OSNOVE MEHANIKE LOMA

MARKO BARTOLAC

ak. godina 2023./2024.

5. LINEARNO ELASTIČNA MEHANIKA LOMA

5.7 Analiza polja naprezanja i pomaka oko pukotine

G. R. Irwin je 1957. godine formulirao uvjet za razvoj pukotine (kriterij lokalnog loma u vrhu pukotine) na osnovi intenziteta polja naprezanja u neposrednoj okolici vrha pukotine (uvjet je potpuno ekvivalentan Griffithovu energetskom uvjetu).

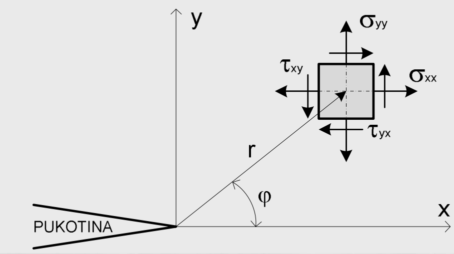
U LEFM se za određivanje polja naprezanja i deformacija u okolici pukotine primjenjuju rješenja dobivena **metodama linearne teorije elastičnosti** (Westergaard, Mushelishvili, Kolosov, Irwin, Sneddon, Williams...).

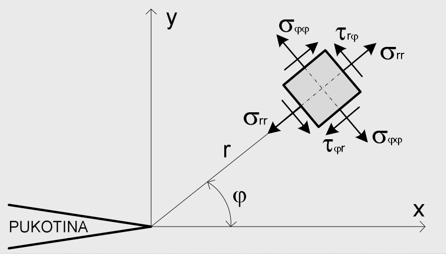
- Izraz za naprezanja u tijelu s pukotinom (zatvoreni oblik, izotropno linearno elastično ponašanje):

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}}\right) f_{ij}(\varphi) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\varphi)$$

  - $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ – tenzor naprezanja,
  - ***r*** i $\boldsymbol{\varphi}$ – prema slici,
  - ***k*** – konstanta,
  - $\boldsymbol{f}_{ij}$ – bezdim. funkcija parametra $\boldsymbol{\varphi}$.

- Za članove viših redova, A_m je amplituda, a $g_{ij}^{(m)}$ je bezdimenzijska funkcija od φ za m-ti red.



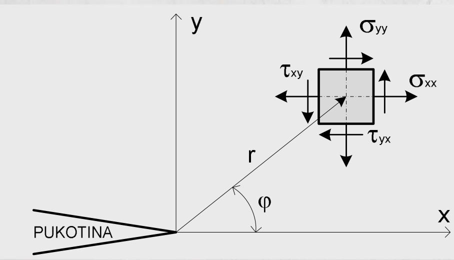


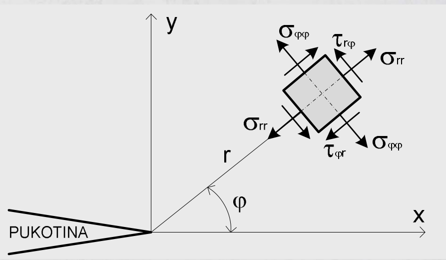
- Naprezanje u okolini vrha pukotine se mijenja s $\frac{1}{\sqrt{r}}$ (vodeći član).

VAŽNO!

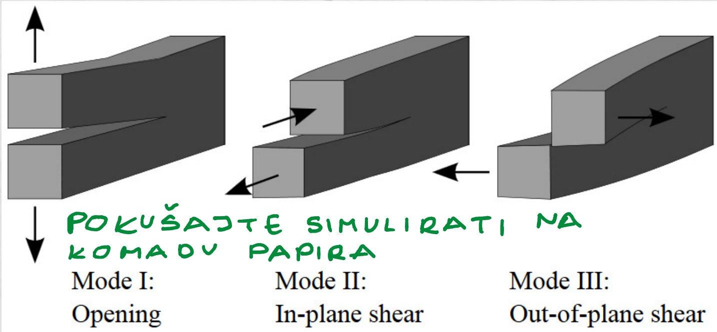
- Kada r → o, prvi član → ∞ (singularnost naprezanja), ali ostali članovi imaju konačne vrijednosti ili teže nuli.
- Naprezanje u okolini vrha pukotine se mijenja s $\frac{1}{\sqrt{r}}$, a pomak s $\sqrt{r}$.
- Jednadžba opisuje singularnost naprezanja jer naprezanje asimptotski teži prema r = o (sjetimo se da i Inglisovo rješenje podrazumijeva singularnost naprezanja u vrhu oštre pukotine).

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}}\right) f_{ij}(\varphi) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\varphi)$$





Oblici razvoja pukotine – položaj (vrsta) opterećenja u odnosu na pukotinu



- Element s pukotinom može biti opterećen na neki od ovih načina ili nekom od njihovih kombinacija (s dva ili tri načina).
- **Najopasniji lomovi nastaju pri razvoju pukotine otvaranjem (oblik I)** -> smjer opterećenja je okomit na ravninu pukotine.

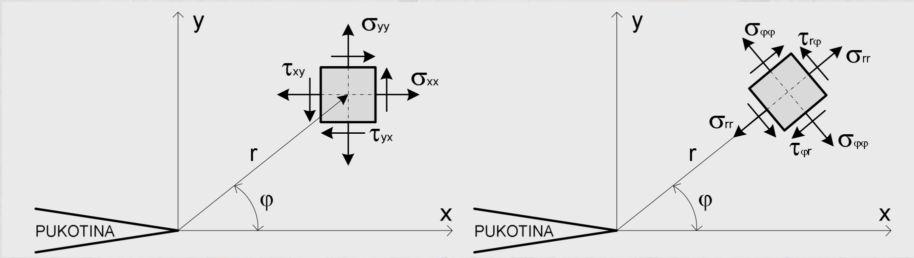
- Kod svakog oblika razvoja pukotine se naprezanja mijenjaju s $\frac{1}{\sqrt{r}}$, ali konstanta proporcionalnosti $\boldsymbol{k}$ i funkcija $\boldsymbol{f}_{ij}$ ovise o predmetnom obliku.
- Iz praktičnih razloga $\boldsymbol{k}$ mijenjamo s **koeficijentom intenziteta naprezanja** $K = k\sqrt{2\pi}\ \underline{[\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}]}$.
- Svakom obliku razvoja pukotine odgovara posebno označen koeficijent intenziteta naprezanja: $\boldsymbol{K_I}$, $\boldsymbol{K_{II}}$ i $\boldsymbol{K_{III}}$.
- Polje naprezanja ispred vrha pukotine kod izotropnog linearno elastičnog materijala se može izraziti kao:

Ne čitamo Kao Ki!

$$\boxed{\sigma_{ij}^{(I,II,III)} = \frac{K_{I,II,III}}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot r}}\cdot f_{ij}^{(I,II,III)}(\varphi)}$$

- U slučaju mješovitog oblika razvoja pukotine - superpozicija:

$$\boxed{\sigma_{ij}^{(ukupno)} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)}}$$



Riješiti neki ravninski problem teorije elastičnosti, znači zadovoljiti diferencijalne jednadžbe ravnoteže:

MATEMATIČKA POZADINA → INFORMATIVNO

$$\sum_{i,j=x,y,z} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial i} + F_j = 0$$

i uvjete kompatibilnosti deformacija:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Ako su sile F_j = 0, **Airy** je pokazao da postoji funkcija naprezanja $\Phi(x,y)$ koja zadovoljava jednadžbe ravnoteže:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

Uvjet kompatibilnosti u funkciji komp. naprezanja

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0$$

$$\nabla^4(\Phi) = \nabla^2\left[\nabla^2(\Phi)\right] = 0$$

Uvodimo Westergaardovu kompleksnu funkciju naprezanja:

$$Z = Z(z)$$

Airyeva funkcija naprezanja $\Phi(x,y)$

i kompleksna funkcija: $Z = Z(z)$

su povezane su preko integrala:

$$\Phi(x,y) = \mathrm{Re}\left[\int \left(Z(z)dz\right)dz\right] + y \cdot \mathrm{Im}\left(\int Z(z)dz\right) = \mathrm{Re}\,\bar{\bar{Z}}(z) + y \cdot \mathrm{Im}\,\bar{Z}(z)$$

gdje je $Z = \dfrac{d\bar{Z}}{dz}$ $\quad \bar{Z} = \dfrac{d\bar{\bar{Z}}}{dz}$

Upotrebom Cauchy-Riemannovih jednadžbi:

$$\frac{\partial[\mathrm{Re}\,Z(z)]}{\partial x} = \frac{\partial[\mathrm{Im}\,Z(z)]}{\partial y} \qquad \frac{\partial[\mathrm{Re}\,Z(z)]}{\partial y} = \frac{\partial[\mathrm{Im}\,Z(z)]}{\partial x}$$

dobivamo:

$$\sigma_x = \mathrm{Re}\,Z(z) - y \cdot \mathrm{Im}\,Z'(z)$$

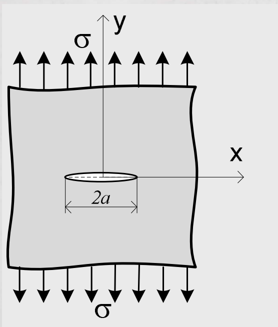
$$\sigma_y = \mathrm{Re}\,Z(z) + y \cdot \mathrm{Im}\,Z'(z)$$

$$\tau_{xy} = -y \cdot \mathrm{Re}\,Z'(z)$$

Točna naprezanja za određeni problem dobiti ćemo upotrebom funkcije *Z(z)* koja ispunjava rubne uvjete.

Za primjer beskonačne opterećene ploče sa središnjom pukotinom duljine $2a$ to je:

$$Z(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{z^2}}}$$



Na kraju dobivamo (izvod u skripti):

$$\sigma_x = \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 - \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{3 \cdot \varphi}{2}\right)$$

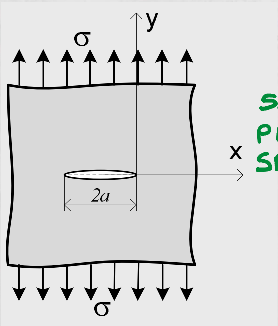
$$\sigma_y = \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 + \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{3 \cdot \varphi}{2}\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{3 \cdot \varphi}{2}$$

Naprezanja se dobiju umnoškom „položaja” $\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot r}}\cdot f(\varphi)$

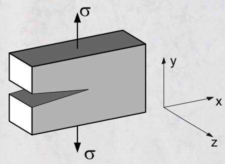
i faktora $\sigma\cdot\sqrt{\pi\cdot a}$.

Taj faktor određuje veličinu elastičnih naprezanja u području korijena pukotine i zove se **koeficijent intenziteta naprezanja** oblika I razvoja pukotine i označava se:



$$K_I = \sigma\cdot\sqrt{\pi\cdot a}$$

SAMO ZA BESK. PLOČU SA SRED. PUKOTINOM



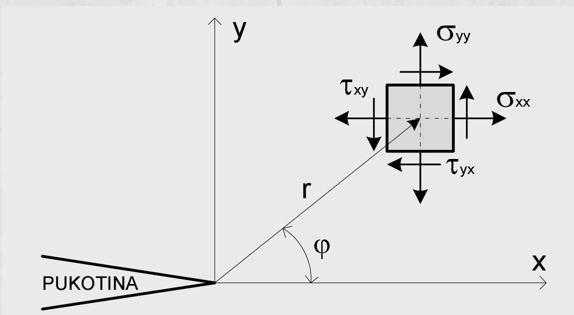
$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot r}}\cdot\begin{Bmatrix}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\left(1-\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{3\cdot\varphi}{2}\right)\\ \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\left(1+\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{3\cdot\varphi}{2}\right)\\ \sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{3\cdot\varphi}{2}\end{Bmatrix}$$

Za ravninsko stanje naprezanja vrijedi $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, a za

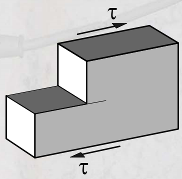
ravninsko stanje deformacija $\sigma_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y)$.

$$\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \sigma_x = \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot r}} \qquad \tau_{xy} = 0.$$

Od samo jednoosnog naprezanja u ploči s pukotinom dobivamo dvoosno stanje naprezanja u vrhu pukotine!



U slučaju II oblika otvaranja pukotine:

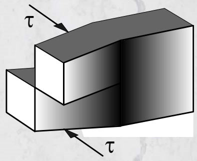


$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{-K_{II}}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot r}} \cdot \begin{Bmatrix} \sin\frac{\varphi}{2}\cdot\left(2+\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{3\cdot\varphi}{2}\right) \\ -\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{3\cdot\varphi}{2}\right) \\ -\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\left(1-\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{3\cdot\varphi}{2}\right) \end{Bmatrix}$$

$$K_{II} = \tau\cdot\sqrt{\pi\cdot a}$$

$$\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot r}}$$

U slučaju III oblika otvaranja pukotine:



$$\tau_{xz} = \frac{-K_{III}}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot r}}\cdot\sin\frac{\varphi}{2} \qquad \tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot r}}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$K_{III} = \tau\cdot\sqrt{\pi\cdot a}$$

Izražavanje jednadžbi polja naprezanja u obliku glavnih naprezanja korisno je kod razmatranja uvjeta popuštanja, zbog procjene veličine plastične zone.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 + \sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 - \sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

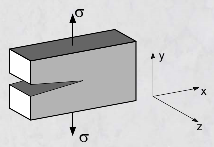
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \begin{Bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 - \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{3 \cdot \varphi}{2}\right) \\ \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \left(1 + \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{3 \cdot \varphi}{2}\right) \\ \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{3 \cdot \varphi}{2} \end{Bmatrix}$$

$\sigma_3 = 0$ ravninsko naprezanje

$\sigma_3 = \frac{2 \cdot \nu \cdot K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\frac{\varphi}{2}$ ravninska deformacija

Izrazi za **elastično polje pomaka** omogućuju proračun akumulirane elastične energije, a pružaju osnovu za pomacima kontrolirane kriterije loma.

U slučaju **I oblika** otvaranja pukotine (izvod u skripti):

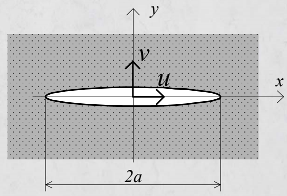


$$u = \frac{K_I \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \left(\frac{\kappa - 1}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$v = \frac{K_I \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \left(\frac{\kappa + 1}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

$\kappa = 3 - 4 \cdot \nu$ ravninsko naprezanje

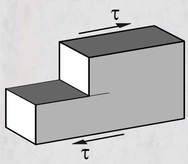
$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ ravninska deformacija



U slučaju **II oblika** otvaranja pukotine:

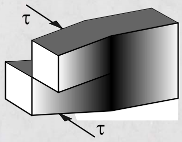
$$u = \frac{K_{II} \cdot (1+\nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \left(\frac{\kappa+1}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2} \right)$$

$$v = \frac{K_{II} \cdot (1+\nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \left(\frac{\kappa-1}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} \right)$$



U slučaju **III oblika** otvaranja pukotine:

$$w = \frac{K_{III} \cdot (1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \sin\frac{\varphi}{2}$$



$\kappa = 3 - 4 \cdot \nu$ ravninsko naprezanje

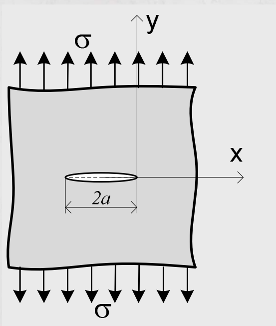
$\kappa = \dfrac{3-\nu}{1+\nu}$ ravninska deformacija

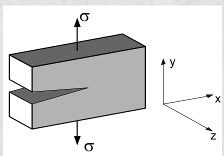
5. LINEARNO ELASTIČNA MEHANIKA LOMA

5.7.1 Koeficijent intenziteta naprezanja

Tijelo s pukotinom može biti opterećeno sa svakim od tri načina otvaranja pukotine ili kombinacijom dva ili tri oblika.

Najopasniji lomovi nastaju pri razvoju pukotine otvaranjem (**I oblik**).





$$\boxed{K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}$$

5. LINEARNO ELASTIČNA MEHANIKA LOMA

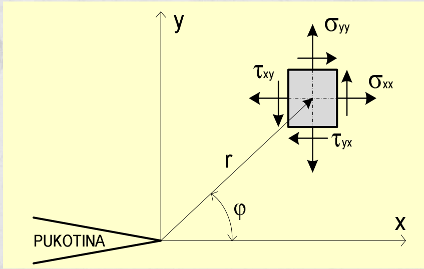
5.7.1 Koeficijent intenziteta naprezanja

Polje naprezanja ispred vrha pukotine u izotropnom linearno elastičnom materijalu, možemo napisati i u sljedećem obliku:

$$\lim_{r\to 0}\sigma_{ij}{}^{I} = \frac{K_I}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot r}}\cdot f_{ij}{}^{I}(\varphi)$$

$$\lim_{r\to 0}\sigma_{ij}{}^{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot r}}\cdot f_{ij}{}^{II}(\varphi)$$

$$\lim_{r\to 0}\sigma_{ij}{}^{III} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot r}}\cdot f_{ij}{}^{III}(\varphi)$$



U slučaju kombinacije oblika otvaranja pukotine:

$$\boxed{\sigma_{ij}{}^{ukupno} = \sigma_{ij}{}^{I} + \sigma_{ij}{}^{II} + \sigma_{ij}{}^{III}}$$

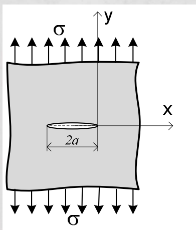
PRINCIP SUPERPOZICIJE

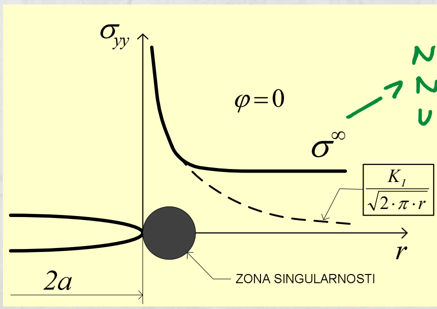
Za $\varphi = 0$:
$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot r}} \qquad \tau_{xy} = 0$$

Ravnina pukotine je ravnina glavnih naprezanja za oblik I.

Gornji izraz vrijedi samo u uskom području uz pukotinu, gdje singularnost $1/\sqrt{r}$ dominira poljem naprezanja.

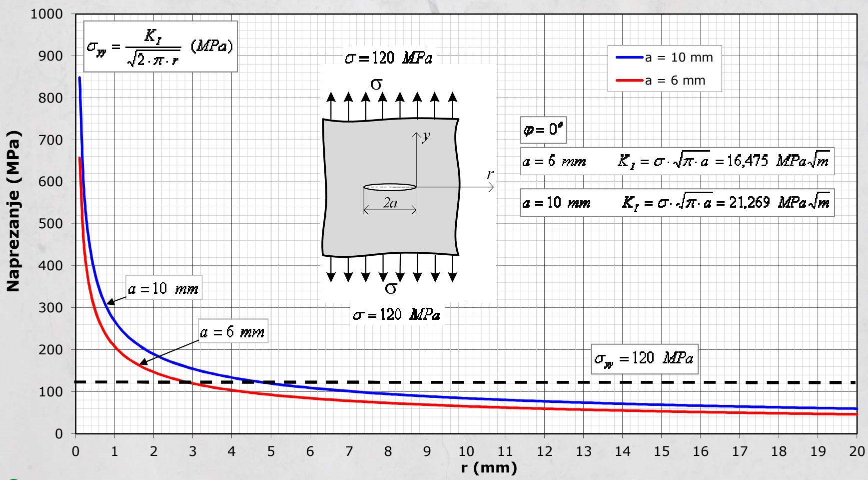
Koeficijent intenziteta naprezanja definira **amplitudu singularnosti** oko vrha pukotine, odnosno, naprezanja oko vrha pukotine su proporcionalna sa K.





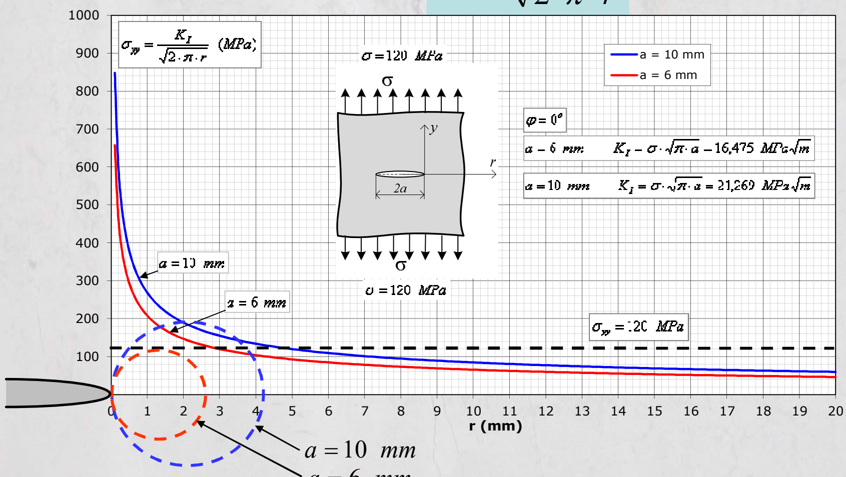
NOMINALNO NAPREZANJE U PLOČI

$$\boxed{\varphi = 0} \qquad \boxed{\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}}}$$



RAZLIKE U ODNOSU NA PUKOTINU ŠIRINE 12 mm i 20mm?

$$\varphi = 0 \qquad \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}}$$

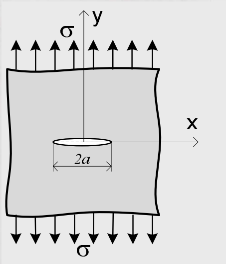


ZONA SINGULARNOSTI

Da bi koeficijent intenziteta naprezanja bio praktično upotrebljiva veličina, mora biti **određen iz geometrije uzorka i naprezanja** koja djeluju na rubu dovoljno udaljenom od pukotine.

Rješenja u zatvorenom obliku postoje za jednostavne konfiguracije (oblike), dok se u složenijim slučajevima K_I određuje eksperimentalno ili numeričkom analizom.

Jedan od slučajeva za koji postoji rješenje u zatvorenom obliku je pukotina u beskonačnoj ploči opterećena vlačnim naprezanjem.

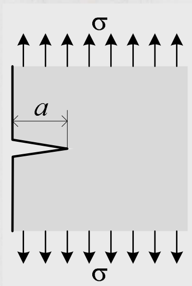


$$\boxed{K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}$$

$$(\text{naprezanje} \cdot \sqrt{\text{dužina}})$$

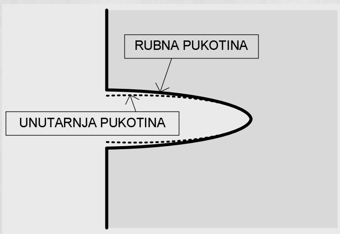
$$K_I = K_I(\sigma, a)$$

Slično je i u **slučaju polu-beskonačne ploče sa pukotinom na rubu**



I u tom slučaj postoji rješenje za K_I u zatvorenom obliku:

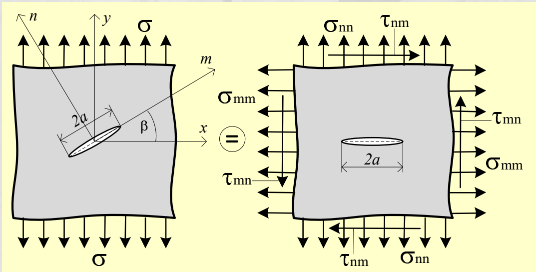
$$\boxed{K_I = 1{,}122 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}$$



Pukotina u površinskom sloju koja izlazi na površinu opasnija je od unutarnje pukotine.

ZAŠTO ?

Nagnuta pukotina u beskonačnoj ploči:



DETALJNIJE NA VJEŽBAMA

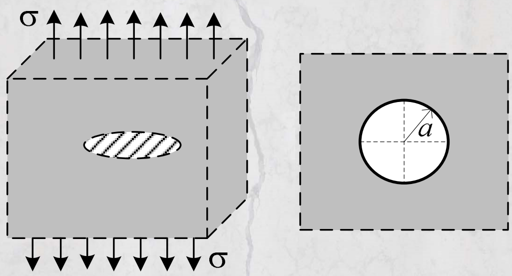
$$K_I = \sigma_{nn} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = \sigma \cdot \cos^2 \beta \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

$$K_{II} = \tau_{mn} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = \sigma \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

$\beta = 0$ ⇨ samo **I oblik**

$\beta = 45^o$ ⇨ K_{II} ima maksimalnu vrijednost

Pukotina u obliku kruga u beskonačnom mediju



PENNY-SHAPED DEFECT

K_I se može odrediti u zatvorenom obliku:

$$\boxed{K_I = \frac{2}{\pi} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}$$

$\frac{2}{\pi} \approx 0,64$

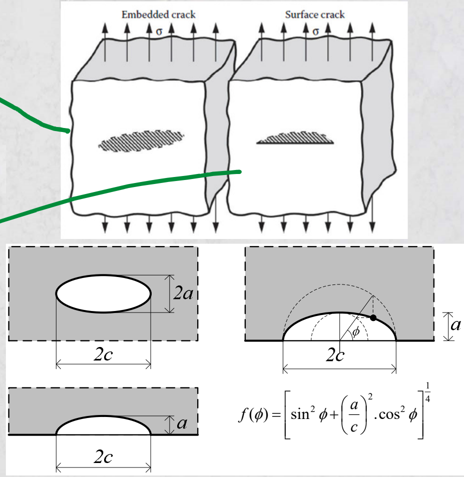
Eliptična ili polu - eliptična pukotina

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot a}{Q}} \cdot f(\phi)$$

$$Q = 1 + 1{,}464 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^{1{,}65}$$

$$K_I = \lambda_s \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot a}{Q}} \cdot f(\phi)$$

$$\lambda_s = \left(1{,}13 - 0{,}09 \cdot \frac{a}{c}\right) \cdot \left[1 + 0{,}2 \cdot (1 - \sin\phi)^2\right]$$

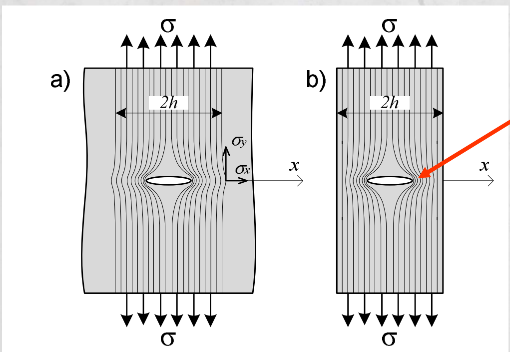


Kad je a < c, K se mijenja uzduž pukotine i max je na 90 stupnjeva.

Ako ploča u kojoj se nalazi pukotina nije „beskonačna" nego **ima konačne dimenzije**, rješenje u zatvorenom obliku uglavnom nije moguće.

Dok su dimenzije pukotine male u odnosu na ploču, na stanje u vrhu pukotine ne utječu rubovi.

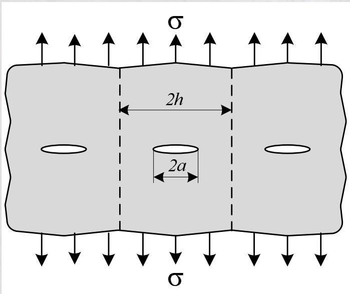
Ako se veličina pukotine povećava ili dimenzije ploče smanjuju, **vanjski rubovi počinju utjecati**.

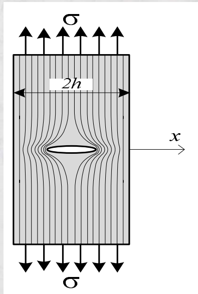


TRAJEKTORIJE GUŠĆE jer je σ_x na rubu jednako 0.

VEĆA NAPREZANJA

Jedna od tehnika za određivanje utjecaja ruba ploče konačne širine je da pretpostavimo periodičan niz kolinearnih pukotina u beskonačnoj ploči:





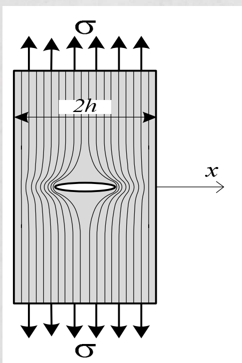
$$\boxed{K_I = \sigma\cdot\sqrt{\pi\cdot a}\cdot\left[\frac{2\cdot h}{\pi\cdot a}\cdot\tan\left(\frac{\pi\cdot a}{2\cdot h}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

a) u KASNIJEM GRAFU

$a/h=0$ ⇨ PUKOTINA U BESKONAČNOJ PLOČI

$$\boxed{K_I = 1{,}0\cdot\sigma\cdot\sqrt{\pi\cdot a}}$$

Točnija rješenja za pukotinu u ploči konačnih dimenzija mogu se dobiti metodom konačnih elemenata -> primjer prikazan polinomom:



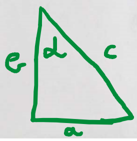
$$\boxed{K_I = \sigma\cdot\sqrt{\pi\cdot a}\cdot\left[\sec\left(\frac{\pi\cdot a}{2\cdot h}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[1-0{,}025\cdot\left(\frac{a}{h}\right)^2+0{,}06\cdot\left(\frac{a}{h}\right)^4\right]}$$

b) u KASNIJEM GRAFU

K_I se može izračunati uvođenjem **popravnih funkcija** u različitim oblicima, on se može uvijek svesti na jedan oblik:

$$\boxed{K_I = Y(a/h)\cdot\sigma\cdot\sqrt{\pi\cdot a}}$$

POPRAVNA FUNKCIJA

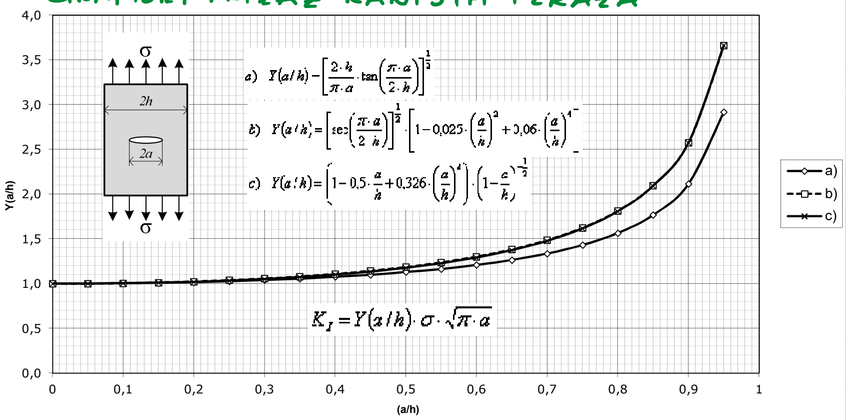


$\sec\alpha = \frac{c}{b}$ $\quad$ $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}$

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ $\quad$ $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$

POPRAVNE FUNKCIJE $Y(a/h)$

GRAFIČKI PRIKAZ RANIJIH IZRAZA



$$K_I = Y(a/h)\cdot\sigma\cdot\sqrt{\pi\cdot a}$$

c) Koiter, 1965. godine. Točnost 1 % za bilo koji odnos a/h.

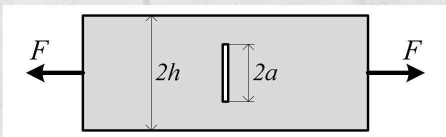
Koeficijent intenziteta naprezanja K_I može se izračunati i po izrazu sljedećeg oblika: DRUGAČIJI ZAPIS POPRAVNE FUNKCIJE!

IZRAZ PREKO SILE

$$K_I = \frac{F}{b\cdot\sqrt{h}}\cdot \underline{f(a/h)}$$

„b" – širina tijela (uzorka) s pukotinom

Za prethodni slučaj:

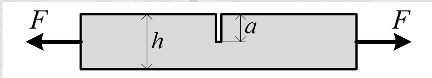


$$f(a/h) = \sqrt{\frac{\pi\cdot a}{4\cdot h}\cdot \sec\frac{\pi\cdot a}{2\cdot h}}\cdot\left[1-0{,}025\cdot\left(\frac{a}{h}\right)^2+0{,}06\cdot\left(\frac{a}{h}\right)^4\right]$$

I uvijek se može svesti na oblik:

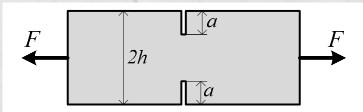
$$\frac{F}{b\sqrt{h}}f\left(\frac{a}{h}\right)=\underbrace{\frac{F}{bh}}_{\sigma}\overbrace{f\left(\frac{a}{h}\right)\sqrt{\frac{h}{\pi a}}}^{Y\left(\frac{a}{h}\right)}\sqrt{\pi a}=Y\left(\frac{a}{h}\right)\sigma\sqrt{\pi a}$$

Rješenja za nekoliko uobičajenih oblika tijela (uzorka) s pukotinom opterećenih vlačnom silom F



SENT uzorak

$$f(a/h)=\frac{\sqrt{2\cdot\tan\frac{\pi\cdot a}{2\cdot h}}}{\cos\frac{\pi\cdot a}{2\cdot h}}\cdot\left[0{,}752+2{,}02\cdot\frac{a}{h}+0{,}37\cdot\left(1-\sin\frac{\pi\cdot a}{2\cdot h}\right)^3\right]$$

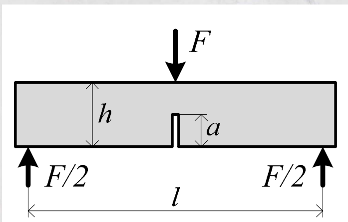


DENT uzorak

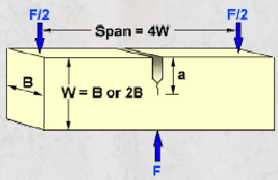
$$f(a/h)=\frac{\sqrt{\frac{\pi\cdot a}{2\cdot h}}}{\sqrt{1-\frac{a}{h}}}\cdot\left[1{,}122-0{,}561\cdot\frac{a}{h}-0{,}205\cdot\left(\frac{a}{h}\right)^2+0{,}471\cdot\left(\frac{a}{h}\right)^3+0{,}19\cdot\left(\frac{a}{h}\right)^4\right]$$

$$\boxed{K_I=\frac{F}{b\cdot\sqrt{h}}\cdot f\left(a/h\right)}$$

Rješenja za tijelo (uzorak) s pukotinom opterećenog na savijanje u tri točke



SENB uzorak



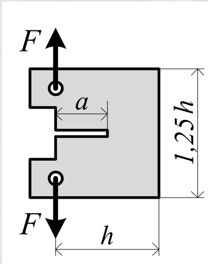
$$f(a/h)=\frac{3\cdot\frac{l}{h}\cdot\sqrt{\frac{a}{h}}}{2\cdot\left(1+2\cdot\frac{a}{h}\right)\cdot\left(1-\frac{a}{h}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left\{1{,}99-\frac{a}{h}\cdot\left(1-\frac{a}{h}\right)\cdot\left[2{,}15-3{,}93\cdot\frac{a}{h}+2{,}7\cdot\left(\frac{a}{h}\right)^2\right]\right\}$$

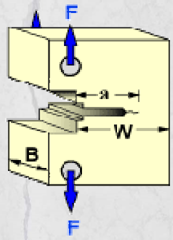
POGODAN ZA BETON

$$\boxed{K_I=\frac{F}{b\cdot\sqrt{h}}\cdot f\left(a/h\right)}$$

Rješenje za tijelo (uzorak) s pukotinom opterećenog silom F prema normi ASTM

CT uzorak

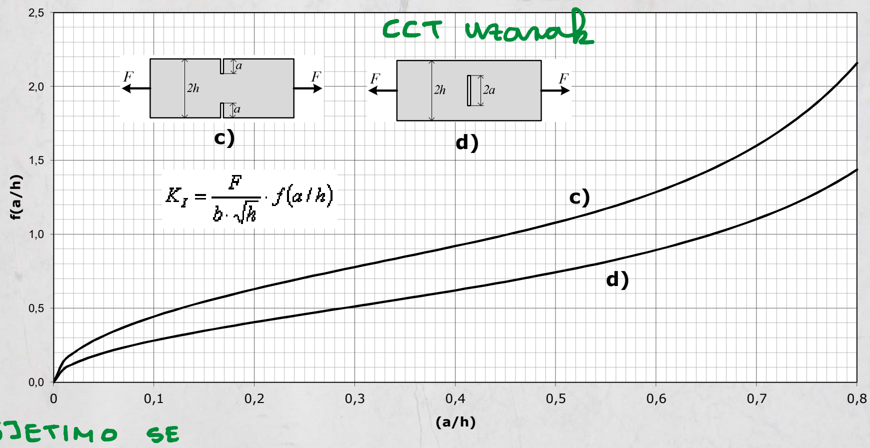




$$f(a/h)=\frac{2+\frac{a}{h}}{\left(1-\frac{a}{h}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left[0{,}886+4{,}64\cdot\frac{a}{h}-13{,}32\cdot\left(\frac{a}{h}\right)^{2}+14{,}72\cdot\left(\frac{a}{h}\right)^{3}-5{,}6\cdot\left(\frac{a}{h}\right)^{4}\right]$$

$$\boxed{K_I=\frac{F}{b\cdot\sqrt{h}}\cdot f(a/h)}$$

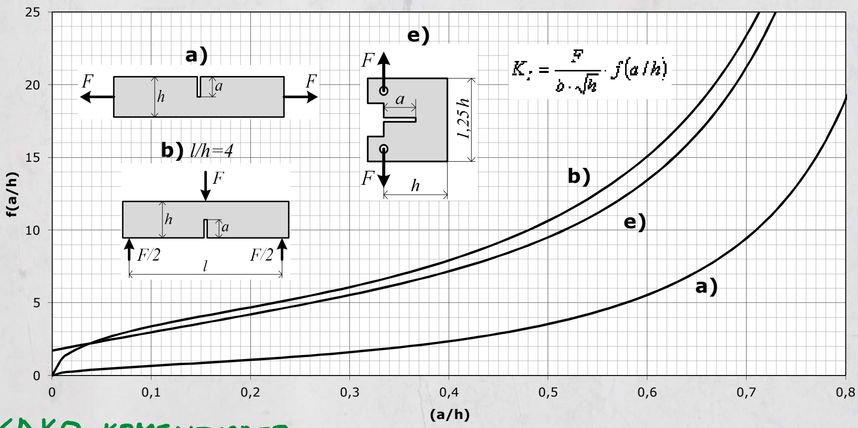
POPRAVNE FUNKCIJE $f(a/h)$



SJETIMO SE EKSPERIMENTA S PAPIROM

$$\boxed{K_I=\frac{F}{b\cdot\sqrt{h}}\cdot f(a/h)}$$

POPRAVNE FUNKCIJE $f(a/h)$



KAKO KOMENTIRATE OVE REZULTATE?

$$K_I = \frac{F}{b \cdot \sqrt{h}} \cdot f(a/h)$$

5.7.2 Princip superpozicije

Kod linearno elastičnog materijala, pojedinačne komponente naprezanja, deformacija i pomaka se mogu zbrajati.

Slično je i sa koeficijentima intenziteta naprezanja, koji se **mogu zbrajati za iste oblike otvaranja pukotine**.

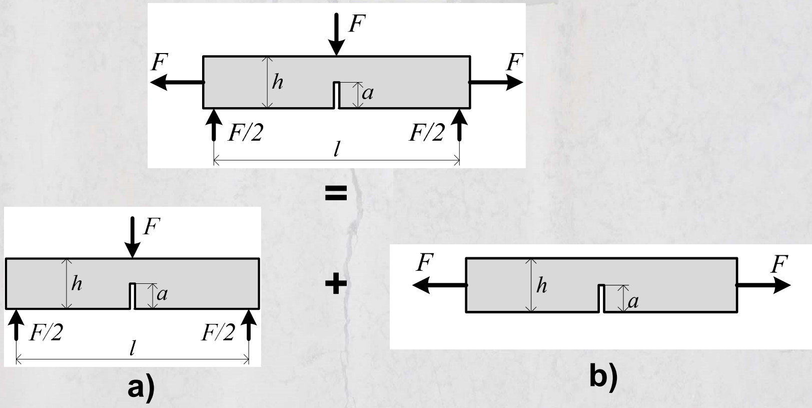
$$K_I^{\,ukupno} = K_I^{(A)} + K_I^{(B)} + K_I^{(C)} + \;\ldots.$$

ali

$$K^{ukupno} \neq K_I + K_{II} + K_{III}$$

NEMA NIKAKVOG SMISLA!

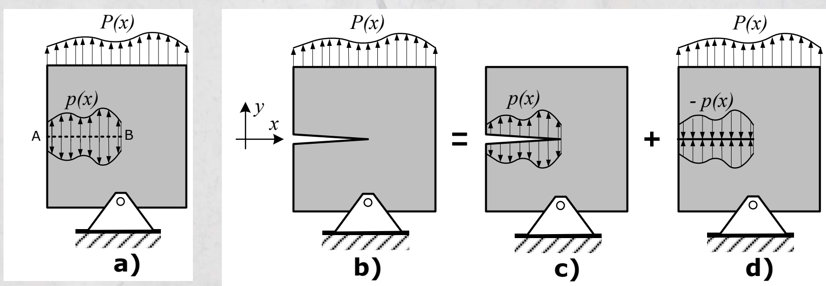
Princip superpozicije



$$K_I^{ukupno} = K_I^{(a)} + K_I^{(b)} = \frac{1}{b\sqrt{h}} \cdot \left[F_a \cdot f_a\left(\frac{a}{h}\right) + F_b \cdot f_b \cdot \left(\frac{a}{h}\right)\right]$$

Princip superpozicije

- Tijelo s naprezanjem P(x) na rubu koje uzrokuje naprezanje p(x) na ravnini AB.



$$K_I^{(b)} = K_I^{(c)} + K_I^{(d)} = K_I^{(c)} + 0 = K_I^{(c)}$$

- Ovako se može primijeniti princip superpozicije ako se na ravnini AB pojavi pukotina.

5.8 Odnos između K i G

Do sada su prikazana dva parametra koji opisuju ponašanje pukotine:

G - **brzina oslobađanja energije** (opisuje globalno ponašanje)
K - **koeficijent intenziteta naprezanja** (lokalni parametar)

Za linearno elastične materijale K i G su jedinstveno povezani.

$$G = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E^/} \Leftrightarrow K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

$$G = \frac{K_I^{\,2}}{E^/}$$

- Za središnju pukotinu u beskonačnoj ploči izloženoj vlačnom naprezanju.

$E^/ = E$ za ravninsko naprezanje

$E^/ = \frac{E}{1-\nu^2}$ za ravninsku deformaciju

KRAJ PREDAVANJA!