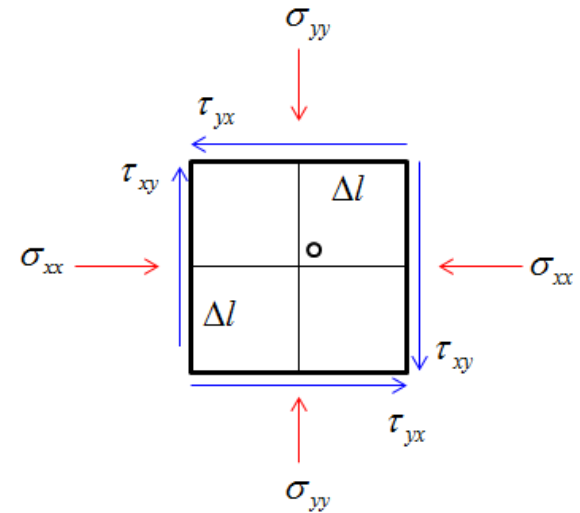


- Na suprotnim stranicama, u slučaju ravnoteže kocke, posmična naprezanja su istog inteziteta, ali suprotnog smjera:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \longrightarrow \text{PROIZLAZI IZ SUME MOMENATA OKO SREDIŠTA}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \left[\left(\frac{\Delta l}{2} \right) \cdot (\Delta l)^2 \cdot \tau_{yx} \right] - 2 \cdot \left[\left(\frac{\Delta l}{2} \right) \cdot (\Delta l)^2 \cdot \tau_{xy} \right] = 0 \end{array} \right.$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \left\{ \begin{array}{l} \text{ANALOGNO} \end{array} \right.$$



- Tenzor naprezanja je stoga definiran sa **šest (6) nezavisnih komponenti** (3 normalne i 3 posmične).
- Dakle, da bi se u potpunosti definiralo stanje naprezanja u stijeni, moraju se imati podaci o šest nezavisnih varijabli.
- npr. izjava '*Naprezanje u stijenskoj masi je 30 Mpa*', sama po sebi nije dovoljna ako nije definirano o kojem je naprezanju riječ.

Tenzor naprezanja je simetričan tenzor drugog reda, pa se može podijeliti na 2 dijela:

A) **SFERNI dio** – mijenja **volumen** tijela, **oblik** ostaje stalan!

B) **DEVIJATORSKI dio** – mijenja **oblik** tijela, **volumen** ostaje stalan!

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}}_{\text{SFERNI DIO}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix}}_{\text{DEVIJATORSKI DIO}}$$

SFERNI DIO **DEVIJATORSKI DIO**
TENZORA NAPREZANJA **TENZORA NAPREZANJA**

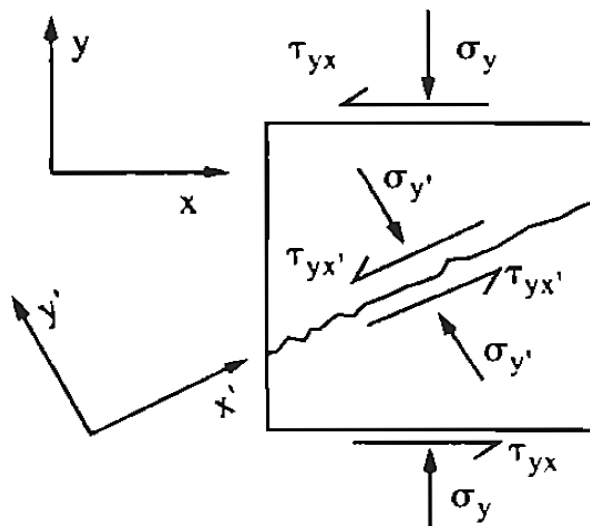
gdje je $\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$

- Često se dogodi da svaka komponenta tenzora naprezanja varira u svojoj veličini od točke do točke unutar tijela – *funkcije su od x, y, z*
- U tom slučaju element tijela će biti u ravnoteži ako vrijedi:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{JEDNADŽBE} \\ \text{RAVNOTEŽE} \end{array}$$

- Svaka jednađžba sadrži inkremente komponente naprezanja u jednom smjeru
 - Vrijednosti X, Y, Z , predstavljaju sile od samog tijela (masa * akceleracija)
 - U mehanici stijena dominantna sila je sila gravitacije (z – os usmjerena prema dolje)
- └──────────> VEKTOR SILE TIJELA JE $(0,0,\gamma_z)$

- Često je slučaj da znamo vrijednosti naprezanja oko jednog sustava osi (**globalne osi**), te se želi znati stanje naprezanja relativno drugom sustavu osi (**lokalne osi**).
- Na primjer, promatramo diskontinuitet u stijenskoj masi na sljedećoj slici.



ako su poznati σ_y i τ_{yx} , koliki će biti $\sigma_{y'}$ i $\tau_{yx'}$?

KORISTE SE JEDNADŽBE TRANSFORMACIJE

POSTUPAK
DOBIJANJA

ograničiti se na sljedeći slučaj:

GLOBALNI K.S. : x, y, z

LOKALNI K.S. : x', y', z'

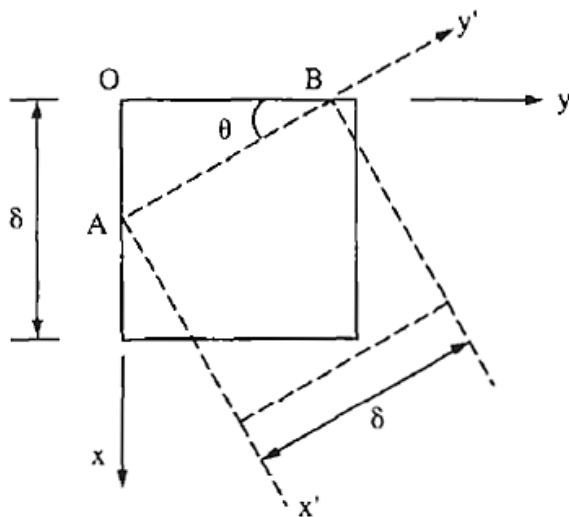
z i z' se poklapaju

AKO JE TENZOR GLOBALNIH NAPREZANJA, KOLIKA ĆE BITI LOKALNA NAPREZANJA?

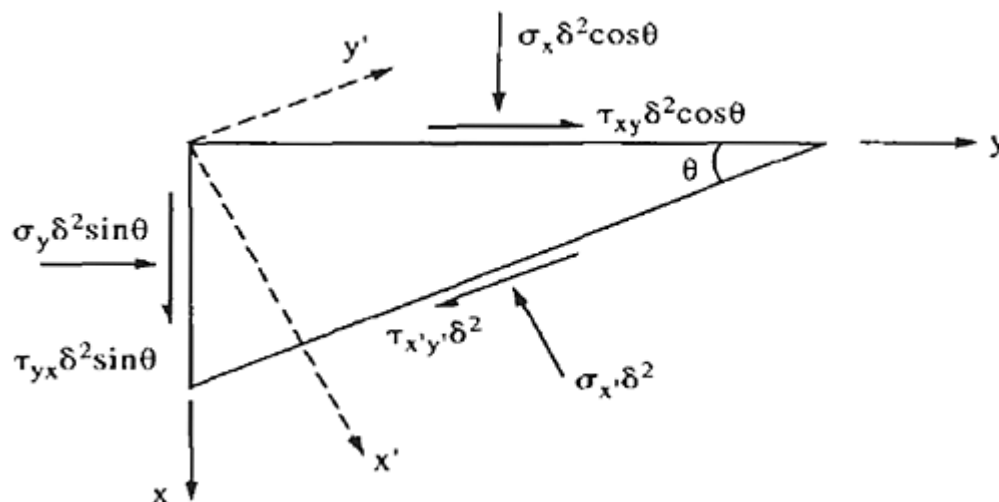
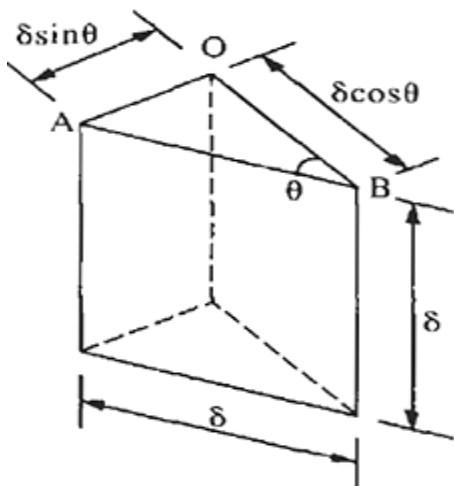
$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau'_{yx} & 0 \\ \tau'_{xy} & \sigma'_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_z \end{bmatrix}$$

Promatranjem rotacije kocke oko z – osi, te može se vidjeti da je $\sigma_z = \sigma'_z$

Ostala naprezanja se dobiju na sljedeći način:



- Rotirani element se pozicionira iznad ‘originalnog’ elementa, tako da vertikalne **strane** (radi se o kocki!) A i B dotiču strane ‘originalnog’ elementa.
- Zatim se isječe prizma OAB , i promotre komponente naprezanja na njenim površinama.



➤ Iz jednadžbi ravnoteže proizlazi:

$$\sum F'_x = 0 \longrightarrow \sigma'_x = \sigma_x \cdot \cos^2 \theta + \sigma_y \cdot \sin^2 \theta + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

AKO SE PRESJEČE
PRIZMU PARALELENO S
x - osi

$$\sigma'_y = \sigma_x \cdot \sin^2 \theta + \sigma_y \cdot \cos^2 \theta - 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

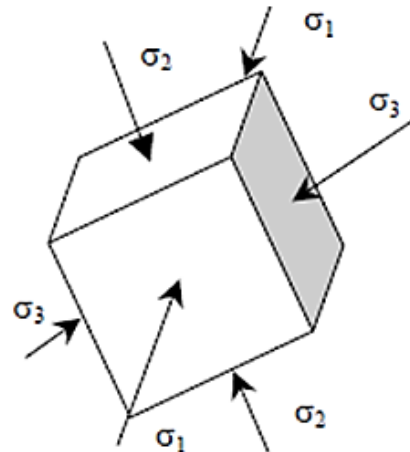
$$\sum F'_y = 0 \longrightarrow \tau'_{xy} = \tau_{xy} \cdot (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

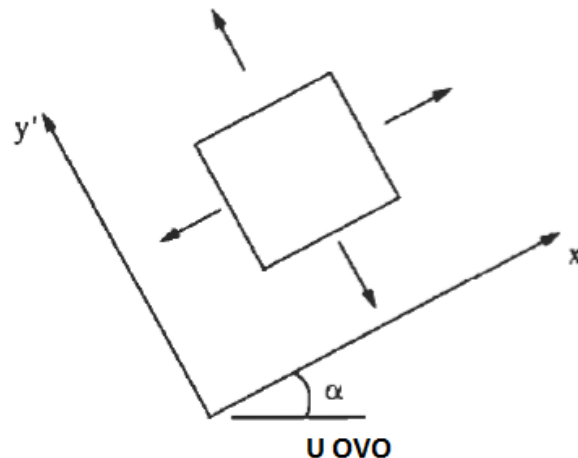
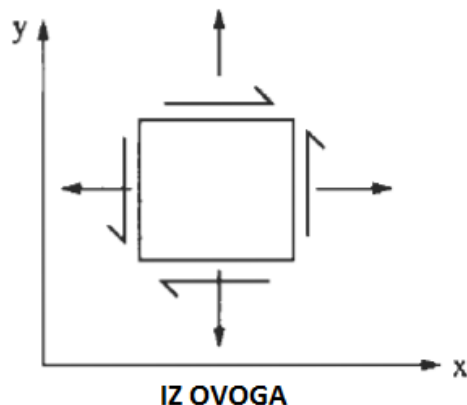
JEDNADŽBE
TRANSFORMACIJE

- Osim što stanje naprezanja je može biti određeno na navedeni način (tri normalne i tri posmične komponente koje djeluju na međusobno okomitim ravninama), ono može biti određeno **veličinom i smjerom tri glavna naprezanja**.
- Glavna naprezanja su **ekstremne vrijednosti normalnih naprezanja**. Ona se pojavljuju kad su posmična naprezanja jednaka nuli.
- Njihove pravce djelovanja se nazivaju **glavnim osima**, a ravnine na kojima djeluju glavna naprezanja se nazivaju **glavnim ravninama**.

GLAVNA NAPREZANJA

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$





- Za rotirani element (s gornje slike) - $\tau'_{xy} = 0$ (nema posmičnih naprezanja)

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy} \cdot (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta = 0$$

$$\frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2} \tan 2\alpha$$

KUT POD KOJIM SE NALAZE
PRAVCI (RAVNINE) GLAVNIH
NAPREZANJA

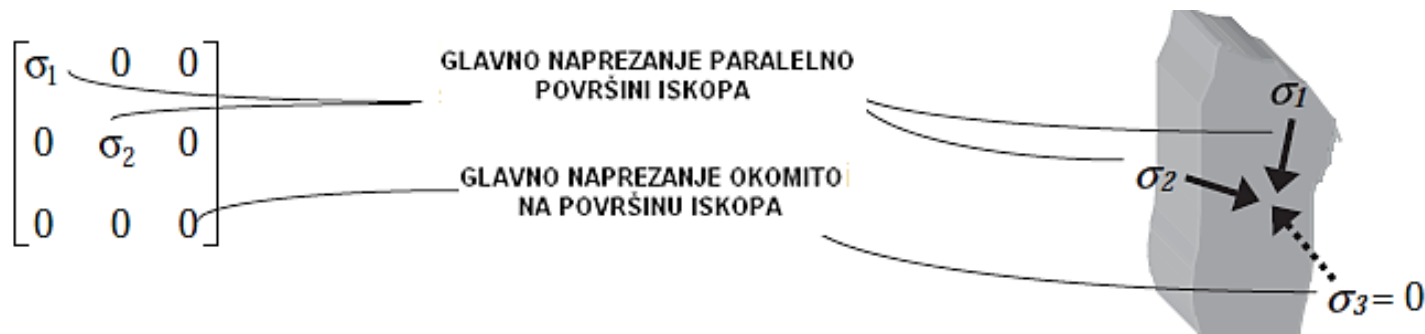
$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{2 \cdot \tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} \right)$$

- Sve nepoduprte (ili nepodgrađene) površine iskopa su ravnine glavnih naprezanja. Ovo je od velikog značaja za stijensko inženjerstvo!
- Razlog tome je što na takvim površinama nema djelovanja posmičnog naprezanja.

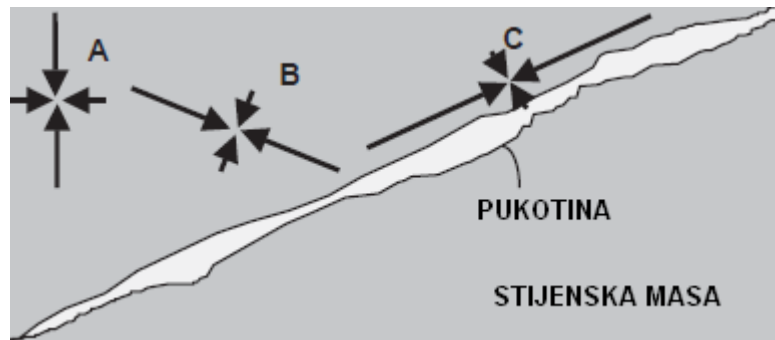


rezultat 3. Newton-ovog zakona koji kaže da svaka akcija ima svoju reakciju jednake veličine i suprotnog smjera

- Glavna naprezanja će biti okomita i paralelna s površinom iskopa
- Glavno naprezanje okomito na površinu iskopa ima vrijednost nula (točnije, vrijednost atmosferskog tlaka)!



- Sličan fenomen se događa kod pukotine u stijenskoj masi.
- Stanje naprezanja **A** označava prevladavajuće stanje naprezanja u stijenskoj masi.
- Bliže pukotini, stanja naprezanja **B** i **C**, smjerovi glavnih naprezanja su zarotirani i veličine glavnih naprezanja se mijenjaju.



- U slučaju otvorene pukotine, ne postoji posmično naprezanje paralelno, niti normalno naprezanja okomito na površinu pukotine, te tako ona postaje ravninom glavnih naprezanja.
- U slučaju zatvorene ili djelomično ispunjene pukotine, trajektorije naprezanja će se također promijeniti, ali na nešto 'blaži' način.

MOHROVE KRUŽNICE NAPREZANJA – grafička metoda transformacije tenzora naprezanja

Ako odaberemo globalnu x – os i y – os da se preklapaju s osi glavnog naprezanja, tada jednačbe transformacije postaju:

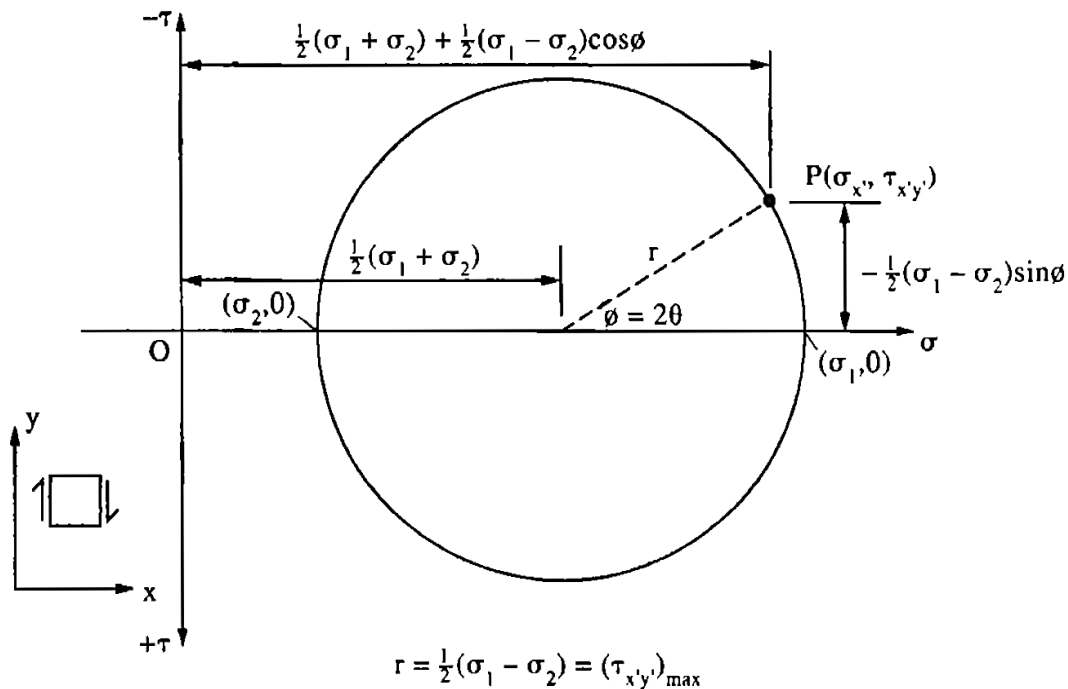
$$\sigma'_x = \sigma_1 \cdot \cos^2 \theta + \sigma_2 \cdot \sin^2 \theta$$

$$\sigma'_y = \sigma_1 \cdot \sin^2 \theta + \sigma_2 \cdot \cos^2 \theta$$

$$\tau'_{xy} = -(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

Korištenjem trigonometrijskih identiteta, dobijamo sljedeće jednačbe:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \cos \phi \\ \tau'_{xy} &= -\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \sin \phi \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{JEDNADŽBE KRUŽNICE CENTRIRANE U} \\ \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2); \text{ RAVNINA } \sigma - \tau \end{array}$$



1. Pozitivna os τ se se nalazi ispod osi σ

2. Za dobiti jednadžbe kružnice pretpostavlja se:

$$\phi = 2 \cdot \theta$$

Dakle, koja god rotacija se dogodi u stvarnosti, dvostruka rotacija se dogodi na Mohr-ovoj kružnici

3. Glavna naprezanja su najveća i najmanja vrijednost normalnog naprezanja i nalaze se na osi σ

4. Dvije točke koje predstavljaju ravnine glavnih naprezanja leže na suprotnim krajevima promjera Mohr-ove kružnice. Ravnine glavnih naprezanja su u stvarnosti međusobno okomite.

5. Ravnine najvećih posmičnih naprezanja se nalaze pod kutom od 45° u odnosu na ravnine glavnih naprezanja.

**BITNE
KARAKTERISTIKE
MOHR-ove KRUŽNICE
NAPREZANJA**

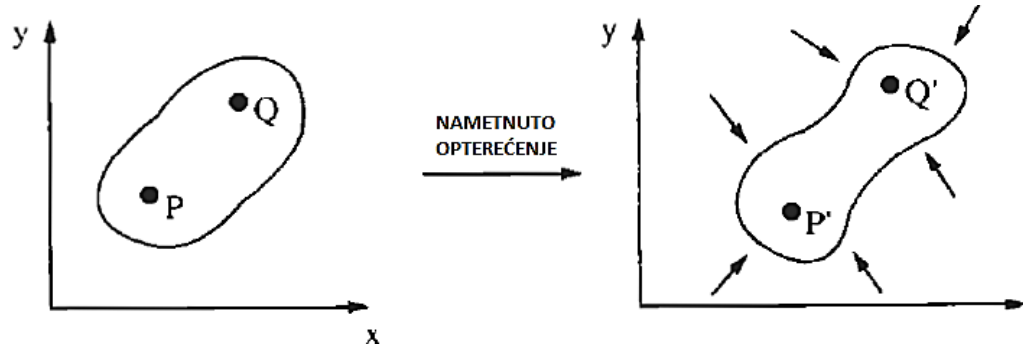
- Tenzor naprezanja je određen komponentama koje imaju određenu orijentaciju.
- Ako želimo tenzor prikazati u odnosu na osi drugačije orijentacije, komponente naprezanja će poprimiti nove vrijednosti.
- Međutim, postoje određene funkcije komponenata naprezanja koje se ne mijenjaju, nego su su **uvijek konstantne**.
- Njih nazivamo **invarijantama naprezanja**.

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (\text{ili } I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \longrightarrow \text{PRVA INVARIJANTA NAPREZANJA}$$

$$I_2 = \sigma_{xx} \cdot \sigma_{yy} + \sigma_{yy} \cdot \sigma_{zz} + \sigma_{zz} \cdot \sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \longrightarrow \text{DRUGA INVARIJANTA NAPREZANJA}$$

$$I_3 = \sigma_{xx} \cdot \sigma_{yy} \cdot \sigma_{zz} + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} - \sigma_{xx} \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_{yy} \cdot \tau_{zx}^2 - \sigma_{zz} \cdot \tau_{xy}^2 \longrightarrow \text{TREĆA INVARIJANTA NAPREZANJA}$$

ANALIZA POMAKA I DEFORMACIJA



P prelazi u P'

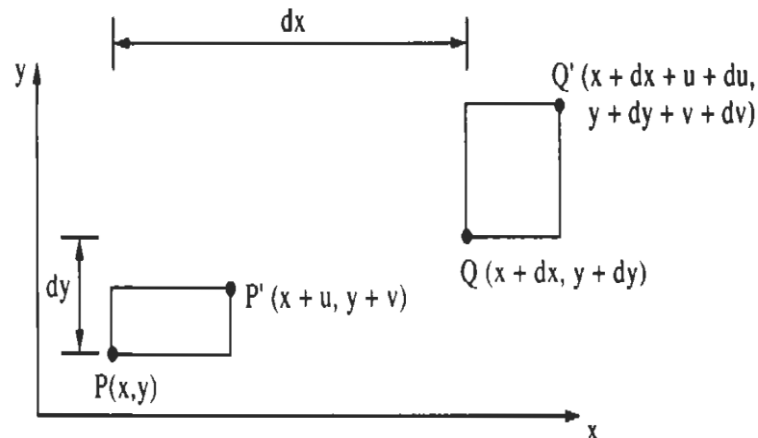
Q prelazi u Q'

VEKTOR $P'Q'$ IMA PROMIJENJENU VELIČINU I SMJER U ODNOSU NA VEKTOR PQ

➤ funkcija koja opisuje pomak u x -smjeru $\longrightarrow u(x,y)$

➤ funkcija koja opisuje pomak u y -smjeru $\longrightarrow v(x,y)$

➤ Sada možemo koristiti ove funkcije da bi analizirali pomake točki P i Q .



- USLIJED NAMETANJA OPTEREĆENJA:

$P(x, y)$ prelazi u $P'(x + u, y + v)$

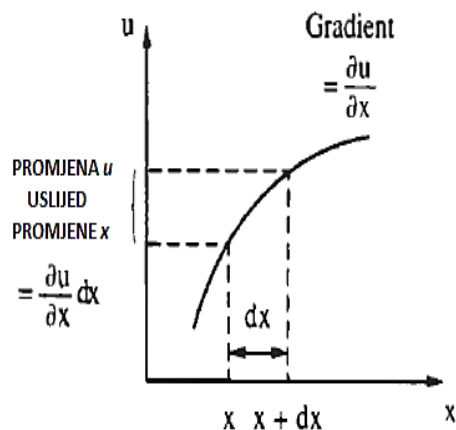
$Q(x + dx, y + dy)$ prelazi u $Q'(x + dx + u + du, y + dy + v + dv)$

POČETNA X
KOORDINATA

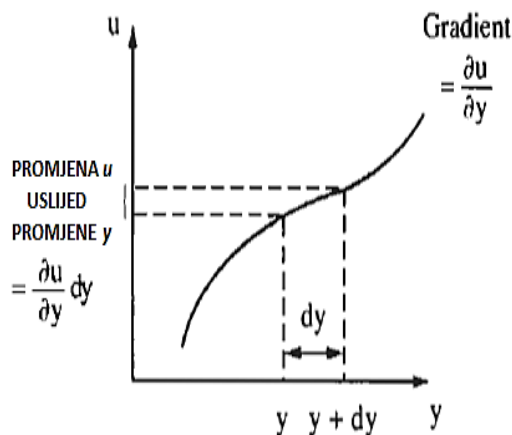
X POMAK

POČETNA Y
KOORDINATA

Y POMAK



KONSTANTAN y

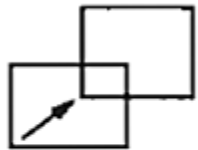


KONSTANTAN x

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

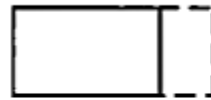
➤ Kada se tijelo deformira, sljedeće komponente deformacija se pojavljuju:



TRANSLACIJA
KRUTOG TIJELA



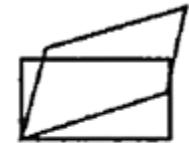
ROTACIJA
KRUTOG TIJELA



DEFORMACIJA
U x - SMJERU

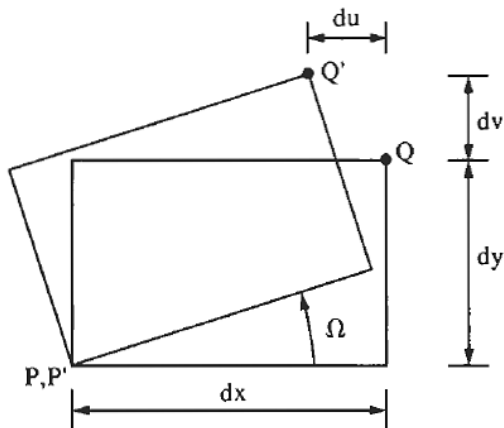


DEFORMACIJA
U y - SMJERU



POSMIČNA
DEFORMACIJA

A) ROTACIJA KRUTOG TIJELA



➤ Element ne mijenja oblik.

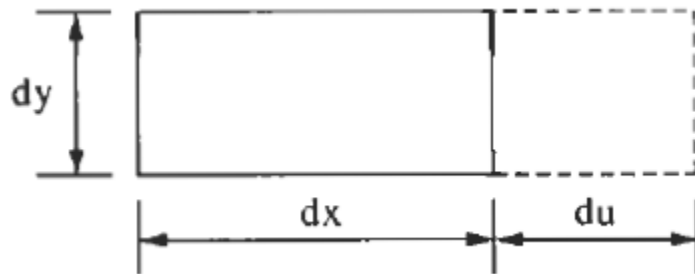
$$\left. \begin{aligned} du &= -\sin \Omega dy \\ dv &= \sin \Omega dx \end{aligned} \right\} \sin \Omega = \Omega \quad \left. \begin{array}{l} \text{(radi se o} \\ \text{malim} \\ \text{kutevima)} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} du &= -\Omega dy \\ dv &= \Omega dx \end{aligned}$$

MATRIČNI
OBLIK

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

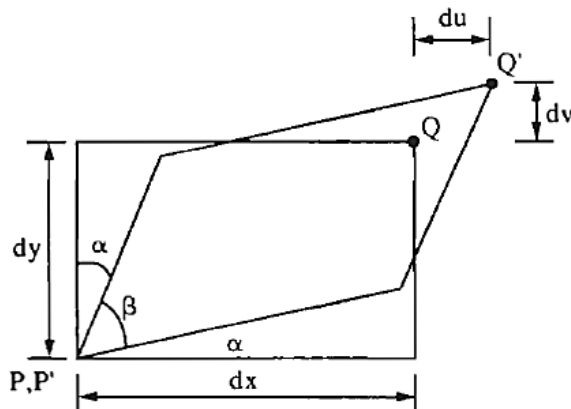
B) NORMALNA DEFORMACIJA



$$\varepsilon_r = -\frac{du}{dx} \quad (\text{negativan predznak jer se tlak u mehanici stijena uzima kao pozitivna veličina})$$

$$\begin{cases} du = -\varepsilon_x dx \\ dv = -\varepsilon_y dy \end{cases} \xrightarrow{\text{MATRIČNI OBLIK}} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varepsilon_x & 0 \\ 0 & -\varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

C) POSMIČNA DEFORMACIJA



$$du = dy \cdot \sin \alpha + dx \cdot \cos \alpha - dx$$

$$\sin \alpha = \alpha$$

$$\cos \alpha = 1$$

(radi se o malim kutevima)

$$du = dy \cdot \alpha + \cancel{dx \cdot 1} - \cancel{dx} \longrightarrow du = dy \cdot \alpha$$

(sličnim postupkom) $dv = dx \cdot \alpha$

- definicija posmične deformacije je –
promjena kuta između dvije linije koje su prethodno bile okomite jedna na drugu

$$\frac{\pi}{2} = \beta + 2 \cdot \alpha \longrightarrow -2 \cdot \alpha = \beta - \frac{\pi}{2} = \gamma_{xy}$$

(iz slike)

$$\begin{aligned} du &= -\frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} dy \\ dv &= -\frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} dx \end{aligned} \xrightarrow{\text{MATRIČNI OBLIK}} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ -\frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

D) KOMBINIRANI SLUČAJ ROTACIJE I DEFORMACIJE

- Sumiranjem A + B + C slučaja (rotacija + normalna deformacija + posmična deformacija) dobije se sustav jedinstvenih jednažbi
- Poželjno je, međutim, matrice rotacije i deformacije pisati odvojeno

- Razlog zašto ih je poželjno odvojeno pisati je u činjenici da samo matrica deformacija uzrokuje distorziju, dok matrica rotacije predstavlja samo rotaciju krutog tijela

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$



**MATRICA
DEFORMACIJA**



**MATRICA
ROTACIJE**

- Već je ranije ustanovljeno da vrijedi:

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{bmatrix}$$

- Raspisivanjem matrice i sređivanjem jednađbi, dobiju se konačne jednađbe koje opisuju **deformacije (bezdimenzionalne) u odnosu na ostvareni pomak**:

UZDUŽNE (LONGITUDINALNE) DEFORMACIJE	$\varepsilon_x = -\frac{\partial u}{\partial x}$ $\varepsilon_y = -\frac{\partial v}{\partial y}$	$\gamma_{xy} = -\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ $\Omega = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$	POSMIČNA DEFORMACIJA
			ROTACIJA

TENZOR DEFORMACIJA

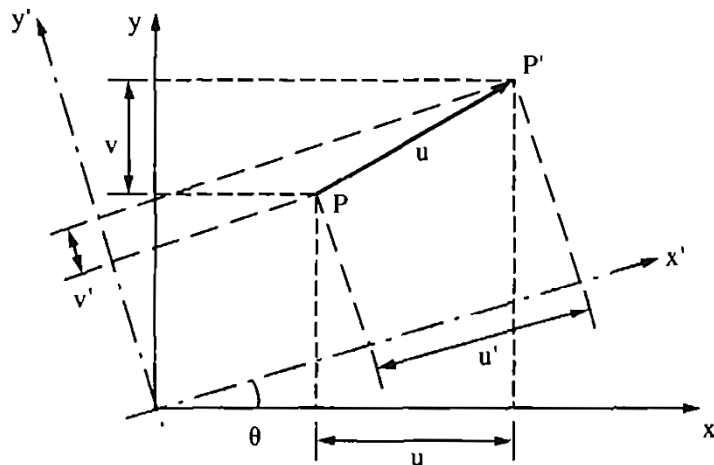
- Kombiniranjem uzdužnih i posmičnih deformacija, može se dobiti tenzor deformacija, koji je drugog reda, isto kao i tenzor naprezanja

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Simetrična matrica sa šest nezavisnih varijabli jer je:}$$

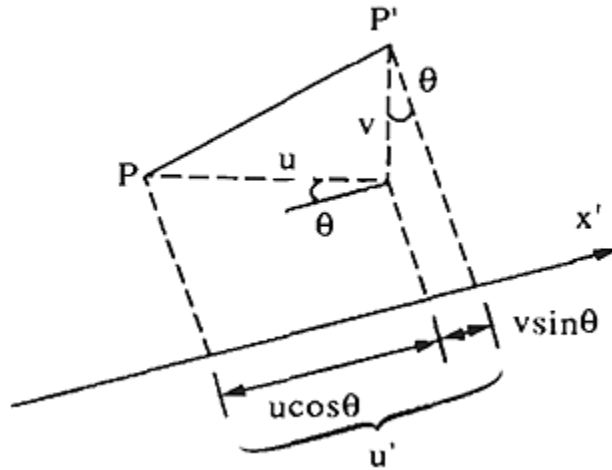
$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} \qquad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} \qquad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$$

- Transformacijske karakteristike tenzora deformacija, omogućuju dobijanje **svih** komponenti tenzora, mjerenjem samo uzdužnih deformacija deformetrom in-situ ili u laboratoriju.
- Da bi se odredile jednadžbe transformacija deformacija, potrebno je prvo analizirati transformaciju pomaka.

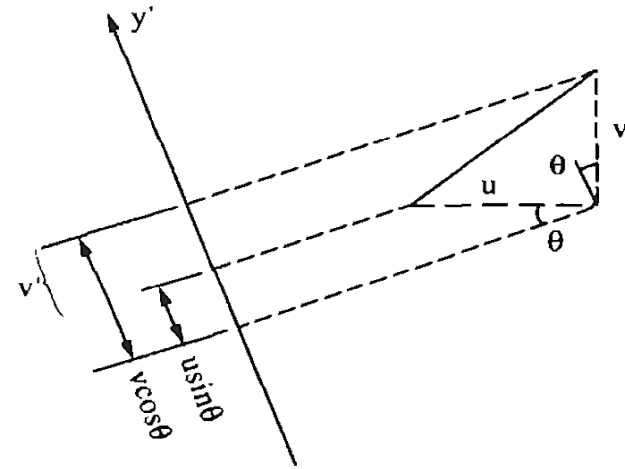
TRANSFORMACIJA POMAKA



Ako uslijed deformacije tijela točka P zauzme novi položaj P' , te poznavajući vrijednosti u i v , mogu li se odrediti u' i v' na novim osima x' i y' s obzirom na kut θ ?



$$u' = u \cdot \cos \theta + v \cdot \sin \theta$$



$$v' = v \cdot \cos \theta - u \cdot \sin \theta$$

TRANSFORMACIJA DEFORMACIJA



Ako su poznate ε_x , ε_y i γ_{xy} (globalne komp.) mogu li se izračunati ε'_x , ε'_y i γ'_{xy} (lokalne komp.)?

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \varepsilon'_x = -\frac{\partial u'}{\partial x'}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \varepsilon'_y = -\frac{\partial v'}{\partial y'}$$

$$\gamma_{xy} = -\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \rightarrow \gamma'_{xy} = -\left(\frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'}\right)$$

- u' i v' su poznati iz analize transformacije pomaka (prethodni slide)
- Ako se pretpostavi bilo koju funkciju f koja ovisi o x i y , tada možemo pisati:

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin \theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y'} = -\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos \theta$$

- Sada je moguće zamijeniti f sa u' , v' :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \boxed{\frac{\partial u'}{\partial x}} \cdot \cos \theta + \boxed{\frac{\partial u'}{\partial y}} \cdot \sin \theta$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \cos \theta \cdot \frac{\partial}{\partial x} (u \cdot \cos \theta + v \cdot \sin \theta) + \sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial y} (u \cdot \cos \theta + v \cdot \sin \theta)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos^2 \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \sin^2 \theta + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \rightarrow \boxed{\varepsilon'_x = \varepsilon_x \cdot \cos^2 \theta + \varepsilon_y \cdot \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta}$$

(1) (primjetiti sličnost s σ'_x)

➤ Slično:

$$\varepsilon'_y = \varepsilon_x \cdot \sin^2 \theta + \varepsilon_y \cdot \cos^2 \theta - \gamma_{xy} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \quad (2)$$

(primjetiti sličnost s σ'_y)

$$\gamma'_{xy} = \frac{\partial u'_x}{\partial y'} + \frac{\partial u'_y}{\partial x'} = \left(\frac{\partial u'_x}{\partial y} \cdot \cos \theta - \frac{\partial u'_x}{\partial x} \cdot \sin \theta \right) + \left(\frac{\partial u'_y}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial u'_y}{\partial y} \cdot \sin \theta \right)$$

➤ sređivanjem gornjeg izraza dobije se:

$$\gamma'_{xy} = \gamma_{xy} \cdot (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2 \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \quad (3)$$

(primjetiti sličnost s τ'_{xy})

(primjetiti sličnost s transformacijskim
jednadžbama naprežanja)

➤ ako se označi:

γ_{xy} se naziva **inženjerskom**
posmičnom deformacijom

e_{xy} se naziva **matematičkom**
posmičnom deformacijom

$$e_{xx} = \varepsilon_x \quad \xrightarrow{(1)}$$

$$e_{yy} = \varepsilon_y \quad \xrightarrow{(2)}$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \quad \xrightarrow{(3)}$$

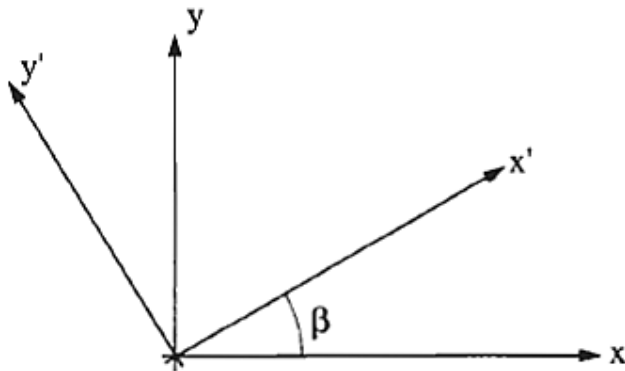
$$e'_{xx} = e_{xx} \cdot \cos^2 \theta + e_{yy} \cdot \sin^2 \theta + 2 \cdot e_{xy} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta$$

$$e'_{yy} = e_{xx} \cdot \sin^2 \theta + e_{yy} \cdot \cos^2 \theta - 2 \cdot e_{xy} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta$$

$$e'_{xy} = e_{xy} \cdot (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - (e_{xx} - e_{yy}) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta$$

GLAVNE DEFORMACIJE I SMJEROVI GLAVNIH DEFORMACIJA

- Analogno kao i za glavna naprezanja, postavlja se pitanje postoji li kut θ za koji vrijedi e_{xy} (ili γ_{xy}) = 0?
- Postoji. Neka se zove kut β .



$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{2 \cdot e_{xy}}{e_{xx} - e_{yy}} \right)$$

- Smjerovi x' i y' koji se nalaze pod kutem β se nazivaju smjerovima glavnih deformacija i oni su međusobno okomiti.
- Uzdužne deformacije e'_{xx} i e'_{yy} se nazivaju glavnim deformacijama (kao i e'_{zz} ako se analizira trodimenzionalnu sliku)

$$\begin{bmatrix} e'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & e'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & e'_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \xrightarrow[\text{DJELUJU POD KUTEM } \beta]{\text{OZNAČAVAJU SE SA}} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

MOHROVE KRUŽNICE DEFORMACIJA

- Ako se glavne osi x i y odaberu tako da se poklapaju sa smjerovima glavnih deformacija, jednačbe transformacija deformacija tada izgledaju sljedeće:

$$e'_{xx} = e_{xx} \cdot \cos^2 \theta + e_{yy} \cdot \sin^2 \theta$$

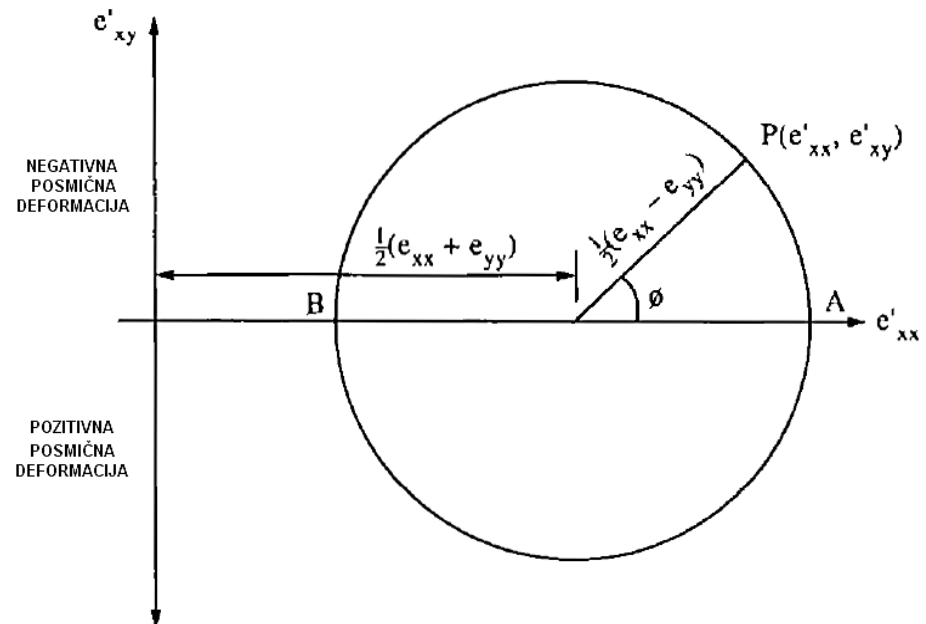
$$e'_{yy} = e_{xx} \cdot \sin^2 \theta + e_{yy} \cdot \cos^2 \theta$$

$$e'_{xy} = -(e_{xx} - e_{yy}) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta$$

- Postavi se da je $\phi = 2 \cdot \theta$,
te je tada analogno
tenzoru naprezanja:

$$e'_{xx} = \frac{1}{2} \cdot (e_{xx} + e_{yy}) + \frac{1}{2} \cdot (e_{xx} - e_{yy}) \cdot \cos \phi$$

$$e'_{xy} = -\frac{1}{2} \cdot (e_{xx} - e_{yy}) \cdot \sin \phi$$



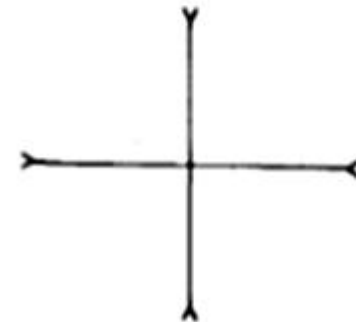
- Stijenska masa (jednako kao i tlo) koja je ispod površine Zemlje nalazi se prije inženjerskih zahvata u stanju primarnih naprezanja.
- Takva naprezanja su nastala kao rezultat mase naslaga stijene i kao rezultat tektonskih aktivnosti u zemljinoj kori.
- Najčešće se nazivaju **in-situ naprezanjima**.
- Često se može pretpostaviti red veličine naprezanja i njihov smjer, ali se nikad ne može u potpunosti sigurno odrediti veličina pogreške procjene bez mjerenja.
- Mjerenja naprezanja u stijenskoj masi se često koriste u rudarstvu, dok u građevinarstvu radi visoke cijene se koriste u rijetkim situacijama.
- Međutim, poznavanje stanja naprezanja je u nekim situacijama neophodno, te se tada zahtjeva da se takva ispitivanja provedu.

➤ *Koja je motivacija za određivanje početnog stanja naprezanja u stijenskoj masi?*

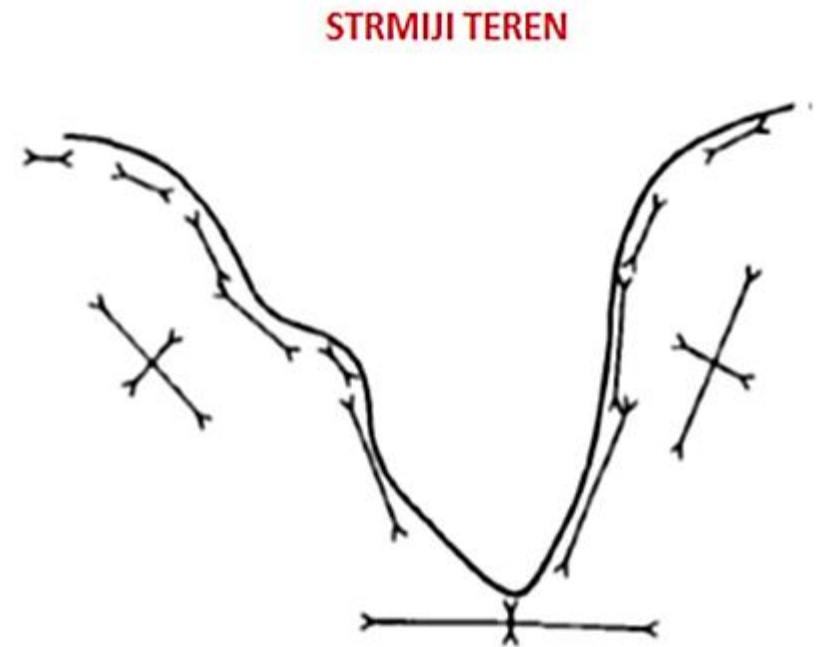
1. Dobijanje osnovnih saznanja o stanju naprezanja za potrebe stijenskog inženjerstva, kao npr.
 - određivanja veličine i smjera djelovanja većeg glavnog naprezanja
 - određivanja smjera u kojem smjeru će najvjerojatnije doći do loma stijenske mase
 - određivanja smjera kretanja podzemne vode
 - itd.
2. Dobijanje konkretnih znanja o rubnim uvjetima za analize naprezanja koje će se provesti u projektnim fazama u stijenskom inženjerstvu.

- Kako je već spomenuto, polje in-situ naprezanja se određuje preko orijentacija i veličina glavnih naprezanja.
- Kao prvu aproksimaciju, pretpostavlja se da tri glavna naprezanja prirodnog, in-situ, polja naprezanja djeluju vertikalno (jedna komponenta) i horizontalno (dvije komponente).
- Koristeći ovu pretpostavku vezanu za orijentaciju, može se predvidjeti veličina ovih glavnih naprezanja koristeći **teoriju elastičnosti**.

- Pri površini stijene **horizontalne** površine, smjerovi glavnih naprezanja su vertikalni i horizontalni.
- Često se pretpostavlja da u ti smjerovi vertikalni i horizontalni i na većim dubinama, međutim to je samo pretpostavka da bi se reducirao broj nepoznanica, te je ta pretpostavka naširoko prihvaćena u praksi.



- Ovo međutim ne vrijedi za manje dubine na **strmijim terenima**, zato jer površina stijene, bez normalnih i posmičnih napreznja, uvijek formira trajektoriju glavnog napreznja.
- Ispod površine strmog terena je jedno glavno napreznje okomito na kosinu i jednako nuli, dok druga dva glavna napreznja leže u ravnini kosine.



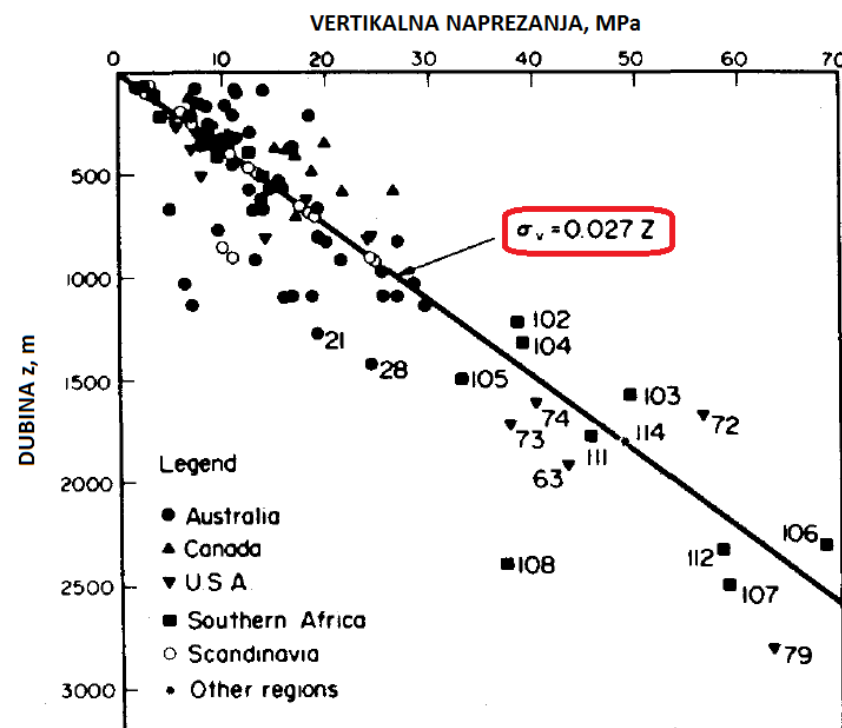
➤ Vertikalna naprezanja se mogu izraziti kao: $\sigma_v = \gamma \cdot z$

γ ... zapreminska težina slojeva iznad dubine na kojoj se određuje naprezanje (kN/m³)

z ... dubina na kojoj se određuje naprezanje (m)

Ovakav način određivanja vertikalnog naprezanja se pokazao kao dovoljno pouzdan za većinu zahvata u inženjerskoj praksi!

(iako se za dubine pri površini može primjetiti da su mjerena naprezanja negdje i do pet puta veća od procjenjenih, a za dubine od 500 – 1500 m i do pet puta manja od procjenjenih)

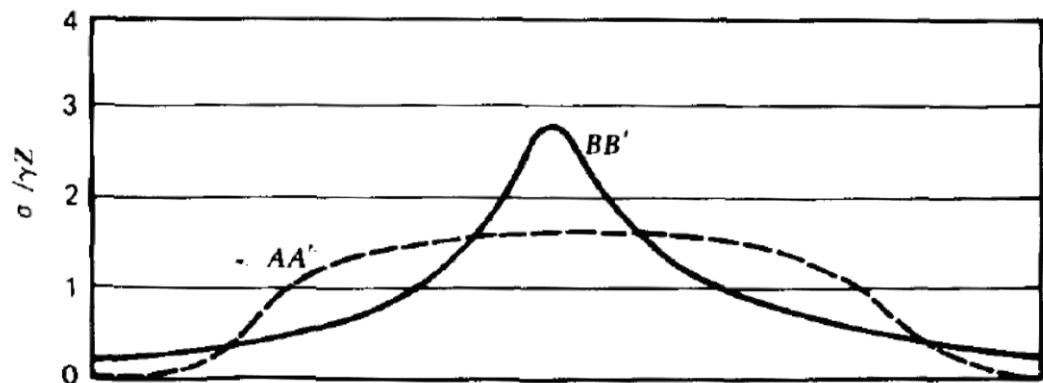
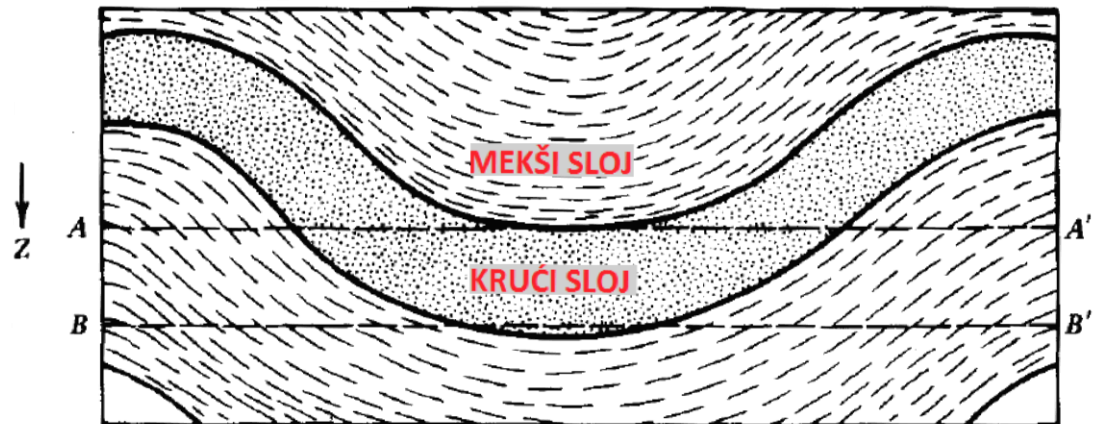


VRIJEDNOST VERTIKALNIH PRIMARNIH NAPREZANJA
MJERENIH ZA STIJENE NA RAZLIČITIM LOKACIJAMA U SVIJETU

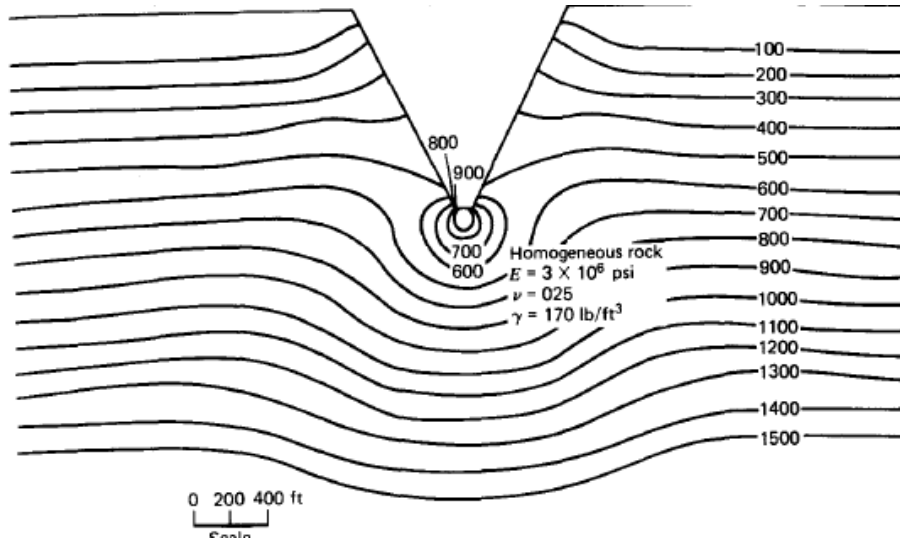
- Međutim, može se dogoditi da formula daje nepouz dane rezultate u određenim slučajevima.

Primjer.

- Na gornjoj slici se može vidjeti da presjek AA' siječe kruti i meki sloj koji su 'presavijeni' u antiklinale i sinklinale.
- Duž linije AA' naprezanje varira od 60 % veće vrijednosti od $\gamma \cdot z$ ispod sinklinale do nula ispod antiklinale, gdje krući sloj služi kao zaštitna kupola koja preusmjeruje sile težine nadsloja duž krila ulegnuća.

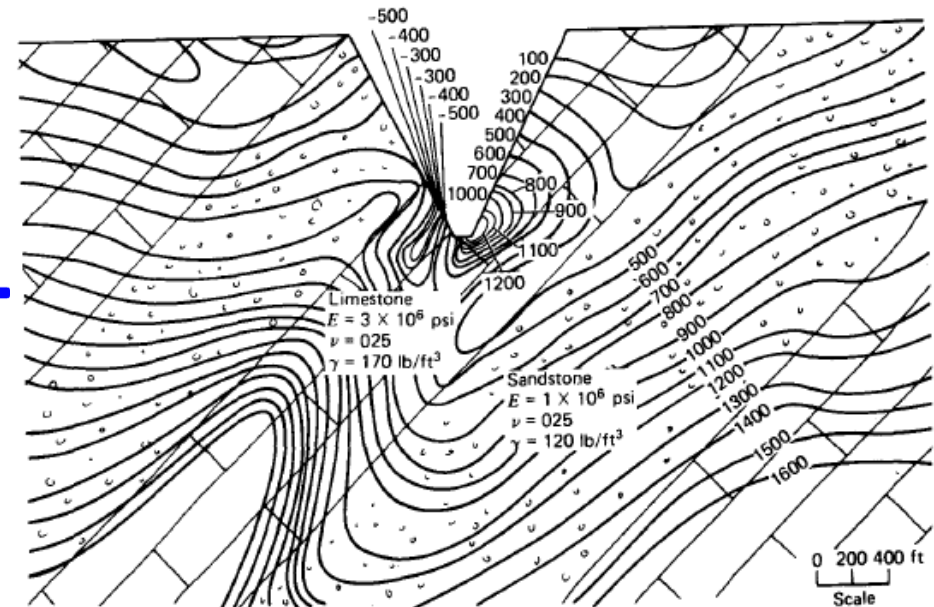


- Tunel kojemu je os linija BB', će stoga prolaziti kroz dio gdje je naprezanje jako malo na području ispod antiklinale, prema području gdje će proći kroz krući sloj, na dnu sinklinale, gdje je naprezanje izrazito veliko. npr. prelazak iz 'mekše' stijene šejla prema 'krućoj' stijeni pješčenjaku.
- Ako postoji zona manje posmične čvrstoće duž kontakta ove dvije stijene, nastala uslijed formiranja bora, vertikalno naprezanje će naglo porasti pri prelazu iz jedne stijene u drugu.
- Kako geološka sturktura može uvelike utjecati na vrijednost vertikalnih naprezanja, kao i na smjerove glavnih naprezanja, preporuča se detaljnije analize geoloških heterogenosti da bi se detektirale pojave kada su smjerovi sila 'preusmjereni' od vertikale.
- Jedna takva analiza, heterogene sredine na mjestu oštrog usjeka, prikazana je na sljedećoj slici. Korištena je metoda konačnih elemenata.



Najveća posmična
naprezanja ispod doline –
HOMOGENA sredina

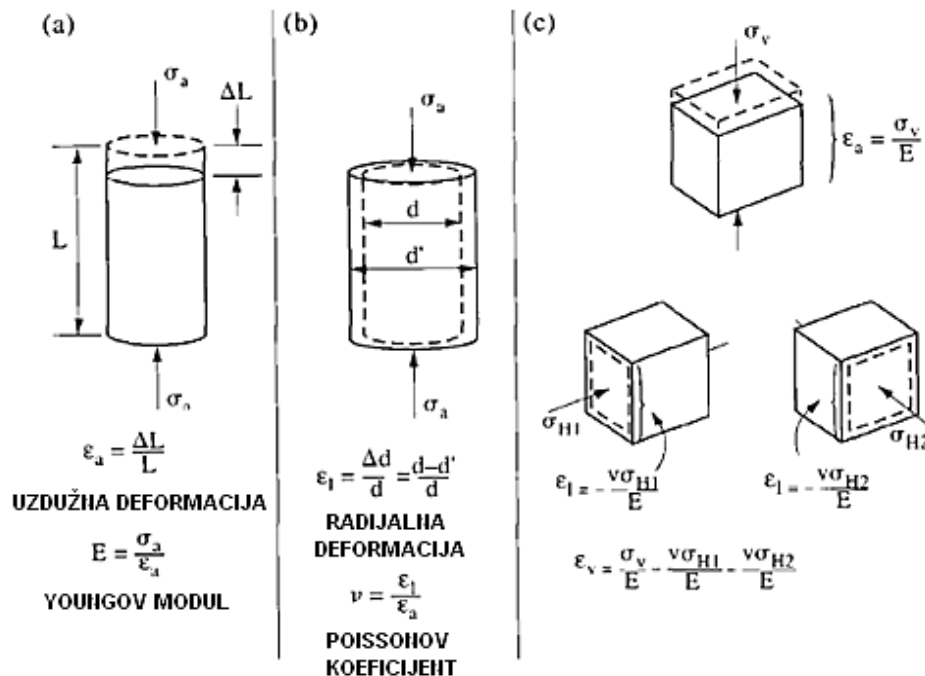
Najveća posmična naprezanja
ispod doline –
HETEROGENA sredina



Napomena.

Naprezanja su u psf (pounds per square foot) -
 $1 \text{ psf} = 47.9 \text{ N/m}^2$

- Da bi dobili početnu procjenu horizontalnog naprezanja, temeljeno na teoriji elastičnosti i pretpostavci izotropne stijene, potrebno se prisjetiti sljedećih pojmova - **Youngov modul elastičnosti** i **Poissonov koeficijent**. Mogu se definirati na sljedeći način:



$$E = \frac{\sigma_a}{\epsilon_a} = \frac{\text{UZDUŽNO NAPREZANJE}}{\text{UZDUŽNA DEFORMACIJA}}$$

$$\nu = \frac{\epsilon_l}{\epsilon_a} = \frac{\text{RADIJALNA DEFORMACIJA}}{\text{UZDUŽNA DEFORMACIJA}}$$

- Koristeći ove parametre, mogu se izvesti izrazi za deformacije duž bilo koje osi male kocke na nekoj dubini u stijenskoj masi (prethodna slika pod c)
- U ovom slučaju, ukupna deformacija duž bilo koje osi se može odrediti iz deformacija uslijed pripadajućih uzdužnih naprezanja. Na primjer, vertikalna deformacija se može odrediti iz izraza:

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma_v}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_{H1}}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_{H2}}{E}$$

gdje su σ_{H1} i σ_{H2} dvije komponente glavnog horizontalnog naprezanja.

- Na sličan način se može odrediti i horizontalna deformacija ε_{H1} :

$$\varepsilon_{H1} = \frac{\sigma_{H1}}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_{H2}}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_v}{E}$$

- Da bi se dobila početnu pretpostavka o horizontalnom naprezanju, moraju se uzeti u obzir dvije pretpostavke:

a) dva horizontalna naprezanja su jednaka!

b) ne postoje horizontalne deformacije, tj. ε_{H1} i ε_{H2} su jednake nuli!



element stijene se ne može širiti horizontalno, jer je ograničen susjednim elementima stijene od kojih se svaki nastoji horizontalno proširiti!

- Dakle:

$$0 = \frac{\sigma_{H1}}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_{H2}}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_v}{E}$$

te je:

$$\sigma_H = \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \sigma_v$$

- Dakle, horizontalna naprezanja u tlu se izražavaju kao funkcija vertikalnih naprezanja i to preko odnosa:

$$\sigma_h = K \cdot \sigma_v = K \cdot \gamma \cdot z$$

gdje je **K koeficijent bočnog pritiska stijenske mase** opterećene samo težinom slojeva iznad.

- U područjima nedavne sedimentacije, može se primjeniti teorija elastičnosti korištenjem gornjeg izraza za koeficijent bočnog pritiska. Ovaj izraz slijedi iz simetrije jednodimenzionalnog opterećivanja elastičnog materijala, gdje se kao uvjet uzima u obzir da nema horizontalnih deformacija.
- Ova formula za određivanje K , stoga nema veliki značaj kod stijenskih masa koje su prošle određene cikluse opterećenja i rasterećenja. Pokažimo primjer.

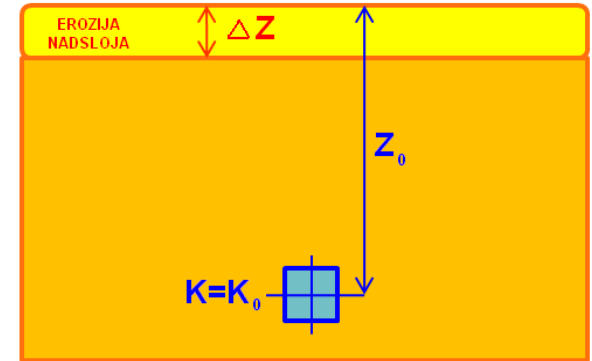


- Zamislimo element stijene na dubini Z_0 s početnom vrijednosti $K=K_0$, koji se nalazi pod rasterećenje uslijed uklanjanja nadsloja u debljini od ΔZ

- Uslijed smanjena vertikalnog naprezanja

za $\gamma \cdot \Delta Z$, horizontalno naprezanje se smanji za:

$$\frac{\gamma \cdot \Delta Z \cdot \nu}{1 - \nu}$$



- Dakle uslijed erozije sloja stijene u debljini od ΔZ , horizontalno naprezanje na dubini $Z = Z_0 - \Delta Z$ će postati jednako:

$$K_0 \cdot \gamma \cdot Z_0 - \frac{\gamma \cdot \Delta Z \cdot \nu}{1 - \nu}$$

- Sada se može pisati:

$$K(Z) = K_0 + \left[\left(K_0 - \frac{\nu}{1 - \nu} \right) \cdot \Delta Z \right] \cdot \frac{1}{Z}$$

- Erozijom nadsloja doći će do povećanja vrijednosti K , čime horizontalno naprezanje postaje veće od vertikalnog naprezanja do određenih dubina.

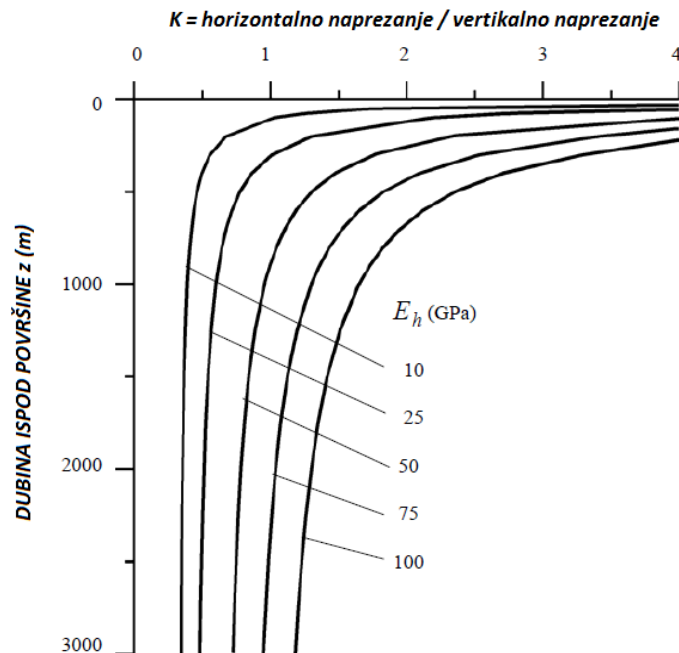
- Mjerenjima horizontalnih naprezanja u velikom broju podzemnih građevina i rudnika, pokazano je da koeficijent bočnog pritiska ima veće vrijednosti na manjim dubinama, te da postoji trend njegovog smanjivanja s povećanjem dubine.
- *Sheorey* je razvio elasto-statički termalni model zemlje koji razmatra zakrivljenost zemljine kore i varijaciju elastičnih konstanti, gustoće i termalne ekspanzije zemljine kore, te je sukladno tome predložio sljedeći izraz:

$$K = 0.25 + 7 \cdot E_h \cdot \left(0.001 + \frac{1}{z} \right)$$

gdje je E_h srednji modul deformabilnosti gornjeg dijela zemljine kore mjeren u vodoravnom pravcu.

- Ni pristup što ga je predložio *Sheorey* ne objašnjava pojave koje se često susreću:
 - a) pojava vertikalnih naprezanja većih od izmjerenih
 - b) horizontalna naprezanja su vrlo visoka
 - c) dva mjerena horizontalna naprezanja na istoj lokaciji su rijetko jednaka

- Pretpostavlja se da je razlog rezultat lokalne topografije i svojstava geologije koji se ne mogu uzeti u obzir na velikoj skali kako to *Shoerey* predlaže.



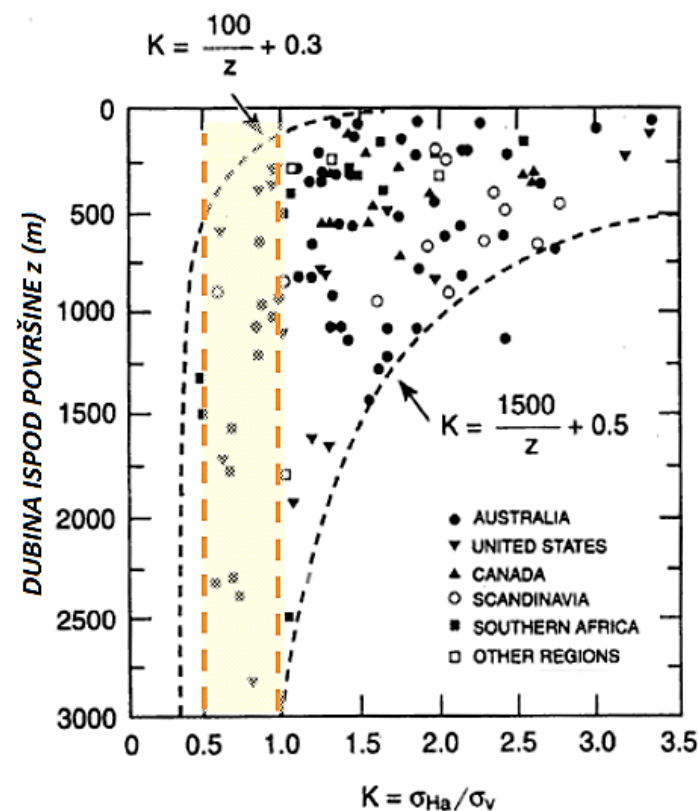
OMJER HORIZONTALNIH I
VERTIKALNIH NAPREZANJA U
OVISNOSTI O MODULU
DEFORMABILNOSTI
(prema *Shoerey*-ovoj jednadžbi)

- Mjerenjima na velikom broju lokacija horizontalna naprezanja su imala vrlo visoke vrijednost, negdje i **do nekoliko puta veće od vertikalnih naprezanja**.

➤ Navedeno je rezultat:

1. Erozijske
2. Tektonskih aktivnosti
3. Anizotropije stijenske mase
4. Lokalnih efekata u blizini diskontinuiteta
5. Efekta mjerila

**MJERENE VRIJEDNOSTI NAPREZANJA
GDJE OSJENČANO PODRUČJE
PREDSTAVLJA VRIJEDNOSTI K PREMA
TEORIJI ELASTIČNOSTI**



- Poznavajući stanje naprezanja, može se, prema teoriji elastičnosti, i odrediti stanje deformacija (ali i obratno). Za dvodimenzionalni slučaj:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot [\varepsilon_{xx} + \nu \cdot \varepsilon_{yy}]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot [\varepsilon_{yy} + \nu \cdot \varepsilon_{xx}]$$

$$\tau_{xy} = \boxed{G} \cdot \gamma_{xy} = G \cdot (2 \cdot \varepsilon_{xy}) \quad (\text{ili } \tau_{xy} = G \cdot (2 \cdot e_{xy}) \text{ ako označimo } e_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \text{ kao ranije})$$

→ **MODUL POSMIKA** $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$

- Dok modul elastičnosti E opisuje odgovor materijala na uzdužnu deformaciju, modul posmika G opisuje odgovor materijala na posmičnu deformaciju

- Postoje **metode izravnog mjerenja naprezanja i metode procjenivanja naprezanja raznim neizravnim ili indikatorskim metodama**. Kod ovih potonjih, naprezanje se ne može mjeriti direktno, pa se stoga tehnike određivanja naprezanja u stijenskoj masi oslanjaju na mjerenja nekog 'odgovora' (npr. pomaka, deformacije...) koje je potaknuto umjetno izazvanim poremećajima u stijenskoj masi.
- Od predloženih izravnih metoda, tri su široko prihvaćene, i preporučene od strane ISRM-a:

- Da bi se u potpunosti moglo odrediti stanje naprezanja u nekoj točki u stijeni, potrebno je poznavati ili 6 komponenti tenzora naprezanja (3 normalne i 3 posmične) ili pravce i veličine 3 glavna naprezanja.

TLAČNI JASTUK

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \text{Symm.} & & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

JEDNA KOMPONENTA
NORMALNOG
NAPREZANJA
SE MOŽE ODREDITI

HIDRAULIČKO FRAKTURIRANJE

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ & \sigma_2 & 0 \\ \text{Symm.} & & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

GLAVNA NAPREZANJA
SU PRETPOSTAVLJENA
PARALELNO S OSIMA
npr. RAVNINE
PUKOTINE, DVA SU
ODREĐENA, JEDNO JE
PROCIJENJENO

USBM 'OVERCORING' TORPEDO

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \text{Symm.} & & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

TRI KOMPONENTE U
2D SU ODREĐENE IZ 3
MJERENJA PROMJENE
PROMJERA BUŠOTINE
(U SAMO JEDNOM
MJERENJU)

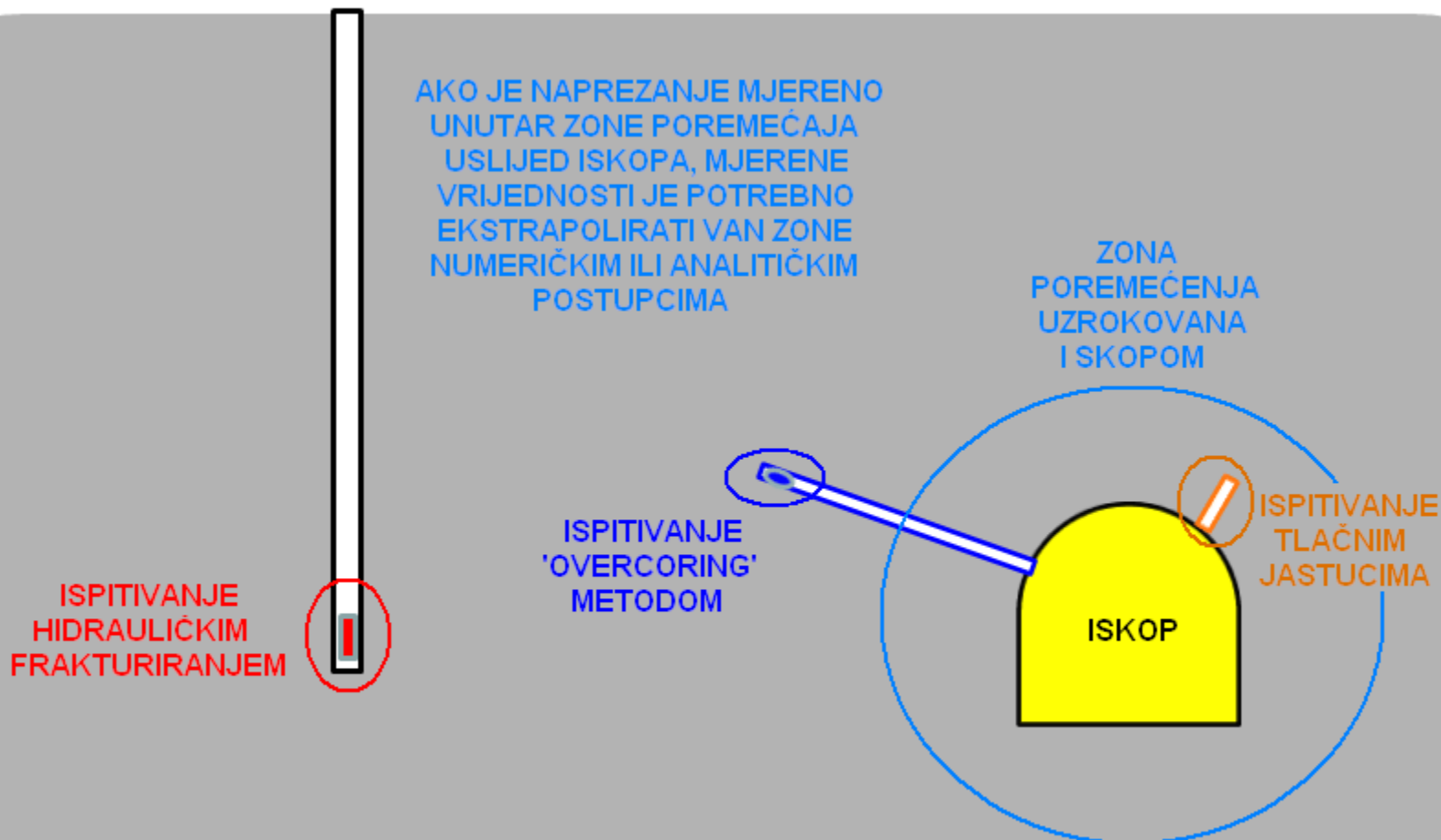
CSIRO 'OVERCORING'

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \text{Symm.} & & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

SVIH ŠEST KOMPONENTI
JE ODREĐENO IZ ŠEST
(ILI VIŠE) MJERENJA
DEFORMACIJA
(U SAMO JEDNOM MJERENJU)

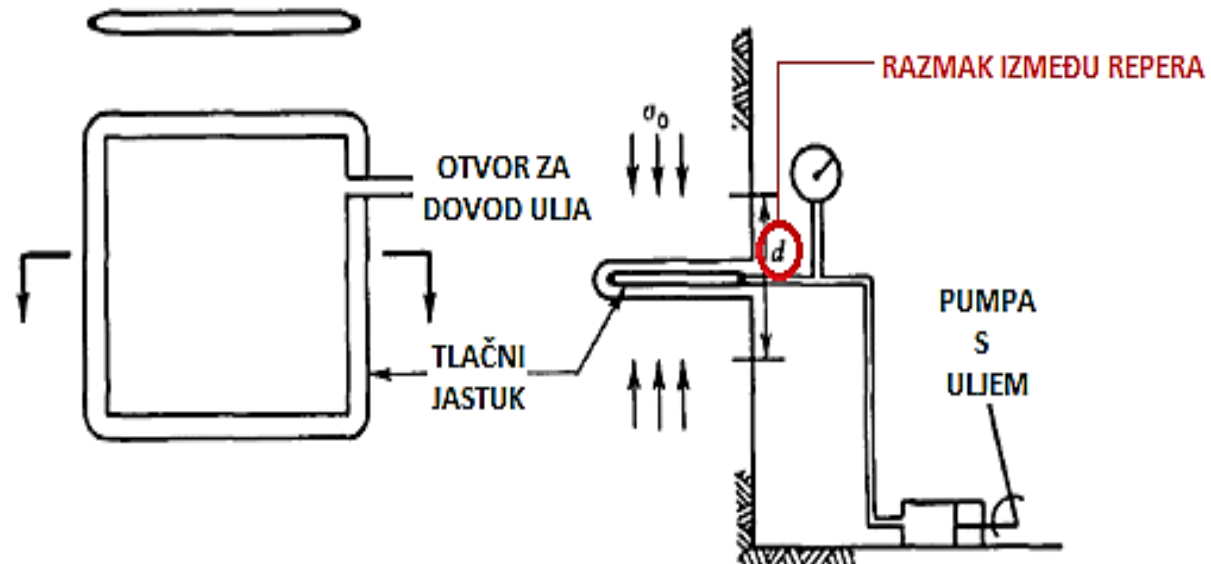
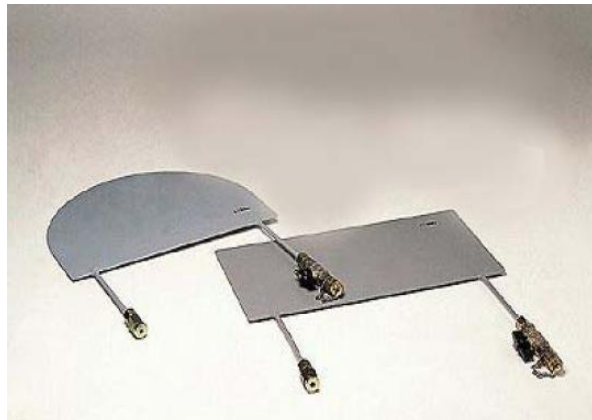
4.2. METODE MJERENJA PRIMARNOG STANJA NAPREZANJA

PRIKAZ METODA MJERENJA PRIMARNOG STANJA NAPREZANJA U OVISNOSTI O POLOŽAJU ISKOPA



- Ako postoji pristup licu stijene, kao naprimjer zidu podzemne galerije, naprezanje se može odrediti korištenjem jednostavne i pouzdane metode ispitivanja tlačnim jastucima.
- Ovom metodom se mjere naprezanja u području poremećenja (tj. u području promjene primarnih naprezanja) stijenske mase uslijed iskopa galerije u kojoj se provodi ispitivanje.
- Da bi se odredilo primarno naprezanje u **neporemećenoj** stijenskoj masi, mjerene vrijednosti je potrebno ekstrapolirati van područja iskopa primjenom teorije elastičnosti ili numeričkim modeliranjem, kako je i naznačeno na prethodnoj slici.

- Metoda se sastoji od korištenja tlačnih jastuka koji su sastavljeni od dvije tanke ploče međusobno zavarene po svojim rubovima, i otvora za dovod ulja u prostor između ploča pomoću kojeg se povećava tlak.



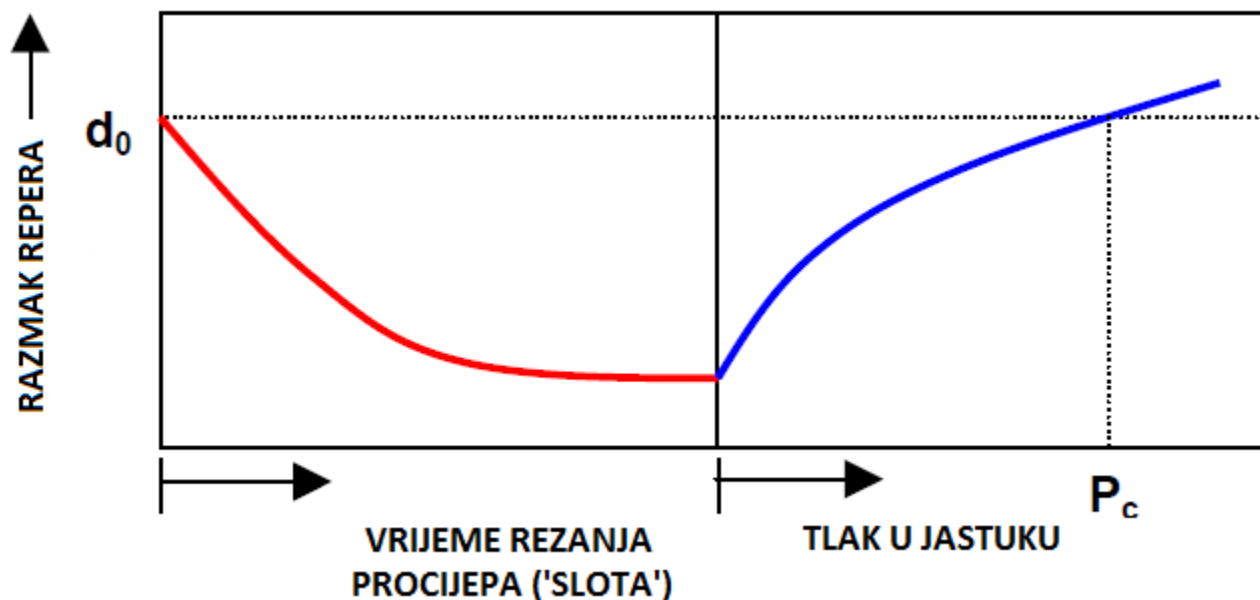
➤ Postupak ispitivanja:

1. Na lice stijene se postave 2 repera na razmaku d , koji je precizno izmjeren
2. Zatim se napravi procijep (tzv. slot) u stijeni između repera, na način kako je prikazano na slici

Ako je normalno naprezanje u stijeni tlačno, radi formiranja procijepa, razmak između repera će se smanjiti

3. Nakon toga se u procijep postavlja tlačni jastuk, te se vrši injektiranje procijepa
4. Povećavanjem tlaka u jastuku, dovodenjem ulja, razmak između repera će se početi povećavati

5. Pretpostavlja se da kad razmak između repera dosegne onu vrijednost koju je imao prije nego je došlo do bušenja procijepa, sila koja se ostvarila u tlačnom jastuku odgovara vrijednosti normalnog naprezanja u stijeni prije ispitivanja.



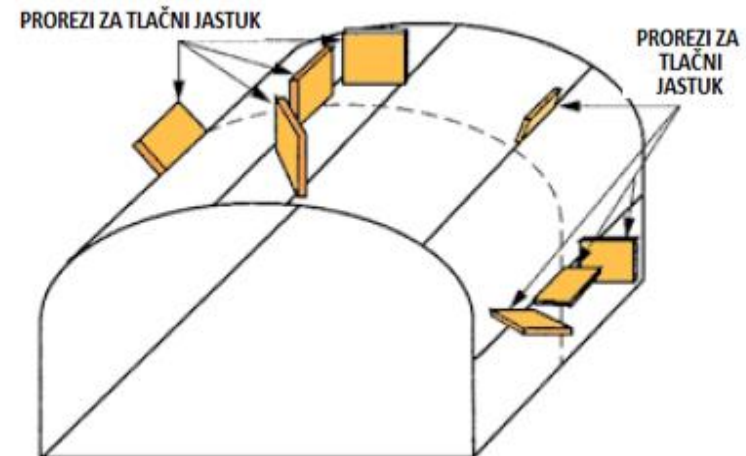
- Postojati će greške kod ovih pretpostavki, pretežno radi utjecaja rubova jastuka, ali ovo se može uzeti u obzir kalibracijom jastuka.
- Također su dana tri uvjeta za uspješno korištenje metode tlačnih jastuka:
 1. Stijenska masa u zidovima iskopane galerije ne smije biti poremećena
 2. Stijenska masa se treba ponašati elastično
 3. Geometrija prostorije (galerije) mora biti takva da za nju postoji zatvoreno rješenje za izračun naprezanja

** Prvi i drugi uvjet eliminiraju upotrebu eksploziva kao metode iskopa prostorije (galerije)*

- Metoda tlačnih jastuka je relativno jeftina metoda određivanja jedne komponente tenzora naprezanja.
- Da bi se dobile vrijednosti ostalih komponenti naprezanja, potrebno je provesti bar šest ispitivanja kod kojih će se varirati orijentacija tlačnih jastuka
- Prema preporukama ISRM-a najbolje je provesti ispitivanja na sljedeći način:

po 3 jastuka u suprotnim zidovima otvora
3 jastuka u kaloti otvora

UKUPNO 9 ISPITIVANJA



- Oprema za ispitivanje se može spojiti na mjestu ispitivanja i teško se oštećuje, što nije od malog značaja kada je riječ o ispitivanjima u podzemlju.
- Općenito, ako se normalna naprezanja okomita na ravninu tlačnog jastuka odrede, iz tri točke duž sekcije galerije, vrijednosti popuštanja $\sigma_{\theta,A}, \sigma_{\theta,B}, \sigma_{\theta,C}$ iz njih je moguće odrediti vrijednosti komponenti naprezanja postupkom inverzije matrica:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta,A} \\ \sigma_{\theta,B} \\ \sigma_{\theta,C} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

gdje su koeficijenti a_{ij} određeni numeričkim postupcima.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{\theta,A} \\ \sigma_{\theta,B} \\ \sigma_{\theta,C} \end{Bmatrix}$$

- Na primjer, pretpostavka je da su tlačni jastuci postavljeni na K i Z , tj. u kaloti i zidu kružnog otvora.
- Ako su početna naprezanja horizontalna i vertikalna, te ako je polumjer tunela velik u odnosu na širinu tlačnih jastuka, tada se može pisati:

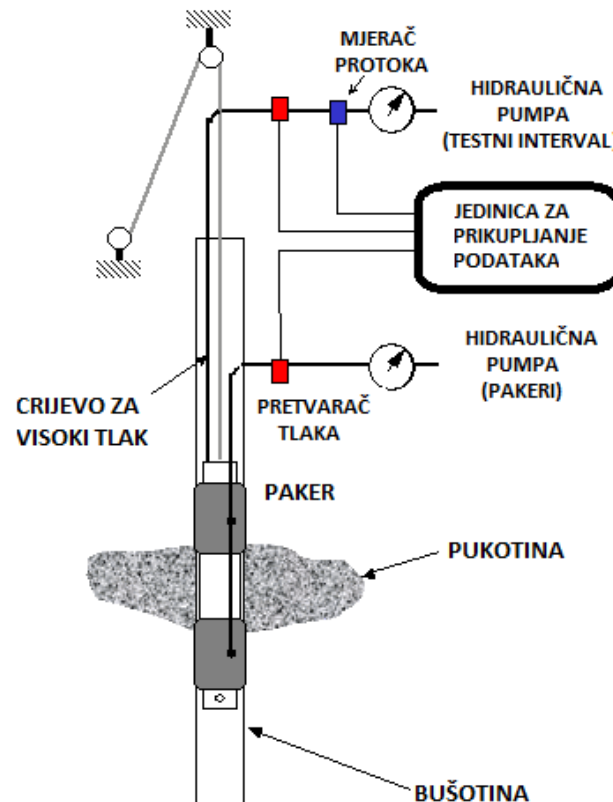
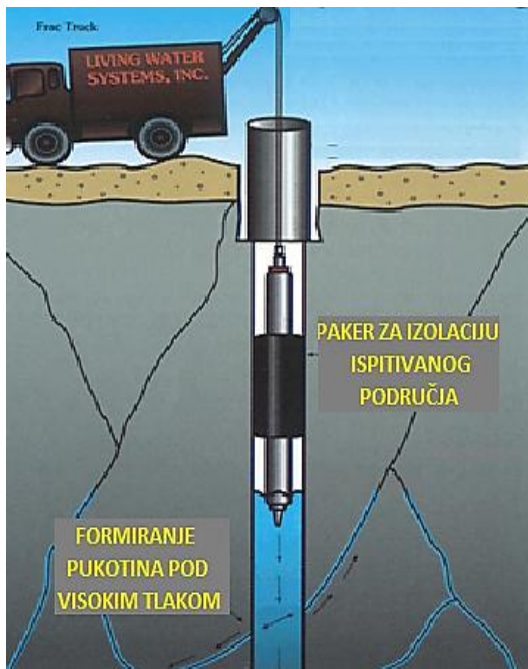
$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta,Z} \\ \sigma_{\theta,K} \end{Bmatrix}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{hor} \\ \sigma_{vert} \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} \sigma_{hor} \\ \sigma_{vert} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{\theta,Z} \\ \sigma_{\theta,K} \end{Bmatrix}$$

- te je:

$$\sigma_{hor} = \frac{1}{8} \cdot \sigma_{\theta,Z} + \frac{3}{8} \cdot \sigma_{\theta,K}$$

$$\sigma_{vert} = \frac{3}{8} \cdot \sigma_{\theta,Z} + \frac{1}{8} \cdot \sigma_{\theta,K}$$

- ova metoda omogućuje procjenu naprezanja u stijeni do značajnih dubina korištenjem bušotina velikih dubina (i do 5-6 km).
- Prednost ove metode je u činjenici da se izvodi dovoljno daleko od područja iskopa, tj. van zone utjecaja promjene stanja naprezanja izazvanog iskopom u stijeni

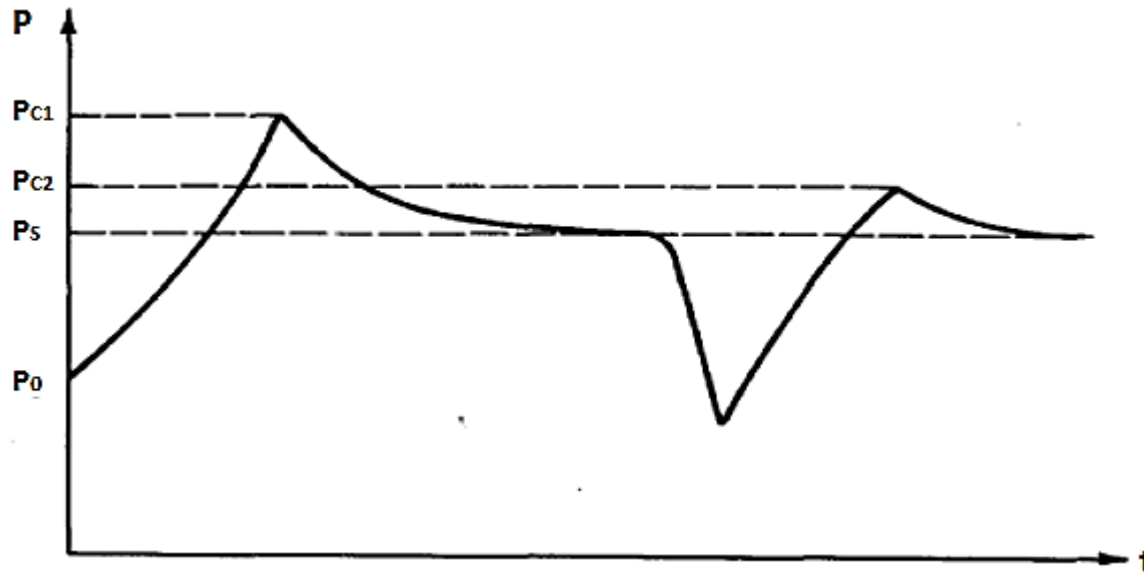


➤ Postupak ispitivanja:

1. Izbuši se bušotina do željene dubine, te se kamerom snimi unutrašnjost da bi se provjerilo da ne postoje pukotine koje će onemogućavati provedbu ispitivanja.
2. Voda se pumpa u određeni, izolirani, dio bušotine.

Izolacija se vrši pakerima u duljini od približno 1m.

3. Kako se tlak vode povećava, početna tlačna naprezanja na zidovima bušotine se smanjuju i nakon nekog vremena postaju vlačna.
4. Kada naprezanje dosegne vrijednost $-T_0$, dolazi do formiranja pukotina, a tlak vode je u tom trenutku p_{c1}
5. Ako se pumpanje vode nastavi, pukotina se proširuje, i s vremenom će tlak u bušotini pasti na vrijednost p_s



- Za cijelo vrijeme trajanja pokusa mjeri se tlak vode, gdje su od najveće važnosti već spomenute dvije vrijednosti tlaka:
 - a) **BREAKDOWN PRESSURE** – tlak p_{c1} pri kojemu dolazi do formiranja pukotine
 - b) **SHUT-IN PRESSURE** – tlak p_s koji je potreban da se pukotina drži otvorenom

- Da bi se interpretirali podaci dobiveni ispitivanjem, u cilju dobijanja vrijdnosti primarnih naprezanja, potrebno je odrediti orijentaciju hidraulički inducirane pukotine.
- Orijetacija pukotine se može dobiti fotografiranjem ili snimanjem kamerom na dubini ispitivanja. Međutim, nakon ispitivanja se često događa da se nakon smanjivanja tlaka pukotina zatvori, te je teško ocijeniti njezinu orijentaciju.
- Alternativa za određivanje orijentacije i lokacije nastale pukotine je korištenje tzv. 'impression' pakera, gumenog pakera na kojem ostaje trag pukotine.
- Većina rezultata dobivenih hidrauličkim frakturiranjem upućuje na to da je se formira vertikalna pukotina, gdje je to naročito izraženo kod ispitivanja većih od 800 m.

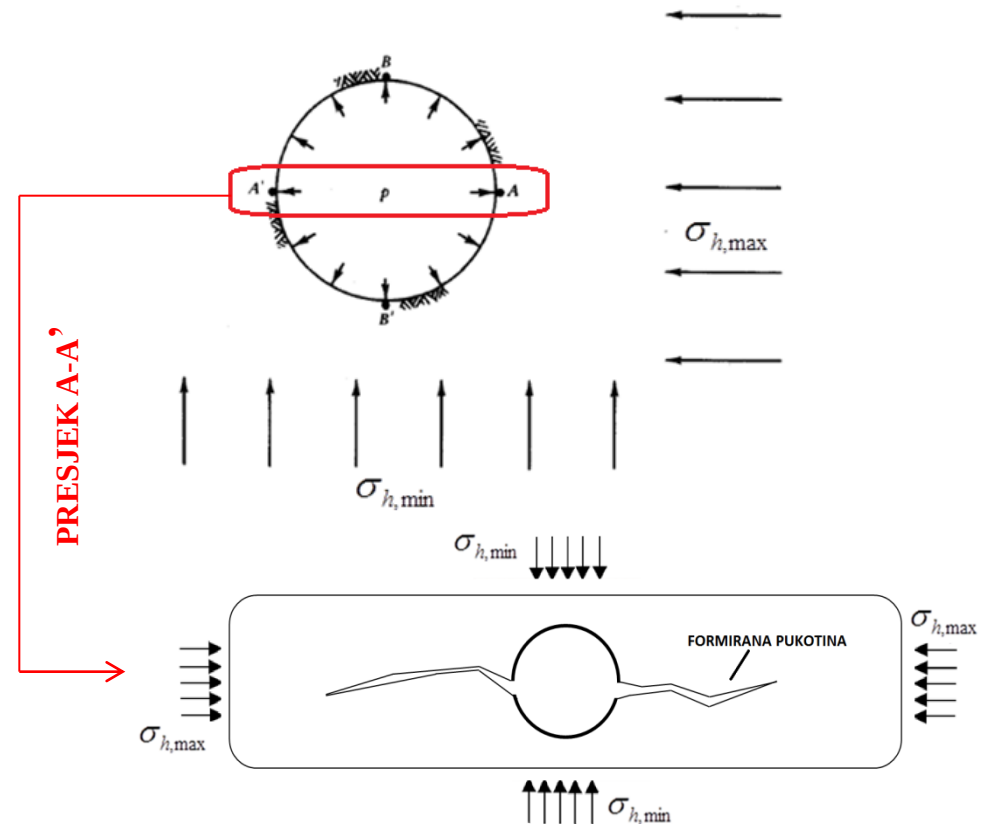
- Glavni nedostatak metode je što se ne mogu izmjeriti sve komponente tenzora naprezanja.
- Da bi se dobile sve komponente tenzora naprezanja, tj. da bi tenzor naprezanja bio u potpunosti određen, potrebno je uvesti određene pretpostavke:
 1. pravci djelovanja glavnih naprezanja paralelni su i okomiti na os bušotine
 2. vrijednost trećeg glavnog naprezanja se pretpostavi
 3. vertikalno glavno naprezanje je rezultat težine nadsloja
- Analiza rezultata pokusa je olakšana ako se pretpostavi da penetracija vode u pore stijene nema (ili ima jako malo) utjecaja na naprezanja u okolini bušotine.

- Prihvaćajući takvu pretpostavku, moguće je koristiti rezultate distribucije naprezanja oko kružnog otvora homogene, elastične i izotropne stijene da bi se dobilo početno stanje naprezanja – tzv. Kirschovo rješenje.
- Tangencijalno naprezanje na zidu bušotine je najmanje na presjeku A – A', gdje ima vrijednost:

$$\sigma_{\theta} = 3 \cdot \sigma_{h,\min} - \sigma_{h,\max}$$

- Kada se nametne pritisak p , vlačno naprezanje se 'dodaje' po cijelom obodu jednako ($-p$)
- Uvjet za nastanak vertikalne pukotine je vlačno naprezanje u točki A koje je jednako vlačnoj čvrstoći $-T_0$:

$$3 \cdot \sigma_{h,\min} - \sigma_{h,\max} - p_{c1} = -T_0 \quad (1)$$



- Jednom kada je formirana, pukotina će nastaviti napredovati sve dok je nametnuti tlak veći od naprezanja okomitog na ravninu pukotine.
- U stijenama, pukotine napreduju u ravnini okomitoj na σ_3
- U kontekstu hidrauličkog frakturiranja s vertikalnom pukotinom, to znači da je naprezanje okomito na ravninu pukotine jednako ‘*shut-in*’ tlaku p_s :

$$\sigma_{h,\min} = p_s \quad (2)$$

- Jednadžbe (1) i (2) omogućuju određivanje većeg i manjeg normalnog naprezanja u ravnini okomitoj na bušotinu, ako je poznata vlačna čvrstoća stijene.
- Ako je tlak u bušotini smanjen, a zatim opet povećan na vrijednost veću od p_s , hidraulička pukotina će se zatvoriti, pa onda opet otvoriti. Neka se novi vršni tlak, manji od p_{c1} , naziva p_{c2} , te se vrijednost vlačne čvrstoće stijene može odrediti iz:

$$T_0 = p_{c1} - p_{c2}$$

➤ Primjer.

Stanje naprezanja u vapnenačkoj stijenskoj masi se želi odrediti primjenom metode hidrauličkog frakturiranja. Dva ispitivanja su provedena u vertikalnoj bušotini, i to na dubinama od 500m i 1000m. Dobiveni rezultati su sljedeći:

DUBINA (m)	'BREAKDOWN' TLAK (MPa)	'SHUT - IN' TLAK (MPa)
500	14.0	8.0
1000	24.5	16.0

Poznavajući vlačnu čvrstoću stijene koja iznosi $T_0 = 10$ MPa, procijeni vrijednosti σ_1 , σ_2 , σ_3 na dubinama ispitivanja.

Navedi sve pretpostavke koje su korištene da bi se došlo do krajnjeg rješenja.

Da li su dva skupa dobivenih vrijednosti međusobno konzistentna?

Jesu li rezultati u skladu s mjerenim vrijednostima dobivenim na mjerenjima na svjetskoj razini?

Pretpostavke koje se uvode pri rješavanju problema su :

- Jedno glavno naprezanje je vertikalno, što je uobičajeno prihvatljivo, osim ako nije riječ o strmom terenu.
- Vertikalno naprezanje je rezultat težine nadsloja, što je uobičajeno prihvatljivo, osim u slučaju lokalnih promjena u geologiji.
- Pukotine se formiraju u vertikalnoj ravnini, što se može provjeriti tzv. 'impression' pakerom.
- Stijena je nepropusna, iako se propusnost može uključiti u proračune koji onda postaju kompliciraniji.
- Koncentracija naprezanja se može procijeniti korištenjem Krisch-ovog rješenja; stijena je linearno elastična.

ISPITIVANJE 1. – dubina 500 m

$p_s = 8.0 \text{ MPa}$ ‘shut - in’ tlak

$p_{c1} = 14.0 \text{ MPa}$ ‘breakdown’ tlak

Naprezanje $\sigma_{h,\min}$ je jednako ‘shut-in’ tlaku p_s i iznosi **8.0 MPa**

$z = 500 \text{ m}$

$\gamma = 27 \text{ kN/m}^3$ (pretpostavka)

$$\left. \begin{array}{l} z = 500 \text{ m} \\ \gamma = 27 \text{ kN/m}^3 \text{ (pretpostavka)} \end{array} \right\} \sigma_v = \gamma_{stijene} \cdot z = 0.027 \cdot 500 = \text{13.5 MPa}$$

$$\sigma_{h,\max} = 3 \cdot \sigma_{h,\min} - p_{c1} + \sigma_t = 3 \cdot 8.0 - 14.0 + 10 = \text{20.0 MPa}$$

$$\sigma_{h,\max} = 20.0 \text{ MPa} > \sigma_{z(v)} = 13.5 \text{ MPa} > \sigma_{h,\min} = 8.0 \text{ MPa}$$

što omogućava formiranje vertikalne pukotine (jer se pukotina razvija u smjeru okomitom na manje glavno naprezanje).

ISPITIVANJE 2. – dubina 1000 m

$p_s = 16.0 \text{ MPa}$ ‘shut - in’ tlak

$p_{c1} = 24.5 \text{ MPa}$ ‘breakdown’ tlak

Naprezanje $\sigma_{h,\min}$ je jednako ‘shut-in’ tlaku p_s i iznosi **16.0 MPa**

$z = 1000 \text{ m}$

$\gamma = 27 \text{ kN/m}^3$ (pretpostavka)

$$\left. \begin{array}{l} z = 1000 \text{ m} \\ \gamma = 27 \text{ kN/m}^3 \text{ (pretpostavka)} \end{array} \right\} \sigma_v = \gamma_{stijene} \cdot z = 0.027 \cdot 1000 = \text{27.0 MPa}$$

$$\sigma_{h,\max} = 3 \cdot \sigma_{h,\min} - p_{c1} + \sigma_t = 3 \cdot 16.0 - 24.5 + 10 = \text{33.5 MPa}$$

$$\sigma_{h,\max} = 33.5 \text{ MPa} > \sigma_{z(v)} = 27.0 \text{ MPa} > \sigma_{h,\min} = 16.0 \text{ MPa}$$

što omogućava formiranje vertikalne pukotine (jer se pukotina razvija u smjeru okomitom na manje glavno naprezanje).

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(\sigma_{h,\min} + \sigma_{h,\max})}{\sigma_z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(8.0 + 20.0)}{13.5} = 1.04$$

koef. K za 500 m

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(\sigma_{h,\min} + \sigma_{h,\max})}{\sigma_z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(16.0 + 33.5)}{27.0} = 0.92$$

koef. K za 1000m

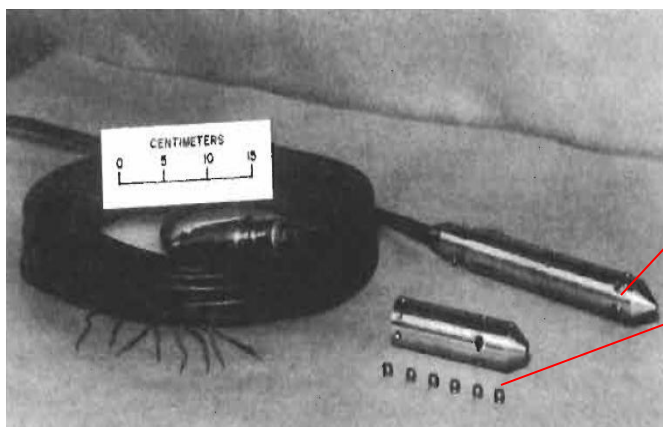
- Vrijednosti su međusobno konzistentne, a također se podudaraju sa svjetskim trendovima. Vrijednost $k \approx 1$ je uobičajena za ove dubine, a i vrijednost k se smanjuje s dubinom.
- Jedna komponenta horizontalnog naprezanja je veća od vertikalnog naprezanja. Uzrok tome je naveden u ranijem dijelu predavanja.

- Osnovu 'overcoring' metoda predstavlja bušenje bušotine do određene pozicije na kojoj se žele odrediti naprezanja. Na dnu takve bušotine se izbuši još jedna manjeg promjera, tzv. pilot bušotina u koju se umetne sonda. Ona radi na jedan od sljedeća dva načina:
 - a) mjeri promjenu promjera bušotine manjeg promjera (pilot bušotine)
 - b) mjeri deformaciju zidova bušotine manjeg promjera (pilot bušotine)
- Prednost ove metode je u činjenici da se izvodi dovoljno daleko od područja iskop, tj. van zone utjecaja promjene stanja naprezanja izazvanog iskopom u stijeni
- Nakon što je izvršeno nulto mjerenje, kreće se s postupkom 'overcoringa' – bušenja bušotine većeg promjera od pilot bušotine čime se stijena oslobađa utjecaja okolnog masiva.

- Naprezanja u stijenskoj masi se mogu dobiti na dva načina:
 - a) Nakon 'overcoringa', izvadi se jezgra (šuplji cilindar), unutar koje se još uvijek nalazi sonda. Ona se zatim postavlja u uređaj te na nju aplicira naprezanje. Promjena promjera se konstantno bilježi. Naprezanja pri kojima se mjerene veličine vrte na vrijednosti koje su imale prije 'overcoringa' su naprezanja u ravnini okomitoj na os bušotine u stijenskoj masi.
 - b) Mjerenjima deformacija stijenske mase, gdje se in - situ naprezanja se mogu izračunati iz izmjerenih deformacija uz poznavanje elastičnih karakteristika stijene.
- Dvije metode su najzastupljenije:
 1. USBM (United States Bureau of Mines) torpedo
 2. CSIRO 'overcoring'

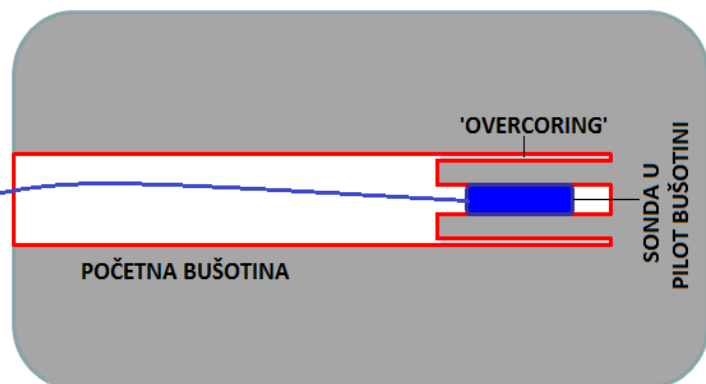
USBM torpedo

- Tehnologija koja omogućava određivanje cjelokupnog stanja naprezanja iz tri mjerenja promjene promjera bušotine (i to u tri pravca koja se sijeku pod kutem od 120°)

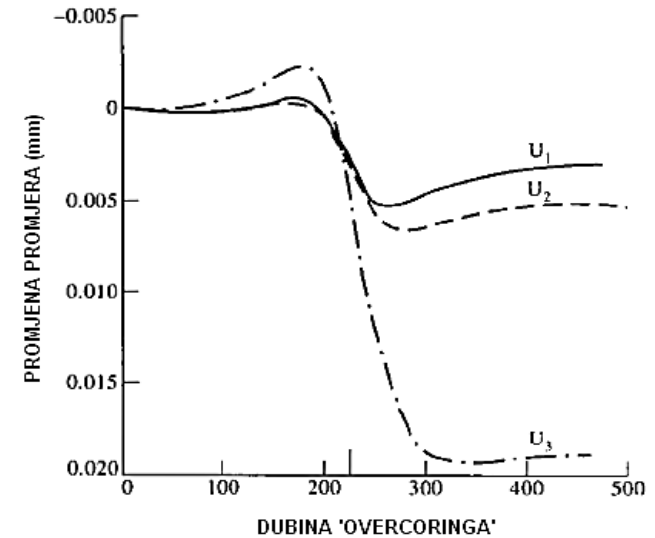


- Nakon bušenja bušotine i, zatim, pilot bušotine, unosi se sonda na kojoj se nalaze šest mjeraca deformacija

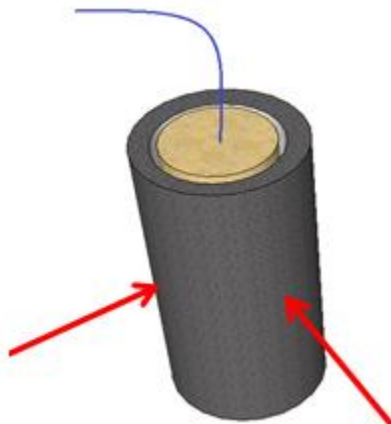
- Nakon izvršenog nultog mjerenja (početni promjer), vrši se 'overcoring' bušenje – bušenje bušotine većeg promjera koristeći tankostijenu sržnu cijev.



- Nakon 'overcoringa', naprezanja po plaštu jezgre (šupljeg cilindra) padaju na nulu.
- Time dolazi do povećanja promjera, a deformacija se registrira mjeracima deformacije.



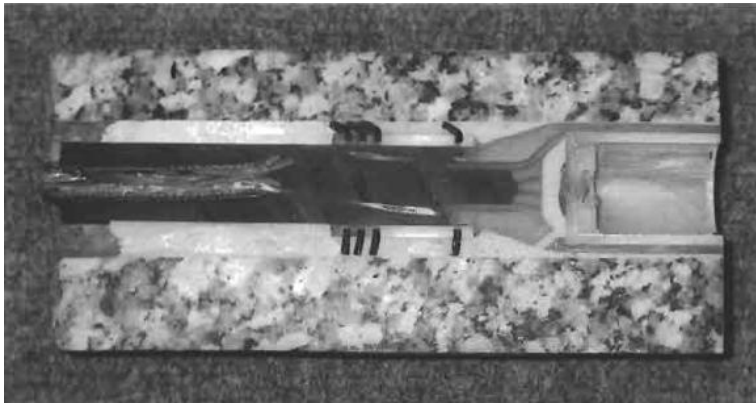
- Šuplji cilindar (sa sondom) se zatim vadi iz bušotine i postavlja u biaksijalni uređaj da bi se odredio modul elastičnosti, na način da se aplicira naprezanje po plaštu uz istodobno mjerenje deformacija.



- iz izračunatih parametara elastičnosti i mjerenih deformacija, dobiju se naprezanja u ravni okomitoj na os bušotine
- Da bi se odredile sve komponente naprezanja, potrebno je izvesti najmanje tri ovakva ispitivanja s različitim orijentacijama bušotina

CSIRO 'overcoring'

- Postupak ispitivanja je sličan USBM metodi, uz razliku da se kod CSIRO 'overcoringa' sonda lijepi za stijenke bušotine i mjeri deformacije za različite orijentacije i lokacije unutar bušotine.
- Takve sonde se mogu koristiti samo jedan put.



Presjek kroz CSIRO sondu s jasno vidljivim ljepilom između sonde i zida bušotine.

- CSIRO 'overcoringom' se jednim mjerenjem mogu odrediti sve komponente tenzora naprezanja iz razloga jer se na sondi nalaze mjerači deformacija koji su postavljeni u tri rozete od kojih svaka sadrži tri ili četiri mjerača deformacija, te se odjednom može izmjeriti 9 ili 12 deformacija.

STATISTIČKA ANALIZA PRIKUPLJENIH PODATAKA IZ MJERENJA NAPREZANJA

- Nakon ponavljanog mjerenja neke varijable, uobičajena je znanstvena praksa primjeniti statističku obradu da bi se ustanovila preciznost i točnost sustava mjerenja.
- Pri mjerenju nekog skalara, koristi se **standardna devijacija** kao mjera njegove varijabilnosti.
- Međutim, kako je već navedeno, skalar je određen jednom vrijednosti, dok je za definiranje tenzora naprezanja potrebno šest nezavisnih komponenti.
- Stanje naprezanja se najčešće definira veličinama i orijentacijama glavnih naprezanja.
- Dakle, ako se na nekom području provede određeni broj mjerenja stanja naprezanja (određivanja pojedinih komponenti), neprihvatljiva je procjena prosječnog naprezanja postupkom uprosječivanja pojedinih glavnih naprezanja i njihovih orijentacija

- Razlog zbog kojega je ovaj način određivanja prosječnog glavnog naprezanja iz određenog broja definiranih tenzora naprezanja je u činjenici da svaki od njih može imati različitu orijentaciju.
- Točna procedura bi obuhvaćala određivanje svih šest komponenti naprezanja u odnosu na zajednički referentni sustav, uprosječiti ih, te iz njih izračunati glavna naprezanja.
- Potrebno je još naglasiti da svaka od nezavisnih komponenti naprezanja ima svoju standardnu devijaciju koja će biti različita za svaku od komponenti. Dakle varijabilnost (izražena preko šest standardnih devijacija komponenti) je sama po sebi tenzor sa svojim glavnim vrijednostima i smjerovima – te se oni ne moraju podudarati sa smjerovima glavnih naprezanja.
- Točna procedura uprosječivanja dva tenzora naprezanja je prikazana na sljedećoj shemi.

IZ DVA ODVOJENA MJERENJA NAPREZANJA, ODREĐENA SU DVA TENZORA GLAVNIH
NAPREZANJA, OZNAČE SE SA $\rightarrow a$ I b

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^a & 0 & 0 \\ & \sigma_2^a & 0 \\ \text{SIMETRIČNO} & & \sigma_3^a \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sigma_1^b & 0 & 0 \\ & \sigma_2^b & 0 \\ \text{SIMETRIČNO} & & \sigma_3^b \end{bmatrix}$$

KOMPONENTE GLAVNIH NAPREZANJA U GORNJIM TENZORIMA ĆE NAJČEŠĆE IMATI
RAZLIČITE ORJENTACIJE. PRIJE UPROSJEČIVANJA, POTREBNO, POTREBNO JE OVA DVA
TENZORA TRANSFORMIRATI U TENZORE NAPREZANJA SA SVIM KOMPONENTAMA

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^a & \tau_{xy}^a & \tau_{xz}^a \\ & \sigma_{yy}^a & \tau_{yz}^a \\ \text{SIMETRIČNO} & & \sigma_{zz}^a \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^b & \tau_{xy}^b & \tau_{xz}^b \\ & \sigma_{yy}^b & \tau_{yz}^b \\ \text{SIMETRIČNO} & & \sigma_{zz}^b \end{bmatrix}$$

UPROSJEČIVANJE

KADA SE UPROSJEČE OVA DVA TENZORA, DOBIJE SE SLJEDEĆI TENZOR:

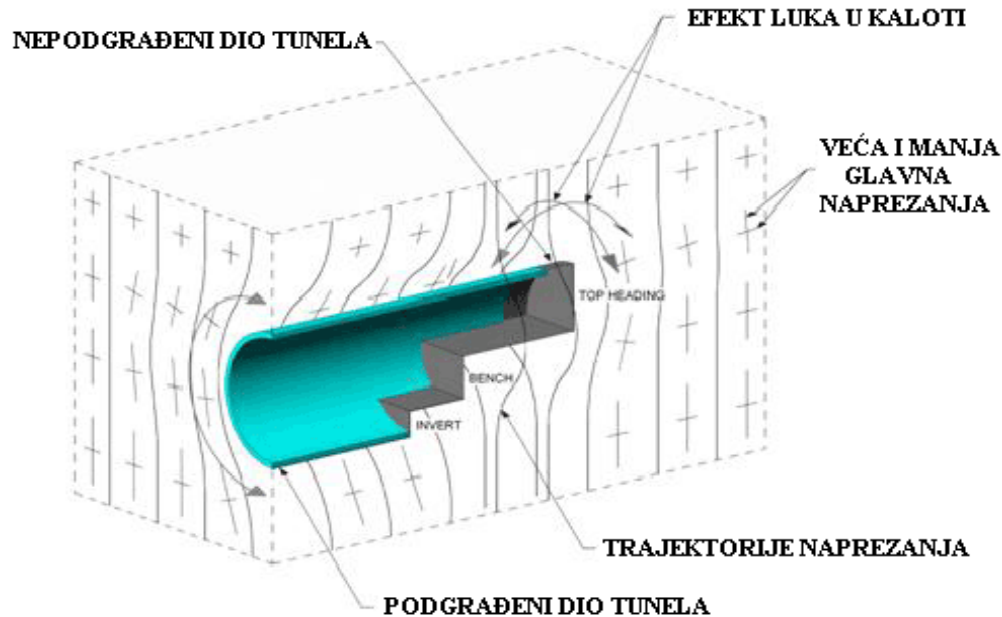
$$\begin{bmatrix} \frac{(\sigma_{xx}^a + \sigma_{yy}^b)}{2} & \frac{\tau_{xy}^a + \tau_{xy}^b}{2} & \frac{\tau_{xz}^a + \tau_{xz}^b}{2} \\ \text{SIMETRIČNO} & \frac{\sigma_{yy}^a + \sigma_{yy}^b}{2} & \frac{\tau_{yz}^a + \tau_{yz}^b}{2} \\ & & \frac{\sigma_{zz}^a + \sigma_{zz}^b}{2} \end{bmatrix}$$

TEK SADA SE IZ GORNJEGA TENZORA MOŽE ODREDITI TENZOR GLAVNOG NAPREZANJA:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

TE SMJEROVI GLAVNIH NAPREZANJA.

- Polje primarnih naprezanja poremeti se uslijed uslijed inženjerskog zahvata u ili na stijenskoj masi.
- Novonastalo stanje naprezanja se naziva **sekundarnim stanjem naprezanja** (prema njemačkoj literaturi, dok je u engleskoj praksi uvriježen naziv inducirana naprezanja)
- Za analizu sekundarnih naprezanja će se promatrati kružni otvor u stijeni.
- Nekada sekundarna naprezanja mogu biti dovoljno visoka da premaše čvrstoću stijenske mase, što dovodi do gubitka stabilnosti i urušavanja otvora, koje onda može imati katastrofalne posljedice.



TOK NAPREZANJA OKO
TUNELSKOG OTVORA

➤ Pri analizi naprezanja oko tunelskog otvora, razmatrati će se:

A) ELASTIČNO RJEŠENJE oko kružnog otvora

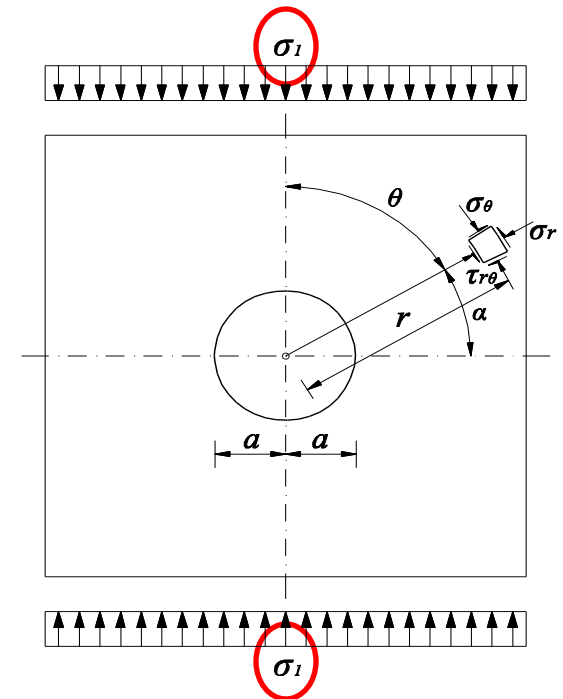
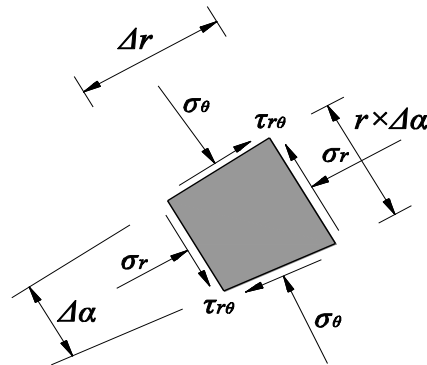
B) ELASTO – PLASTIČNO RJEŠENJE oko kružnog otvora

A) ELASTIČNO RJEŠENJE oko kružnog otvora

- Za čitav niz razmatranja pojava oko profila podzemnih prostorija kao osnova mogu poslužiti **zatvorena analitička rješenja** prema teoriji elastičnosti, iako stijenska masa nema uvijek izrazito elastična svojstva.
- Pod zatvorenim analitičkim rješenjima podrazumijevaju se rješenja koja neki model ponašanja opisuju jednostavnim analitičkim jednadžbama za koje postoji jedinstveno rješenje.
- Veći broj tih analitičkih rješenja pretpostavlja **elastičan, homogen i izotropan medij**, dok ostala rješenja mogu dati rezultate i za elasto-plastičan, elasto-ortotropni, linearno-viskoelastični i uslojeni anizotropni materijal.

- Kod određivanja stanja naprezanja i pomaka oko podzemnog otvora vrlo se često primjenjuje **polarni koordinatni sustav**, koji je osobito povoljan za promatranje pojava uz kružni otvor oko određenog medija, a preko jednostavnog preslikavanja i za eliptični otvor.
- Koordinatni sustav $0-r$, kakav je prikazan na donjoj slici, ima koordinate točke definirane s radius-vektorom ' r ' i kutem ' α '. Za zadatke vezane uz profile podzemnih prostorija zgodnije je računati s kutem θ , koji se uzima pozitivno u smjeru kazaljke na satu.

KIRSCHOV MODEL
ZA SLJUČAJ
DJELOVANJA SAMO
VERTIKALNOG
NAPREZANJA σ_1



➤ Definicije osnovnih komponenata tenzora naprezanja:

σ_r - *radijalno normalno naprezanje, tj. normalno na plohu koja je okomita na radijus*

σ_θ - *tangencijalno normalno naprezanje, tj. naprezanje na plohi koja je paralelna s radijus-vektorom, a vektor naprezanja usmjeren je okomito na radijus-vektor*

$\tau_{\theta r}$ - *posmično naprezanje*

Naprezanja u stijeni, zbog primarnih horizontalnih i vertikalnih naprezanja, mogu se dobiti množenjem osnovnih jednažbi kartezijskog koordinatnog sustava matricom transformacije:

$$\sigma_r = \sigma_z \cdot \cos^2 \theta + \sigma_y \cdot \sin^2 \theta$$

$$\sigma_\theta = \sigma_z \cdot \sin^2 \theta + \sigma_y \cdot \cos^2 \theta$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \cdot \sin 2\theta$$

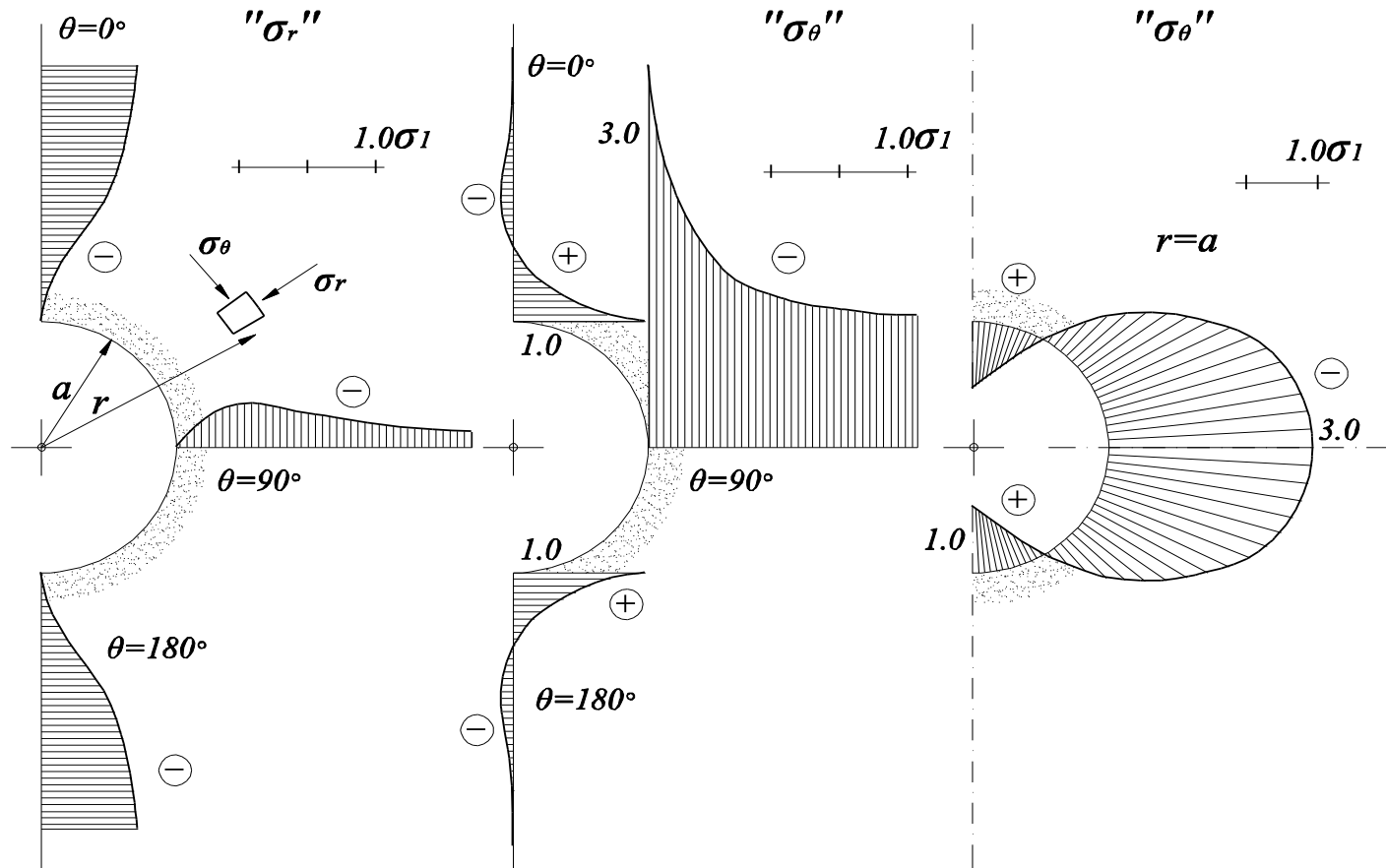
- Uslijed iskopa u stijenskoj masi stanje dolazi do formiranja sekundarnog stanja naprezanja.
- **Za samo vertikalno osnovno naprezanje**, kako je to pokazano na prethodnoj slici, mogu se prema *Kirsch-ovu (1898.)* rješenju naći naprezanja:

$$\sigma_r = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \left[1 - \frac{a^2}{r^2} + \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cdot \cos 2\theta \right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cdot \cos 2\theta \right]$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \left[1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right] \cdot \sin 2\theta$$

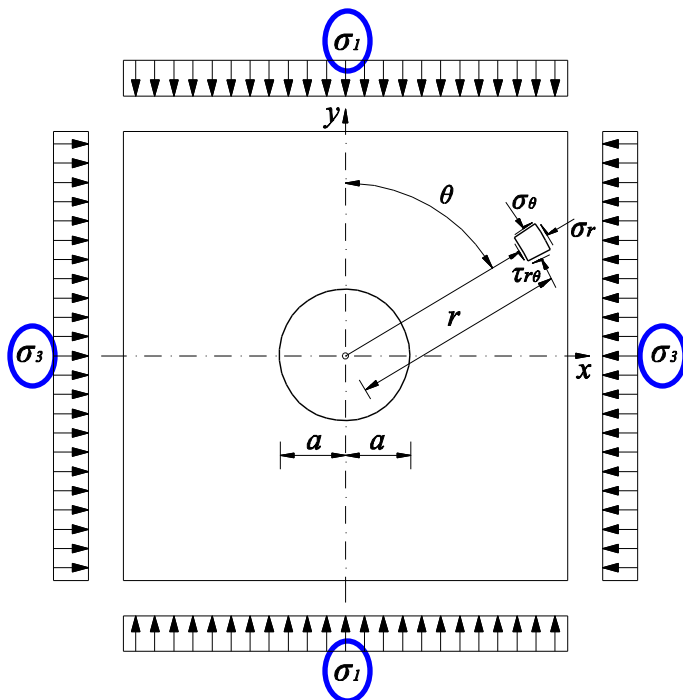
- Promjena naprezanja u odnosu prema primarnim naprezanjima u ovim se izrazima vrlo brzo gubi. Razlika između primarnih i sekundarnih naprezanja postaje, već na udaljenosti od cca. **$r = 3.5a$, manja od 5%**, pa se iz toga vidi da otvaranje profila podzemne prostorije ima neposredan utjecaj samo u okolini otvora



*Preraspodjela radijalnih i tangencijalnih naprezanja prema Kirch-ovom rješenju
za slučaj djelovanja samo vertikalnog naprezanja*

- Tangencijalna naprezanja ' σ_θ ' u horizontalnom presjeku dostižu uz rub otvora najveću koncentraciju i ta su naprezanja tri puta veća od osnovnoga primarnog naprezanja.
- Istodobno u vertikalnom presjeku kroz os simetrije na gornjem rubu u kaloti postoje vlačna naprezanja koja su istog intenziteta, kao i primarno tlačno vertikalno naprezanje.
- Dijagram u ta dva karakteristična presjeka za ' σ_θ ' nalazi se u srednjem dijelu prethodne slike.
- Lijevo na slici prikazana je raspodjela radijalnih naprezanja ' σ_r ', koja će na nešto većoj udaljenosti od centra postati, u horizontalnom presjeku, jednaka nuli, a u vertikalnom presjeku primarnom tlaku ' σ_1 '.
- U trećem dijagramu na prethodnoj slici, prikazan je dijagram tangencijalnih naprezanja ' σ_θ ' po obodu otvora, iz čega se vidi da je vlačna zona u kaloti ograničena srednjih 60° , dok je ostali dio oboda u stanju povećanih tlačnih naprezanja.

- *Kirschovo* rješenje može se superpozicijom proširiti i na slučaj **istovremenog djelovanja vertikalnog i horizontalnog naprezanja.**



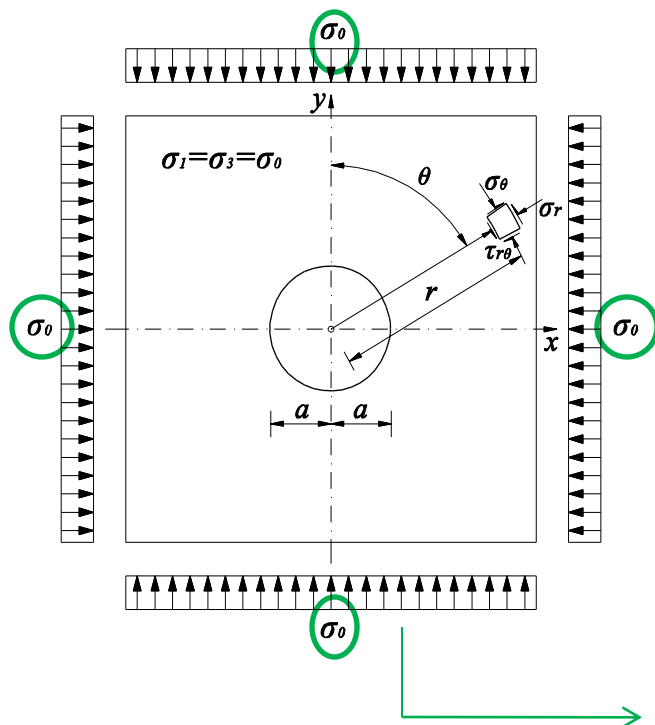
$$\sigma_r = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \cdot \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cdot \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \cdot \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cdot \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4}\right) \cdot \cos 2\theta$$

**KIRSCHOV MODEL ZA SLUČAJ
DJELOVANJA VERTIKALNOG I
HORIZONTALNOG NAPREZANJA**

- Posebno je zanimljivo stanje naprezanja u kojem je **vertikalno naprezanje jednako horizontalnom naprezanju**.
- Takvo stanje primarnih naprezanja se naziva *kvazihidrostatsko*, a rješenje je rotacijski simetrično, što znači da naprezanja ne ovise o orijentaciji radijus - vektora ‘ r ‘.



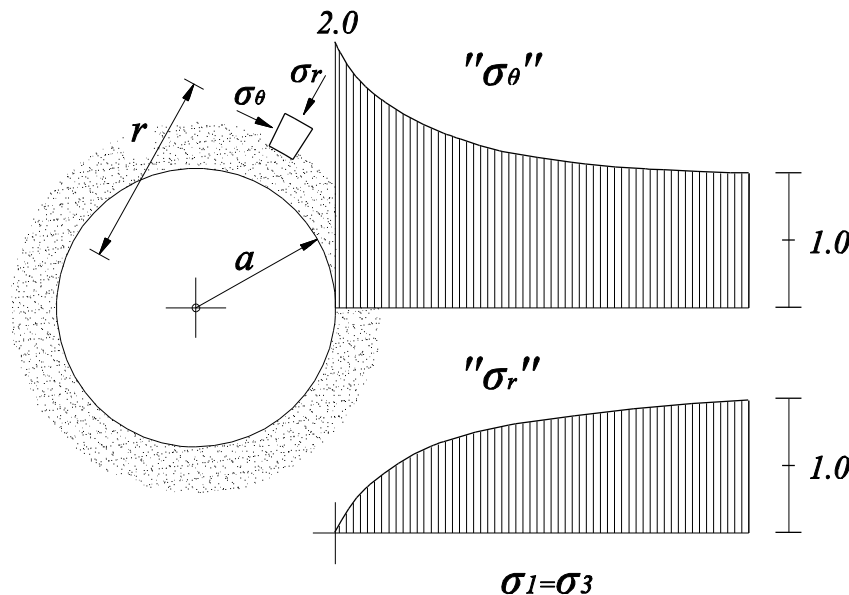
$$\sigma_r = \sigma_0 \cdot \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_0 \cdot \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

KIRSCHOV MODEL ZA SLUČAJ
DJELOVANJA JEDNAKOG
VERTIKALNOG I
HORIZONTALNOG NAPREZANJA

- Dijagram radijalne ' σ_r ' i tangencijalne ' σ_θ ' komponente tenzora naprezanja prikazan je na donjoj slici, iz koje se vidi da je najveće tangencijalno naprezanje ' σ_θ ' samo dva puta veće od primarnog naprezanja:

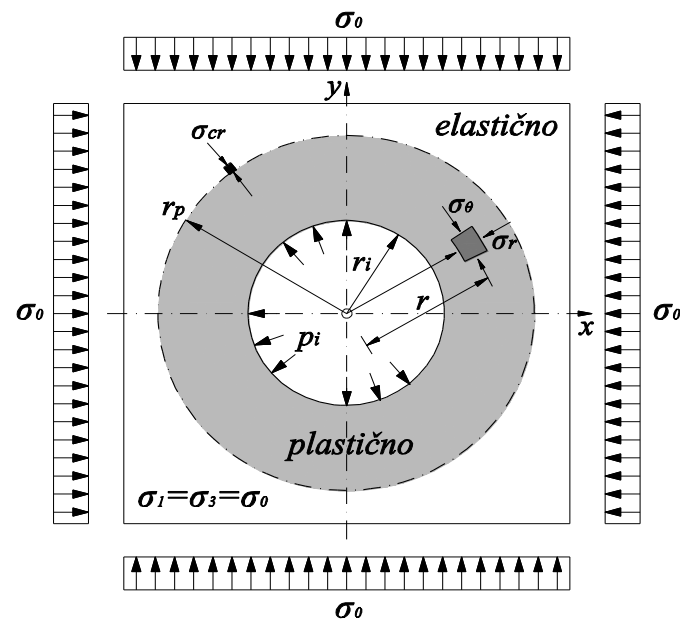


Preraspodjela radijalnih i tangencijalnih naprezanja prema Kirch-ovom rješenju za $\sigma_1 = \sigma_3$ (jednako vertikalno i horizontalno naprezanje)

A) ELASTO - PLASTIČNO RJEŠENJE oko kružnog otvora

- Do formiranja plastificirane zone u obliku prstena oko podzemnog otvora doći će ako naprezanja premaše čvrstoću stijenske mase.
- Pojavu plastifikacije najjednostavnije je promatrati za hidrostatsko stanje naprezanja ($\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_0$).
- Oko kružnog otvora stanje naprezanja će biti rotaciono-simetrično, bez posmičnih naprezanja, a radijalna i tangencijalna naprezanja su ujedno i glavna naprezanja.

OSNOVNI MODEL
ELASTO -
PLASTIČNOG
RJEŠENJA





5.2. SEKUNDARNA NAPREZANJA – ELASTO-PLASTIČNO RJEŠENJE

ZAVOD ZA
GEOTEHNIKU

gdje su:

r_i – *radijus otvora*

r_p – *radijus granice plastične i elastične zone*

r – *radijus unutar plastične zone*

p_i – *podgradni pritisak*

σ_r – *radijalno naprezanje*

σ_θ – *tangencijalno naprezanje*

σ_{cr} – *kritični unutarnji pritisak*

σ_0 – *primarno naprezanje*

➤ **Ako je $p_i < \sigma_{cr}$ u modelu se promatraju dvije zasebne zone:**

1. elastična zona, $r \geq r_p$

2. plastična zona, $r \leq r_p$

➤ **Ako je $p_i \geq \sigma_{cr}$ model se promatra kao elastičan.**