

MATEMATIKA 2, 12. 6. 2024.

Ime i prezime: _____

1.	2.	3.	4.	5.

1. dio

2. dio

Σ

1. Riješite diferencijalne jednačbe:

(a) (10 bodova) $y' = e^{-y}x\sqrt{x^2 + 1}$,

(b) (10 bodova) $y'' - y' = \sin x$.

2. (a) (12 bodova) Odredite i skicirajte prirodnu domenu funkcije

$$f(x, y) = \ln \left(2 - \frac{x}{y+1} \right) + \sqrt{2 - x^2 - y}.$$

(b) (13 bodova) Odredite sve tangencijalne ravnine na plohu $xyz = 1$ koje prolaze točkom $T(1, 0, 0)$ i okomite su na ravninu $4y - 3z + 2 = 0$.

3. (15 bodova) Izračunajte integral

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz,$$

ako je $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 2y \leq 0, 0 \leq z \leq 1\}$. Skicirajte Ω .

4. Dano je vektorsko polje

$$\vec{a} = z \cos x \vec{i} + \vec{j} + \sin x \vec{k}.$$

(a) (6 bodova) Izračunajte $\operatorname{div} \vec{a}$ u točki $A\left(\frac{\pi}{4}, 2, 2\right)$.

(b) (10 bodova) Pokažite da je polje $\vec{a}$ potencijalno, te mu odredite potencijal.

(c) (9 bodova) Izračunajte

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a} \, d\vec{r},$$

ako je $\vec{\Gamma}$ krivulja zadana parametrizacijom $x(t) = t$, $y(t) = e^t \cos t$, $z(t) = e^t \sin t$, za $t \in [0, \pi]$.

5. (15 bodova) Neka je Σ dio ravnine $2x + y + z = 2$ u prvom oktantu. Odredite površinu plohe Σ i skicirajte plohu.

Prvi dio čine prva tri zadatka. **Drugi dio** čine 4. i 5. zadatak.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
1	$x + C$	$\cos x$	$\sin x + C$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$	$\ln x + \sqrt{x^2 \pm 1} + C$