

MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGRABIENSIS

---

Tomislav Došlić  
Dora Pokaz  
Tatjana Slijepčević-Manger  
Kristina Ana Škreb

# MATEMATIKA 3



Građevinski fakultet  
Sveučilište u Zagrebu



# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>3</b>
1.1	Obične diferencijalne jednačbe . . . . .	3
1.1.1	Rubni problemi . . . . .	4
1.2	Ravnoteža žice . . . . .	5
1.2.1	Izvod jednačbe ravnoteže žice . . . . .	5
1.2.2	Rubni uvjeti . . . . .	10
1.3	Parcijalne diferencijalne jednačbe . . . . .	12
1.3.1	Linearna parcijalna diferencijalna jednačba 2. reda s konstantnim koeficijentima . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Fourierovi redovi</b>	<b>17</b>
2.1	Vektori, vektorski prostori i njihove baze . . . . .	17
2.2	Trigonometrijski redovi i sustavi . . . . .	19
2.3	Fourierovi redovi . . . . .	21
2.4	Dovoljni uvjeti konvergencije Fourierovog reda . . . . .	24
2.5	Parne i neparne funkcije . . . . .	28
2.6	Razvoj funkcije u sinusni i kosinusni Fourierov red . . . . .	30
2.7	Fourierovi redovi funkcija s proizvoljnim periodom . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Valna jednačba</b>	<b>33</b>
3.1	Izvod jednačbe za oscilacije žice . . . . .	33
3.2	D'Alembertova formula . . . . .	36
3.3	Fourierova metoda za oscilacije žice . . . . .	41
3.4	Geometrijska interpretacija - stojni valovi . . . . .	43
3.5	Rubni problemi sa stacionarnim nehomogenostima . . . . .	44
3.6	Prisilne oscilacije žice . . . . .	45
3.7	Veza Fourierove metode i D'Alembertove formule . . . . .	48
3.8	Jednačba oscilacije štapa (grede) . . . . .	49

---

3.9	Fourierova metoda za oscilacije štapa . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Jednadžba provođenja topline</b>	<b>57</b>
4.1	Izvod jednadžbe provođenja topline . . . . .	57
4.2	Fourierova metoda za jednadžbu provođenja topline . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Dvodimenzionalni problemi</b>	<b>63</b>
5.1	Izvod jednadžbe za poprečne oscilacije membrane . . . . .	63
5.2	Fourierova metoda za poprečne oscilacije pravokutne membrane . . . . .	68
5.3	Harmoničke funkcije . . . . .	70
5.3.1	Svojstva harmoničkih funkcija . . . . .	72
5.4	Fourierova metoda za ravnotežu pravokutne membrane . . . . .	76
5.5	Laplaceov operator u krivolinijskim koordinatama . . . . .	77
5.5.1	Polarne i cilindrične koordinate . . . . .	78
5.5.2	Sferne koordinate . . . . .	79
5.6	Unutarnji Dirichletov problem za ravnotežu kružne membrane . . . . .	80
5.7	Vanjski Dirichletov problem . . . . .	83
5.8	Dirichletov problem u prstenu (kružnom vijencu) . . . . .	84
5.9	* Oscilacije kružne membrane. Valna jednadžba u polarnim koordinatama	87
<b>6</b>	<b>Numeričke metode</b>	<b>91</b>
6.1	Približno (numeričko) deriviranje i integriranje . . . . .	91
6.1.1	Numeričko deriviranje . . . . .	91
6.1.2	Numerička integracija . . . . .	94
6.2	Numeričko rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi . . . . .	97
6.2.1	Eulerova i poboljšana Eulerova metoda . . . . .	98
6.2.2	Metode Runge–Kutta . . . . .	99
6.3	Metode konačnih razlika za parcijalne diferencijalne jednadžbe . . . . .	101
6.3.1	Eksplisitna shema za jednadžbu vođenja topline . . . . .	102
6.3.2	Eksplisitna shema za valnu jednadžbu . . . . .	103
6.3.3	Implicitna shema za jednadžbu vođenja topline . . . . .	105
6.3.4	Metoda konačnih razlika za eliptičke probleme . . . . .	107
6.4	Metode konačnih elemenata . . . . .	111
6.4.1	Varijacijski račun . . . . .	111
6.4.2	Ritzova metoda . . . . .	115

# Predgovor

Pred vama se nalazi nastavni materijal za kolegij *Matematika 3* koji se, kao obavezni ili izborni kolegij, predaje na svim smjerovima Diplomskog studija na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Cilj kolegija je upoznati studente s temeljnim matematičkim modelima nekih problema koji se javljaju u građevinskoj praksi. Pri izboru materijala ograničili smo se na linearne modele iz mehanike deformabilnog krutog tijela. Nastojali smo predstaviti sve aspekte modela, posvećujući posebnu pozornost njihovoj formulaciji, tj. načinu kako se fizikalne pojave predstavljaju pomoću matematičkih koncepata i kako se njihovi odnosi svode na diferencijalne jednadžbe. Izlažu se i ostali aspekti modela, a posebno matematičke metode i tehnike za nalaženje točnih (ako je to moguće) i približnih rješenja.

Skripta počinje poglavljem u kojem se ukratko ponavljaju osnovni elementi običnih diferencijalnih jednadžbi, s posebnim naglaskom na linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda. Uvodi se pojam rubnog problema i daje primjer jednadžbe i rubnih uvjeta kojima se opisuje ravnotežni položaj žice pod djelovanjem vanjske sile. U uvodnom se poglavlju daje i definicija i klasifikacija najčešćih tipova parcijalnih diferencijalnih jednadžbi s kojima se susrećemo u modeliranju mehaničkih i termodinamičkih problema.

Drugo je poglavlje posvećeno izlaganju osnova Fourierove analize koja se nalazi u temelju metode rješavanja rubnih problema pomoću separacije varijabli. Za razumijevanje materijala iz drugog poglavlja treba se podsjetiti osnovnih pojmova iz vektorskih prostora, posebice pojma baze i skalarnog produkta.

Treće i četvrto poglavlje bave se jednodimenzionalnim problemima. U trećem poglavlju se izvodi valna jednadžba i pokazuje kako se ona rješava metodom separacije varijabli. Četvrto poglavlje daje izvod i metode rješavanja za jednadžbu vođenja topline u jednodimenzionalnom mediju. U oba poglavlja se ukazuje i na primjene izvedenih modela na višedimenzionalne probleme i na druge fizikalne probleme.

Peto je poglavlje posvećeno problemima oscilacija i ravnoteže dvodimenzionalnog

elastičnog medija. U okviru tog poglavlja daje se i pregled osnovnih rezultata o harmoničkim funkcijama i ukazuje na njihovu važnost i primjenjivost u ostalim granama fizike i tehnike.

Završno, šesto, poglavlje bavi se osnovnim idejama koje leže u temelju numeričkih metoda za rješavanje problema izloženih u prvih pet poglavlja. Težište je na mrežnim metodama u kojima se derivacije aproksimiraju konačnim razlikama. Poglavlje završava uvodom u varijacijski račun i izlaganjem osnovne ideje metode konačnih elemenata.

Pregled literature na kraju skripte trebao bi poslužiti zainteresiranom čitatelju koji želi produbiti znanje o problemima spomenutima tijekom ovog kolegija. Za ovu je skriptu najvažnija referenca [3], čiju koncepciju slijedi, preskačući i izostavljajući pojedina poglavlja. Poglavlje o Fourierovim redovima je napisano prema pristupu iz [4], a izlaganje problema oscilacija grede slijedi pristup iz reference [7]. Pojedine teme napisane su prema referenci [1] i predavanjima koja je prvi autor slušao kod I. Aganovića.

Autori

# Poglavlje 1

## Uvod

### 1.1 Obične diferencijalne jednačbe

**Običnom diferencijalnom jednačbom** nazivamo jednačbu oblika

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

u kojoj se pojavljuje nepoznata funkcija  $y = y(x)$  jedne varijable  $x$  i njene derivacije. Najviša derivacija koja se pojavljuje u jednačbi je njen **red**. **Rješenje** obične diferencijalne jednačbe je funkcija koja na nekom intervalu ima sve derivacije do uključivo reda jednačbe i koja uvrštena u jednačbu pretvara tu jednačbu u jednakost. U općenitom je slučaju vrlo teško reći ima li uopće zadana diferencijalna jednačba rješenja, koliko ih ima i koja su im svojstva. Tek nakon što su poznati odgovori na ta pitanja ima smisla razmišljati o tome kako se ta rješenja mogu odrediti.

Gornja definicija je vrlo općenita; u većini zanimljivih slučajeva funkcija  $F$  ima jednostavan oblik. Također, u većini slučajeva je red jednačbe nizak, jedan ili dva. U ovisnosti o obliku funkcije  $F$  možemo promatrati razne specijalne klase diferencijalnih jednačbi. Primjeri su jednačbe 1. reda sa separiranim varijablama, jednačbe homogene u  $x$  i u  $y$ , linearne diferencijalne jednačbe 1. i 2. reda i ostale koje smo radili na *Matematici 2*.

S najjednostavnijim diferencijalnim jednačbama, onima oblika

$$y' = f(x),$$

smo se već sretali kod računanja neodređenih integrala. Njihova su rješenja oblika

$$y(x) = \int f(x)dx + C,$$

pri čemu je  $C$  proizvoljna realna konstanta za čije je određivanje potrebno zadati dodatne uvjete. Znamo da rješenje takve jednačbe postoji na intervalu  $[a, b]$  na kojem je funkcija  $f$  neprekidna; znamo da je ono jedinstveno ako se zada vrijednost funkcije  $y$  za neki  $x \in [a, b]$ , no i dalje može biti teško ili nemoguće izraziti to rješenje u terminima elementarnih funkcija. Dobar primjer je jednačba

$$y' = e^{-x^2},$$

čije se rješenje ne može napisati kao konačna kombinacija elementarnih funkcija. Jeste li se kada susreli s rješenjem te jednačbe?

U praktičnim se problemima vrlo često pojavljuju obične diferencijalne jednačbe 2. reda. Razlog je da se mnogi mehanički problemi mogu formulirati u terminima ravnoteže sila. Prema 2. Newtonovom zakonu, sila je jednaka umnošku mase i ubrzanja, a ubrzanje je druga derivacija funkcije koja predstavlja položaj. Vrlo često su te diferencijalne jednačbe još i **linearne**.

### 1.1.1 Rubni problemi

Vidjeli smo da jedinstvenost rješenja diferencijalne jednačbe 2. reda u Cauchyjevom problemu osiguravaju dva dodatna uvjeta, jedan na vrijednost funkcije, a drugi na vrijednost derivacije za neku vrijednost nezavisne varijable. Kako se u mehanici često kao nezavisna varijabla javlja vrijeme, takvi se uvjeti zovu **početni uvjeti**, jer vrijednost argumenta za koju su zadani možemo smatrati početnim trenutkom i promatrati ponašanje sustava u vremenu poslije tog trenutka. Postoje, međutim, i mehanički problemi koji su opisani diferencijalnim jednačbama i koji opisuju procese koji ne ovise o vremenu. Primjer su problemi ravnoteže. U takvim slučajevima možemo dodatne uvjete zadati kao kombinacije vrijednosti nepoznate funkcije i njene derivacije na rubovima područja (intervala) na kojem tražimo rješenje. Takvi se uvjeti zovu **rubni uvjeti**. Ako je kombinacija linearna, govorimo o linearnim rubnim uvjetima.

**Rubni problem** za običnu diferencijalnu jednačbu 2. reda sastoji se od jednačbe

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$



i rubnih uvjeta

$$\alpha y'(a) + \beta y(a) = c$$

$$\gamma y'(b) + \delta y(b) = d$$

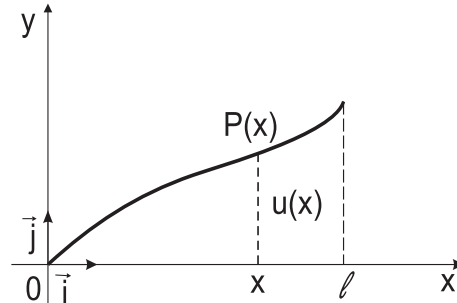
gdje su  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, c$  i  $d$  zadani realni brojevi koji zadovoljavaju nejednakosti  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta > 0$ ,  $\gamma + \delta > 0$ . Ako su  $c = 0$ ,  $d = 0$ , rubni uvjeti su **homogeni**.

Pitanje postojanja rješenja rubnog problema kompliciranije je od slučaja Cauchyjevog problema. Može se pokazati da uz određene fizikalno razumne uvjete na koeficijente takav problem ima rješenje. U sljedećem odjeljku upoznat ćemo se s jednostavnim rubnim problemom koji opisuje ravnotežni položaj žice.

## 1.2 Ravnoteža žice

### 1.2.1 Izvod jednadžbe ravnoteže žice

Promatramo ravnotežni položaj tanke žice na koju djeluje vanjska sila. Nedeformirani položaj žice opisujemo segmentom  $[0, l]$  na  $x$ -osi. Promatramo samo male deformacije, male u odnosu na duljinu žice.



Slika 1.1: Žica u deformiranom položaju. (Progib nije u mjerilu.)

Preslikavanje  $x \mapsto P(x)$  znači da točka  $x$  prelazi u točku  $P(x)$ . Promatrat ćemo vektor  $\overrightarrow{xP(x)}$ . On ima uzdužnu i poprečnu komponentu pa ćemo ga zapisati kao

$$\overrightarrow{xP(x)} = v(x)\vec{i} + u(x)\vec{j}.$$

Uzdužnu komponentu  $v(x)$  smatramo malom i zanemarujemo. Poprečnu komponentu  $u(x)$  zovemo **progib**. Želimo odrediti funkciju  $y = u(x)$  koja opisuje deformaciju žice.

Derivacija  $u'(x)$  je mjera deformacije. Smatramo da je ona mala i propisujemo uvjet  $|u'(x)| \ll 1$ , za svaki  $x$ . Sada iz

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(\xi) d\xi$$

slijedi

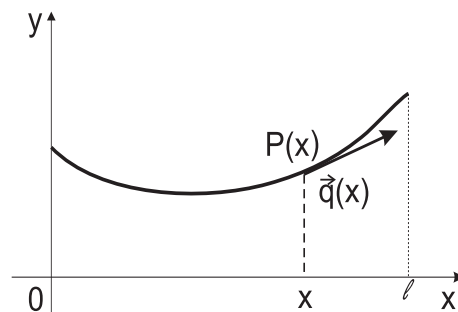
$$|u(x) - u(0)| = \left| \int_0^x u'(\xi) d\xi \right| \leq \int_0^x |u'(\xi)| d\xi \ll \int_0^x 1 d\xi = x \leq l.$$

Dakle,  $\frac{|u(x) - u(0)|}{l} \ll 1$ , tj. relativni progib je mali u odnosu na duljinu žice.

**Princip ravnoteže sile:** ako je tijelo u ravnoteži, zbroj svih sila koje djeluju na bilo koji dio tijela jednak je nuli.

Razlikujemo unutarnje i vanjske sile. Također, podjelu možemo napraviti na kontaktne i volumne (linijske, površinske).

**Kontaktne sile** ne ovise o veličini objekata između kojih djeluju. Primjeri: kohezija, adhezija, trenje, ...



Slika 1.2: Unutarnja kontaktna sila.

Označimo s  $\vec{q}(x)$  silu kojom komad (deformirane) žice od  $(x, P(x))$  do  $(l, P(l))$  djeluje na komad od  $(0, P(0))$  do  $(x, P(x))$ . Tada komad od  $(0, P(0))$  do  $(x, P(x))$  djeluje na komad od  $(x, P(x))$  do  $(l, P(l))$  silom  $-\vec{q}(x)$ . Objasnite!

Sila  $\vec{q}(x)$  je **unutarnja kontaktna sila**. Ona ne ovisi o veličini komada između kojih djeluje. Za  $x = 0$  i  $x = l$  imamo **vanjske kontaktne sile**  $\vec{q}(0)$  i  $\vec{q}(l)$ . Za  $x_1 \leq x_2$

ukupna (kontaktna) sila na komad  $[x_1, x_2]$  je  $\vec{q}(x_2) - \vec{q}(x_1)$ .

Neka je  $\vec{t}(x)$  jedinični vektor tangente na deformiranu žicu u točki  $P(x)$ , tj. vrijedi

$$\vec{t}(x) = \frac{1 \cdot \vec{i} + u'(x)\vec{j}}{\underbrace{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}_{\approx 1}} \approx \vec{i} + u'(x)\vec{j}$$

Za male deformacije kontaktna sila djeluje tangencijalno,  $\vec{q}(x) = a(x)\vec{t}(x)$ . Funkcija  $a(x)$  opisuje **napetost** žice u točki  $(x, P(x))$ . Pretpostavljamo da je  $a(x) > 0, \forall x \in [0, l]$  te kontaktnu silu  $\vec{q}$  zapisujemo na sljedeći način

$$\vec{q}(x) = \underbrace{a(x)}_{\text{uzdužna}} \vec{i} + \underbrace{a(x)u'(x)}_{\text{poprečna}} \vec{j} \quad (1.1)$$

kontaktna sila

Iz (1.1) imamo  $q_x(x) = a(x)$ , tj. uzdužna kontaktna sila jednaka je napetosti, pa je zbog pretpostavke  $q_x(0) > 0, q_x(l) > 0$ . Poprečna kontaktna sila je u vezi s poprečnom deformacijom što se vidi iz zapisa  $q_y(x) = a(x)u'(x)$ . Tu vezu nazivamo **zakon ponašanja**.

**Volumne sile** djeluju po cijelom tijelu. U jednoj dimenziji je to **linijska** sila, npr. gravitacija. Volumne sile opisuju se **gustoćom**, tj. silom po jedinici volumena. Za linijsku silu, gustoća je sila po jedinici duljine. Ukupna sila se dobiva zbrajanjem svih doprinosa, tj. integriranjem po žici. Silu po jedinici duljine žice, tj. linijsku gustoću, označit ćemo s

$$\vec{f}(x) = f_x(x)\vec{i} + f_y(x)\vec{j}.$$

Ukupna linijska sila je integral po deformiranoj žici, tj. krivuljni integral. Riječ je o krivuljnom integralu 1. vrste vektorske funkcije  $\vec{f}(x)$ . Zbog pretpostavke da je deformacija malena imamo

$$ds = \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx \approx dx.$$

Dakle, umjesto krivuljnog integrala po deformiranoj žici možemo uzeti obični integral po nedeformiranoj žici.

Za  $x_1 \leq x_2$  ukupna linijska sila na komad  $[x_1, x_2]$  je

$$\int_{x_1}^{x_2} \vec{f}(x) dx = \underbrace{\vec{i} \int_{x_1}^{x_2} f_x(x) dx + \vec{j} \int_{x_1}^{x_2} f_y(x) dx}_{\text{linijska sila}}$$

uzdužna                      poprečna

Primijenimo sada princip ravnoteže na dio krivulje od  $(0, P(0))$  do  $(x, P(x))$ . Ako je žica u ravnoteži, ukupna sila na taj komad mora biti jednaka nuli, tj.

$$\underbrace{\vec{q}(x) - \vec{q}(0)}_{\text{kontaktna sila}} + \underbrace{\int_0^x \vec{f}(\xi) d\xi}_{\text{linijska sila}} = 0. \quad (1.2)$$

Jednakost (1.2) možemo raspisati po komponentama:

$$q_x(x) - q_x(0) + \int_0^x f_x(\xi) d\xi = 0 - \text{uzdužna komponenta};$$

$$q_y(x) - q_y(0) + \int_0^x f_y(\xi) d\xi = 0 - \text{poprečna komponenta}.$$

Zbog  $q_x(x) = a(x)$  (napetost) imamo

$$a(x) = a(0) - \int_0^x f_x(\xi) d\xi.$$

Odatle je

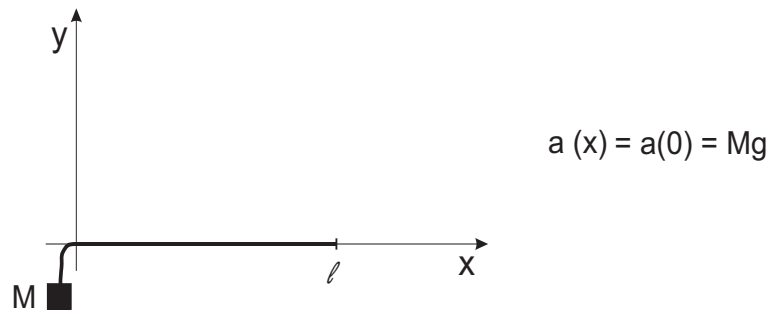
$$a(l) = a(0) - \int_0^l f_x(\xi) d\xi, \quad a(0) = a(l) + \int_0^l f_x(\xi) d\xi,$$

gdje je  $\int_0^l f_x(\xi) d\xi$  ukupna uzdužna linijska vanjska sila. Stoga se ukupna uzdužna vanjska sila (kontaktna i linijska) na dio krivulje od  $(x, P(x))$  do  $(l, P(l))$  može prikazati kao

$$a(x) = a(l) + \int_x^l f_x(\xi) d\xi.$$

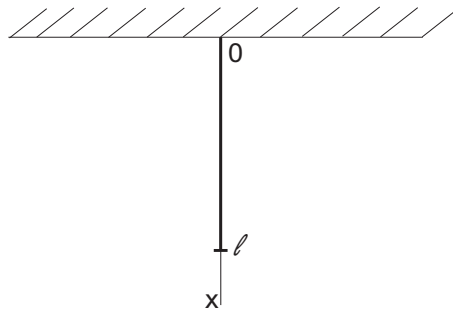
Ako je  $f_x(x) = 0$ , onda je  $a(x) = a(l) \equiv \text{const.}$ , tj. ako je žica napeta samo vanjskom kontaktnom silom, onda je napetost konstantna.

Napetosti smatramo zadanimima, one su dio opisa sustava. Kako se napetost realizira?



Slika 1.3: Žica napeta utegom.

Primjer nekonstantne napetosti imamo kad žica duljine  $l$  i gustoće  $\rho$  slobodno visi.

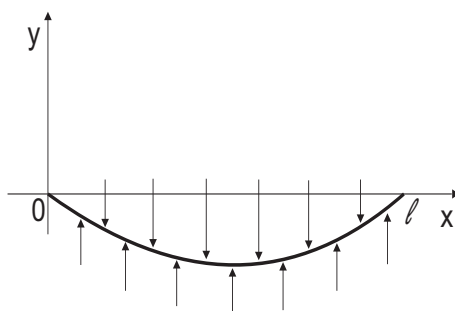


Slika 1.4: Žica napeta vlastitom težinom.

Ovdje vrijedi  $a(x) = g \cdot M(x, l)$ , gdje je s  $M(x, l)$  označena masa komada  $(x, l)$ , što je dalje jednako  $a(x) = g\rho(l - x)$ , za konstantan  $\rho$ . Ovdje je linijska gustoća  $f_x = \rho g$ . Problem je za  $x = l$  jer imamo  $a(l) = 0$ . To se rješava dodavanjem utega mase  $M_0$ . Konstantna sila je sad  $M_0g$  i imamo

$$a(x) = gM(x, l) + M_0g = gM_0 + \rho g(x - l).$$

Promatramo poprečnu deformaciju. Ako se žica nalazi u sredstvu koje je elastično, onda na deformiranu žicu djeluje još i vanjska sila proporcionalna progibu i suprotna mu po predznaku. Ta je sila linijska, tj. djeluje po cijeloj duljini žice, pa ima gustoću. Ta gustoća ima oblik  $-b(x)u(x)$ , gdje je  $b(x) \geq 0$  **koeficijent elastičnosti**.



Slika 1.5: Žica na elastičnoj podlozi.

Kako nas zanima samo poprečna deformacija, označimo redom  $q_y$  i  $f_y$  sa  $q$  i  $f$  (ispustimo indekse  $y$  jer ionako gledamo samo poprečne komponente). Ako imamo i elastični otpor, iz principa ravnoteže sile dobivamo za poprečnu komponentu

$$q(x) - q(0) + \int_0^x [f(\xi) - b(\xi)u(\xi)] d\xi = 0.$$

Uvrstimo li zakon ponašanja  $q(x) = a(x)u'(x)$ , dobit ćemo

$$a(x)u'(x) - a(0)u'(0) + \int_0^x [f(\xi) - b(\xi)u(\xi)] d\xi = 0. \quad (1.3)$$

Dobivena jednakost je integralna jednadžba ravnoteže. Deriviranjem po  $x$  dobivamo

$$(a(x)u'(x))' + f(x) - b(x)u(x) = 0,$$

tj.

$$-(a(x)u'(x))' + b(x)u(x) = f(x). \quad (1.4)$$

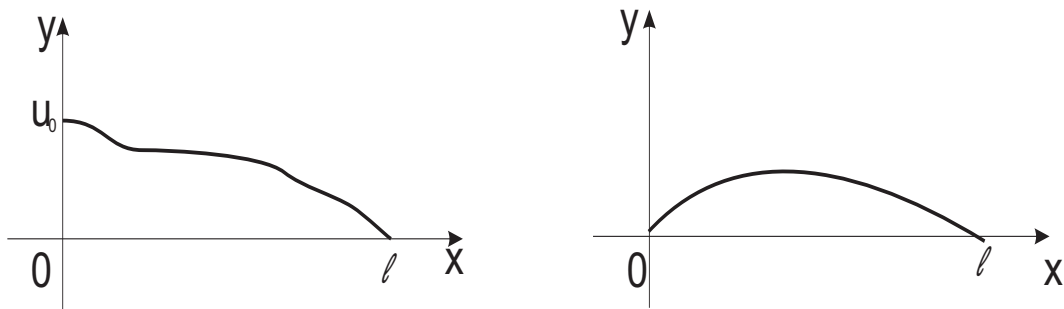
Jednakost (1.4) je diferencijalni oblik jednadžbe ravnoteže ili samo **jednadžba ravnoteže**. Jednadžba ravnoteže je obična linearna diferencijalna jednadžba 2. reda za funkciju  $u$ . Funkcije  $a$  i  $b$  su koeficijenti, dok je funkcija  $f$  slobodni član. Ako je  $f \equiv 0$ , jednadžba je homogena, inače je nehomogena. Funkcija  $u$ , koja zadovoljava (1.4) je **ravnotežno (stacionarno) stanje** ili **ravnotežni položaj (progib)**.

### 1.2.2 Rubni uvjeti

U opće rješenje jednadžbe (1.4) ulaze 2 slobodna parametra. Dakle (1.4) ima beskonačno mnogo rješenja. Nas zanimaju ona koja zadovoljavaju zadane vanjske uvjete.

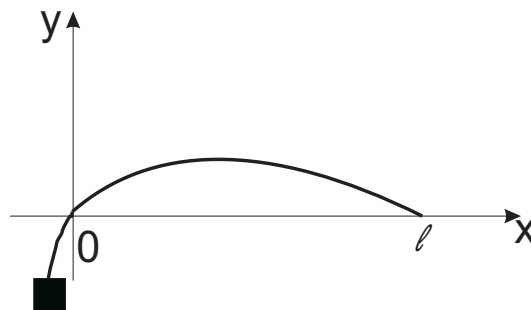
Osim  $a$ ,  $b$  i  $f$ , u opis vanjskih uvjeta pripada i opis poprečne sile na krajevima žice; tog opisa nema u (1.4). Uvrstimo li  $x = 0$  u integralnu jednadžbu ravnoteže (1.3) dobivamo  $a(0)u'(0) = a(0)u'(0)$ , što nije jako informativno. Poprečne sile na krajevima se zadaju **rubnim uvjetima**.

Ako je zadano  $u(0) = u_0$ , onda je poprečna sila zadana neizravno, kao reakcija fiksiranog položaja. Takav se rubni uvjet zove **geometrijski, Dirichletov** ili **prvi rubni uvjet**.



Slika 1.6: Dirichletovi rubni uvjeti.

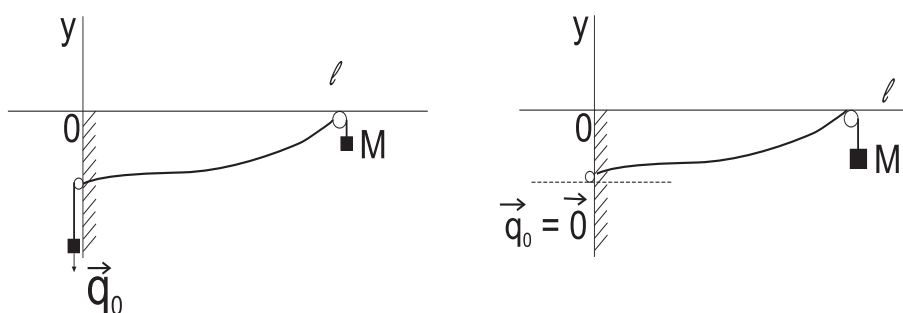
Za  $u_0 = 0$  imamo učvršćeni kraj. To se praktično realizira vješanjem utega na tom kraju kojeg poprečna sila ne može dignuti.



Slika 1.7: Učvršćeni kraj  $x = 0$ .

Na ovoj je slici također poprečna sila slaba, ne može odignuti učvršćeni kraj i puno je slabija od napetosti.

Ako je poprečna sila izravno zadana,  $q(0) = q_0$ , imamo **prirodni, Neumannov** ili **drugi rubni uvjet**. Za  $q_0 = 0$  imamo slobodan kraj u 0.

Slika 1.8: Neumannovi rubni uvjeti u  $x = 0$ .

Iz zakona ponašanja imamo  $u'(0) = \frac{q_0}{a(0)} = c$ . Vrijedi da je  $a(0) > 0$ . Za slobodan kraj imamo  $u'(0) = 0$ .

Ako je kraj  $x = 0$  **elastično vezan**, imamo  $q(0) - \kappa u(0) = 0$ , za neki zadani  $\kappa$ . Dijeljenjem s  $a(0) > 0$  dobivamo  $u'(0) - ku(0) = 0$  za  $k = \frac{\kappa}{a(0)}$ . Iste tipove rubnih uvjeta možemo imati i za  $x = l$ .

Općenito, rubni uvjeti su

$$\begin{aligned} \alpha u'(0) + \beta u(0) &= c \\ \gamma u'(l) + \delta u(l) &= d, \end{aligned} \quad (1.5)$$

gdje su  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, c$  i  $d$  zadani realni brojevi koji zadovoljavaju nejednakosti  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta > 0$ ,  $\gamma \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$ ,  $\gamma + \delta > 0$ . Za  $\alpha = 0$  imamo **Dirichletov**, za  $\alpha \neq 0$  **Neumannov** rubni uvjet. Za  $c = 0$  rubni uvjet je **homogen**, inače je nehomogen.

Jednačba (1.4) s rubnim uvjetom (1.5) čini **rubni problem**. Iz fizikalnih bi razloga bilo razumno očekivati da taj problem ima jedinstveno rješenje. Uz određene uvjete na koeficijente koji ulaze u definiciju problema, to se može i pokazati.

## 1.3 Parcijalne diferencijalne jednačbe

Parcijalna diferencijalna jednačba je jednačba u kojoj se pojavljuje barem jedna parcijalna derivacija nepoznate funkcije.

### Primjer 1.1

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 3.$$



Podsjetimo se nekih osnovnih pojmova vezanih uz parcijalne diferencijalne jednačbe. **Red** parcijalne diferencijalne jednačbe je najviši red parcijalne derivacije koja se pojavljuje u toj jednačbi. U Primjeru 1.1 prva jednačba je 1. reda, a druga jednačba je drugog reda. Parcijalna diferencijalna jednačba je reda  $n$  ako sadrži barem jednu parcijalnu derivaciju reda  $n$  i niti jednu parcijalnu derivaciju reda višeg od  $n$ .

**Rješenje** parcijalne diferencijalne jednačbe je funkcija koja ima sve parcijalne derivacije koje se pojavljuju u jednačbi i zadovoljava jednačbu na cijelom području na kojem je zadana.

Za domenu ćemo pretpostaviti  $D \subset \mathbb{R}^n$ , obično  $n = 2$  ili  $n = 3$ .

**Primjer 1.2** Neka je  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Lako se provjeri da su rješenja parcijalne diferencijalne jednačbe

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D$$

npr.  $u_1(x, y) = x^2 - y^2$ ,  $u_2(x, y) = e^x \cos y$  i  $u_3(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ . ■

Uvest ćemo kompaktnije oznake:  $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}$ , itd.

**Primjer 1.3** Umjesto

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - u(x, y) = 0$$

kraće ćemo pisati

$$u_{xx} - u = 0.$$

Prisjetimo se kako smo rješavali diferencijalnu jednačbu  $u'' - u = 0$  na kolegiju Matematika 2. Naime, zadanu jednačbu zamijenili smo s njenim karakterističnim polinomom  $\lambda^2 - 1 = 0$  čija su rješenja  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$ , tj. realna i različita. Rješenje početne jednačbe je onda dano u obliku  $u(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$ , tj.  $u(x) = Ae^{-x} + Be^x$ . Za potpuno određivanje rješenja trebaju nam i neki dodatni uvjeti.

### 1.3.1 Linearna parcijalna diferencijalna jednačba 2. reda s konstantnim koeficijentima

Linearna parcijalna diferencijalna jednačba 2. reda s konstantnim koeficijentima je sljedećeg oblika

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = p(x, y),$$

gdje su  $a, b, c, d, e, f$  konstante. Ako je  $p(x, y) = 0$  linearna parcijalna diferencijalna jednačba 2. reda je homogena. S druge strane, ako je  $p(x, y) \neq 0$  linearna parcijalna diferencijalna jednačba je nehomogena. Klasificirat ćemo linearne parcijalne diferencijalne jednačbe 2. reda obzirom na vrijednost izraza  $ac - b^2$  i to na:

- 1° eliptički tip (ravnoteža), ako je  $ac - b^2 > 0$ ,
- 2° parabolčki tip (vođenje), ako je  $ac - b^2 = 0$ ,
- 3° hiperbolički tip (oscilacije), ako je  $ac - b^2 < 0$ .

### Parcijalne diferencijalne jednačbe hiperboličkog tipa

Mješoviti problem za linearne parcijalne diferencijalne jednačbe hiperboličkog tipa postavlja se s:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p(x, t) & \text{jednačba} \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) & \text{početni uvjeti} \\ u(0, t) = \alpha(t), \quad u(l, t) = \beta(t) & \text{rubni uvjeti} \\ x \in [0, l], \quad t \geq 0, \quad \text{tj. } [0, l] \times [0, \infty) & \end{array} \right.$$

Mješoviti problem se naziva još i **inicijalno-rubni problem**. Uz određene uvjete na početne i rubne uvjete, te na  $p(x, t)$ , mješoviti problem ima jedinstveno rješenje. Za  $p(x, t) = 0$ ,  $\alpha(t) = \beta(t) = 0$ , to se rješenje može izraziti formulom uz pomoć separacije varijabli i Fourierove metode.

S druge strane, Cauchyjev problem je zadan na  $\langle -\infty, \infty \rangle \times [0, \infty)$  i nema rubnih uvjeta:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p(x, t), & -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x). & \end{array} \right.$$

### Parcijalne diferencijalne jednačbe parabolčkog tipa

Mješoviti problem za linearne parcijalne diferencijalne jednačbe parabolčkog tipa:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & [0, l] \times [0, \infty) \\ u(x, 0) = \varphi(x), & \text{na } [0, l] \\ u(0, t) = \alpha(t), \quad u(l, t) = \beta(t). & \end{array} \right.$$

Mješoviti problem se zove još i inicijalno-rubni problem. U dvije i tri dimenzije problem ovog tipa formulira se analogno:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x, y, t) & \text{na } D \times [0, \infty) \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y), & (x, y) \in D \\ u|_L = \gamma(x, y, t), & (x, y) \in L = \partial D. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = f(x, y, z, t) & \text{na } V \times [0, \infty) \\ u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), & (x, y, z) \in V \subset \mathbb{R}^3 \\ u|_S = \gamma(x, y, z, t), & (x, y, z) \in S = \partial V. \end{cases}$$

Za  $p(x, t) = 0$ ,  $\alpha(t) = 0$ ,  $\beta(t) = 0$  i  $u(x, 0) = \varphi(x)$  mješoviti problem ima rješenje u zatvorenom obliku.

### Parcijalne diferencijalne jednačbe eliptičkog tipa

Postavimo rubne probleme za eliptičke parcijalne diferencijalne jednačbe. **Dirichletov** rubni problem u dvije varijable zadaje se pomoću

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{na } D \subset \mathbb{R}^2 \\ u|_{\partial D} = \varphi(x, y) \end{cases}$$

ili

$$\begin{cases} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x, y) & \text{u } D \subset \mathbb{R}^2 \\ u|_{\partial D} = \varphi(x, y). \end{cases}$$

Po analogiji, Dirichletovi problemi u tri varijable su:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 & \text{na } V \subset \mathbb{R}^3 \\ u|_{\partial V} = \varphi(x, y, z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = f(x, y, z) & \text{u } V \subset \mathbb{R}^3 \\ u|_{\partial V} = \varphi(x, y, z). \end{cases}$$

Neumannov rubni problem također možemo zadati pomoću

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{u } D \subset \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} |_{\partial D} = \psi(x, y) \end{cases}$$

ili

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y) & \text{u } D \subset \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} |_{\partial D} = \psi(x, y). \end{cases}$$

Sjetimo se,

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0} = \nabla u \cdot \vec{n}_0,$$

derivacija u smjeru vektora  $\vec{n}_0$ .

Klasifikaciju parcijalnih diferencijalnih jednačbi možemo napraviti prema različitim kriterijima. Pogledajmo neke:

1.	Red	1 2 3 ...		
2.	Linearnost	linearne	nelinearne	
3.	Koeficijenti	konstantni	nekonstantni	
4.	Homogenost	homogene	nehomogene	
5.	Broj varijabli	1 2 3 ...		
6.	Tip	hiperboličke	paraboličke	eliptičke

# Poglavlje 2

## Fourierovi redovi

S idejom prikaza funkcije pomoću reda smo se već susreli kod Taylorovih redova. Tamo smo funkciju (koja zadovoljava određene uvjete) prikazali kao red potencija nezavisne varijable  $x$ . Temeljna ideja kod Fourierovih redova je da se funkcija može prikazati kao beskonačni red sinusa i kosinusa višekratnika varijable  $x$ . Motivacija dolazi iz prikaza zvuka glazbenog instrumenta kao zbroja (superpozicije) valova različitih frekvencija.

### 2.1 Vektori, vektorski prostori i njihove baze

Prisjetimo se skupa  $X_0(E)$  svih radij-vektora u trodimenzionalnom euklidskom prostoru. Svaki vektor  $\vec{a} \in X_0(E)$  možemo prikazati kao linearnu kombinaciju triju baznih vektora,

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Konstante  $a_x$ ,  $a_y$  i  $a_z$  su **komponente** ili **koordinate** vektora  $\vec{a}$  u bazi  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

**Baza** u  $X_0(E)$  je svaki linearno nezavisan skup od 3 vektora. Vektor  $\vec{a}$  bi u nekoj drugoj bazi, recimo u  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , imao prikaz

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3.$$

Baza  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  se među svim bazama vektorskog prostora  $X_0(E)$  odlikuje time što se komponente vektora u toj bazi posebno jednostavno računaju. To slijedi iz svojstva **ortonormiranosti** baze  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . To znači da su vektori baze međusobno okomiti (ortogonalni) i da im je duljina svima jednaka 1.

Kako se računaju komponente vektora  $\vec{a}$  u bazi  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ? Pomnožimo prikaz vektora  $\vec{a}$  skalarno baznim vektorom  $\vec{i}$ :

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad / \cdot \vec{i}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{i} = a_x \underbrace{(\vec{i} \cdot \vec{i})}_1 + a_y \underbrace{(\vec{j} \cdot \vec{i})}_0 + a_z \underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{i})}_0 = a_x.$$

Dakle je  $a_x = \vec{a} \cdot \vec{i}$ . Posve analogno je  $a_y = \vec{a} \cdot \vec{j}$  i  $a_z = \vec{a} \cdot \vec{k}$ , pa imamo prikaz

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{a} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{a} \cdot \vec{k})\vec{k}.$$

Vidimo da se koordinate vektora u ortonormiranoj bazi dobivaju kao skalarni produkti tog vektora s pripadnim baznim vektorima.

U općenitom vektorskom prostoru  $X$  baza je svaki potpun linearno nezavisan skup vektora. (Skup  $B$  vektora je **potpun** ako se svaki vektor iz  $X$  može prikazati kao linearna kombinacija vektora iz  $B$ . Ako  $B$  nije linearno nezavisan, onda taj prikaz nije jedinstven.) Broj elemenata baze zove se **dimenzija** vektorskog prostora  $X$ .

**Primjer 2.1** Promatrajmo skup  $\mathcal{P}_n$  svih polinoma stupnja najviše  $n$ . Zbrajanjem dvaju polinoma iz  $\mathcal{P}_n$  dobivamo ponovo polinom čiji stupanj je najviše  $n$ , kao i množenjem polinoma iz  $\mathcal{P}_n$  nekim skalarom. Dakle je  $\mathcal{P}_n$  vektorski prostor. Svaki se polinom iz  $\mathcal{P}_n$  može na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija polinoma  $1, x, x^2, \dots, x^n$  kao

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

To znači da je skup  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  potpun skup u  $\mathcal{P}_n$ . Kako se ni jedan  $x^k$  ne može prikazati kao linearna kombinacija ostalih potencija od  $x$ , to je taj skup i linearno nezavisan, pa je i baza. Dakle je dimenzija vektorskog prostora  $\mathcal{P}_n$  jednaka  $n + 1$ .

Postoje i vektorski prostori čija je dimenzija beskonačna. Primjer je skup svih funkcija neprekidnih na  $[a, b]$ . Taj skup označavamo s  $C([a, b])$ . Također su beskonačnodimenzionalni vektorski prostori  $C^1([a, b])$ ,  $C^k([a, b])$  i  $C^\infty([a, b])$ . Ovdje  $C^k([a, b])$  označava skup svih funkcija čije sve derivacije do reda uključivo  $k$  postoje i neprekidne su na nekom otvorenom intervalu koji sadrži  $[a, b]$ .

Željeli bismo imati prikaz takve funkcije u bazi u kojoj se koordinate lako računaju. Pokazuje se da baza  $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$  nije dobar izbor jer nije ortogonalna. To nas motivira na traženje boljih baza; trigonometrijske funkcije se nameću kao prirodni kandidati zbog spomenute fizikalne interpretacije.

## 2.2 Trigonometrijski redovi i sustavi

Funkcija  $f(x)$  definirana na neomeđenom intervalu  $D$  je **periodična** ako postoji broj  $T > 0$  takav da je  $f(x \pm T) = f(x)$ , za svaki  $x \in D$  za koji je  $x \pm T \in D$ . Broj  $T$  je **period** funkcije  $f$ . Najmanji takav  $T$  zove se **temeljni period** funkcije  $f(x)$ .

Arhetipski primjeri periodičnih funkcija su trigonometrijske funkcije: sinus i kosinus imaju period  $2\pi$ , dok tangens i kotangens imaju period  $\pi$ .

**Definicija 2.1** *Funkcijski red oblika*

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots \\ & = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{aligned} \quad (2.1)$$

je **trigonometrijski red**, a konstante  $a_0, a_1, b_1, \dots$  su njegovi koeficijenti.

Parcijalne sume  $S_n(x)$  trigonometrijskog reda (2.1) su linearne kombinacije funkcija  $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$ , pa su one periodične funkcije s periodom  $2\pi$ . Ako red (2.1) konvergira, onda i suma reda  $S(x)$  mora biti periodična funkcija s istim periodom  $2\pi$ ,

$$S(x + 2\pi) = S(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Razviti funkciju  $f(x)$  u trigonometrijski red znači naći konvergentni trigonometrijski red čija je suma  $S(x)$  jednaka  $f(x)$  za sve  $x \in \mathbb{R}$ .

Skup funkcija  $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$  zovemo **trigonometrijski sustav**.

**Definicija 2.2** *Funkcije  $f(x)$  i  $g(x)$  neprekidne na  $[a, b]$  su ortogonalne na  $[a, b]$  ako vrijedi*

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0.$$

Konačan ili beskonačan sustav funkcija  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  neprekidnih na  $[a, b]$  koje nisu identički jednake nuli na  $[a, b]$  je **ortogonalni sustav** na  $[a, b]$  ako za sve  $m, n \in \mathbb{N}$  za koje je  $m \neq n$  vrijedi

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x) dx = 0.$$

**Napomena 2.1** Vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  su okomiti (ortogonalni) ako je  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ . Može se pokazati da preslikavanje

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

ima sva svojstva skalarnog produkta, pa ga možemo smatrati skalarnim produktom u vektorskom prostoru  $C[a, b]$ .

**Teorem 2.1** Trigonometrijski sustav  $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$  je ortogonalni sustav na intervalu  $[-\pi, \pi]$ .

*Dokaz:* Za svaki  $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$  vrijedi

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = -\frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Dakle je 1 ortogonalna na sve ostale funkcije u skupu.

Uzmimo sad  $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$ . Formule pretvorbe umnoška u zbroj daju:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)],$$

i to za sve  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Sada iz prve formule slijedi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x] dx$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Iz druge formule slijedi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] dx$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$



Konačno, iz treće formule slijedi

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m-n)x + \sin(m+n)x] \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\cos(m-n)x}{m-n} + \frac{\cos(m+n)x}{m+n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.\end{aligned}$$

S druge strane, za  $m = n$  dobijemo

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin 2nx}{2} \, dx = -\frac{\cos 2nx}{2n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Dakle, skalarni produkt različitih funkcija trigonometrijskog sustava je jednak nuli, pa je taj sustav ortogonalan. ■

Što se događa kad funkciju iz trigonometrijskog sustava skalarno pomnožimo samu sa sobom ( $m = n$ )? Za  $n \neq 0$  imamo

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left( x + \frac{\sin 2nx}{2n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left( x - \frac{\sin 2nx}{2n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.\end{aligned}$$

Za  $n = 0$  imamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 2\pi.$$

Dakle, trigonometrijski sustav je ortogonalan, ali **nije** ortonormiran (jer je  $\langle f|f \rangle \neq 1$ ).

## 2.3 Fourierovi redovi

Kako za zadanu funkciju  $f$  izračunati koeficijente  $a_n, b_n$  njenog razvoja u trigonometrijski red?

**Teorem 2.2** *Ako relacija*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \quad (2.2)$$

vrijedi za sve  $x$  i ako red na desnoj strani konvergira uniformno na  $[-\pi, \pi]$  (pa zbog periodičnosti i na cijelom  $\mathbb{R}$ ), onda vrijedi

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n \geq 1) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (2.3)$$

(Prisjetimo se da niz funkcija  $f_n(x)$  konvergira po točkama prema funkciji  $f(x)$  na skupu  $A$  ako

$$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}) \quad \text{t.d.} \quad (n \geq n_{x,\varepsilon}) \implies (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Funkciju  $f(x)$  zovemo **limes** niza funkcija  $f_n(x)$ . Ako  $n_{x,\varepsilon}$  ne ovisi o  $x \in A$  već samo o  $\varepsilon$ , kažemo da niz  $f_n(x)$  **uniformno konvergira** prema  $f(x)$ . Uniformna konvergencija je jače svojstvo od konvergencije po točkama.)

*Dokaz:* Kako su svi članovi izraza (2.2) neprekidne funkcije na  $[-\pi, \pi]$  i kako red uniformno konvergira na tom intervalu, funkcija  $f$  je integrabilna i formule (2.3) imaju smisla. Štoviše, smijemo integrirati red (2.2) član po član.

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \quad / \int_{-\pi}^{\pi} dx \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= a_0 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx}_{=2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx}_{=0} \right]. \end{aligned}$$

Odatle slijedi

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Uzmimo sada  $m \in \mathbb{N}$ . Pomnožimo (2.2) s  $\cos mx$  i dobijemo

$$f(x) \cos mx = a_0 \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx].$$

Sada opet integriranjem od  $-\pi$  do  $\pi$  član po član i koristeći ortogonalnost trigonometrijskih funkcija slijedi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = a_0 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx}_{=\pi \delta_{m,n}} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx}_{=0} \right].$$

Odatle odmah slijedi

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx.$$

Posve analogno, množeći (2.2) sa  $\sin mx$  i integrirajući od  $-\pi$  do  $\pi$  dobivamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = a_0 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, dx}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx}_{=\pi \delta_{m,n}} \right],$$

pa je

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx. \quad \blacksquare$$

**Definicija 2.3** *Trigonometrijski red*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx],$$

čiji se koeficijenti  $a_0, a_n$  i  $b_n$  računaju po formulama (2.3) je **Fourierov red** funkcije  $f$ , a koeficijenti  $a_0, a_n$  i  $b_n$  ( $n \geq 1$ ) su njeni **Fourierovi koeficijenti**.

Često se u literaturi Fourierov red definira kao

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

Prednost takve definicije je da se  $a_0$  može računati po istim formulama kao i ostali  $a_n$ . Prednost naše definicije je da se  $a_0$  može interpretirati kao srednja vrijednost funkcije  $f(x)$  na segmentu  $[-\pi, \pi]$ .

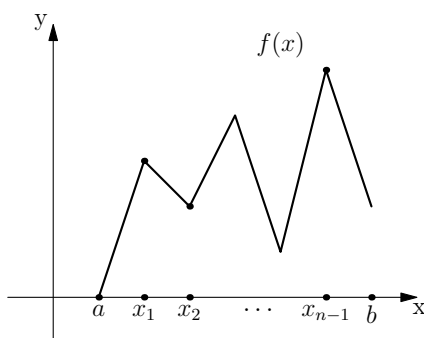
Svakoј funkciji  $f$  koja je integrabilna na  $[-\pi, \pi]$  možemo pridružiti njen Fourierov red,

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

(To možemo učiniti jer možemo izračunati njene Fourierove koeficijente.) To još uvijek ne znači da tako definiran red konvergira, niti da konvergira baš prema  $f(x)$ . (Primjer neprekidne funkcije čiji Fourierov red divergira dao je 1874. g. du Bois-Reymond. Funkcija je oblika  $f(x) = A(x) \sin(\omega(x)x)$ , gdje  $A(x) \rightarrow 0$  i  $\omega(x) \rightarrow \infty$  za  $x \rightarrow 0$ .) Srećom, takve situacije mogu biti izbjegnute nametanjem relativno blagih uvjeta na ponašanje funkcije  $f(x)$ .

## 2.4 Dovoljni uvjeti konvergencije Fourierovog reda

**Definicija 2.4** Funkcija  $f$  je **po dijelovima monotona** na intervalu  $[a, b]$  ako se interval može razbiti na konačan broj podintervala  $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, b)$  takvih da je  $f$  monotona na svakom od njih (rastuća ili padajuća).

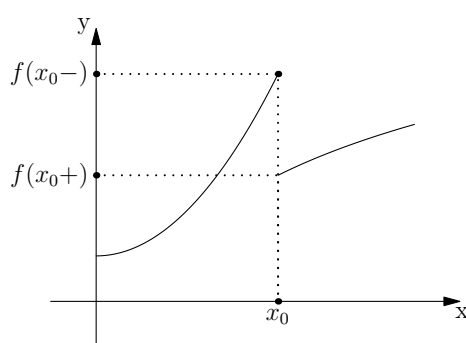


Slika 2.1: Po dijelovima monotona funkcija.

**Primjer 2.2** (a) Funkcija  $f(x) = x^2$  je po dijelovima monotona na  $(-\infty, \infty)$ . Na  $(-\infty, 0)$  je padajuća, a na  $(0, \infty)$  je rastuća.

(b) Funkcija  $f(x) = \cos x$  je po dijelovima monotona na  $[-\pi, \pi]$ . Na  $(-\pi, 0)$  je rastuća, a na  $(0, \pi)$  je padajuća.

**Napomena 2.2** Ako je funkcija  $f$  po dijelovima monotona i omeđena na  $[a, b]$ , tada na  $[a, b]$  može imati samo prekide prve vrste (postoji konačan limes i slijeva i zdesna, ali nisu jednaki).



Slika 2.2: Prekid prve vrste u  $x_0$ .

**Teorem 2.3** Neka je  $f$  periodična funkcija s periodom  $2\pi$  koja je po dijelovima monotona i omeđena na  $[-\pi, \pi]$ . Tada njen Fourierov red konvergira u svakoj točki segmenta  $[-\pi, \pi]$ . Za sumu reda

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx],$$

vrijedi:

- (i)  $S(x) = f(x)$  za sve  $x \in (-\pi, \pi)$  u kojima je funkcija  $f$  neprekidna.
- (ii)  $S(x) = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)]$  za sve  $x \in (-\pi, \pi)$  u kojima  $f$  ima skok (prekid prve vrste).
- (iii)  $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+) + f(\pi-)]$ .

**Primjer 2.3** Razvijmo sljedeće funkcije u Fourierov red:

(i)  $f(x) = \pi - x$  na intervalu  $[-\pi, \pi]$ ;

Računamo

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - x) dx = -\frac{(\pi - x)^2}{4\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

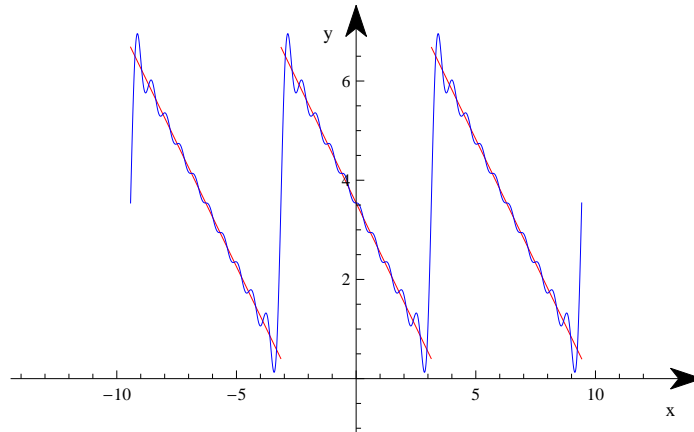
a za  $n = 1, 2, 3 \dots$  (koristeći parcijalnu integraciju) dobijemo

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} (\pi - x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \\ &= -\frac{\cos nx}{\pi n^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\cos(-n\pi) - \cos n\pi}{\pi n^2} = 0 \end{aligned}$$

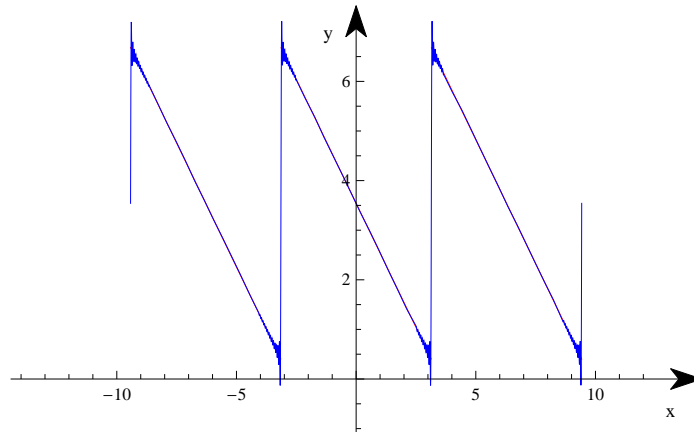
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - x) \sin nx dx = -\frac{1}{\pi} (\pi - x) \frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi n} 2\pi \cos(-n\pi) - \frac{1}{\pi n^2} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{n} \cos n\pi = 2 \frac{(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

Sada je

$$f(x) = \pi - x = \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}, \quad -\pi < x < \pi.$$



Slika 2.3: Funkcija (crveno) i njena aproksimacija s prvih 10 članova njenog Fourierovog reda (plavo).



Slika 2.4: Funkcija (crveno) i njena aproksimacija s prvih 100 članova njenog Fourierovog reda (plavo).

$$(ii) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases} \quad \text{na intervalu } [-\pi, \pi]$$

Koristeći aditivnost određenog integrala dobijemo da je

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 \, dx + \int_0^{\pi} x \, dx \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4},$$

a za  $n = 1, 2, 3 \dots$  (koristeći parcijalnu integraciju) dobijemo

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{x \sin nx}{\pi n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \\ &= \frac{\cos nx}{\pi n^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{\cos(n\pi) - 1}{\pi n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{\pi n^2}, & \text{za neparne } n \\ 0, & \text{za parne } n, \end{cases} \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = -\frac{x \cos nx}{\pi n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \\ &= -\frac{\cos n\pi}{n} = -\frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Dolazimo do toga da je

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{2 \cos(2n-1)x}{\pi (2n-1)^2} + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \right], \quad -\pi < x < \pi.$$

Na krajevima segmenta  $[-\pi, \pi]$ , tj. u točkama  $x = -\pi$  i  $x = \pi$  funkcija  $f(x)$  ima prekide prve vrste, pa vrijedi

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{0 + \pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ako uvrstimo  $x = 0$  dobijemo da je

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \right),$$

pa je

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

## 2.5 Parne i neparne funkcije

Podsjetimo se da za funkciju  $f$  definiranu na intervalu  $[-l, l]$ ,  $l > 0$  kažemo da je

- parna ako je  $f(-x) = f(x)$  za svaki  $x \in [-l, l]$ ,
- neparna ako je  $f(-x) = -f(x)$  za svaki  $x \in [-l, l]$ .

Grafovi parnih funkcija su osno simetrični obzirom na  $y$ -os, a grafovi neparnih funkcija su centralno simetrični obzirom na ishodište.

**Primjer 2.4** (1) Funkcija  $f(x) = \cos x$  je parna na intervalu  $[-\pi, \pi]$ .

(2) Funkcija  $f(x) = \sin x$  je neparna na intervalu  $[-\pi, \pi]$ .

(3) Funkcija  $f(x) = x^2 - x$  nije ni parna ni neparna na intervalu  $[-\pi, \pi]$ , jer je

$$(-x)^2 - (-x) = x^2 + x \neq x^2 - x \neq -x^2 + x \quad \text{za } x \neq 0.$$

Ako je  $f$  parna funkcija na  $[-\pi, \pi]$  koja zadovoljava uvjete Teorema 2.3, onda je  $f(x) \sin nx$  neparna funkcija na  $[-\pi, \pi]$  za sve  $n \geq 1$ , pa je

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$



S druge strane, zbog  $f(-x) = f(x)$  i parnosti kosinusa, imamo

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

Dakle, Fourierov red parne funkcije sadrži samo članove s kosinusima, tj. oblika je

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Ako je pak  $f$  neparna funkcija na  $[-\pi, \pi]$  koja zadovoljava uvjete Teorema 2.3, onda je  $f(x) \cos nx$  neparna za sve  $n \geq 0$ , pa je

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0.$$

S druge strane,  $f(x) \sin nx$  je parna funkcija na  $[-\pi, \pi]$  (za svaki  $n \geq 1$ ) i stoga je

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Dakle, Fourierov red neparne funkcije sadrži samo članove sa sinusima, tj. oblika je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

**Primjer 2.5** (1) Razvijte u Fourierov red funkciju  $f(x) = x^2$  na intervalu  $[-\pi, \pi]$ .

*Funkcija je parna, pa je dovoljno odrediti samo koeficijente  $a_0$  i  $a_n$ :*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = (\text{dva puta parcijalna integracija})$$

$$= (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

*Sada je Fourierov red funkcije  $f$  oblika*

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}.$$

*Gornja jednakost vrijedi za sve  $x \in [-\pi, \pi]$ , jer je za  $x = \pm\pi$  suma reda*

$$\frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2} = \frac{\pi^2 + \pi^2}{2} = \pi^2 = f(\pi) = f(-\pi).$$

(2) Razvijte u Fourierov red funkciju  $f(x) = x$  na intervalu  $(-\pi, \pi)$ .

Funkcija je neparna, pa je dovoljno odrediti samo koeficijente  $b_n$ :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = (\text{parcijalna integracija}) \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Fourierov red funkcije  $f$  je sad oblika

$$f(x) = x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}.$$

Gornja jednakost vrijedi za sve  $x \in (-\pi, \pi)$ , a za  $x = \pm\pi$  prema Teoremu 2.3 suma reda poprima vrijednost

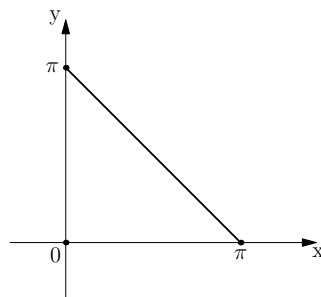
$$\frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0.$$

## 2.6 Razvoj funkcije u sinusni i kosinusni Fourierov red

Što ako je funkcija  $f$  zadana ne na cijelom intervalu  $[-\pi, \pi]$  nego samo na  $[0, \pi]$ ?

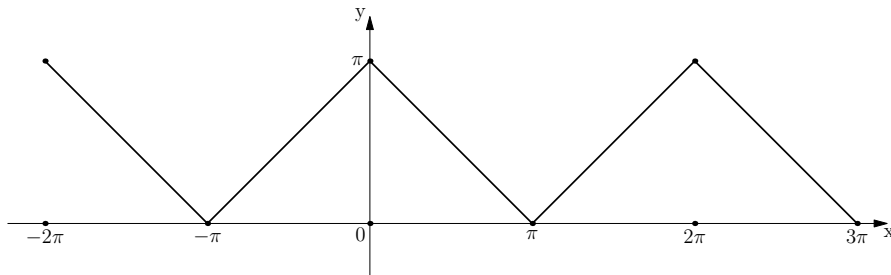
Kako taj interval nije simetričan,  $f$  ne može biti ni parna ni neparna. Možemo ju, međutim, proširiti na cijeli  $[-\pi, \pi]$  na dva načina - po parnosti ili po neparnosti. U prvom će slučaju Fourierov red tako proširene funkcije sadržavati samo kosinuse, u drugom samo sinuse. U oba će slučaja ti redovi **na segmentu**  $[0, \pi]$  konvergirati prema istoj funkciji, tj. prema funkciji  $f$ .

**Primjer 2.6** Zadana je funkcija  $f(x) = \pi - x$  za  $0 \leq x \leq \pi$ .



Slika 2.5: Funkcija  $f(x) = \pi - x$  na  $[0, \pi]$ .

(1) Funkciju proširimo po parnosti.

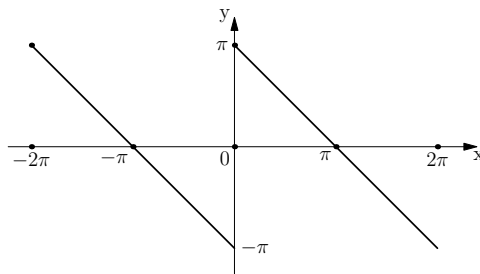


Slika 2.6: Parno proširenje funkcije  $f$ .

Parno proširenje funkcije  $f$  će u svom razvoju u Fourierov red imati samo članove s kosinusima. Računom se dobije

$$f(x) = \pi - x = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{5} \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right).$$

(2) Funkciju proširimo po neparnosti.



Slika 2.7: Neparno proširenje funkcije  $f$ .

Neparno proširenje funkcije  $f$  će u svom razvoju u Fourierov red imati samo članove sa sinusima. Dobije se

$$f(x) = \pi - x = 2 \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right).$$

Što mislite, koje proširenje je bolje? Zašto?

## 2.7 Fourierovi redovi funkcija s proizvoljnim periodom

Ako umjesto na  $[-\pi, \pi]$  imamo periodičnu funkciju definiranu na  $[-L, L]$  s periodom  $2L$ ,  $L \neq 0$ , možemo je svesti na segment  $[-\pi, \pi]$  zamjenom varijabli  $x = \frac{Lt}{\pi}$ . Time ćemo od funkcije  $f(x)$  zadane na  $[-L, L]$  s periodom  $2L$  dobiti funkciju  $F(t) = f(\frac{Lt}{\pi})$  definiranu na  $[-\pi, \pi]$  s periodom  $2\pi$  na koju možemo primijeniti formule koje smo ranije izveli. Iz formula

$$F(t) = f\left(\frac{Lt}{\pi}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nt + b_n \sin nt],$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos nt dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin nt dt,$$

možemo, vraćajući se na varijablu  $x$ , tj. supstitucijom  $t = \frac{\pi x}{L}$ ,  $dt = \frac{\pi}{L} dx$ , dobiti Fourierove koeficijente funkcije  $f(x)$  i to su:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

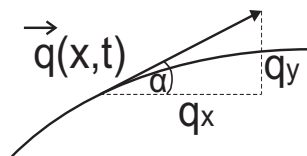
# Poglavlje 3

## Valna jednadžba

### 3.1 Izvod jednadžbe za oscilacije žice

Promatramo problem poprečnih oscilacija žice. Nedeformiranu žicu opisujemo segmentom  $[0, l]$ , a vrijeme s  $t \geq 0$ . S  $u(x, t)$  označavamo položaj točke  $x$  u trenutku  $t$ , odnosno progib u trenutku  $t$ . Sile koje djeluju:

- $\vec{f}$  - vanjska linijska sila (njena gustoća), poprečna  $\vec{f} = f(x, t)\vec{j}$
- $\vec{q}$  - unutarnja kontaktna sila,  $\vec{q}(x, t)$ , kojom komad od  $(x, P(x))$  do  $(l, P(l))$  djeluje na komad od  $(0, P(0))$  do  $(x, P(x))$ .
- $\vec{q}(x, t) = q_x(x, t)\vec{i} + q_y(x, t)\vec{j}$ , uzimamo  $q_x(x, t) = T$  - konstantna napetost žice. (To odgovara  $a(x) = T$  iz ravnoteže žice.)



Slika 3.1: Zakon ponašanja za unutarnju kontaktnu silu.

Zakon ponašanja:  $q_y(x) = a(x)u'(x)$  prelazi u

$$q_y(x, t) = T \frac{\partial u}{\partial x}(x, t),$$

$$\text{pa je } \text{tg } \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{q_y}{q_x} = \frac{q_y}{T}.$$

Pretpostavljamo da je  $\left| \frac{u(x, t)}{l} \right| \ll 1$ ,  $\left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right| \ll 1$ . Polazimo od drugog Newtonovog zakona,  $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$ , pri čemu je  $m\vec{v}$  količina gibanja. Masa žice je zadana linijskom gustoćom,  $\varrho(x)$ . Dakle je masa komada na  $[x_1, x_2]$  dana kao  $\int_{x_1}^{x_2} \varrho(x) dx$ .

S druge strane, brzina je dana kao  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ . Ako sa  $k_{12}$  označimo dio krivulje od  $(x_1, P(x_1))$  do  $(x_2, P(x_2))$ , onda za komad  $[x_1, x_2]$  imamo ukupnu vanjsku linijsku silu

$$\int_{k_{12}} f(x, t) ds = \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \approx \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx.$$

Ukupna kontaktna sila je  $\vec{q}(x_2, t) - \vec{q}(x_1, t)$ , a njen iznos je  $q_y(x_2, t) - q_y(x_1, t)$ . Ukupni impuls komada od  $(x_1, P(x_1))$  do  $(x_2, P(x_2))$  je dan integralom

$$\begin{aligned} & \int_{k_{12}} \varrho(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) ds \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \varrho(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \approx \int_{x_1}^{x_2} \varrho(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx. \end{aligned}$$

Drugi Newtonov zakon kaže da je promjena količine gibanja jednaka sili. Promjena se opisuje derivacijom po vremenu, pa imamo

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \varrho(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx + q_y(x_2, t) - q_y(x_1, t)$$

tj.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \varrho(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx &= \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial q_y}{\partial x}(x, t) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) dx, \end{aligned}$$

odnosno

$$\int_{x_1}^{x_2} \varrho(x) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx + \int_{x_1}^{x_2} T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx.$$

Zamijenimo li poredak integrala na desnoj strani, iz

$$\int_{x_1}^{x_2} \varrho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx,$$

za sve podintervale  $[x_1, x_2]$  od  $[0, l]$  vrijedi

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \varrho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - f(x, t) \right] dx = 0.$$

**Teorem 3.1** *Ako je funkcija  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna na  $I$  i ako je  $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = 0$ ,  $\forall [x_1, x_2] \subseteq I$ , onda je  $f \equiv 0$  na  $I$ .*

**Zaključak:**

$$\varrho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - f(x, t) = 0.$$

Valna jednadžba glasi

$$\boxed{\varrho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t)}$$

Ovo je bio najjednostavniji slučaj. Da smo uzeli nekonstantnu napetost  $T(x)$ , komad na desnoj strani koji sadrži  $T$  bi bio  $\frac{\partial}{\partial x} \left( T(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)$ .

Uzmemo li da sredstvo pruža elastični otpor čija je linijska gustoća zadana funkcijom  $b(x)$ , na desnoj strani bi se još pojavio član  $-b(x)u(x, t)$ .

Ako se žica nalazi u sredstvu koje još pruža otpor proporcionalan brzini, dobio bi se još i član  $-r(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ .

Najopćenitiji oblik (telegrafska jednadžba):

$$\varrho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( T(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) - r(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - b(x)u(x, t) + f(x, t).$$

Kako je  $\varrho(x) > 0$  možemo podijeliti s  $\varrho(x)$ . Ako su  $\varrho$  i  $T$  konstantni i ako nema otpora sredstva ( $r = b = 0$ ), dobivamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + p(x, t).$$

Za  $u(x, t) = u(x)$ ,  $f(x, t) = f(x)$ , dobivamo jednadžbu ravnoteže žice. Trebaju nam još početni i rubni uvjeti. Početni uvjeti su

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

Dirichletovi uvjeti su

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad u(l, t) = \beta(t),$$

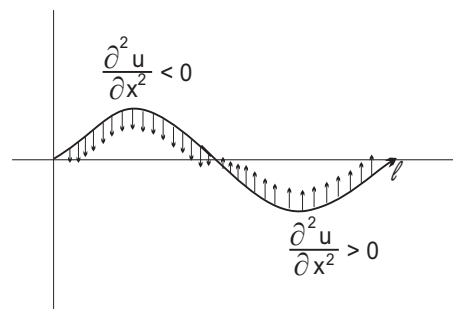
a Neumannovi

$$q_y(0, t) = \gamma(t), \quad q_y(l, t) = \delta(t),$$

tj.

$$T \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \gamma(t), \quad T \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \delta(t).$$

Zašto ovakva jednadžba opisuje titranje žice?



Slika 3.2: Konveksnost – konkavnost i predznak ubrzanja.

Izraz  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$  je (poprečno) ubrzanje točke na žici s apscisom  $x$ . To je ubrzanje proporcionalno zakrivljenosti žice, a to se mjeri drugom derivacijom po  $x$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$ .

Budući da je  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , vidimo da se ubrzanje po predznaku podudara s konveksnošću,  $a$  ima dimenziju  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ , dakle brzine!

Valna jednadžba opisuje i uzdužne i torzijske oscilacije ravnog štapa te raspodjelu električne struje u vodiču.

## 3.2 D'Alembertova formula

Valna jednadžba  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  podsjeća na jednadžbu hiperbole,  $x^2 - a^2 y^2 = 1$ . Jednadžba hiperbole  $x^2 - y^2 = 1$  može se transformirati u oblik  $xy = 1$ , rotacijom koordinatnog sustava za  $45^\circ$ . Matrica takve rotacije je  $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x +$



$y)$ ,  $y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y)$ . U oba slučaja imamo linearnu transformaciju. Ovdje još u igru moramo uvesti i  $a$ . Uvodimo nove koordinate  $v = x + at$  i  $z = x - at$ . Imamo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= a \frac{\partial u}{\partial v} - a \frac{\partial u}{\partial z} = a \left( \frac{\partial u}{\partial v} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_a + \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} \cdot \underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_{-a} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_a - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_{-a} \right) \\ &= a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - 2a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z}\end{aligned}$$

Sada je

$$a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

te nam ostane  $4 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0$ . Što znamo o rješenju jednadžbe  $\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0$ ? Što je rješenje obične diferencijalne jednadžbe  $u'' = 0$ ? ( $u = Ax + B$ ). Slično, ovdje imamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} &= 0 \quad / \int dz \\ \frac{\partial u}{\partial v} &= h(v) \quad / \int dv \\ u(v, z) &= \underbrace{\int h(v) dv} + g(z) \\ u(v, z) &= f(v) + g(z),\end{aligned}$$

gdje su  $f$  i  $g$  proizvoljne funkcije. Vratimo se na stare varijable i pogledajmo D'Alembertovo rješenje valne jednadžbe

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at).$$

Točan oblik funkcije  $f$  i  $g$  ovisi o početnim uvjetima. Promatramo za početak Cauchyjev problem, tj. valnu jednadžbu i početne uvjete za neograničenu žicu:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x).$$

Za  $t = 0$  je  $f(x + at) = f(x)$ , i  $g(x - at) = g(x)$ , te

$$u(x, 0) = \varphi(x) = f(x) + g(x)$$

i

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) = af'(x) - ag'(x).$$

Polazimo od

$$\begin{aligned} \psi(x) &= a(f'(x) - g'(x)) \quad / : a \quad / \int_{x_0}^x d\xi \\ \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi &= f(x) - f(x_0) - g(x) + g(x_0) \\ \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi &= f(x) - g(x) - K(x_0) \\ \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + K(x_0) &= f(x) - g(x). \end{aligned}$$

Sada imamo

$$f(x) + g(x) = \varphi(x) \tag{3.1}$$

i

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + K(x_0). \tag{3.2}$$

Zbrajanjem dobivamo

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2}K(x_0),$$

a oduzimanjem (3.1) i (3.2) dobivamo

$$g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - \frac{1}{2}K(x_0).$$

Kada uvrstimo  $x + at$  i  $x - at$  konstantni komad se ne mijenja pa će se pokratiti u  $f(x + at) + g(x - at)$ . D'Alembertova formula tada glasi

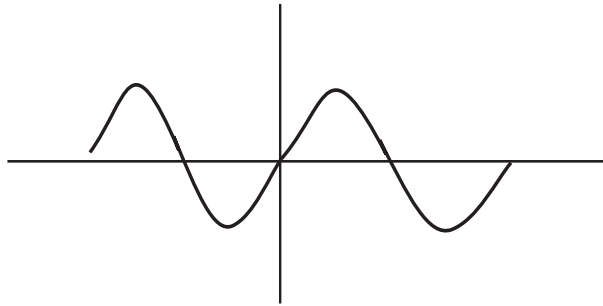
$$u(x, t) = \frac{1}{2}\varphi(x + at) + \frac{1}{2}\varphi(x - at) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

Za  $\psi(x) = 0$  (tj. žica u trenutku  $t$  miruje u položaju  $\varphi(x)$ ), D'Alembertova formula postaje posebno jednostavna

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)].$$

Ovim je Cauchyjev problem u potpunosti riješen.

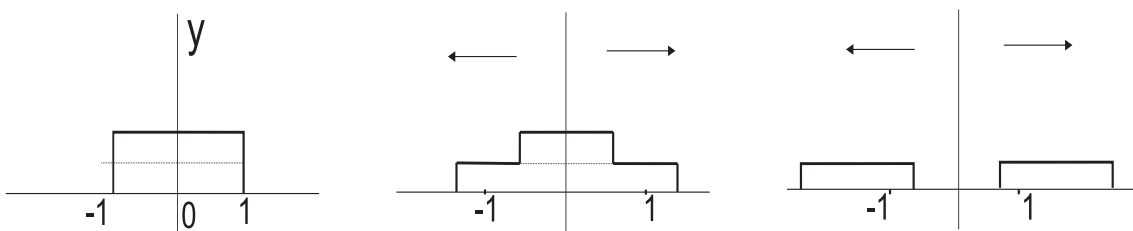
**Primjer 3.1**  $u(x, 0) = \sin x$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ .



Slika 3.3: Funkcija  $\sin x$  kao početni uvjet.

Funkciju  $\varphi(x) = \sin x$  prikazujemo kao  $\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin x$ , i onda svaki od njih putuje brzinom  $a$ , jedan lijevo, jedan desno. ■

**Primjer 3.2** Pravokutni impuls:  $u(x, 0) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$ ,  $\psi(x) = 0$ .



Slika 3.4: Početni uvjet u obliku pravokutne deformacije. ■

**Primjer 3.3**  $u(x, 0) = \varphi(x) = 0$ ,  $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \psi(x) = \sin x$

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \sin \xi \, d\xi = \frac{1}{2} [\cos(x-at) - \cos(x+at)]$$

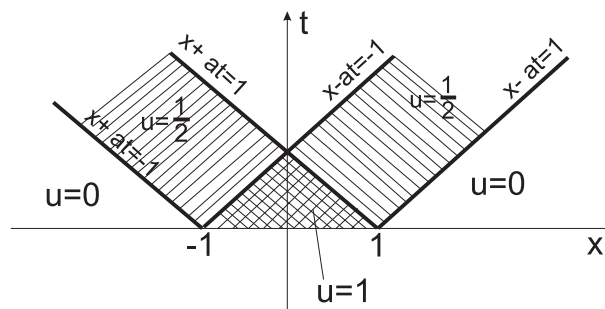
■

Što smo naučili?

Opće rješenje parcijalne diferencijalne jednačbe drugog reda sadrži dvije proizvoljne funkcije, dok opće rješenje obične diferencijalne jednačbe drugog reda sadrži dvije proizvoljne konstante. Zamjena varijabli koja vodi do jednostavnije jednačbe je standardan postupak. Novе varijable/kordinate se zovu **kanonske**.

Primjer valne jednačbe je jedan od rijetkih koje je moguće riješiti ovom metodom. Problem je u zadovoljavanju rubnih uvjeta. Zašto su rubni uvjeti problem?

Pogledajmo kako širenje pravokutnog impulsa izgleda u  $(x, t)$  koordinatama:



Slika 3.5: Širenje početne deformacije.

Imamo val koji putuje po žici. Poremećaj (val) putuje duž pravaca  $x+at = const.$  i  $x-at = const.$  Ti se pravci zovu još i **karakteristike**. Točka na žici s koordinatom  $x_0 > 1$  počinje osjećati poremećaj uzrokovan početnom deformacijom tek nakon vremena  $t$  za koje je  $x_0 - at = 1$ . Poremećaj prolazi tom točkom sve do vremena  $t$  za koje je  $x_0 - at = -1$ . Nakon tog vremena, točka  $x_0$  se vraća u neperturbirani položaj.

Gledamo li omeđenu žicu, kada val dođe do njezinog ruba, počinju problemi. Ako je rub učvršćen, val se odbija (reflektira) i putuje natrag. Odbija se tako da mijenja predznak. Ako je rub slobodan, val se reflektira ne mijenjajući predznak. Za ograničenu žicu primjerenija je metoda separacije varijabli ili Fourierova metoda.

### 3.3 Fourierova metoda za oscilacije žice

Promatramo inicijalno-rubni problem

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in [0, l] \\ u(x, 0) = \varphi(x), & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \\ u(0, t) = \alpha(t), & u(l, t) = \beta(t), \quad t > 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Pretpostavimo rješenje u obliku  $u(x, t) = F(x)G(t)$ . Tada vrijedi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x)\ddot{G}(t),$$

tako da uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu dobijemo

$$\left. \begin{aligned} F(x) \frac{d^2 G(t)}{dt^2} &= a^2 \frac{d^2 F(x)}{dx^2} G(t) \quad / : a^2 F(x) G(t) \\ \frac{\ddot{G}(t)}{a^2 G(t)} &= \frac{F''(x)}{F(x)} = k \dots \text{const.} \implies \left. \begin{aligned} F'' - kF &= 0 \\ \ddot{G} - a^2 k G &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ODJ 2. reda} \end{aligned}$$

Dakle, imamo

$$\begin{aligned} F''(x) &= kF(x) \quad / \cdot F(x) \quad / \int_0^l dx \\ \int_0^l F''(x)F(x) dx &= k \int_0^l F^2(x) dx \\ F'(x)F(x) \Big|_0^l - \int_0^l (F'(x))^2 dx &= k \int_0^l F^2(x) dx \end{aligned} \quad (3.4)$$

gdje je  $F'(x)F(x) \Big|_0^l = 0$  za geometrijski rubni uvjet  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ . Iz (3.4) slijedi

$$k = - \frac{\int_0^l (F'(x))^2 dx}{\int_0^l F^2(x) dx} < 0.$$

Ovo je u skladu s fizikalnom interpretacijom progiba. Naime, kada bi  $k$  bio veći od nule, progib bi eksponencijalno rastao, što je fizikalno nemoguće. Uvedimo oznaku  $k = -\mu^2$ . Sada su obične diferencijalne jednadžbe oblika

$$\begin{aligned} F'' + \mu^2 F &= 0, & F(0) = F(l) &= 0 \\ \ddot{G} + a^2 \mu^2 G &= 0. \end{aligned}$$

Riješimo prvu običnu diferencijalnu jednadžbu po varijabli  $x$ :

$$F'' + \mu^2 F = 0 \implies \lambda^2 + \mu^2 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm i\mu$$

$$F(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x$$

$$F(0) = A = 0$$

$$F(l) = B \sin \mu l = 0 \left. \vphantom{F(l)} \right\} \begin{array}{l} \mu l = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \mu = \frac{n\pi}{l}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{array}$$

Dobiveni brojevi  $\mu$  su svojstvene vrijednosti, a svojstvene funkcije su

$$F_n(x) = B_n \sin \left( \frac{n\pi}{l} x \right).$$

Sada riješimo i drugu diferencijalnu jednadžbu po varijabli  $t$ :

$$\ddot{G} + a^2 \mu^2 G = 0 \implies \lambda^2 + a^2 \mu^2 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm a\mu i$$

$$G(t) = C \cos a\mu t + D \sin a\mu t$$

Parametar  $\mu$  je isti kao i za  $F(x)$ . Dakle, možemo promatrati niz funkcija  $G_n(t)$ ,

$$G_n(t) = C_n \cos \left( \frac{an\pi}{l} t \right) + D_n \sin \left( \frac{an\pi}{l} t \right).$$

Množeći  $F_n(x)$  i  $G_n(t)$  dobivamo niz elementarnih oscilacija žice, tzv. stojne valove

$$u_n(x, t) = \left[ E_n \cos \left( \frac{an\pi}{l} t \right) + F_n \sin \left( \frac{an\pi}{l} t \right) \right] \sin \left( \frac{n\pi}{l} x \right),$$

gdje je  $E_n = B_n C_n$  i  $F_n = B_n D_n$ . Konačno,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

je rješenje valne jednadžbe. Sada nam još trebaju koeficijenti  $E_n$  i  $F_n$ . Njih dobivamo iz početnih uvjeta. Rubni uvjeti  $u(0, t) = u(l, t) = 0$  su nam ušli u oblik svojstvenih funkcija. Dakle, imamo

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \left( \frac{n\pi}{l} x \right).$$

Prema tome,  $E_n$  su koeficijenti u razvoju početnog uvjeta  $\varphi(x)$  u Fourierov red po sinusima. Slično, iz  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$ , deriviranjem  $u(x, t)$  po  $t$  dobijemo da je

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{an\pi}{l} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Koeficijente  $E_n$  i  $F_n$  znamo izračunati:

$$E_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

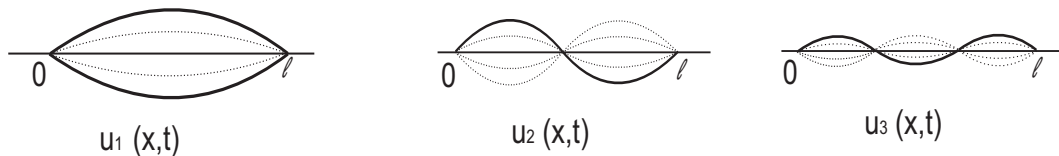
i

$$F_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx.$$

Konačno, rješenje inicijalno-rubnog problema (3.3) za  $\alpha(t) = \beta(t) = 0$  glasi

$$\begin{cases} u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ E_n \cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right) + F_n \sin\left(\frac{an\pi}{l}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \\ E_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \\ F_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx. \end{cases}$$

### 3.4 Geometrijska interpretacija - stojni valovi



Slika 3.6: Prvi, drugi i treći harmonik.

Kako su jednačba i rubni uvjeti homogeni i linearni, to je superpozicija rješenja i sama rješenje. Treba samo naći takvu superpoziciju koja zadovoljava početne uvjete. Neka je funkcija  $u_n(x, t)$   $n$ -ti mod oscilacije ili  $n$ -ti **harmonik**. Možemo ga pisati kao  $u_n(x, t) = R_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \cos\left[\frac{n\pi a(t - \delta_n)}{l}\right]$ , gdje su  $R_n$  amplituda i  $\delta_n$  faza koje se mogu odrediti iz početnih uvjeta. Frekvencija  $n$ -tog harmonika je dana formulom

$w_n = \frac{n\pi a}{l} = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ , gdje je  $T$  napetost a  $\rho$  gustoća žice. To je upravo vlastita frekvencija žice.

Ovdje imamo  $w_n = nw_1$ . Međutim, to nije istina za sve tipove oscilacija. Recimo, za gitaru i violinu je, za bubanj nije. Objasnite!

Stojni val je gibanje žice kod kojeg svaka točka obavlja harmoničko gibanje. Točke koje pri tom miruju zovu se **čvorovi** stojnog vala ( $\frac{n\pi}{l}x = m\pi \implies x = m\frac{l}{n}$ ,  $m = 0, 1, \dots, n$  a  $u(x) = \frac{2m+1}{n}l$  je brijeg stojnog vala).

### 3.5 Rubni problemi sa stacionarnim nehomogenostima

Važnu klasu nehomogenih problema čine oni u kojima ni vanjska sila ni rubni uvjeti ne ovise o vremenu.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_0(x),$$

uz početne i rubne uvjete

$$\left. \begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} u(0, t) = u_1 \\ u(l, t) = u_2 \end{array} \right\}.$$

U takvom slučaju rješenje tražimo u obliku:

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + v(x, t)$$

gdje je  $\bar{u}$  stacionarno stanje, pa je statički progib žice određen jednačbom

$$a^2 \bar{u}''(x) + f_0(x) = 0,$$

i rubnim uvjetima

$$\left. \begin{array}{l} \bar{u}(0) = u_1 \\ \bar{u}(l) = u_2 \end{array} \right\},$$

a  $v(x, t)$  otklon od stacionarnog stanja. Integrirajući jednačbu  $\bar{u}''(z) = -\frac{f_0(z)}{a^2}$  po  $z$  od 0 do  $w$  dobivamo

$$\bar{u}'(w) - \bar{u}'(0) = - \int_0^w \frac{f_0(z)}{a^2} dz.$$



Integrirajući sada tu jednadžbu po  $w$  od 0 do  $x$  dobivamo

$$\bar{u}(x) - \bar{u}(0) = - \int_0^x dw \int_0^w \frac{f_0(z)}{a^2} dz + x \cdot \bar{u}'(0).$$

Vrijednost  $\bar{u}(0) = u_1$  dobivamo iz rubnog uvjeta na lijevom kraju. Sada treba odrediti  $\bar{u}'(0)$ . Uvrštavanjem  $x = l$  dobivamo

$$\bar{u}(l) = u_2 = u_1 + l \cdot \bar{u}'(0) - \int_0^l dw \int_0^w \frac{f_0(z)}{a^2} dz,$$

i odatle

$$\bar{u}'(0) = \frac{1}{l}(u_2 - u_1) + \frac{1}{l} \int_0^l dw \int_0^w \frac{f_0(z)}{a^2} dz.$$

Uvrštavanjem u izraz za  $\bar{u}(x)$  konačno dobivamo

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l} + \frac{x}{l} \int_0^l dw \int_0^w \frac{f_0(z)}{a^2} dz - \int_0^x dw \int_0^w \frac{f_0(z)}{a^2} dz.$$

Posebno, za  $f_0 = \text{const}$ , imamo

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l} + \frac{f_0}{2a^2}(lx - x^2).$$

Funkcija  $v(x, t)$  zadovoljava homogenu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

s homogenim rubnim uvjetima  $v(0, t) = v(l, t) = 0$ , i početnim uvjetima

$$v(x, 0) = u(x, 0) - \bar{u}(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = \psi(x).$$

Ovim možemo objasniti zašto pri izvodu jednadžbe nismo uzimali u obzir djelovanje sile teže. Dovoljno je promatrati otklon od stacionarnog stanja.

## 3.6 Prisilne oscilacije žice

Promatramo jednadžbu (inicijalno-rubni problem)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x, t) \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x). \end{array} \right.$$

Ovdje je  $p(x, t) = \frac{f(x, t)}{\rho}$ . Rješenje homogene jednadžbe dano je formulom

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ E_n \cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right) + F_n \sin\left(\frac{an\pi}{l}t\right) \right] \sin \frac{n\pi}{l}x.$$

Rješenje nehomogene jednadžbe tražimo u obliku

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{G}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + p(x, t),$$

tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \ddot{G}_n(t) + a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 G_n(t) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = p(x, t)$$

Razvijemo li  $p(x, t)$  u Fourierov red (sinusni) dobivamo

$$p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

iz čega je

$$A_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l p(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx.$$

To nam daje običnu diferencijalnu jednadžbu za  $G_n(t)$ :

$$\ddot{G}_n(t) + a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 G_n(t) = A_n(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

Iz početnih uvjeta  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$  slijedi

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(0) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad \text{tj. } G_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} G'_n(0) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad \text{tj. } G'_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx.$$

Ovo su početni uvjeti običnih diferencijalnih jednadžbi za  $G_n(t)$ . Dakle

$$\begin{cases} \ddot{G}_n(t) + a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 G_n(t) = A_n(t) \\ G_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \\ \dot{G}_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx. \end{cases}$$

**Primjer 3.4**  $f(x, t) = A \rho \sin wt \implies p(x, t) = A \sin wt$ .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \sin wt.$$

Riješimo gornju jednadžbu opisanom metodom

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$\ddot{G}_n(t) + a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 G_n(t) = A_n(t),$$

pri čemu je  $A_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l A \sin wt \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$ . Integriranjem po  $x$  dobijemo

$A_n(t) = \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \sin wt$ . Dakle je

$$\ddot{G}_n(t) + \underbrace{a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}_{w_n^2} G_n(t) = \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \sin wt,$$

pa rješavamo problem

$$\left. \begin{aligned} \ddot{G}_n(t) + w_n^2 G_n(t) &= \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \sin wt \\ G_n(0) &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \\ \dot{G}_n(0) &= \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx. \end{aligned} \right\}$$

Gornji problem je nehomogena obična diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima za funkciju  $G_n(t)$ . Rješenje pripadne homogene jednadžbe

$$\ddot{G}_n(t) + w_n^2 G_n(t) = 0$$

je oblika

$$C_n \cos w_n t + D_n \sin w_n t.$$

Za  $w \neq w_n$  partikularno rješenje je istog oblika kao i funkcija smetnje,

$$\frac{2A(1 - \cos(n\pi))}{n\pi(w_n^2 - w^2)} \sin wt,$$

pa je

$$G_n(t) = [C_n \cos w_n t + D_n \sin w_n t] + \frac{2A(1 - \cos(n\pi))}{n\pi(w_n^2 - w^2)} \sin wt.$$

Konstante  $C_n$  i  $D_n$  dobijemo iz početnih uvjeta. Za  $w = w_n$  partikularno rješenje tražimo u obliku umnoška vremena i funkcije smetnje,  $t \sin wt$ . Tada je

$$G_n(t) = [C_n \cos wt + D_n \sin wt] - \frac{A}{n\pi w} (1 - \cos(n\pi)) t \cos wt.$$

Amplituda ovoga neograničeno raste s vremenom, imamo pojavu **rezonancije**. Žica će puknuti.

### 3.7 Veza Fourierove metode i D'Alembertove formule

Vratimo se na trenutak na jednadžbu i rubne uvjete

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u(l, t) = 0. \end{cases}$$

Ako su početni uvjeti zadani s  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ , onda Fourierova metoda daje

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

gdje su  $C_n$  Fourierovi koeficijenti of  $\varphi(x)$ . Koristeći elementarnu trigonometrijsku transformaciju

$$\cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \frac{1}{2} \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x + at)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x - at)\right) \right]$$

dobijemo

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x - at)\right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x + at)\right).$$

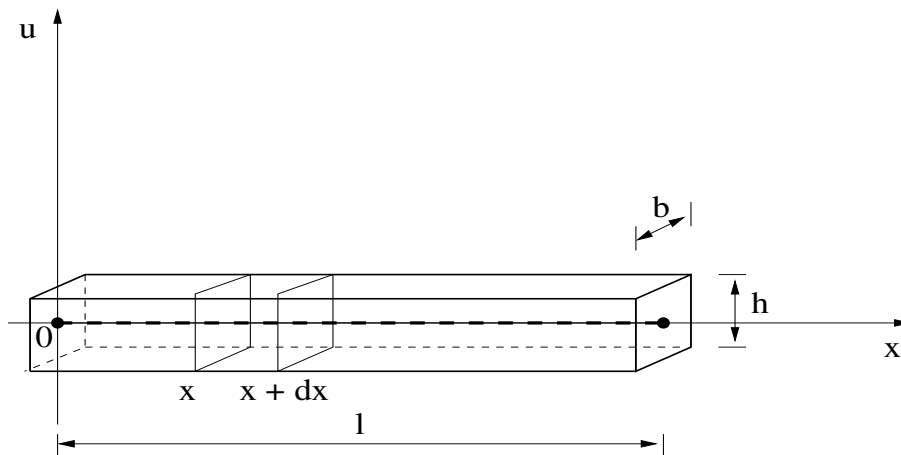
No  $E_n$  su koeficijenti u Fourierovom razvoju početnog uvjeta  $\varphi(x)$ ! Dakle, D'Alembertova formula za  $\psi(x) = 0$  je

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)].$$

### 3.8 Jednadžba oscilacije štapa (grede)

Većina jednadžbi koje promatramo u ovom kolegiju su 2. reda. U mehanici se, međutim, pojavljuju i modeli s jednadžbama viših redova. Najjednostavniji primjer takvog modela je onaj koji opisuje poprečne oscilacije štapa (grede).

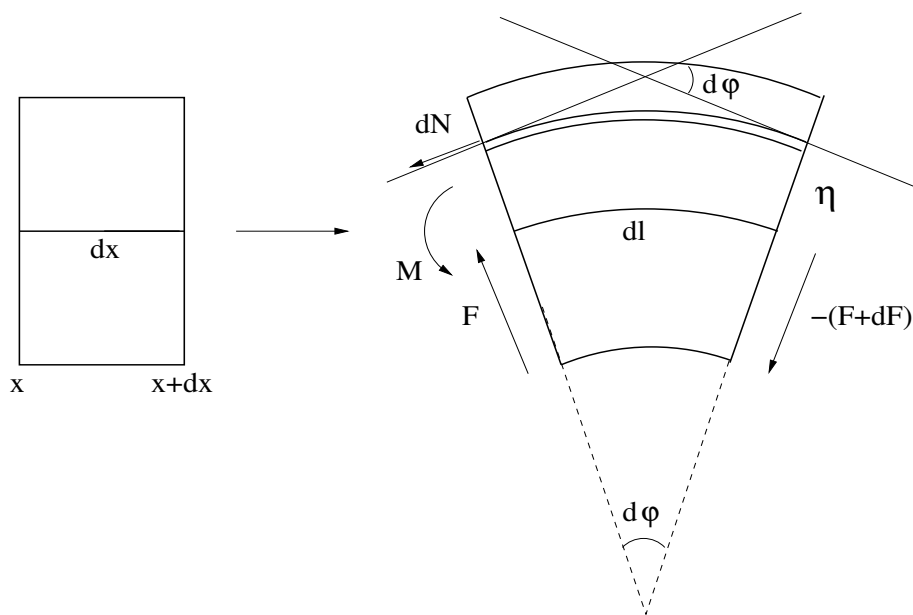
Promatramo pravokutni štap duljine  $l$ , širine  $b$  i visine  $h$ . U nedeformiranom položaju njegova os se podudara sa segmentom  $[0, l]$  na osi  $x$ . Zanima nas  $u(x, t)$ , funkcija koja opisuje progib točke koja u nedeformiranom položaju ima koordinatu  $x \in [0, l]$ .



Slika 3.7: Greda u nedeformiranom položaju.

Promatramo poprečne oscilacije. Smatramo da se sve odvija u  $(x, u)$ -ravnini.

Pogledajmo mali komadić štapa duljine  $dx$ . On je ograničen paralelnim pravokutnicima.



Slika 3.8: Deformacija malog elementa grede.

Poslije deformacije ti pravokutnici više nisu paralelni već zatvaraju kut  $d\varphi$ . Ako su deformacije male i ako se duljina osi štapa ne mijenja ( $dl = dx$ ), imamo

$$d\varphi = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}|_x - \frac{\partial u}{\partial x}|_{x+dx}}_{\text{kutovi s okomitim kracima}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx,$$

gdje smo koristili činjenicu da je za male kuteve  $\alpha$  približno  $\text{tg } \alpha \approx \alpha$ .

Sloj materijala na udaljenosti  $\eta$  od osi štapa  $u = 0$  produljuje se za  $\eta d\varphi$ . Po Hookovom zakonu, sila duž tog sloja je

$$dN = Eb d\eta \frac{\eta d\varphi}{dx} = Eb \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \eta d\eta,$$

gdje  $E$  označava modul elastičnosti materijala štapa.

Sada je ukupni zakretni moment u presjeku  $x$  jednak

$$M = -E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2 d\eta = -E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} J,$$

gdje je

$$J = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2 d\eta = \frac{bh^3}{12}$$

moment inercije pravokutnog presjeka u odnosu na horizontalnu os.

Ako s  $M(x)$  označimo moment koji djeluje na lijevu stranu štapa u presjeku  $x$ , onda u presjeku  $x + dx$  djeluje moment  $-(M + dM)$ . Razlika tih momenata,  $-dM$ , mora se uravnotežiti momentom tangencijalne sile,  $-F dx$ :

$$dM = F dx,$$

odakle je sama tangencijalna sila dana s

$$F = \frac{dM}{dx} = \frac{\partial M}{\partial x} = -EJ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

Na element koji promatramo djeluje sila  $dF$ , tj.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx = -EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} dx.$$

S druge strane, na element djeluje sila  $\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$ , gdje je  $S$  površina poprečnog presjeka u  $x$ . Kako te sile moraju biti jednake, slijedi

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4},$$

odnosno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{EJ}{\rho S} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

Ako označimo s  $a^2 = \frac{EJ}{\rho S}$ , dobijemo jednadžbu titranja štapa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \quad (3.5)$$

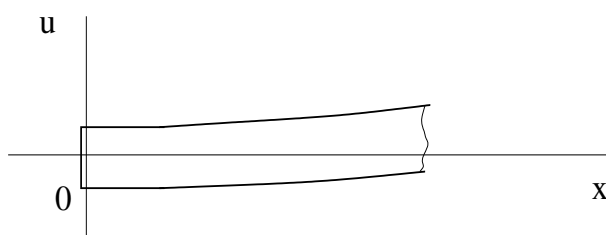
Ovoj jednadžbi treba još dodati početne i rubne uvjete.

Početni uvjeti su istog tipa kao za žicu, tj. zadani su početni položaj i početna brzina

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned}$$

Rubni uvjeti su malo složeniji. Na svakom kraju moramo zadati dvije vrijednosti (jer imamo jednažbu 4. reda), pa postoje tri različita tipa rubnih uvjeta

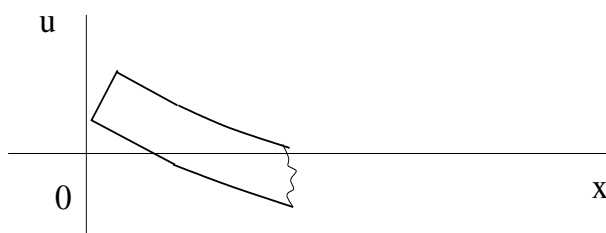
(i) Učvršćen/upet kraj:



Slika 3.9: Učvršćeni lijevi kraj grede.

- $u = 0$ : nema progiba
- $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ : nema rotacije oko osi presjeka.

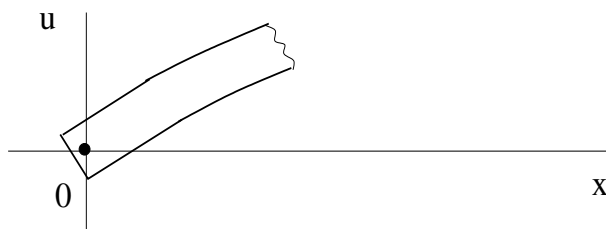
(ii) Slobodan kraj:



Slika 3.10: Slobodni lijevi kraj.

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ : nema momenta
- $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$ : nema sile.

(iii) Zglob/šarnir:



Slika 3.11: Zglob na lijevom kraju grede.



- $u = 0$ : nema progiba
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ : nema momenta.

### 3.9 Fourierova metoda za oscilacije štapa

Pretpostavimo da je rješenje oblika

$$u(x, t) = Y(x)T(t).$$

Uvrštavanjem u jednadžbu (3.5) dobijemo

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\frac{Y^{(4)}(x)}{Y(x)} = -\lambda^2.$$

Znači da za  $Y$  dobijemo običnu diferencijalnu jednadžbu 4. reda

$$Y^{(4)} - \lambda^2 Y = 0.$$

Uzmemo li učvršćen lijevi kraj,  $Y(0) = Y'(0) = 0$ , i slobodan desni,  $Y''(l) = Y'''(l) = 0$ , dobijemo da je rješenje gornje jednadžbe

$$Y(x) = A \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} x + B \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} x + C \cos \sqrt{\lambda} x + D \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Iz uvjeta na lijevom kraju imamo  $C = -A$ ,  $D = -B$ , pa je

$$Y(x) = A(\operatorname{ch} \sqrt{\lambda} x - \cos \sqrt{\lambda} x) + B(\operatorname{sh} \sqrt{\lambda} x - \sin \sqrt{\lambda} x).$$

Rubni uvjeti na desnom kraju daju

$$\begin{aligned} A(\operatorname{ch} \sqrt{\lambda} l + \cos \sqrt{\lambda} l) + B(\operatorname{sh} \sqrt{\lambda} l + \sin \sqrt{\lambda} l) &= 0 \\ A(\operatorname{sh} \sqrt{\lambda} l - \sin \sqrt{\lambda} l) + B(\operatorname{ch} \sqrt{\lambda} l + \cos \sqrt{\lambda} l) &= 0. \end{aligned}$$

Ovaj homogeni sustav ima netrivialno rješenje za  $A$  i  $B$  ako mu je determinanta jednaka nuli. To vodi na transcendentnu jednadžbu

$$\underbrace{\operatorname{sh}^2 \sqrt{\lambda} l - \sin^2 \sqrt{\lambda} l}_{=-1} = \operatorname{ch}^2 \sqrt{\lambda} l + 2 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} l \cos \sqrt{\lambda} l + \cos^2 \sqrt{\lambda} l - \underbrace{(\sin^2 \sqrt{\lambda} l + \cos^2 \sqrt{\lambda} l)}_{=1} = 2 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} l \cos \sqrt{\lambda} l,$$

iz čega slijedi

$$\operatorname{ch} \mu \cos \mu = -1 \quad \text{za} \quad \mu = \sqrt{\lambda} l.$$

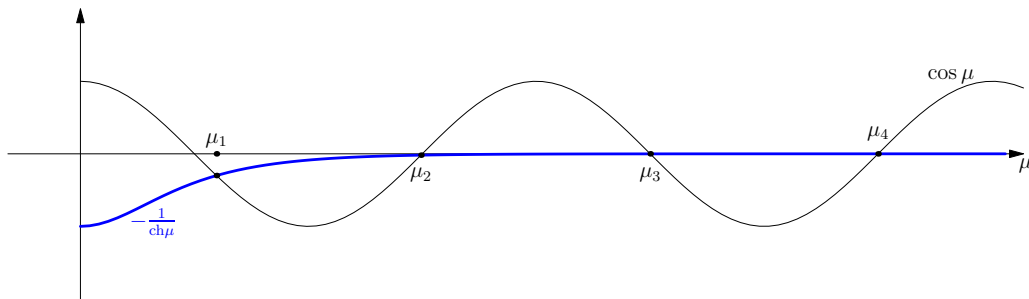
Rješenja gornje jednačbe su:

$$\mu_1 = 1.875, \quad \mu_2 = 4.694, \quad \mu_3 = 7.854, \quad \mu_4 = 10.995, \dots$$

Općenito se dobije

$$\mu_n \approx \frac{2n-1}{2} \pi.$$

(Zašto?) To nam daje točnost na tri decimalna mjesta za  $n \geq 3$  i točnost na šest decimalnih mjesta za  $n \geq 7$ .



Slika 3.12: Presjek funkcija  $\cos \mu$  i  $-\frac{1}{\operatorname{ch} \mu}$ .

Slijedi

$$\mu_n = \sqrt{\lambda_n} l \implies \lambda_n = \frac{\mu_n^2}{l^2}, \quad \lambda_n^2 = \frac{\mu_n^4}{l^4}.$$

Za  $T$  pak dobijemo običnu diferencijalnu jednačbu 2. reda

$$T'' + a^2 \lambda_n^2 T = 0,$$

iz čega slijedi da je

$$T_n(t) = \alpha_n \cos 2\pi \nu_n t + \beta_n \sin 2\pi \nu_n t,$$

s frekvencijom

$$\nu_n = \frac{a \lambda_n}{2\pi} = \frac{\lambda_n}{2\pi} \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}} = \frac{\mu_n^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}}.$$

Frekvencije  $\nu_n$  odnose se kao kvadrati  $\mu_n$ , tj.

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \approx 6.267, \quad \frac{\nu_3}{\nu_1} = \frac{\mu_3^2}{\mu_1^2} \approx 17.548.$$

Ako je  $\nu_1 = 440 \text{ Hz}$ , onda je  $\nu_2 = 2757.5 \text{ Hz}$ ,  $\nu_3 = 7721.1 \text{ Hz}$ . Ovo opisuje ponašanje akustičke vilice: s početka se čuje lagano metalni prizvuk, no viši harmonici trnu brzo (zašto?) i ostaje čisti osnovni ton.

Na jednadžbe 4. reda vode i problemi titranja ploča, brodova i drugi.

Pogledajmo sad kako izgleda rješenje ako uzmemo da su i na lijevom i na desnom kraju zglobovi, odnosno

$$\begin{aligned} Y(0) &= Y''(0) = 0, \\ Y(l) &= Y''(l) = 0. \end{aligned}$$

Opet je rješenje jednadžbe oblika

$$Y(x) = A \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} x + B \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} x + C \cos \sqrt{\lambda} x + D \sin \sqrt{\lambda} x,$$

pa je

$$Y''(x) = \lambda A \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} x + \lambda B \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} x - \lambda C \cos \sqrt{\lambda} x - \lambda D \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Sada iz uvjeta na lijevom kraju dobijemo homogeni sustav

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ \lambda A - \lambda C &= 0, \end{aligned}$$

čije je rješenje  $A = C = 0$ . Iz uvjeta na desnom kraju dobijemo također homogeni sustav

$$\begin{aligned} B \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} l + D \sin \sqrt{\lambda} l &= 0 \\ \lambda B \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} l - \lambda D \sin \sqrt{\lambda} l &= 0, \end{aligned}$$

čije je rješenje

$$B = 0, \quad D \sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

Iz druge jednadžbe slijedi

$$\sqrt{\lambda} l = n\pi \implies \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2},$$

pa je

$$Y_n(x) = D_n \sin \left( \frac{n\pi}{l} x \right).$$

S druge strane,  $T_n$  je opet rješenje jednadžbe

$$T'' + a^2 \lambda_n^2 T = 0,$$

odnosno

$$T_n(t) = \alpha_n \cos\left(\frac{an^2\pi^2}{l^2}t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{an^2\pi^2}{l^2}t\right).$$

Na kraju dobijemo

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) T_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos\left(\frac{an^2\pi^2}{l^2}t\right) + B_n \sin\left(\frac{an^2\pi^2}{l^2}t\right) \right] \sin \frac{n\pi}{l} x, \end{aligned}$$

gdje je  $A_n = \alpha_n D_n$  i  $B_n = \beta_n D_n$ .

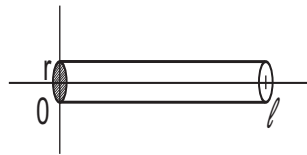
Zašto smo za rubne uvjete ovog tipa dobili točne vrijednosti za frekvencije? Na što vas ovo podsjeća?

# Poglavlje 4

## Jednadžba provođenja topline

### 4.1 Izvod jednadžbe provođenja topline

Promatramo štap duljine  $l$ , kružnog poprečnog presjeka polumjera  $r \ll l$ . Smatramo da mu je plašt izoliran, tj. da kroz plašt nema izmjene topline s okolinom. Smatramo



Slika 4.1: Valjkasti štap s izoliranim plaštom.

da je za dani  $x$  temperatura cijelog poprečnog presjeka s apscisom  $x$  ista (za isti  $t$ ). Promatramo funkciju  $u(x, t)$  koja predstavlja temperaturu štapa na poprečnom presjeku s apscisom  $x$  u trenutku  $t$ . Temperature rubova štapa su konstantne,

$$u(0, t) = u_1, \quad u(l, t) = u_2, \quad u_1, u_2 \text{ konstante.}$$

Bitna nam je veličina  $q(x, t)$ , gustoća toka količine topline. Definiramo ju kao količinu topline koja u jedinici vremena prođe kroz poprečni presjek štapa jedinične površine zdesna na lijevo. Uz tako definirani  $q(x, t)$ , ukupna količina topline koja u vremenskom intervalu  $[t_1, t_2]$  prođe kroz poprečni presjek s apscisom  $x$  površine  $S$  zdesna na lijevo (dakle u smjeru  $-x$ ) jednaka je

$$Q = S \int_{t_1}^{t_2} q(x, t) dt.$$

Gledamo komad štapa  $[x_1, x_2]$ . Ukupna promjena količine topline komada  $[x_1, x_2]$  u vremenu  $[t_1, t_2]$  kroz rubove je

$$Q_1 - Q_2 = S \int_{t_1}^{t_2} q(x_1, t) dt - S \int_{t_1}^{t_2} q(x_2, t) dt.$$

Zbog izoliranosti plašta, toplina teče samo duž štapa,  $\vec{q}(x, t) = q(x, t)\vec{i}$ , tj. tok (fluks) je jednodimenzionalan. Zakon ponašanja

$$q(x, t) = -K(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

zovemo i Fourierov zakon. Fourierov se zakon empirički potvrđuje opservacijom da toplina teče s mjesta više prema mjestu niže temperature.

Tok je proporcionalan razlici temperatura, tj. temperaturnom gradijentu. Konstanta proporcionalnosti  $K(x)$  je **koeficijent toplinske vodljivosti** tvari od koje je štap napravljen (na mjestu  $x$ ). Predznak  $-$  znači da toplina teče od mjesta s višom prema mjestu s nižom temperaturom. Mjerna jedinica koeficijenta toplinske vodljivosti dana je s

$$[K] = \frac{\text{cal}}{m \cdot s \cdot ^\circ C} = \frac{\text{cal} \cdot m}{m^2 \cdot s \cdot ^\circ C}.$$

Uvrštavanjem zakona ponašanja dobivamo

$$Q_1 = -S \int_{t_1}^{t_2} K \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) dt, \quad Q_2 = -S \int_{t_1}^{t_2} K \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t) dt.$$

Temeljno načelo je zakon očuvanja topline (energije) koji glasi: Ukupna promjena količine topline na  $[x_1, x_2]$  jednaka je zbroju količine topline koja je prošla kroz granicu (rubove) i količine topline stvorene u  $[x_1, x_2]$ .

Toplina stvorena u  $(x, t)$  je jakost izvora/ponora. Opisana je funkcijom  $f(x, t)$ . Dakle,  $f(x, t)$  je jakost toplinskog izvora u štapu jediničnog presjeka na mjestu  $x$  u trenutku  $t$ . Ukupna količina topline generirane u komadu  $[x_1, x_2]$  u vremenu  $[t_1, t_2]$  dana je izrazom

$$Q_f = S \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx dt.$$

$$\begin{aligned} Q_1 - Q_2 &= S \int_{t_1}^{t_2} \left[ K \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t) - K \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) \right] dt \\ &= SK \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Dakle, ukupna promjena topline komada  $[x_1, x_2]$  u vremenu  $[t_1, t_2]$  dana je kao

$$Q_1 - Q_2 + Q_f.$$

Ovo možemo sve izraziti u terminima  $u(x, t)$ . Kako u terminima  $u(x, t)$  možemo izraziti ukupnu promjenu topline?

**Specifična toplina** tvari (gradiva) štapa je količina topline koja je potrebna da se promijeni temperatura jedinice mase za jedan stupanj (jedinicu temperature). Označavamo ju s  $C$ , a mjernu jedinicu označavamo s  $\left[ \frac{\text{cal}}{\text{kg} \cdot ^\circ \text{C}} \right]$ .

$$\left. \begin{aligned} C [u(x, t_1) - u(x, t_2)] &= C \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dt \\ \text{Masa komada } [x_1, x_2] \text{ je } S \int_{x_1}^{x_2} \varrho(x) dx \end{aligned} \right\} Q = SC \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \varrho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx dt$$

$$Q = Q_1 - Q_2 + Q_f$$

$$SC\varrho \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dt dx = S \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) \right] dt dx.$$

Integralni zakon vođenja topline kroz štap sada glasi

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ C\varrho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - f(x, t) \right] dt dx = 0.$$

Kako to mora vrijediti za sve komade  $[x_1, x_2]$  i vremena  $[t_1, t_2]$  imamo

$$C\varrho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t).$$

Dijeljenjem s  $C\varrho$  (smijemo jer je to pozitivno) dobijemo jednadžbu vođenja topline kroz štap

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + p(x, t),$$

gdje su  $a^2 = \frac{K}{C\varrho}$ ,  $p(x, t) = \frac{f(x, t)}{C\varrho}$ .

Početni uvjet:  $u(x, 0) = \varphi(x)$ .

Rubni uvjeti:

- Zadana temperatura na rubovima: Može biti funkcija vremena, a može biti i konstantna. Posebno, ako je jednaka nuli, imamo homogeni rubni uvjet.

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \alpha(t), & u(l, t) &= \beta(t) \\ &= \alpha, & &= \beta \\ &= 0, & &= 0. \end{aligned}$$

- Zadan tok topline:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \gamma(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \delta(t).$$

Za  $\gamma(t) = 0$  imamo **izolirani** rub.

Ako  $u(x, t)$  ne ovisi o vremenu imamo **stacionarno** provođenje topline kroz štap. Uz zadanu temperaturu na rubovima, problem je opisan s

$$\left. \begin{aligned} u''(x) + \frac{1}{a^2}p(x) &= 0, \\ u(0) = \alpha, u(l) &= \beta \end{aligned} \right\}$$

## 4.2 Fourierova metoda za jednadžbu provođenja topline

Jednadžba vođenja topline kroz štap je parabolická jednadžba,  $ac - b^2 = 0$ . Pretpostavimo rješenje u obliku

$$u(x, t) = F(x)G(t).$$

Uvrštavanjem u jednadžbu dobijemo  $F(x)\dot{G}(t) = a^2F''(x)G(t)$ . Prema tome,

$$\frac{\dot{G}(t)}{a^2G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k = -\mu^2.$$

Konstanta  $k$  je negativna jer bi u protivnom rješenja diferencijalnih jednadžbi

$$F''(x) + \mu^2F(x) = 0$$

$$\dot{G}(t) + a^2\mu^2G(t) = 0$$

eksponencijalno rasla, što je fizikalno nemoguće. Za geometrijski rubni uvjet  $u(0, t) = u(l, t) = 0$  imamo

$$F(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x,$$

gdje iz  $F(0)G(t) = 0$  slijedi  $A = 0$ . Iz  $F(l)G(t) = 0$  slijedi ( $B$  mora biti  $\neq 0$ )  $\sin \mu l = 0$ , tj.  $\mu = \frac{n\pi}{l}$ ,  $\forall n$ . Dakle je

$$F_n(x) = B_n \sin \left( \frac{n\pi}{l} x \right).$$



Za rubni uvjet  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$  (izolirani rubovi) imamo  $F'(0)G(t) = 0$  i  $F'(l)G(t) = 0$ , pa je  $F'(0) = F'(l) = 0$ . Sada imamo

$$\begin{aligned} F'(x) &= -A\mu \sin \mu x + B\mu \cos \mu x \\ F'(0) &= 0 \implies B = 0 \\ F'(l) &= 0 \implies \sin \mu l = 0 \implies \mu = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ F_n(x) &= A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Dakle, svojstvene funkcije ovise o rubnim uvjetima. Za  $G(t)$  vrijedi

$$\begin{aligned} \dot{G}(t) + a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 G(t) &= 0 \\ \dot{G}(t) &= -a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 G(t) \implies G_n(t) = C_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Sada, u ovisnosti o tipu rubnih uvjeta, imamo

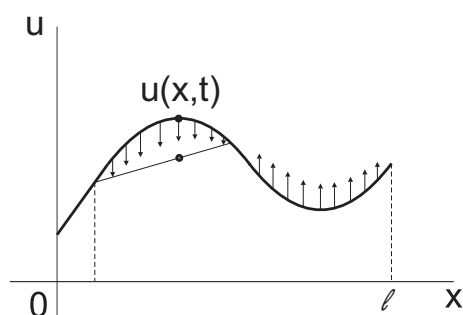
$$\left. \begin{aligned} u_n(x, t) &= D_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \\ u_n(x, t) &= E_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \end{aligned} \right\} u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t),$$

gdje je  $D_n = B_n C_n$  i  $E_n = A_n C_n$ . Konstante  $D_n$  ili  $E_n$  dobijemo iz početnog uvjeta  $u(x, 0) = \varphi(x)$ :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \underbrace{e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 0}}_1 = \varphi(x) \implies D_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \\ u(x, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \varphi(x) \implies \begin{cases} E_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx \\ E_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx. \end{cases} \end{aligned}$$

Jednadžba vođenja topline opisuje i proces difuzije. U tom slučaju  $u(x, t)$  ima značenje koncentracije sredstva koje difundira na mjestu  $x$  u trenutku  $t$ .

Slijedi intuitivna interpretacija jednadžbe provođenja/difuzije.



Slika 4.2: Temperaturni profil i smjer promjene temperature.

Druga derivacija, odnosno njen predznak, daju informaciju o odnosu vrijednosti funkcije u nekoj točki i srednjoj vrijednosti funkcije u nekim dvjema bliskim točkama. Ako je druga derivacija negativna, graf funkcije je iznad spojnice, vrijednost funkcije u točki je veća od srednje vrijednosti na nekoj okolini. Ako je druga derivacija pozitivna, vrijednost funkcije u točki je manja od srednje vrijednosti na nekoj okolini. Gledamo li na vrijednost funkcije kao na temperaturu ili koncentraciju, jednadžba vođenja nam opisuje težnju ujednačavanja temperature/koncentracije.

Ako pláš nije izoliran, imamo jednadžbu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta(u - u_0),$$

pri čemu je  $u_0$  temperatura okolne sredine. Ako je koeficijent  $\beta$  velik u usporedbi s  $a^2$ , uzdužni tok topline će biti mali u usporedbi s  $\beta(u - u_0)$ , jednadžba postaje  $\frac{\partial u}{\partial t} = -\beta(u - u_0)$ . U kemiji jednadžba  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta(u - u_0)$  opisuje promjenu količine tvari u ovisnosti o difuziji ( $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ) i o nastanku ( $\beta < 0$ ) ili raspadu ( $\beta > 0$ ) tvari u kemijskoj reakciji koja ovisi o razlici koncentracija  $u - u_0$ .

Ako osim difuzije imamo i brzinu sredstva, imamo **konvektivnu difuziju**,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{difuzija}} - \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{konvekcija}}.$$

Paraboličke jednadžbe su asimetrične u vremenu: zamjenom  $t \rightarrow -t$  dobijemo  $\frac{\partial u}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . Valna jednadžba je simetrična u vremenu. Paraboličke jednadžbe opisuju ireverzibilne procese, a hiperboličke jednadžbe opisuju reverzibilne procese. Ne znamo pretpovijest paraboličkog procesa.

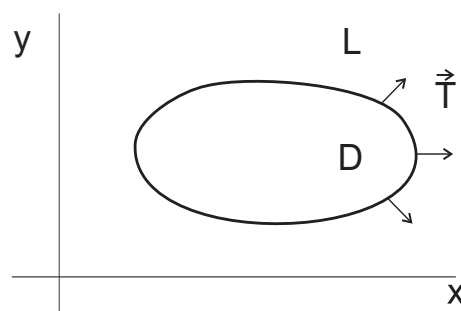
# Poglavlje 5

## Dvodimenzionalni problemi

Svi do sada promatrani modeli bili su jednodimenzionalni, u smislu da smo promatrali samo jednu prostornu varijablu. Uvođenjem više prostornih varijabli dobivaju se realističniji, ali i složeniji modeli. Dvodimenzionalnim modelima koje promatramo u ovom poglavlju mogu se opisati brojni fizikalni problemi, od ravnoteže i oscilacija membrane do problema optjecanja raznih profila.

### 5.1 Izvod jednadžbe za poprečne oscilacije membrane

Promatramo tanku membranu čije je nedeformirano stanje opisano područjem  $D$  u ravnini.

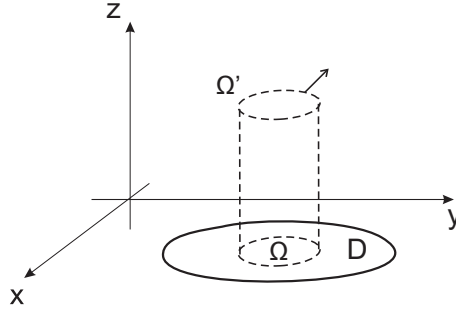


Slika 5.1: Nedeformirana membrana.

Rub područja  $D$  je krivulja  $L = \partial D$ . Pod djelovanjem vanjske sile i unutarnjih sila

membrana se deformira. Deformaciju opisujemo funkcijom  $u(x, y, t)$  - progib membrane na mjestu  $(x, y)$  u trenutku  $t$ .

Promatramo komad  $\Omega \subset D$  omeđen krivuljom  $l = \partial\Omega$ .



Slika 5.2: Element deformirane membrane i njegova projekcija.

Komad  $\Omega$  se deformira u komad  $\Omega'$  omeđen krivuljom  $l' = \partial\Omega'$ . Normala  $\vec{N}$  na  $\Omega'$  zadana je kao  $\vec{N} = -\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}$ . Jedinični vektor normale je  $\vec{N}_0 = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ . Gustoća membrane opisana je funkcijom  $\rho(x, y)$ . Membrana je napeta silom  $\vec{T}$  koja djeluje na rubu membrane u smjeru vanjske normale na  $\partial D$ . Uslijed djelovanja napetosti dolazi do unutarnjih kontaktnih sila. Unutarnja kontaktna sila zadana je linijskom gustoćom  $\int T ds$ . Ona u svim smjerovima i točkama membrane ima isti intenzitet.

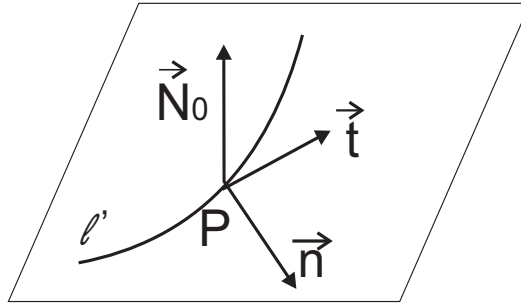
Vanjska sila okomita na membranu zadaje se gustoćom  $f(x, y, t)$  (gustoća je sila po jedinici površine). Pretpostavljamo da je deformacija mala,  $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$ ,  $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \ll 1$ . Uz tu pretpostavku moći ćemo plošne integrale prve vrste po deformiranom položaju  $\Omega'$  zamijeniti dvostrukim integralom po nedeformiranom dijelu područja  $\Omega$ :

$$\mu(\Omega') = \iint_{\Omega'} dS = \iint_{\Omega} |\vec{N}| dx dy = \iint_{\Omega} \underbrace{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}_{\approx 1} dx dy \approx \mu(\Omega).$$

Sada je ukupna vanjska sila na komad  $\Omega'$  dana s

$$\iint_{\Omega'} f(x, y, t) dS' \approx \iint_{\Omega} f(x, y, t) dx dy.$$

Promatramo točku  $P \in l' = \partial\Omega'$ . U njoj imaju hvatište vektori  $\vec{N}_0$ ,  $\vec{t}$  i  $\vec{n}$ .


 Slika 5.3: Unutarnja kontaktna sila na luku  $l'$ .

Kontaktna sila  $\vec{T}$  u točki  $P$  leži u ravnini  $(\vec{t}, \vec{n})$ , okomita je na  $\vec{N}_0$  i djeluje u smjeru  $\vec{n}$ , tj.  $\vec{T} = T\vec{n}$ . Vektor  $\vec{n}$  je okomit i na  $\vec{t}$  i na  $\vec{N}_0$ , pa je  $\vec{n} = -(\vec{N}_0 \times \vec{t}) = \vec{t} \times \vec{N}_0$ . Zanima nas ukupna kontaktna sila na komad  $\Omega'$ , i to njena poprečna komponenta. Zanima nas, dakle,  $\vec{T}_z = (T\vec{n})_z$ . To je krivuljni integral prve vrste po  $l' = \partial\Omega'$  od  $(T\vec{n})_z ds$ :

$$(\vec{T})_z = \oint_{l'} (T\vec{n})_z ds = T \oint_{l'} (\vec{t} \times \vec{N}_0)_z ds,$$

gdje je

$$\vec{t} \times \vec{N}_0 = -(\vec{N}_0 \times \vec{t}) = -(\vec{N}_0 \times d\vec{r}) = - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} & 1 \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}.$$

Zanima nas samo  $z$  komponenta, tj. komponenta u smjeru  $\vec{k}$ .

$$(\vec{N}_0 \times d\vec{r})_z = \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right).$$

Prisjetimo se da se krivuljni integral druge vrste za vektorsko polje  $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$  računa po formuli

$$\oint_{l'} (a_x dx + a_y dy) = \oint_{l'} \vec{a} d\vec{r}.$$

Prisjetimo se, također, i Greenove formule

$$\oint_l \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right] dx dy.$$

Uvrstimo li sada  $\vec{a} = T \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial x} \vec{j} \right)$ , dobivamo

$$\begin{aligned} (\vec{T})_z &= T \oint_{l'} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) = T \oint_l \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) = (\text{Green}) \\ &= T \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ &= T \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Sada iz zakona očuvanja količine gibanja

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Omega'} \left[ \rho(x, y) \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) \right] dS = \iint_{\Omega'} \left[ (\vec{T})_z + f(x, y, t) \right] dS$$

zamjenom plošnih integrala dvostrukima i ulaskom vremenske derivacije pod integral dobivamo

$$\iint_{\Omega} \left[ \rho(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t) - T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) \right) - f(x, y, t) \right] dx dy = 0.$$

Ovo je integralni oblik jednadžbe poprečnih oscilacija membrane. Kako to mora vrijediti za sve  $\Omega \subset D$ , slijedi

$$\begin{aligned} \rho(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad \forall (x, y) \in D, \quad \text{ili, kraće,} \\ \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f. \end{aligned}$$

Podijelimo li drugu jednakost s  $\rho$  dobivamo dvodimenzionalnu valnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + p.$$

Za stacionarni slučaj  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ , tj.  $u(x, y, t) = u(x, y)$ , vrijedi

$$-a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = p(x, y).$$

Kako je  $a^2 = \frac{T}{\rho}$ ,  $p(x, y) = \frac{f(x, y)}{\rho}$ , imamo jednadžbu ravnoteže membrane

$$-T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f,$$

odnosno

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = g(x, y),$$

gdje je  $g(x, y) = \frac{f(x, y)}{T}$ . To je jednadžba eliptičkog tipa. U slučaju kada je  $g = 0$  imamo Laplaceovu jednadžbu, a za  $g \neq 0$  Poissonovu jednadžbu. Uz valnu jednadžbu nam trebaju početni uvjeti

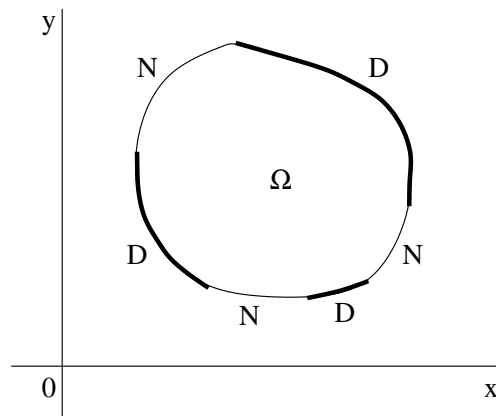
$$\left. \begin{aligned} u(x, y, 0) &= \varphi(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) &= \psi(x, y) \end{aligned} \right\}$$

i rubni uvjeti

$$\left. \begin{aligned} u|_{\partial D} &= \alpha(t) && \text{- Dirichletov} \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\partial D} &= \beta(t) && \text{- Neumannov} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} u|_{\partial D} &= 0 && \text{- učvršćeni} \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\partial D} &= 0 && \text{- slobodni.} \end{aligned} \right\}$$

Često se javljaju situacije u kojima se na rubu područja  $\Omega$  javljaju oba tipa rubnih uvjeta. Primjer je pokazan na slici 5.4.

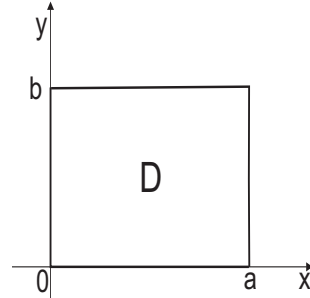


Slika 5.4: Područje s kombinacijom Dirichletovih i Neumanovih rubnih uvjeta

Dijelovi granice na kojima su zadani Dirichletovi i Neumanovi rubni uvjeti označeni su s  $D$  i  $N$ , redom. Primijetimo da skupovi  $D$  i  $N$  ne moraju biti povezani, no moraju biti međusobno disjunktni i njihova unija mora biti cijeli rub područja  $\Omega$ , tj.

$$D \cup N = \partial\Omega \quad \text{i} \quad D \cap N = \emptyset.$$

## 5.2 Fourierova metoda za poprečne oscilacije pravokutne membrane



Slika 5.5: Pravokutna membrana.

Promotrimo inicijalno-rubni problem

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) && \text{na } D \\ u|_{\partial D} &= 0 \\ u(x, y, 0) &= \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y), \end{aligned} \right\}$$

koji opisuje poprečne oscilacije pravokutne membrane prikazane gornjom slikom. Najprije separiramo prostorne varijable od vremenske:

$$u(x, y, t) = F(x, y)G(t), \quad F(x, y) = H(x)Q(y),$$

$$F\ddot{G} = c^2 \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) G,$$

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{\left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)}{F} = k = -\mu^2 \implies \begin{cases} \ddot{G} + c^2 \mu^2 G = 0 \\ \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \mu^2 F = 0 \end{cases}$$

Jednadžba

$$\left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \mu^2 F = 0$$

se zove **Helmholtzova jednadžba**. Konstanta  $k$  mora biti negativna jer bi u protivnom progib eksponencijalno rastao s vremenom, što nema fizikalno objašnjenje.



Uvrstimo  $F = H(x)Q(y)$  u Helmholtzovu jednadžbu:

$$\begin{aligned} H''Q + HQ'' + \mu^2HQ &= 0 \quad / : HQ \\ \frac{H''}{H} &= -\frac{1}{Q}(Q'' + \mu^2Q) = k = -\nu^2 \\ H'' + \nu^2H &= 0 \\ Q'' + \underbrace{(\mu^2 - \nu^2)}_{p^2}Q &= 0, \quad \text{tj. } Q'' + p^2Q = 0. \end{aligned}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} \ddot{G} + c^2\mu^2G &= 0 \implies G(t) = A \cos c\mu t + B \sin c\mu t, \\ H'' + \nu^2H &= 0 \implies H(x) = C \cos \nu x + D \sin \nu x, \\ Q'' + p^2Q &= 0 \implies Q(y) = E \cos py + F \sin py. \end{aligned}$$

Znamo da

$$H(0) = H(a) = 0 \implies C = 0 \quad \text{i} \quad D \sin \nu a = 0.$$

Budući da su  $D, F \neq 0$ , imamo

$$Q(0) = Q(b) = 0 \implies E = 0 \quad \text{i} \quad F \sin pb = 0.$$

Iz toga slijedi

$$\nu_m = \frac{m\pi}{a} \quad \text{i} \quad p_n = \frac{n\pi}{b}, \quad m, n = 1, 2, \dots,$$

pa je

$$F_{mn}(x, y) = H_m(x)Q_n(y) = K_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

U funkciji  $G(t)$  se pojavljuje veličina  $c\mu$ . Označimo ju s  $\lambda$ ,  $\lambda = c\mu$ . Iz  $\mu^2 - \nu^2 = p^2$  imamo  $\mu^2 = \nu^2 + p^2$ , tj.  $\mu = \sqrt{\nu^2 + p^2}$ . Kad  $\nu_m$  i  $p_n$  prolaze sve vrijednosti  $m, n = 1, 2, \dots$ , onda  $\mu$  prolazi sve vrijednosti  $\mu_{mn}$ , pa i  $\lambda$  prolazi sve vrijednosti  $\lambda_{mn} = c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$ . Dakle, imamo

$$G_{mn}(t) = A_{mn} \cos \lambda_{mn}t + B_{mn} \sin \lambda_{mn}t.$$

Sada je

$$u_{mn}(x, y, t) = F_{mn}(x, y)G_{mn}(t)$$

i

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, t) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [L_{mn} \cos(\lambda_{mn}t) + L_{mn}^* \sin(\lambda_{mn}t)] \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right),
\end{aligned}$$

gdje je  $L_{mn} = A_{mn}K_{mn}$  i  $L_{mn}^* = B_{mn}K_{mn}$ .

Koeficijente  $L_{mn}$  i  $L_{mn}^*$  odredimo iz početnih uvjeta

$$\begin{aligned}
u(x, y, 0) = \varphi(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} L_{mn} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)}_{K_m(y)} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} K_m(y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right).
\end{aligned}$$

Funkcije  $K_m(y)$  su koeficijenti u razvoju  $\varphi(x, y)$  u sinusni Fourierov red po varijabli  $x$ .

Dakle

$$K_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx.$$

No, sada su  $L_{mn}$  koeficijenti u Fourierovom razvoju od  $K_m(y)$ ,

$$L_{mn} = \frac{2}{b} \int_0^b K_m(y) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
L_{mn} &= \frac{2}{b} \int_0^b \left( \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx \right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy \\
L_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a \varphi(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx dy.
\end{aligned}$$

Slično se, razvojem  $\psi(x, y)$  u dvostruki Fourierov sinusni red, dobije

$$L_{mn}^* = \frac{4}{ab\lambda_{mn}} \int_0^b \int_0^a \psi(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx dy.$$

## 5.3 Harmoničke funkcije

Pogledajmo pobliže izraz koji se pojavljuje na lijevoj strani Laplaceove i Poissonove jednadžbe,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ . S njim smo se već susreli u Matematici 2 kad smo gledali

kompozicije diferencijalnih operatora prvog reda. Tada smo za skalarno polje  $u(x, y)$  dobili

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Taj izraz zovemo **Laplacijan** funkcije (skalarnog polja)  $u$  i kraće ga označavamo s  $\Delta u$ . Dakle,

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Za funkciju s tri varijable Laplacijan je:

$$\Delta u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Uvodimo pojam **Laplaceovog operatora**  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . Taj se operator pojavljuje u mnogim matematičkim modelima i jednadžbama i jedan je od najznačajnijih operatora matematičke fizike. Primijetimo da je  $\Delta = \nabla^2$ . Pokazuje se da Laplacijan ima konstantne koeficijente samo u Kartezijevim koordinatama.

Jednadžba  $\Delta u(x, y) = 0$  je **Laplaceova** jednadžba za funkciju  $u(x, y)$  na  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Laplaceova jednadžba u tri dimenzije je oblika  $\Delta u(x, y, z) = 0$ . Svako rješenje Laplaceove jednadžbe zove se **harmonička funkcija** ili **regularni potencijal**.

Laplacijan je najvažniji operator matematičke fizike. Zašto? Intuitivno,  $\Delta u(x, y)$  opisuje odstupanje vrijednosti funkcije  $u$  u točki  $(x, y)$  od srednje vrijednosti funkcije  $u$  na nekoj okolini te točke:

- $\Delta u > 0 \implies$  vrijednost  $u(x, y)$  je manja od prosjeka
- $\Delta u < 0 \implies$  vrijednost  $u(x, y)$  je veća od prosjeka
- $\Delta u = 0 \implies$  vrijednost  $u(x, y)$  je jednaka prosjeku, dakle, određena prosjekom na okolini.

U jednadžbama

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u \\ \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \end{array} \right\} \text{komadi s } \Delta \text{ dolaze od kontaktnih djelovanja.}$$

Takva su djelovanja lokalna, opisuju mikroskopske interakcije.

Kakve sve funkcije zadovoljavaju  $\Delta u = 0$ ? Primjeri su

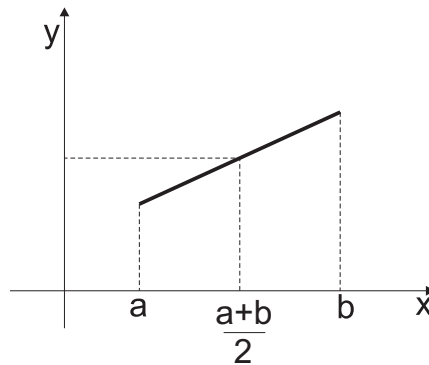
$$x^2 - y^2, e^x \cos y, \ln(x^2 + y^2), xy, \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \text{ itd.}$$

### 5.3.1 Svojstva harmoničkih funkcija

Što su harmoničke funkcije u jednoj varijabli? To su funkcije za koje vrijedi  $\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ . Prema tome,  $u(x) = Ax + B$  su linearne funkcije. Za linearne funkcije vrijedi (pogledajte sliku 5.6)

$$u\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2} \underbrace{(u(a) + u(b))}_{\int_{\partial I} u},$$

gdje je  $I = [a, b]$ .



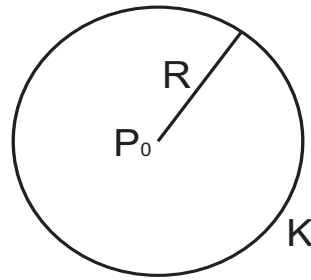
Slika 5.6: Linearna funkcija – harmonička funkcija jednog argumenta.

Vrijedi li to i u više dimenzija? Potvrđan odgovor na postavljeno pitanje daje sljedeći teorem:

**Teorem 5.1** *Neka je funkcija  $u(x, y)$  harmonička u krugu sa središtem u  $P_0$  polumjera  $R$ . Ako su ta funkcija i njene sve parcijalne derivacije neprekidne na tom krugu (s granicom), onda je  $u(P_0)$  jednak srednjoj vrijednosti te funkcije na rubu kruga, tj.*

$$u(P_0) = \frac{1}{2R\pi} \oint_K u(P) ds.$$

■

Slika 5.7: Krug polumjera  $R$  sa središtem u  $P_0$ .

Prema tome, vrijednost harmoničke funkcije u središtu kruga jednaka je srednjoj vrijednosti te funkcije na kružnici.

**Teorem 5.2** *Neka je funkcija  $u$  harmonička u području  $\Omega$  i neka nije konstanta na  $\Omega$ . Tada  $u$  nema lokalnih ekstrema u području  $\Omega$ .* ■

**Teorem 5.3** *Funkcija  $u$  koja je neprekidna i harmonička u  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ekstremne vrijednosti poprima na  $\partial\Omega$ .*

*Dokaz.* Iz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

slijedi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pa je

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix} = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0.$$

Dakle,  $u$  ne može imati ekstreme u  $\Omega$ , pa ih mora poprimati na rubu. ■

**Posljedica 5.1 (Princip maksimuma)** *Funkcija koja je harmonička na  $\Omega$  i neprekidna na  $\bar{\Omega}$  postiže svoje globalne ekstreme na rubu ( $\partial\Omega$ ).* ■

**Primjer 5.1** *Sapunica na žičanom okviru nema ekstrema unutar područja. Ako se u sapunicu puše, na nju djelujemo vanjskom silom, tako da njen položaj nije više opisan Laplaceovom jednadžbom.*

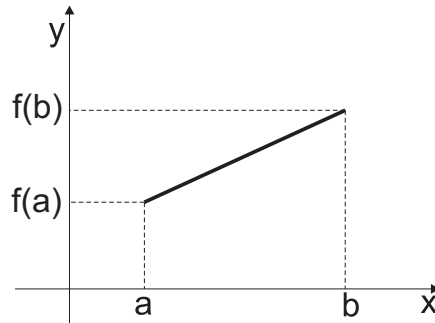
Podsjetimo se svih unutarnjih rubnih problema za Laplaceovu jednadžbu:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0 \text{ u } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= \alpha(x, y) \end{aligned} \right\} \text{Dirichletov}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0 \text{ u } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} &= \beta(x, y) \end{aligned} \right\} \text{Neumannov}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0 \text{ u } \Omega \\ \left( \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + ku \right) \Big|_{\partial\Omega} &= \gamma(x, y). \end{aligned} \right\} \text{Robinov}$$

Dirichletov problem u jednoj dimenziji prikazan je na slici 5.8.



Slika 5.8: Dirichletov problem za Laplaceovu jednadžbu u jednoj dimenziji.

Unutarnji problem rješavamo kada tražimo rješenje u  $\Omega$ , a za vanjski problem rješenje se traži u  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ .

**Teorem 5.4** *Ako Dirichletov problem ima rješenje onda je ono jedinstveno.*

*Dokaz.* Ako su  $u_1, u_2$  dva rješenja Dirichletovog rubnog problema, onda je  $v = u_1 - u_2$  harmonička funkcija koja je jednaka nuli na  $\partial\Omega$ . Onda je ona jednaka nuli i u  $\Omega$ , tj.  $u_1 = u_2$ . ■

Pretpostavimo da Neumannov problem ima rješenje. Tada tih rješenja ima beskonačno mnogo i sva se međusobno razlikuju za konstantu. Uvjet egzistencije rješenja Neumannovog rubnog problema u tri dimenzije je

$$\iiint_V f(x, y, z) dV + \iint_S \varphi(x, y, z) dS = 0$$

dok u dvije dimenzije ima oblik

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy + \oint_{\partial\Omega} \varphi(x, y) ds = 0,$$

gdje smo sa  $S$  označili rub od  $V$ , tj.  $S = \partial V$ .

Jednadžba

$$-\Delta u(x, y) = f(x, y)$$

zove se **Poissonova jednadžba**. Analogno, Poissonova jednadžba u tri dimenzije je

$$-\Delta u(x, y, z) = f(x, y, z).$$

Za Poissonovu jednadžbu imamo sljedeće unutarnje rubne probleme:

$$\left. \begin{array}{l} -\Delta u(x, y) = f(x, y) \text{ u } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \alpha(x, y) \end{array} \right\} \text{Dirichletov unutarnji rubni problem}$$

$$\left. \begin{array}{l} -\Delta u(x, y) = f(x, y) \text{ u } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = \beta(x, y) \end{array} \right\} \text{Neumannov unutarnji rubni problem}$$

$$\left. \begin{array}{l} -\Delta u(x, y) = f(x, y) \text{ u } \Omega \\ \left( \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + ku \right) \Big|_{\partial\Omega} = \gamma(x, y). \end{array} \right\} \text{Robinov unutarnji rubni problem}$$

Uz Poissonovu, podsjetimo se i Helmholtzove jednadžbe

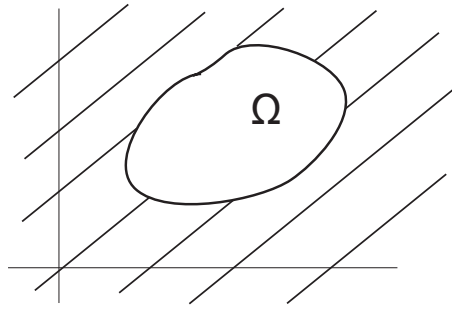
$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ u } \Omega,$$

koja ima rubne uvjete kao za Laplaceovu ili Poissonovu jednadžbu.

Postoji i **vanjski Dirichletov problem** koji je opisan s

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ u } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{array} \right\}$$

Ovdje se još nameće uvjet ograničenosti za  $r \rightarrow \infty$ .

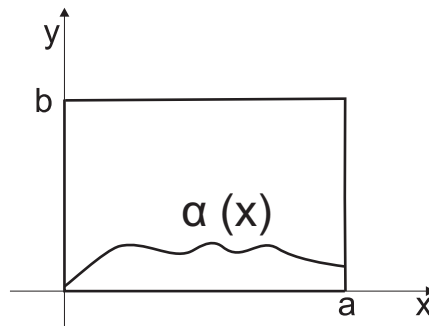
Slika 5.9: Područje izvan membrane  $\Omega$  ( $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ ).

## 5.4 Fourierova metoda za ravnotežu pravokutne membrane

Promatramo problem ravnoteže pravokutne membrane opisan Laplaceovom jednadžbom i rubnim uvjetima

$$\left. \begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0 \\ u(x, 0) &= \alpha(x), \quad u(0, y) = u(a, y) = u(x, b) = 0 \end{aligned} \right\}$$

(vidi sliku 5.10).



Slika 5.10: Rubni problem za ravnotežu pravokutne membrane.

Primijetimo da je položaj donjeg ruba membrane opisan funkcijom  $\alpha(x)$ , dok su lijevi, desni i gornji rub učvršćeni u nuli.



Provedimo separaciju varijabli. Uvrštavanjem  $u(x, y) = H(x)Q(y)$  u Laplaceovu jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned} H''Q + HQ'' &= 0 \implies \frac{H''}{H} = -\frac{Q''}{Q} = k = -\nu^2 \\ H'' + \nu^2 H &= 0 \implies H(x) = A \cos \nu x + B \sin \nu x \\ Q'' - \nu^2 Q &= 0 \implies Q(y) = C \operatorname{ch} \nu y + D \operatorname{sh} \nu y \\ H(0) = H(a) &= 0 \implies \begin{cases} H(x) = B \sin \nu x \\ H_n(x) = B_n \sin \left(\frac{n\pi}{a}x\right) \end{cases} \end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned} Q_n(y) &= C_n \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi}{a}y\right) + D_n \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{a}y\right) \\ u_n(x, y) &= \left[ E_n \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi}{a}y\right) + E_n^* \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{a}y\right) \right] \sin \left(\frac{n\pi}{a}x\right), \end{aligned}$$

gdje je  $E_n = B_n C_n$  i  $E_n^* = B_n D_n$ . Sada je

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ E_n \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi}{a}y\right) + E_n^* \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi}{a}y\right) \right] \sin \left(\frac{n\pi}{a}x\right),$$

pa uvrštavanjem rubnih uvjeta dobijemo

$$u(x, 0) = \alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \left(\frac{n\pi}{a}x\right) \implies E_n = \frac{2}{a} \int_0^a \alpha(x) \sin \left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

$$u(x, b) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ E_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a} + E_n^* \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} \right] \sin \left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

Zadnja jednakost je zapravo razvoj funkcije 0 u sinusni Fourierov red. Svi koeficijenti moraju biti jednaki nuli, pa je

$$E_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a} + E_n^* \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} = 0 \implies E_n^* = -E_n \operatorname{cth} \frac{n\pi b}{a}.$$

## 5.5 Laplaceov operator u krivolinijskim koordinatama

Izvest ćemo sada izraze za Laplacijan skalarnog polja u polarnim, cilindričnim i sfernim koordinatama.

### 5.5.1 Polarne i cilindrične koordinate

Polarne i Kartezijeve koordinate povezane su relacijama

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (5.1)$$

iz čega slijedi i

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right). \quad (5.2)$$

Prepostavimo da je  $u(x, y)$  neprekidna funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama prvog i drugog reda u nekom području  $D$ . Zbog (5.1) na  $u$  možemo gledati kao na funkciju u varijablama  $r$  i  $\varphi$ . Koristeći lančano pravilo i (5.2) dobijemo da je

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \\ &= \frac{x}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Analogno dobijemo da je

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \quad (5.4)$$

Da bismo dobili parcijalne derivacije drugog reda, derivirat ćemo (5.3) po  $x$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r} \right) - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{r^2} \right) + \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{y}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right).$$

Ponovnom primjenom lančanog pravila na zadnja dva člana gornjeg izraza dobijemo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2xy}{r^4} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2xy}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + \frac{y^2}{r^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (5.5)$$

S druge strane, ako deriviramo (5.4) po  $y$ , dobijemo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2xy}{r^4} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{y^2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2xy}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + \frac{x^2}{r^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (5.6)$$

Zbrajanjem (5.5) i (5.6) dobijemo

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (5.7)$$

Dakle, Laplaceova jednadžba u polarnim koordinatama je oblika

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (5.8)$$

Ovo se još može pisati i kao

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Potpuno analognim postupkom dobivamo izraze za Laplaceov operator i Laplaceovu jednadžbu u cilindričnim koordinatama  $(r, \varphi, z)$  zadanim formulama

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z. \quad (5.9)$$

Laplaceov operator je

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

dok je Laplaceova jednadžba

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Pogledajmo što se zbiva kada funkcija  $u$  ovisi samo o  $r$ ,  $u = u(r)$ .

**Primjer 5.2** *Pretpostavimo da je  $u(r, \varphi) = u(r)$  radialna funkcija. Tada je*

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

**Primjer 5.3** *Pokažimo da  $f(r) = a \ln r + b$  zadovoljava jednadžbu  $\Delta f = 0$ :*

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{a}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} a = 0.$$

### 5.5.2 Sferne koordinate

Sferne i Kartezijeve koordinate povezane su relacijama

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta. \quad (5.10)$$

Kao i prije, neka je  $u(x, y, z)$  neprekidna funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama prvog i drugog reda na nekom području.

Laplaceovu jednadžbu u sfernim koordinatama možemo izvesti na isti način kao i za cilindrične koordinate. Dobije se da je Laplaceov operator u sfernim koordinatama jednak

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad (5.11)$$

dok je Laplaceova jednadžba

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Za radijalnu funkciju  $u(r, \theta, \varphi) = u(r)$ , Laplacijan je zadan pomoću

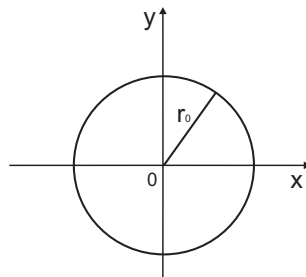
$$\Delta u(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Tada je

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0 \iff r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = c, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{c}{r^2} \implies u = \frac{c}{r} + b.$$

## 5.6 Unutarnji Dirichletov problem za ravnotežu kružne membrane

Primijenimo sada izvedene formule za Laplacijan u polarnim koordinatama na neke probleme ravnoteže područja omeđenih kružnicama ili njihovim dijelovima. Počnimo s unutarnjim Dirichletovim problemom za ravnotežu kružne membrane.



Slika 5.11: Kružna membrana.

Ravnoteža kružne membrane opisana je s

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u(r, \varphi) = 0 \\ u|_{r_0} = \xi(\varphi) \end{array} \right\}$$

Rješenje ovog problema je periodično s periodom  $2\pi$ , tj.  $u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi)$  i vrijedi

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Tražimo rješenje  $u(r, \varphi)$  u obliku  $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ . Uvrštavanjem u jednadžbu, te množeći s  $r^2$ , dobijemo

$$\Phi(\varphi)r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + R(r)\Phi''(\varphi) = 0.$$

Odatle mora slijediti

$$\frac{r(rR')'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda^2.$$

Zašto  $\lambda^2$ ? Kad bi ta konstanta bila negativna, onda  $\Phi(\varphi)$  ne bi bilo periodično. Iz  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$  slijedi  $\lambda^2 = n^2$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(\varphi) = A \cos \lambda\varphi + B \sin \lambda\varphi \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = A \cos(\lambda\varphi + 2\lambda\pi) + B \sin(\lambda\varphi + 2\lambda\pi) \end{array} \right\} \implies \lambda_n = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dakle, periodičnost u varijabli  $\varphi$  daje funkcije  $\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$ .

U varijabli  $r$  imamo

$$r^2 R'' + rR' - \lambda^2 R = 0,$$

što nazivamo **Eulerovom jednadžbom**. Pretpostavljamo rješenje u obliku  $R(r) = r^\alpha$ . Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha - 1)r^2 r^{\alpha-2} + \alpha r r^{\alpha-1} - \lambda^2 r^\alpha &= 0 \quad / : r^\alpha \\ \alpha(\alpha - 1) + \alpha - \lambda^2 &= 0 \implies \alpha^2 = \lambda^2 = n^2 \implies \alpha = \pm n \text{ za } n > 0. \end{aligned}$$

Dakle,  $R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}$  za  $n > 0$ . Za  $n = 0$  imamo  $r^2 R'' + rR' = 0$ . Riješimo ovu jednadžbu snižavanjem reda. Uz oznaku  $u = R'$  imamo

$$r u' + u = 0 \implies \frac{u'}{u} = -\frac{1}{r} \implies \ln u = -\ln r \implies u = R' = \frac{1}{r} \implies R = a_0 \ln r + b_0.$$

Kako rješenja moraju biti ograničena u  $r = 0$ , imamo  $r_0 = 0$ ,  $D_n = 0$ ,  $n \geq 1$  i  $a_0 = 0$ , pa nam je

$$u(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Za  $r = r_0$  imamo

$$u(r_0, \varphi) = \xi(\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_0^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Ovo je upravo razvoj rubnog uvjeta  $\xi(\varphi)$  u Fourierov red. Dakle,

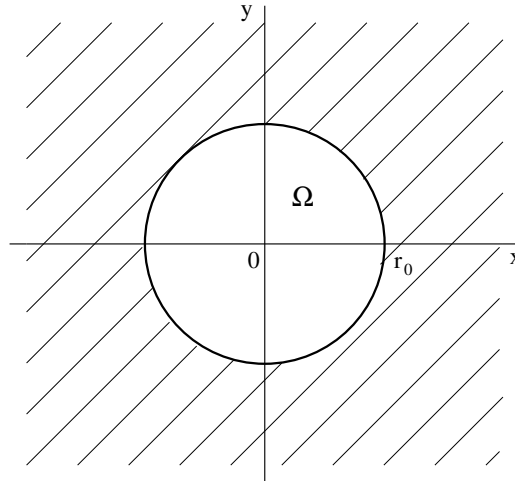
$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\varphi) d\varphi, & A_n r_0^n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \\ B_n r_0^n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\varphi) \sin n\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

$$u(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)],$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

Konstanta  $A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\varphi) d\varphi$  je upravo srednja vrijednost rubnog uvjeta na kružnici  $r = r_0$ .

## 5.7 Vanjski Dirichletov problem



Slika 5.12: Vanjski rubni problem za krug polumjera  $r_0$

Promatramo specijalni slučaj Dirichletovog problema za kružno područje kad je  $\Omega$  krug polumjera 1:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \text{za } 1 < r < \infty \\ u(1, \varphi) = g(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{array} \right\}$$

Moramo odbaciti članove s  $\ln r$ ,  $r^n \cos n\varphi$  i  $r^n \sin n\varphi$  jer svi oni teže u beskonačno kada  $r \rightarrow \infty$ . Rješenje je oblika

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n} [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)],$$

a koeficijenti  $a_n, b_n$  se određuju iz rubnog uvjeta

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \, d\varphi, & a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos(n\varphi) \, d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin(n\varphi) \, d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

**Primjer 5.4** Riješimo sljedeći rubni problem:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad 1 < r < \infty \\ u(1, \varphi) = \cos(4\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{array} \right\}$$

Ovdje je odmah jasno da su svi  $b_n = 0$  i svi  $a_n = 0$  osim  $a_4$  koji je jednak 1. Dakle,

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{r^4} \cos(4\varphi).$$

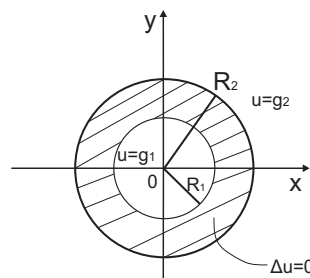
Kako se to vizualizira?

Općenito, za krug polumjera  $r_0$ , rješenje vanjskog Dirichletovog problema je oblika

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-n} [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)].$$

Postoje samo dva rješenja dvodimenzionalne Laplaceove jednadžbe koja zavise samo o  $r$ , a ne i o  $\varphi$ . To su  $c$  i  $\ln r$ . Funkcija  $f(r) = \ln r$  se zove logaritamski potencijal i igra važnu ulogu u teoriji. U tri dimenzije su jedina rješenja od  $\Delta u = 0$  koja ovise samo o  $r$  konstanta i  $\frac{1}{r}$ . Funkcija  $f(r) = \frac{1}{r}$  se zove Newtonov potencijal.

## 5.8 Dirichletov problem u prstenu (kružnom vijencu)



Slika 5.13: Membrana u obliku kružnog vijenca.

Promotrimo problem ravnoteže kružnog vijenca (gornja slika) opisan s

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= 0, & R_1 < r < R_2 \\ u|_{r=R_1} &= g_1(\varphi) \\ u|_{r=R_2} &= g_2(\varphi). \end{aligned} \right\}$$

Separiramo varijable, tj. pretpostavimo da je rješenje oblika

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi).$$



Uvrštavanjem  $R(r)\Phi(\varphi)$  u jednadžbu dobijemo dvije obične diferencijalne jednadžbe

$$\begin{aligned} r^2 R'' + rR' - \lambda^2 R &= 0 & - \text{Eulerova jednadžba} \\ \Phi'' + \lambda^2 \Phi &= 0. \end{aligned}$$

Kao i prije, iz druge jednadžbe slijedi  $\lambda_n = n$ , zbog periodičnosti. To vodi na

$$\Phi_n(\varphi) = p_n \cos n\varphi + q_n \sin n\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Eulerova jednadžba ima rješenja

$$\begin{aligned} R_0(r) &= a_0 + b_0 \ln r & \text{za } n = 0 \\ R_n(r) &= s_n r^n + t_n r^{-n} & \text{za } n > 0. \end{aligned}$$

Dakle, imamo

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r)\Phi_n(\varphi) \\ &= a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\varphi + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\varphi] \end{aligned}$$

Sada ne odbacujemo članove s  $r^{-n}$ , jer više nemamo  $r = 0$  u području. Iz rubnih uvjeta  $u(R_1, \varphi) = g_1(\varphi)$ ,  $u(R_2, \varphi) = g_2(\varphi)$  imamo sustave jednadžbi

$$\left. \begin{aligned} a_0 + b_0 \ln R_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1(s) ds \\ a_0 + b_0 \ln R_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_2(s) ds \end{aligned} \right\} \text{ riješimo, dobijemo } a_0, b_0$$

$$\left. \begin{aligned} a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_1(s) \cos(ns) ds \\ a_n R_2^n + b_n R_2^{-n} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(s) \cos(ns) ds \end{aligned} \right\} \text{ riješimo po } a_n, b_n$$

$$\left. \begin{aligned} c_n R_1^n + d_n R_1^{-n} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_1(s) \sin(ns) ds \\ c_n R_2^n + d_n R_2^{-n} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(s) \sin(ns) ds \end{aligned} \right\} \text{ riješimo, dobijemo } c_n, d_n$$

**Primjer 5.5** Riješimo rubni problem:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= 0, & 1 < r < 2 \\ u(1, \varphi) &= 0 \\ u(2, \varphi) &= \sin \varphi, & 0 \leq \varphi < 2\pi \end{aligned} \right\}$$

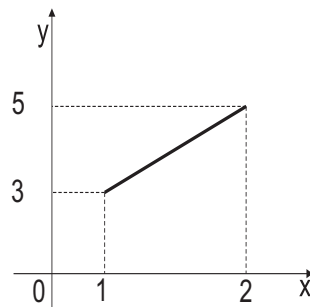
Odmah vidimo da je  $a_0 = 0$ ,  $b_0 = 0$  jer su oba integrala s desne strane jednaka 0. Nadalje, oba integrala s  $g_1(\varphi)$  su jednaka nuli, a jednak je nuli i integral  $\int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos n\varphi d\varphi$ ,  $\forall n$ . Dakle,  $a_n = b_n = 0, \forall n$ . Posljednji integral je različit od nule samo za  $n = 1$ , dakle  $c_n = d_n = 0$  za  $n > 1$ . Ostaje nam

$$\left. \begin{aligned} c_1 + d_1 &= 0, & \text{tj. } c_1 + d_1 &= 0 \\ 2c_1 + \frac{d_1}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi, & 2c_1 + \frac{d_1}{2} &= 1 \end{aligned} \right\} \implies c_1 = \frac{2}{3}, d_1 = -\frac{2}{3}$$

Odatle je  $u(r, \varphi) = \frac{2}{3} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi$ .

**Primjer 5.6** Riješimo rubni problem:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= 0, & 1 < r < 2 \\ u(1, \varphi) &= 3 \\ u(2, \varphi) &= 5, & 0 \leq \varphi < 2\pi \end{aligned} \right\}$$



Slika 5.14: Rješenje problema iz primjera 5.5.

Ovdje treba uočiti da rješenje ne ovisi o  $\varphi$ , jer rubni uvjeti ne ovise o  $\varphi$ . Dakle, rješenje je oblika  $u(r) = a_0 + b_0 \ln r$ .

$$\left. \begin{aligned} a_0 + b_0 \ln 1 &= 3 \\ a_0 + b_0 \ln 2 &= 5 \end{aligned} \right\} \implies \begin{aligned} a_0 &= 3 \\ b_0 \ln 2 &= 2 \implies b_0 = \frac{2}{\ln 2} \end{aligned}$$

Dakle,

$$u(r) = 3 + \frac{2}{\ln 2} \ln r.$$

**Primjer 5.7** Riješimo sljedeći rubni problem:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= 0, & 1 < r < 2 \\ u(1, \varphi) &= \sin \varphi \\ u(2, \varphi) &= \sin \varphi, & 0 \leq \varphi < 2\pi \end{aligned} \right\}$$

Odmah se vidi da je  $a_0 = b_0 = 0$  jer je  $\int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi = 0$ . Isto tako, svi  $a_n$  i  $b_n$  su jednaki nuli jer je  $\int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos n\varphi \, d\varphi = 0$ . Ostaju samo

$$\begin{aligned} c_1 + d_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = 1 \\ 2c_1 + \frac{d_1}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = 1. \end{aligned}$$

Odatle je  $c_1 = \frac{1}{3}$ ,  $d_1 = \frac{2}{3}$  i  $u(r, \varphi) = \frac{1}{3} \left( r + \frac{2}{r} \right) \sin \varphi$ .

## 5.9 \* Oscilacije kružne membrane. Valna jednačba u polarnim koordinatama

Promatramo inicijalno-rubni problem

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right), & 0 < r < 1, & 0 < t < \infty \\ u(1, \varphi, t) &= 0, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 < t < \infty \\ u(r, \varphi, 0) &= f(r, \varphi) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(r, \varphi, 0) &= g(r, \varphi) \end{aligned} \right\}$$

Pretpostavimo rješenje u obliku  $u(r, \varphi, t) = U(r, \varphi)T(t)$ . Uvrštavanjem u jednačbu dobijemo

$$\begin{aligned} T'' + \lambda^2 c^2 T &= 0 - \text{harmoničke oscilacije; } \lambda^2 > 0 \text{ zbog periodičnosti} \\ \Delta U + \lambda^2 U &= 0 - \text{Helmholtzova jednačba} \\ \Delta U &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \end{aligned}$$

Rubni uvjet za Helmholtzovu jednadžbu je

$$u(1, \varphi, t) = U(1, \varphi)T(t) = 0, \forall t \implies U(1, \varphi) = 0.$$

Dakle,

$$\left. \begin{array}{l} \Delta U + \lambda^2 U = 0 \\ U(1, \varphi) = 0 \end{array} \right\} \text{eliptički problem svojstvenih vrijednosti.}$$

Pretpostavimo rješenje u obliku  $U(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ . Uvrštavanjem u Helmholtzovu jednadžbu dobijemo

$$\left. \begin{array}{l} r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - n^2)R = 0 \\ R(1) = 0 \end{array} \right\} \text{Besselova jednadžba}$$

i

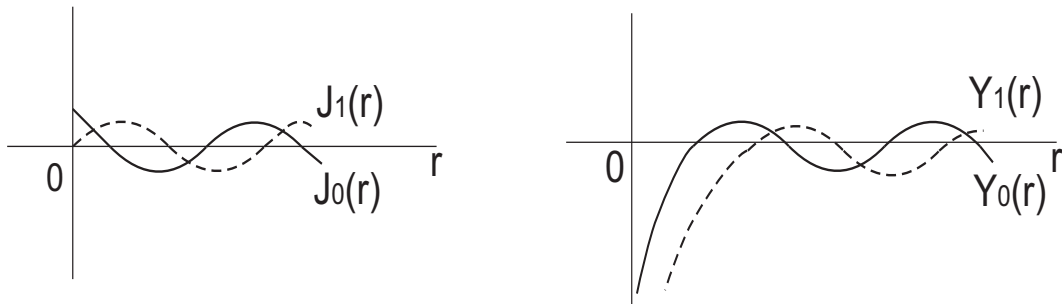
$$\Phi'' + n^2 \Phi = 0,$$

gdje smo morali uzeti  $n^2$  zbog periodičnosti rješenja po  $\varphi$ . To je isto kao za ravnotežu. Još imamo fizikalno ograničenje  $R(0) < \infty$ .

Jednadžba  $r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - n^2)R = 0$  je poznata i važna jednadžba. Njena rješenja nisu elementarne funkcije. Kako je to obična diferencijalna jednadžba drugog reda, ona za svaki  $n \geq 0$  ima dva linearno nezavisna rješenja. To su Besselove funkcije prve vrste  $J_n(\lambda_r)$  i Besselove funkcije druge vrste  $Y_n(\lambda_r)$ . Dakle

$$R_n(r) = AJ_n(\lambda_r) + BY_n(\lambda_r).$$

Kako su Besselove funkcije druge vrste neograničene za  $r \rightarrow 0$ , opće rješenje je oblika  $R_n(r) = AJ_n(\lambda_r)$ .  $J_n(\lambda_r)$  su svojstvene funkcije, konstanta  $A$  nije bitna.



Slika 5.15: Besselove funkcije prve i druge vrste.

Iz rubnog uvjeta  $R(1) = 0$ , uvrštavanjem u  $R_n(\lambda r)$  dobijemo  $J_n(\lambda) = 0$ . Dakle, da bi se  $R(r)$  poništavala na  $r = 1$ , moramo izabrati  $\lambda$  tako da bude nul-točka Besselove funkcije,

a takvih nul-točaka ima beskonačno mnogo. Uvedimo oznaku  $\lambda = k_{nm}$  za  $m$ -tu nul-točku od  $J_1(r)$ . Te su nul-točke poznate i tabelirane. Sada imamo

$$U_{nm}(r, \varphi) = J_n(k_{nm}r)[A \cos(n\varphi) + B \sin(n\varphi)].$$

Za svaki  $\lambda = k_{nm}$  imamo  $\lambda c = k_{nm}c$ , pa svakom  $U_{nm}(r, \varphi)$  odgovara

$$T_{nm}(t) = A \cos(k_{nm}ct) + B \sin(k_{nm}ct).$$

Sada možemo pisati

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(k_{nm}r) \cos(n\varphi) [A_{nm} \cos(k_{nm}ct) + B_{nm} \sin(k_{nm}ct)].$$

Ovdje smo komad  $A \cos(n\varphi) + B \sin(n\varphi)$  pisali kao  $C \cos(n\varphi)$ , pri čemu je  $\varphi$  mjereno ne od 0, nego od nekog  $\varphi_0$  (fazni pomak). Konstante  $A_{nm}$  i  $B_{nm}$  se sada određuju iz početnih uvjeta preko njihovog razvoja po Besselovim funkcijama.

Ako početni uvjeti ne ovise o  $\varphi$ ,

$$\left. \begin{aligned} u(r, \varphi, 0) &= f(r) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(r, \varphi, 0) &= 0 \end{aligned} \right\},$$

od svih  $J_n(r)$  preživi samo  $J_0(r)$ . Tada imamo

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(k_{0m}r) \cos(k_{0m}ct).$$

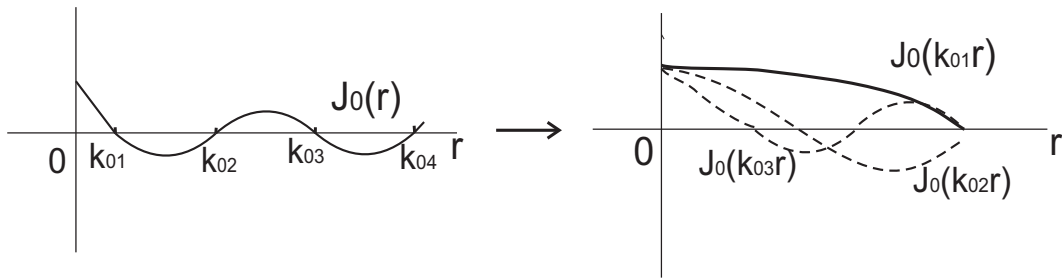
Iz početnog uvjeta  $u(r, 0) = f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(k_{0m}r)$  vidimo da su koeficijenti  $A_m$  koeficijenti u razvoju  $f(r)$  u red po  $J_0(k_{0m}r)$ . Te su funkcije ortogonalne na  $(0, 1)$ :

$$\int_0^1 r J_0(k_{0i}r) J_0(k_{0j}r) dr = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{1}{2} J_1^2(k_{0i}), & i = j \end{cases}$$

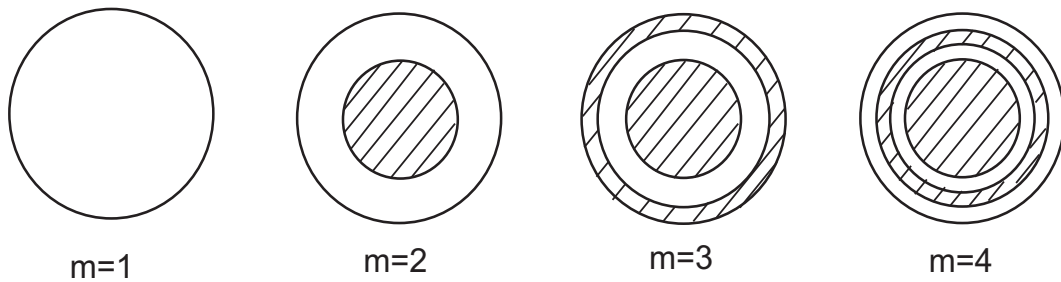
Sada imamo

$$A_m = \frac{2}{J_1^2(k_{0m})} \int_0^1 f(r) J_0(k_{0m}r) dr, \quad m = 1, 2, \dots$$

Kako izgledaju funkcije  $J_0(k_{0i}r)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ?



Slika 5.16: Besselove funkcije  $J_0(r)$  i  $J_0(k_{0i}r)$  za  $i = 1, 2, 3$ .



Slika 5.17: Stojni valovi na kružnoj membrani.

To su stojni valovi na membrani. Frekvencije  $k_{0m}c/2\pi$  nisu cjelobrojni višekratnici osnovne frekvencije pa viši tonovi nisu čisti nadtonovi osnovnog tona. Naime,

$$k_{0m}/k_{01} \notin \mathbb{N}$$

$$k_{0m} = 2.40, 5.52, 8.65, 11.79, 14.93, \dots \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

1	2.3	3.6	4.9	6.22	omjeri
---	-----	-----	-----	------	--------

# Poglavlje 6

## Numeričke metode

Neke numeričke metode se zasnivaju na Taylorovom teoremu:

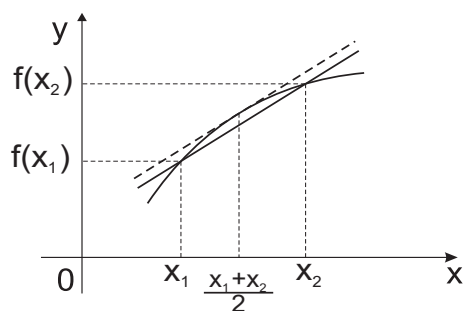
**Teorem 6.1 (Taylor)** *Neka je funkcija  $f$  klase  $C^{n+1}$  na  $I = \langle a, b \rangle$ . Tada za  $x_0 \in I$ ,  $x_0 + h \in I$ , postoji  $c$  između  $x_0$  i  $x_0 + h$  takav da vrijedi*

$$f(x_0 + h) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k}_{\text{Taylorov polinom stupnja } n} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} h^{n+1}}_{\text{pogrješka}}.$$

### 6.1 Približno (numeričko) deriviranje i integriranje

#### 6.1.1 Numeričko deriviranje

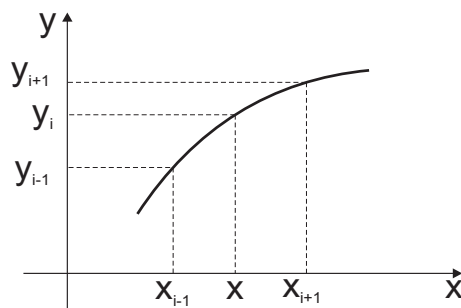
Odredimo aproksimaciju derivacije funkcije  $f$  (vidi sliku 6.1).



Slika 6.1: Tangenta i sekanta.

Za dovoljno bliske točke  $x_1, x_2$  iz područja definicije funkcije  $f$  vrijedi aproksimacija

$$f' \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \approx \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



Slika 6.2: Konačne razlike.

To je geometrijska ideja numeričkog deriviranja koja ne daje informaciju o učinjenoj pogrješci. Podijelimo područje definicije funkcije  $f$  na jednake dijelove. Sada za  $i$ -ti čvor  $x_i$  analogno vrijedi

$$\left. \begin{aligned} f'(x_i) &\approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \\ f'(x_i) &\approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \end{aligned} \right\} \text{konačne razlike.}$$

Uz oznake  $y = f(x)$ ,  $y_i = f(x_i)$ , možemo pisati

$$f'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \text{desna razlika (engl. forward difference)}$$

$$f'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \text{lijeva razlika (engl. backward difference).}$$

Desna i lijeva konačna razlika daju aproksimaciju čija je grješka linearna u  $(x_{i+1} - x_i)$  ili  $(x_i - x_{i-1})$ . Promatramo ekvidistantne točke, tj. takve da je  $x_{i+1} - x_i = h > 0$  za sve  $i$ , zbog čega onda imamo

$$f'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad \text{i} \quad f'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}.$$

Aproksimiramo  $f$  Taylorovim polinomom drugog stupnja u točki  $x_i$ :

$$f(x_i + h) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{1}{2}f''(c)h^2, \text{ tj.}$$

$$\frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} - f'(x_i) = \frac{1}{2}f''(c)h.$$



Slično vrijedi i za lijevu konačnu razliku.

Kombiniranjem možemo dobiti aproksimaciju kvadratičnu u  $h$ . Pogledajmo općenitiji slučaj

$$\left. \begin{aligned} f(x_i + h) &= f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{1}{2}f''(x_i)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x_i)h^3 + \dots \\ f(x_i - h) &= f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{1}{2}f''(x_i)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_i)h^3 + \dots \end{aligned} \right\} -$$

$$\begin{aligned} f(x_i + h) - f(x_i - h) &= 2f'(x_i)h + \frac{1}{3}f'''(x_i)h^3 + \dots \quad / : 2h \\ \underbrace{\frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}}_{\text{središnja (centralna) razlika}} &\approx f'(x_i) + \underbrace{\frac{1}{6}f'''(x_i)h^2}_{\text{pogrješka}} \end{aligned}$$

Koristeći aproksimacije Taylorovim polinomom višeg stupnja dobijemo točniju aproksimaciju derivacije, tj. aproksimaciju višeg reda u  $h$ . Na primjer,

$$f'(x_i) \approx \frac{1}{12h} [f(x_i - 2h) - 8f(x_i - h) + 8f(x_i + h) - f(x_i + 2h)] - \underbrace{\left( \frac{1}{30} f^{(5)}(x_i) h^4 \right)}_{\text{pogrješka}}$$

Gornja formula daje aproksimaciju 4. reda.

Slika 6.3: Čvorovi za formulu 4. reda.

**Primjer 6.1**  $f(x) = \sin x$ ,  $x_i = 0.2$ ,  $h = 0.1$

$$f'(0.2) \approx \frac{\sin 0.3 - \sin 0.1}{0.2} = \frac{0.2955202 - 0.0998334}{0.2} = 0.9784340$$

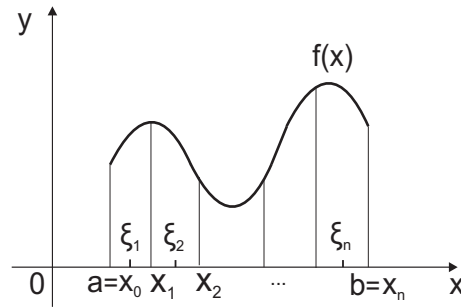
$$f'(0.2) \approx \frac{1}{1.2} [0 - 8 \cdot 0.0998334 + 8 \cdot 0.2955202 - 0.3894183] = 0.9800633$$

$$f'(0.2) = \cos(0.2) = 0.9800666.$$

**Problemi:** Za male vrijednosti  $h$  izrazi u nazivniku postaju mali, a recipročne vrijednosti postaju velike. Nagomilava se grješka zaokruživanja. Numeričko deriviranje je nestabilan proces, no ponekad je jedini mogući.

### 6.1.2 Numerička integracija

Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Podijelimo segment  $[a, b]$  na  $n$  jednakih dijelova kao na slici 6.4.



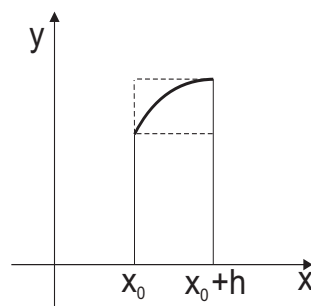
Slika 6.4: Subdivizija područja integracije.

Prisjetimo se da vrijedi

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}], \text{ tj.}$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

gdje je  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ . Aproximirat ćemo  $\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx$ .



Slika 6.5: Lokalne aproksimacije konstantama.

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx \approx f(x_0)h \quad - \text{ lijeva formula pravokutnika} \quad (\text{a})$$

$$\approx f(x_0 + h)h \quad - \text{ desna formula pravokutnika} \quad (\text{b})$$

$$\approx f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)h \quad - \text{ formula sredine} \quad (\text{c})$$

$$\approx \frac{[f(x_0) + f(x_0 + h)]h}{2} \quad - \text{ trapezna formula} \quad (\text{d})$$

Trapezna formula je aritmetička sredina lijeve i desne formule pravokutnika. Što je s pogrješkom? Ako stavimo  $x_0 = 0$ , dobijemo

$$\begin{aligned} \int_0^h f(x) dx &= \int_0^h [f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \dots] dx \\ &= hf(0) + f'(0)\frac{h^2}{2} + f''(0)\frac{h^3}{6} + f'''(0)\frac{h^4}{24} + \dots \end{aligned}$$

Odatle je

$$hf(0) - \int_0^h f(x) dx \approx -\frac{1}{2}h^2 f'(0),$$

a to je pogrješka za lijevu formulu pravokutnika. Za desnu formulu pravokutnika imamo

$$\begin{aligned} hf(h) - \int_0^h f(x) dx &= h[f(0) + hf'(0) + \dots] - [hf(0) + \frac{1}{2}h^2 f'(0) + \dots] \\ &\approx \frac{1}{2}h^2 f'(0), \end{aligned}$$

što je suprotnog predznaka od lijeve formule pravokutnika. Kako je (d) aritmetička sredina od (a) i (b), pogrješka od (d) će biti manja:

$$\begin{aligned} &\underbrace{[f(0) + f(0) + hf'(0) + \frac{1}{2}h^2 f''(0) + \dots]}_{f(h)} \frac{h}{2} \\ &\quad - [hf(0) + \frac{1}{2}h^2 f'(0) + \frac{1}{6}h^3 f''(0) + \dots] \\ &\approx \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) h^3 f''(0) = \frac{1}{12} f''(0) h^3. \end{aligned}$$

Trapezna formula daje aproksimaciju trećeg reda. U trapeznoj formuli je podintegralna funkcija zamijenjena linearnom funkcijom. Za očekivati je da će aproksimacija podintegralne funkcije polinomom višeg stupnja rezultirati točnijom formulom. Primjerice,

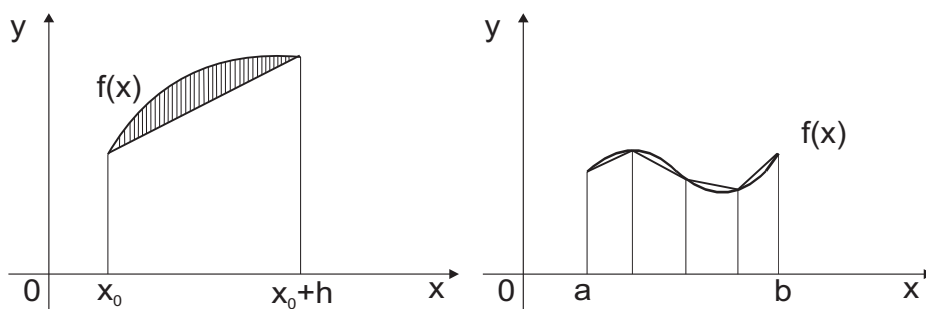
aproximacija kvadratnom funkcijom daje Simpsonovu formulu

$$\int_{-h}^h f(x) dx \approx \frac{h}{3}[f(-h) + 4f(0) + f(h)],$$

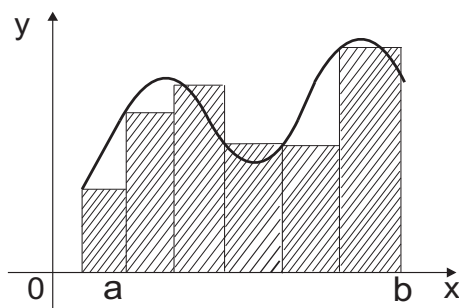
čija je pogreška petog reda,

$$\frac{h}{3}[f(-h) + 4f(0) + f(h)] - \int_{-h}^h f(x) dx \approx \frac{f^{(4)}(0)}{90}h^5.$$

Daljnje povećanje stupnja polinoma kojim se zamjenjuje (točnije, interpolira) podintegralna funkcija daje formule kod kojih je pogreška još višeg reda. U praksi se, međutim, rijetko ide na stupanj veći od tri, jer interpolacijski polinom počinje previše oscilirati. Umjesto toga, ide se na podjelu intervala integracije na više malih intervala i na svakom od njih se primjenjuje formula nižeg stupnja, najčešće trapezna ili Simpsonova. Tako dobivamo složene formule za numeričku integraciju.



Slika 6.6: Jednostavna (lokalna) i složena (globalna) trapezna formula.



Slika 6.7: Složena formula pravokutnika.

Složena trapezna i Simpsonova formula dane su s

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < b$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (\text{T})$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (\text{S})$$

Uočimo da za Simpsonovu formulu broj podintervala  $n$  mora biti paran. Pogreška složene trapezne formule je kvadratična u  $h$ , a složene Simpsonove formule je 4. stupnja u  $h$ .

**Primjer 6.2**  $I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = I,$

$$n = 4 \implies h = \frac{1}{4}, x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$$

$$\begin{aligned} I_T &= \frac{4}{8} \left[ \frac{1}{1+0} + 2 \frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2} + 2 \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2} + 2 \frac{1}{1+(\frac{3}{4})^2} + \frac{1}{1+1^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{32}{17} + \frac{8}{5} + \frac{32}{25} + \frac{1}{2} \right] = 3.1311765 \end{aligned}$$

$$I_S = \frac{4}{12} \left[ 1 + 4 \frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2} + 2 \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2} + 4 \frac{1}{1+(\frac{3}{4})^2} + \frac{1}{1+1^2} \right] = 3.1415686$$

$$I = \pi \approx 3.1415926353\dots$$

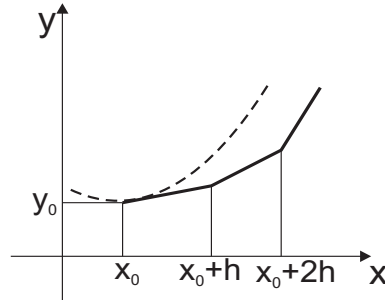
## 6.2 Numeričko rješavanje običnih diferencijalnih jednačbi

Promatramo Cauchyjev problem za obične diferencijalne jednačbe prvog reda:

$$\left. \begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \right\}$$

### 6.2.1 Eulerova i poboljšana Eulerova metoda

Najjednostavnija metoda za rješavanje ovog problema je Eulerova metoda. Geometrijska interpretacija metode je prikazana na slici 6.8.



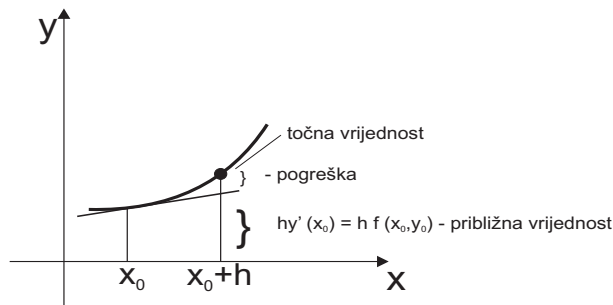
Slika 6.8: Eulerova metoda.

Prema Taylorovom teoremu aproksimiramo vrijednost funkcije  $y$  u točki  $x_1 = x_0 + h$ :

$$y(x_0 + h) \approx y(x_0) + hy'(x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Na isti način za čvorove  $x_1, \dots, x_{n-1}$  dobijemo Eulerovu metodu:

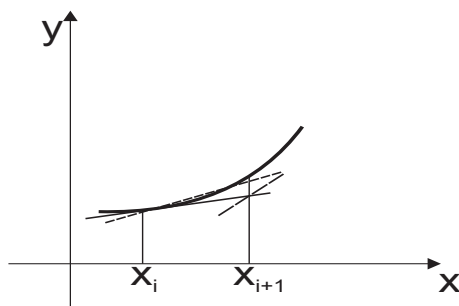
$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$



Slika 6.9: Pogreška Eulerove metode.

Eulerova metoda je vrlo jednostavna, no nije jako dobra. Vidimo da se pogreška akumulira. Bolji rezultati se postižu smanjenjem koraka  $h$ , no onda se počinje nakupljati grješka zaokruživanja.

Poboljšana Eulerova metoda koristi više informacija koju nam daje  $f(x, y)$ .



Slika 6.10: Poboljšana Eulerova metoda.

$$y_{i+1}^* = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)]$$

U poboljšanoj Eulerovoj metodi korigiramo nagib pod kojim krećemo iz  $(x_i, y_i)$  koristeći informaciju o  $f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)$ . Taj je nagib  $y'(x_i)$  aritmetička sredina između  $f(x_i, y_i)$  i  $f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)$ . Zašto moramo uvoditi  $y_{i+1}^*$ ? Zašto ne uzeti  $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ ? Ne znamo  $y_{i+1}$ , ocjenjujemo ga linearnom aproksimacijom u  $(x_i, y_i)$ . Što ako zanemarimo da ne znamo  $y_{i+1}$ ?

Dobivamo implicitnu Adamsovu formulu drugog reda

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})].$$

Ponekad se Adamsova formula može eksplicitno riješiti po  $y_{i+1}$ , recimo kad je  $f(x, y)$  linearno po  $y$ . Može se i iterativno rješavati.

### 6.2.2 Metode Runge–Kutta

Eulerova metoda temelji se na linearnoj ekstrapolaciji funkcije  $y(x)$ . Pokušajmo vidjeti što možemo dobiti kvadratnom ekstrapolacijom. Uzmimo  $x_0 = 0$ , pretpostavimo  $y(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$  u okolini  $O$  i odredimo nepoznate koeficijente  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  tako da jednačina bude zadovoljena u okolini  $O$ .

$$y' = \beta + 2\gamma x = f(x, \alpha + \beta x + \gamma x^2)$$

Razvijemo desnu stranu u Taylorov red (ili ju aproksimiramo Taylorovim polinomom). Prisjetimo se,

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ & + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right] + \dots \end{aligned}$$

Za  $x_0 = 0$  dobijemo

$$\beta + 2\gamma x = f(0, \alpha) + x \frac{\partial f}{\partial x}(0, \alpha) + (\beta x + \gamma x^2) \frac{\partial f}{\partial y}(0, \alpha) + \dots$$

Zbog  $y(0) = y_0$  mora biti  $\alpha = y_0$ . Izjednačavanjem koeficijenata uz potencije od  $x$  koliko se god može (ovdje do  $x^1$ ) dobijemo  $\beta = f(0, \alpha)$ ,  $2\gamma = \frac{\partial f}{\partial x}(0, \alpha) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(0, \alpha)$ . (Stavimo li  $\gamma = 0$  dobijemo Eulerovu metodu, linearnu ekstrapolaciju).

$$y(h) = \underbrace{y(0)}_{y_0} + hf(0, y_0) + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) + f(0, y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0) \right]$$

Sad treba aproksimirati  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0)$  i  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0)$ . Dovoljno je uzeti najjednostavniju aproksimaciju konačnim razlikama, jer su već množene s  $h^2$ , što je malo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) &= \frac{1}{h} [f(h, y_0) - f(0, y_0)] \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0) &= \frac{1}{k} [f(j, y_0 + k) - f(j, y_0)] \end{aligned}$$

Ovdje su  $j$  i  $k$  veličine sličnog reda kao i  $h$ . Možemo ih odabrati po volji. Neki od mogućih izbora su:

- $j = 0, k = hf(0, y_0)$
- $j = 0, k = hf(h, y_0)$
- $j = h, k = hf(0, y_0)$
- $j = h, k = hf(h, y_0)$



Na primjer, treći izbor daje

$$y = y_0 + hf(0, y_0) + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{1}{h}(f(h, y_0) - f(0, y_0)) + f(0, y_0) \frac{f(h, y_0 + h) - f(h, y_0)}{hf(0, y_0)} \right]$$

$$y = y_0 + \frac{h}{2} \underbrace{f(0, y_0)}_{k_1} + \frac{h}{2} \underbrace{f(h, y_0 + hf(0, y_0))}_{k_2}$$

$$k_1 = hf(0, y_0), \quad k_2 = hf(h, y_0 + \frac{k_1}{2})$$

$$y(h) = y_0 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2$$

$$\left. \begin{array}{l} (x_i, y_i) \rightarrow (x_{i+1}, y_{i+1}) \\ k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf(x_{i+1}, y_i + \frac{1}{2}k_1) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \end{array} \right\} \text{Runge - Kutta metoda 2. reda}$$

Runge–Kutta metoda drugog reda je poboljšana Eulerova metoda. Odgovara integraciji trapeznom formulom u kojoj je  $y(h)$  ocijenjen jednostavnom Eulerovom metodom

$$y(h) \approx y_0 + \frac{h}{2} [f(0, y_0) + \underbrace{f(h, y(h))}_{y_0 + hf(0, y_0)}]$$

Korištenjem Taylorovog polinoma višeg stupnja dobiju se Runge–Kutta metode višeg reda. Najčešće je korištena Runge–Kutta metoda četvrtog reda.

$$\left. \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = hf(x_{i+1}, y_i + k_3) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 \end{array} \right\} \text{Runge - Kutta metoda 4. reda}$$

## 6.3 Metode konačnih razlika za parcijalne diferencijalne jednačbe

Apksimacija druge derivacije se dobije na sljedeći način:

$$y''(x) = (y'(x))'$$

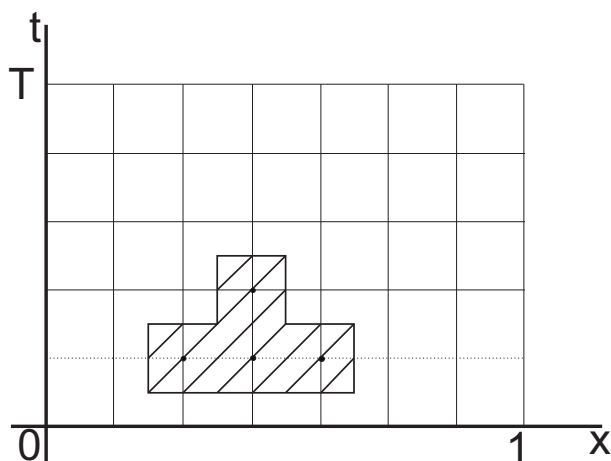
$$\begin{aligned}
 y''(x_i) &\approx \frac{y'(x_i) - y'(x_{i-1}))}{h} & y'(x_i) &\approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \\
 y'(x_{i-1}) &\approx \frac{y(x_i) - y(x_{i-1}))}{h} & y''(x_i) &\approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}
 \end{aligned}$$

### 6.3.1 Eksplicitna shema za jednačbu vođenja topline

Promatrat ćemo inicijalno-rubni problem

$$\begin{cases}
 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty \\
 u(0, t) = 1 & 0 < t < \infty \\
 \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = -[u(1, t) - g(t)] & 0 < t < \infty \\
 u(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq 1
 \end{cases}$$

Temperatura na lijevom rubu je fiksna, na desnom rubu je toplinski tok proporcionalan razlici temperatura ruba ( $u(1, t)$ ) i sredine ( $g(t)$ ).



Slika 6.11: Shema za eksplicitnu metodu.

Uvedimo oznake

$$\begin{aligned}
 x_j &= jh, & h &= \Delta x, \quad j = 0, \dots, n \\
 t_i &= ik, & k &= \Delta t, \quad i = 0, \dots, m \\
 u_{ij} &\approx u(x_j, t_i).
 \end{aligned}$$

Aproksimacije parcijalnih derivacija

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &\approx \frac{1}{k} [u(x, t+k) - u(x, t)] = \frac{1}{k} [u_{i+1,j} - u_{i,j}] \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{h^2} [u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)] \\ &= \frac{1}{h^2} [u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}]\end{aligned}$$

uvrstimo u diferencijalnu jednačbu, pa dobijemo relaciju

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \frac{k}{h^2} [u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}].$$

Vrijednosti funkcije  $u$  su nam poznate na donjem ( $i=0$ ) rubu (iz početnog uvjeta) i na lijevom rubu (rubni uvjet). Na desnom rubu imamo

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = -[u(1, t) - g(t)],$$

pri čemu je  $g(t)$  zadano. Ovo diskretiziramo kao

$$\frac{1}{h} [u_{i,n} - u_{i,n-1}] = -[u_{i,n} - g_i],$$

odakle dobivamo

$$u_{i,n} = \frac{u_{i,n-1} - hg_i}{h+1}.$$

Ovo se zove **eksplicitna shema** jer se vrijednosti u vremenu  $t$  dobivaju preko vrijednosti u ranijim vremenima. Koraci su dani s

$$h = \frac{1}{n} \text{ (ili } h = \frac{L}{n}), \quad k = \frac{T}{m}.$$

### 6.3.2 Eksplicitna shema za valnu jednačbu

Promatramo inicijalno-rubni problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) = g_1(t) \\ u(1, t) = g_2(t) \end{aligned} \right\} \text{rubni uvjeti} \quad \left. \begin{aligned} u(x, 0) = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \end{aligned} \right\} \text{početni uvjeti}$$

Apksimirajmo derivacije

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &\approx \frac{1}{k^2} [u(x, t+k) - 2u(x, t) + u(x, t-k)] \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{h^2} [u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &\approx \frac{1}{k} [u(x, k) - u(x, 0)] = \frac{1}{k} [u(x, k) - \varphi(x)]\end{aligned}$$

i uvrstimo ih u diferencijalnu jednačbu

$$u_{i+1,j} = 2u_{i,j} - u_{i-1,j} + \left(\frac{k}{h}\right)^2 [u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}], \text{ za } i, j \geq 2.$$

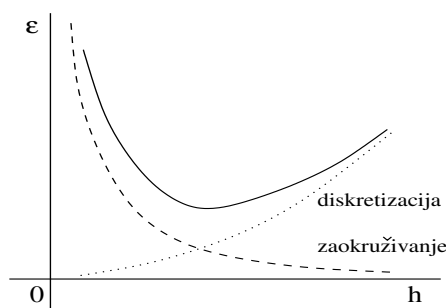
Vrijednosti za  $i = 1$ , tj. za  $t = \Delta t$ , dobivamo iz diskretizacije početnog uvjeta

$$\frac{1}{k} [u(x, k) - \varphi(x)] = \psi(x), \quad \text{tj. } \frac{1}{k} [u_{1,j} - \varphi_j] = \psi_j, \quad u_{1,j} = \varphi_j + k\psi_j$$

a to izračunamo iz rubnih uvjeta.

Problemi s eksplicitnim shemama su sljedeći:

- korak  $k$  po vremenu mora biti mali u usporedbi s korakom po prostornoj koordinati. U suprotnom se nagomilava grješka zaokruživanja. Empirijsko pravilo je  $\frac{k}{h^2} \leq 0.5$ . Na primjer, za  $h = 0.1 \implies k \leq 0.005$ , a to znači 200 koraka od  $t = 0$  do  $t = 1$ .
- numerička nestabilnost
- treba balansirati pogrješku diskretizacije i pogrješku zaokruživanja.



Slika 6.12: Pogrješka metode i pogrješka zaokruživanja.

### 6.3.3 Implicitna shema za jednačbu vođenja topline

Promotrimo inicijalno-rubni problem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= g_1(t) \\ u(1, t) &= g_2(t) \end{aligned} \right\} \text{rubni uvjeti} \quad u(x, 0) = \varphi(x) - \text{početni uvjet.}$$

Pretpostavimo da je  $g_1(t) = g_2(t) = 0$  i  $\varphi(x) = 1$ . Promatramo sljedeće aproksimacije derivacija:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \approx \frac{1}{k}[u(x, t+k) - u(x, t)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \approx \frac{\lambda}{h^2}[u(x+h, t+k) - 2u(x, t+k) + u(x-h, t+k)]$$

$$+ \frac{1-\lambda}{h^2}[u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)],$$

pri čemu se  $\lambda$  bira iz  $[0, 1]$ . Dakle  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$  se aproksimira težinskom sredinom centralnih razlika po  $x$  u trenucima  $t$  i  $t+k = t + \Delta t$ . Za  $\lambda = \frac{1}{2}$  to je obična aritmetička sredina. Za  $\lambda = 0$  imamo eksplicitnu shemu od prije. Ovdje imamo i mali problem jer ne znamo  $u(x, t+k)$ ! Nastavimo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{k}(u_{i+1,j} - u_{i,j}) &= \frac{\lambda}{h^2}(u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}) \\ &+ \frac{1-\lambda}{h^2}(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) \\ u_{i,0} = 0, \quad u_{i,n} = 0, & \quad i = 0, 1, \dots, m, \\ u_{0,j} = 1, & \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \right\}$$

Uvedimo oznaku  $r = \frac{k}{h^2}$ . Gornji izraz možemo prepisati kao

$$-\lambda r u_{i+1,j+1} + (1 + 2\lambda r) u_{i+1,j} - \lambda r u_{i+1,j-1} =$$

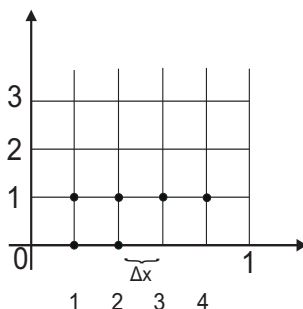
$$r(1-\lambda) u_{i,j+1} + [1 - 2r(1-\lambda)] u_{i,j} + r(1-\lambda) u_{i,j-1}.$$

Za fiksirani  $i$  te za  $j$  koji ide od 1 do  $n-1$  gornji izraz je sustav od  $n-1$  jednačbi s  $n-1$  nepoznanicom  $u_{i+1,1}, u_{i+1,2}, \dots, u_{i+1,n-1}$ . Rješavanjem tog sustava dobijemo vrijednosti aproksimacija funkcije  $u$  u unutarnjim čvorovima rešetke/mreže.

**Primjer 6.3** (i) Odaberimo neki  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Recimo,  $\lambda = \frac{1}{2}$ . (Izbor  $\lambda = 0.5$  daje shemu poznatu kao Crank-Nicolsonova shema).

(ii) Odaberimo  $h$  i  $k$ . Recimo,  $h = \Delta x = 0.2$ ,  $k = \Delta t = 0.08$ . Za ovakav izbor je  $r = \frac{k}{h^2} = 2$ .

(iii) Mreža ima 4 unutarnja čvora po osi  $x$ .



Slika 6.13: Implicitna shema za jednačbu vođenja topline.

Formiramo jednačbe za čvorove na razini  $i = 1$ .

$$\begin{aligned} \underbrace{-u_{10} + 3u_{11} - u_{12}}_0 &= u_{00} - u_{01} + u_{02} = 1 \\ -u_{11} + 3u_{12} - u_{13} &= u_{01} - u_{02} + u_{03} = 1 \\ -u_{12} + 3u_{13} - u_{14} &= u_{02} - u_{03} + u_{04} = 1 \\ -u_{13} + 3u_{14} - \underbrace{u_{15}}_0 &= u_{03} - u_{04} + u_{05} = 1 \end{aligned}$$

Sustav možemo napisati uz pomoć trodijagonalne matrice sustava:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kad riješimo ovaj sustav, dobijemo  $u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}$ . Dalje s tim idemo u jednačbe za  $u_{21}, u_{22}, u_{23}$  i  $u_{24}$ . Dobijemo  $u_{11} = \frac{3}{5}, u_{12} = \frac{4}{5}, u_{13} = \frac{4}{5}, u_{14} = \frac{3}{5}$ .

Isti se postupak ponavlja za veće  $i$ , tj. za veća vremena.

U općenitom slučaju za  $n$  unutarnjih čvorova po  $x$ , dobije se sustav s trodijagonalnom matricom.

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Sustav se rješava tako da transformiramo trodijagonalnu matricu u gornju trokutastu,

$$\begin{bmatrix} 1 & c_1^* & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_2^* & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{n-1}^* \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^* \\ d_2^* \\ d_3^* \\ \vdots \\ \vdots \\ d_n^* \end{bmatrix}$$

pri čemu je  $c_1^* = \frac{c_1}{b_1}$ ,  $d_1^* = \frac{d_1}{b_1}$ ,  $c_{i+1}^* = \frac{c_{i+1}}{b_{i+1} - a_i c_i^*}$ ,  $d_{i+1}^* = \frac{d_{i+1} - a_i d_i^*}{b_{i+1} - a_i c_i^*}$ .

U implicitnoj shemi na svakom vremenskom koraku moramo rješavati linearni sustav. Dobitak je numerička stabilnost, tj. možemo uz grublji vremenski korak dobiti istu točnost. Grublji korak po vremenu znači i manje računa.

Trodijagonalne matrice smo već vidjeli kod rješavanja problema ravnoteže žice. Pojavljuju se i kod konačnih razlika i kod metode konačnih elemenata za žicu.

### 6.3.4 Metoda konačnih razlika za eliptičke probleme

Prva i druga derivacija funkcije  $f(x)$  se mogu aproksimirati pomoću Taylorovog teorema na sljedeći način:

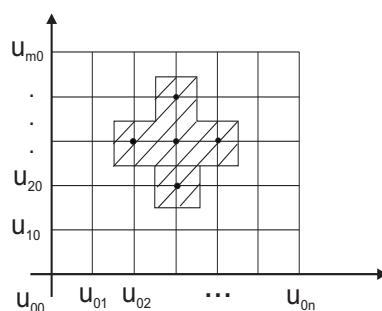
$$\begin{aligned} f'(x) &\approx \frac{1}{2h} [f(x+h) - f(x-h)], \\ f''(x) &\approx \frac{1}{h^2} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)]. \end{aligned}$$

Polazeći od gornjih formula dobivamo sljedeće aproksimacije parcijalnih derivacija 2. reda funkcije  $u(x, y)$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2} [u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{k^2} [u(x, y+k) - 2u(x, y) + u(x, y-k)].$$

Neka funkcija  $u(x, y)$  predstavlja progib pravokutne membrane  $\Omega$ . Membranu podijelimo pravokutnom mrežom kao na donjoj slici



Slika 6.14: Shema za Laplaceovu (Poissonovu) jednačbu.

Uvedimo oznake za približne vrijednosti progiba u čvorovima mreže:

$$u(x_j, y_i) \approx u_{ij}$$

$$u(x_j, y_i + k) \approx u_{i+1,j}$$

$$u(x_j + h, y_i) \approx u_{i,j+1}$$

$$u(x_j, y_i - k) \approx u_{i-1,j}$$

$$u(x_j - h, y_i) \approx u_{i,j-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, y_i) \approx \frac{1}{2h}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_j, y_i) \approx \frac{1}{2k}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, y_i) \approx \frac{1}{h^2}[u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_j, y_i) \approx \frac{1}{k^2}[u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}]$$



Oдавde dobivamo diskretizaciju operatora  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ :

$$\Delta u(x, y) = \frac{1}{h^2}[u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}] + \frac{1}{k^2}[u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}].$$

Za slučaj  $h = k$  imamo za jednačbu  $\Delta u = 0$

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = 0.$$

Odatle

$$u_{ij} = \frac{1}{4}[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}].$$

Dakle, vrijednosti  $u$  u unutarnjim čvorovima su srednje vrijednosti na susjednim čvorovima.

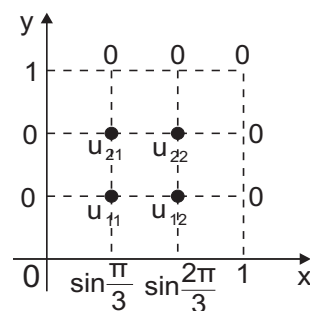
Postupak rješavanja:

- i) Pridružimo veličinama  $u_{ij}$  srednju vrijednost svih rubnih uvjeta.
- ii) Zamijenimo vrijednosti  $u_{ij}$  novim vrijednostima dobivenim usrednjavanjem preko četiri susjedna čvora. (Nije naročito bitno kojim redom, može po redovima, a može i po stupcima.) Nakon nekoliko iteracija postupak konvergira.

**Primjer 6.4** Riješimo jednačbu  $\Delta u = 0$  na  $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$  uz rubne uvjete

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \sin \pi x \\ u(x, 1) &= u(0, y) = u(1, y) = 0 \end{aligned} \right\} \text{rubni uvjeti}$$

ako je  $m = n = 3$ .



Slika 6.15: Uz primjer 6.4.

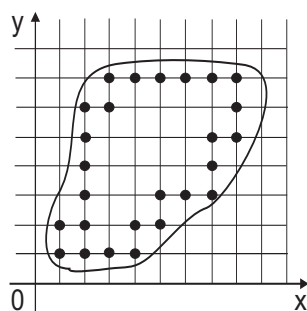
Sustav za  $u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}$  glasi:

$$\begin{aligned} -4u_{11} + 0 + \sin \frac{\pi}{3} + u_{12} + u_{21} &= 0 \\ -4u_{12} + u_{11} + \sin \frac{2\pi}{3} + 0 + u_{22} &= 0 \\ -4u_{21} + 0 + 0 + u_{11} + u_{22} &= 0 \\ -4u_{22} + 0 + 0 + u_{21} + u_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Imamo onoliko jednačbi koliko je unutarnjih čvorova mreže. U matricnom obliku sustav zapisujemo kao

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ovakvi se sustavi rješavaju iteracijskim metodama. Neke od njih su Jacobijeva, Gauss-Seidelova, SOR. Matrice su im rijetke, vrpčaste, dijagonalno dominantne. Za Neumanov problem, derivacije koje ulaze u rubne uvjete zamjenjuju se konačnim razlikama. Metoda je, uz očite modifikacije, primjenjiva i na nehomogene probleme (u desnu stranu ulaze  $f(x, y) = f_{ij}$ ) i na probleme s nekonstantnim koeficijentima (njihove vrijednosti u čvorovima mreže ulaze u matricu koeficijenata). Što ako područje nije pravokutnik? Rubni uvjeti zadani na  $\partial\Omega$  zamjenjuju se vrijednostima u čvorovima mreže.



Slika 6.16: Nepravokutno područje.

Mreža ne mora biti svuda jednako gusta – čvorovi mogu biti gušći tamo gdje se očekuje brža promjena rješenja. Treba paziti na numeraciju čvorova jer ona ima veliki utjecaj na strukturu matrice, tj. raspored nula, širinu vrpce, itd. Poučno je nacrtati

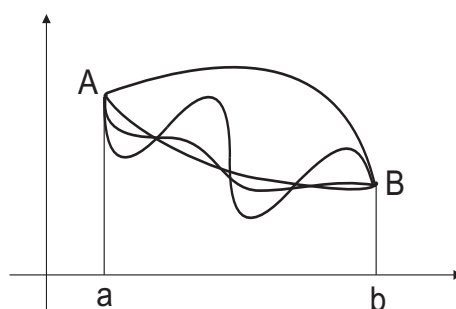
$10 \times 10$  mrežu i numerirati njene čvorove na dva načina, prvo s lijeva na desno u svakom redu, odozgo prema dolje, a nakon toga, recimo, spiralno, prvo čvorove na rubu pa prema unutra. Lako se vidi da je u prvom slučaju širina vrpce jednaka 10, dok je u drugom slučaju jednaka 35. Kako šira vrpca znači manju efikasnost pohrane matrice u memoriju računala i sporiju konvergenciju iteracijskih metoda za rješavanje linearnog sustava, jasno je da numeraciji čvorova treba pokloniti posebnu pozornost.

## 6.4 Metode konačnih elemenata

Za razliku od metoda konačnih razlika koje se temelje na diskretizaciji diferencijalnih operatora zamjenom derivacije konačnom razlikom, metode konačnih elemenata polaze od varijacijske formulacije i od minimizacije odgovarajućih funkcionala na konačnodimenzionalnim potprostorima razapetim baznim funkcijama koje zadovoljavaju rubne uvjete. Približna rješenja se dobivaju kao projekcije točnih rješenja na te konačnodimenzionalne podprostore, pa se za metode konačnih elemenata još kaže i da su projekcijske. Prednost varijacijske formulacije je da zahtijeva manju glatkoću rješenja i koeficijenta. Dodatna prednost je da se dobivaju matrice s dobrim numeričkim svojstvima.

### 6.4.1 Varijacijski račun

Problem brahistokrone je problem određivanja krivulje  $y = y(x)$  po kojoj će se materijalna točka mase  $m$  najbrže spustiti iz točke  $A$  u točku  $B$  kao na slici 6.17.



Slika 6.17: Problem brahistokrone.

Promotrimo

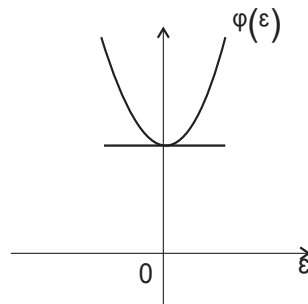
$$T = \int_0^T dt = \int_{\Gamma} \frac{dt}{ds} ds = \int_{\Gamma} \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\Gamma} \frac{ds}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx.$$

Gornja veličina  $T[y]$  ovisi o krivulji  $\Gamma$  zadanoj kao graf funkcije  $y = y(x)$ , tj. ovisi o funkciji. Takve veličine zovemo **funktionalima**. Određivanje brahistokrone svodi se na nalaženje funkcije  $\bar{y}(x)$  koja minimizira funkcional  $T[y]$  na klasi svih krivulja koje prolaze kroz  $A$  i  $B$ , tj. na klasi svih funkcija koje zadovoljavaju  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ .

Općenito, promatramo funkcional koji ovisi o funkciji, njenoj varijabli i o derivaciji funkcije:

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx.$$

Zanimaju nas funkcije  $y(x)$  za koje se taj funkcional minimizira i koje zadovoljavaju  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ . Pretpostavimo da takva funkcija  $\bar{y}(x)$  postoji. Promotrimo malu varijaciju funkcije  $\bar{y}$ , tj. funkciju  $\bar{y}(x) + \varepsilon\eta(x)$ , pri čemu je  $\varepsilon$  mali broj a  $\eta(x)$  funkcija koja zadovoljava  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ . Kako  $\bar{y}$  minimizira funkcional  $J$ , imamo  $J[\bar{y}] \leq J[\bar{y} + \varepsilon\eta]$ , za svaki  $\varepsilon$ . Gledamo to kao funkciju od  $\varepsilon$ ,  $\varphi(\varepsilon) = J[\bar{y} + \varepsilon\eta]$ .



Slika 6.18: Uz izvod Euler-Lagrangeove jednadžbe.

Funkcija  $\varphi(\varepsilon)$  ima minimum za  $\varepsilon = 0$ , pa iz Fermatove leme slijedi  $\varphi'(\varepsilon) = 0$  za  $\varepsilon = 0$ . Izračunamo  $\varphi'(\varepsilon)$ :

$$\begin{aligned} \varphi'(\varepsilon) &= \frac{d\varphi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} J[\bar{y} + \varepsilon\eta] = \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(x, \bar{y} + \varepsilon\eta, \bar{y}' + \varepsilon\eta') dx \\ &= \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \eta'(x) \right] dx. \end{aligned}$$

Parcijalnom integracijom dobijemo da je desna strana jednaka

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \right] \eta(x) dx. \quad (\text{Rubni uvjet za } \eta(x)!)$$

Dakle, nužni uvjet ekstrema funkcionala  $J[y]$  dan je kao

$$\frac{d\varphi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \right] \eta(x) dx = 0.$$

Kako to vrijedi za sve  $\eta(x)$  koje zadovoljavaju rubne uvjete, koristeći osnovnu lemu varijacijskog računa dobivamo da mora biti zadovoljeno i

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} = 0.$$

Dakle: Ako funkcija  $y(x)$  minimizira funkcional

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

(na klasi glatkih funkcija koje zadovoljavaju rubne uvjete), onda  $y(x)$  mora zadovoljavati i jednadžbu

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (6.1)$$

s tim rubnim uvjetom. Jednadžba (6.1) zove se **Euler-Lagrangeova jednadžba**.

**Primjer 6.5** Pokažimo da je dužina zaista najkraća spojnica svojih krajnjih točaka. Ako te krajnje točke  $A = (x_A, y_A)$  i  $B = (x_B, y_B)$  spojimo krivuljom opisanom s  $y = y(x)$ , najkraću duljinu će imati krivulja  $\Gamma$  koja minimizira funkcional

$$J[y] = \int_{\Gamma} dl = \int_{x_A}^{x_B} F(x, y, y') dx,$$

pri čemu je  $F(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}$ . Minimizira se po svim krivuljama  $\Gamma$  koje zadovoljavaju rubne uvjete, tj. krajevi su im točke  $A$  i  $B$ . Kako  $F$  ne ovisi o  $y$ , Euler-Lagrangeova jednadžba se svodi na

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{d}{dx} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + (y')^2}} = 0.$$

Sređivanjem dobijemo

$$\frac{y''(x)}{[\sqrt{1 + (y')^2}]^3} = 0,$$

odakle slijedi da je  $y$  linearna funkcija od  $x$ , tj.  $y = ax + b$ . Koeficijenti  $a$  i  $b$  se određuju iz rubnih uvjeta  $y(x_A) = y_A$  i  $y(x_B) = y_B$ .

**Primjer 6.6** Pogledajmo primjer homogenog funkcionala koji ne ovisi o  $x$ :  $J[y] = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 1$ .

$$F(x, y, y') = y^2 + y'^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y', \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y''.$$

Dakle,

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y - 2y'' = 0,$$

tj.

$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 0, y(1) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = 0.42(e^x - e^{-x}) = 0.84 \operatorname{sh} x.$$

**Primjer 6.7**  $F(u, u') = \frac{1}{2}(au'^2 + bu^2 - 2fu)$  na  $[0, l]$ ,  $u(0) = u(l) = 0$ , pri čemu su  $a(x) > 0$ ,  $b(x) \geq 0$  na  $[0, l]$  i  $f(x)$  dovoljno glatke funkcije.

$$\frac{\partial F}{\partial u} = bu - f, \quad \frac{\partial F}{\partial u'} = au', \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right) = (a(x)u'(x))'.$$

Dakle,

$$\left. \begin{array}{l} (a(x)u'(x))' - b(x)u(x) = f(x) \\ u(0) = u(l) = 0 \end{array} \right\} \text{ – izgleda li poznato?}$$

Radi se o rubnom problemu koji opisuje ravnotežu žice.

Opisani postupak funkcionira analogno i u više dimenzija. Može se pokazati da se minimizacija funkcionala

$$J[u] = \int_0^1 \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \text{ uz } u|_{\partial\Omega} = g$$

može svesti na Dirichletov problem  $\Delta u = 0$  u  $\Omega$ ,  $u|_{\partial\Omega} = g$ . Slično, funkcional

$$\iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2uf \right] dx dy$$

vodi na Poissonovu jednadžbu  $\Delta u = f$  u  $\Omega$ . Funkcional gornjeg oblika se zove **funkcional energije**.

(Paralela:  $f(x) = 0$  vs.  $\min f^2(x)$ )

Funkcional  $J$  možemo interpretirati preko potencijalne energije:

$$F(u, u') = \frac{1}{2}(au'^2 - \underbrace{2fu}_{\text{silu}}) \quad (au'^2 = au'u' = qu'),$$

$$J[u] = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^l au'^2 dx}_{\text{unutarnja potencijalna energija}} - \underbrace{\int_0^l fu dx}_{\text{potencijalna energija vanjske sile}}.$$

## 6.4.2 Ritzova metoda

Promotrimo funkcional

$$J[u] = \frac{1}{2} \int_0^l au'^2 dx - \int_0^l fu dx$$

uz rubne uvjete  $u(0) = u(l) = 0$ . Uzmimo dopuštene funkcije  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  koje su linearno nezavisne. One razapinju vektorski potprostor  $L(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ . Promatramo naš funkcional na tom potprostoru. Neka se funkcional minimizira za  $u_n \in L(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , tj. neka vrijedi

$$J(u_n) = \min_{v \in L(\varphi_1, \dots, \varphi_n)} J(v).$$

Intuitivno je jasno da više dimenzija daje bolju aproksimaciju, tj. da, u određenom smislu,  $u_n \rightarrow u$ , gdje je  $u$  točno rješenje.

$$u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$$

$$J(u_n) = J\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i\right) = \Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Tražimo vrijednosti  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  za koje se minimizira  $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . One moraju zadovoljavati nužni uvjet  $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} = 0, i = 1, \dots, n$ . Prema tome, vrijedi

$$\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{2} \int_0^l a \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i' \right)^2 dx - \int_0^l f \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \right) dx \quad / \frac{\partial}{\partial \alpha_j},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_j} = \int_0^l a \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i' \right) \underbrace{\varphi_j'}_{\sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_j}}_{\delta_{ij}} \varphi_j'} dx - \int_0^l f \varphi_j dx = 0,$$

odnosno

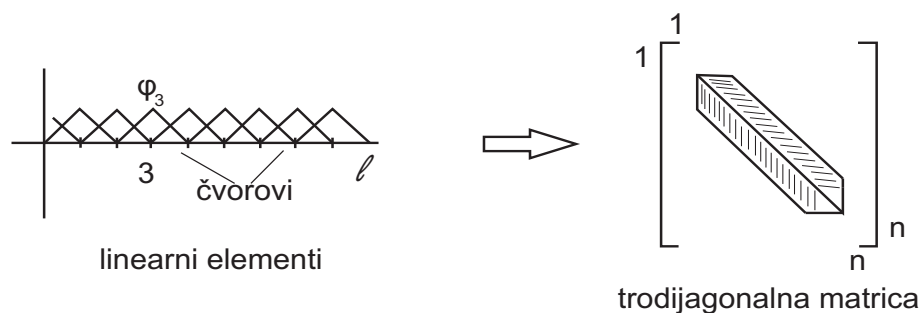
$$\sum_{i=1}^n \underbrace{\left( \int_0^l a \varphi_i' \varphi_j' dx \right)}_{K_{ji} \text{-- poznato}} \alpha_i = \underbrace{\int_0^l f \varphi_j dx}_{\text{poznato, oznaka } f_j}.$$

Time smo dobili linearni sustav za  $\alpha_j$ :

$$\sum_{i=1}^n K_{ji} \alpha_i = f_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad \text{tj.}$$

$$K \vec{\alpha} = \vec{f}.$$

Matrica  $K = [K_{ij}]$  se zove **matrica krutosti**. Ona je uvijek regularna, zbog linearne nezavisnosti baznih funkcija. Za bazne funkcije uzimamo one koje imaju svojstva glatkosti koja očekujemo od rješenja. **Konačnim elementima** nazivamo funkcije koje su različite od nule na malim komadima u  $[0, l]$ .



Slika 6.19: Linearni konačni elementi i odgovarajuća matrica krutosti.



Ako umjesto linearnih uzmemo složenije elemente, raste broj dijagonala u matrici krutosti. Dobivamo **vrpčastu matricu**. U više dimenzija širina vrpce ovisi o numeraciji čvorova.

Ritzova aproksimacija je ortogonalna projekcija točnog rješenja na potprostor  $L(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , pri čemu pretpostavljamo ortogonalnost u smislu skalarnog produkta definiranog s

$$f \cdot g = \int_0^l f' g' dx.$$

Osim Ritzove, postoje i druge formulacije, kao, npr., Galerkinova, Kantorovičeva, najmanjih kvadrata, kolokacije itd.



# Bibliografija

- [1] I. Aganović, K. Veselić, *Jednadžbe matematičke fizike*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.
- [2] B. P. Demidovich, I. A. Maron, *Computational Mathematics*, Mir, Moscow, 1981.
- [3] S. J. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Dover, New York, 1993.
- [4] M. Krasnov, A. Kiselev, G. Makarenko, E. Shikin, *Mathematical Analysis for Engineers*, Vol. 1 and 2, Mir, Moscow, 1990.
- [5] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, J. Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2011.
- [6] J. Nearing, *Mathematical Tools for Physics*, Dover, New York, 2010.
- [7] A. N. Tihonov, A. A. Samarskii, *Uravnenija matematičeskoj fiziki*, Nauka, Moskva, 1972.