Kružna membrana

Laplaceova jednadžba za kružnu membranu

Promotrimo sada problem ravnoteže kružne membrane polumjera R. Budući da se radi o kružnim problemima, prebacujemo se u polarni koordinatni sustav.

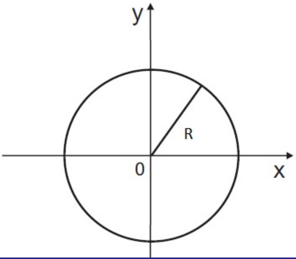
Laplaceova jednadžba za kružnu membranu

Promotrimo sada problem ravnoteže kružne membrane polumjera R. Budući da se radi o kružnim problemima, prebacujemo se u polarni koordinatni sustav.

Rješavamo Laplaceovu jednadžbu $\Delta u = 0$ s rubnim uvjetima $u\,|_R = \alpha(\varphi)$ (na rubu kružnice), tj.

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u(r,\varphi) = 0 & \text{za } 0 < r < R \\ u\,|_R = u(R,\varphi) = \alpha(\varphi) & 0 \le \varphi < 2\pi. \end{array}\right\}.$$

Ovu zadaću nazivamo **unutarnjim Dirichletovim problemom**.



Laplaceova jednadžba za kružnu membranu

U polarnim koordinatama Laplaceov operator ima oblik

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}$$

Laplaceova jednadžba za kružnu membranu

U polarnim koordinatama Laplaceov operator ima oblik

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}$$

Dakle, rješavamo jednadžbu

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

u polarnom koordinatnom sustavu u ravnini, uz rubni uvjet

$$u\mid_R = u(R,\varphi) = \alpha(\varphi).$$

Rješenje Laplaceove jednadžbe (kružna membrana)

Rješenje tražimo u obliku $u(r,\varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$. Sličnim razmatranjima kao i prije i iz činjenice da je funkcija φ periodična s periodom 2π konačno dobijemo rješenje Laplaceove jednadžbe

$$\boxed{u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (E_{1n} \cos n\varphi + E_{2n} \sin n\varphi)},$$

za $r \in [0, R]$ i $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Rješenje Laplaceove jednadžbe (kružna membrana)

Rješenje tražimo u obliku $u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$. Sličnim razmatranjima kao i prije i iz činjenice da je funkcija φ periodična s periodom 2π konačno dobijemo rješenje Laplaceove jednadžbe

$$\boxed{u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (E_{1n} \cos n\varphi + E_{2n} \sin n\varphi)},$$

za $r \in [0, R]$ i $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Koeficijente računamo po formulama

$$E_{10} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\varphi) \mathrm{d}\varphi,$$

$$E_{1n} = \frac{1}{R^n \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\varphi) \cos n\varphi \mathrm{d}\varphi, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{i}$$

$$E_{2n} = \frac{1}{R^n \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\varphi) \sin n\varphi \mathrm{d}\varphi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak (3.)

Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R = 3$ uz rubne uvjete:

a) $u|_{r=3} = 2\cos 2\varphi = \alpha(\varphi)$,
b) $u|_{r=3} = 4 + 3\sin 5\varphi = \alpha(\varphi)$.

Zadatak (3.)

Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R = 3$ uz rubne uvjete:

a) $u|_{r=3} = 2\cos 2\varphi = \alpha(\varphi)$,

b) $u|_{r=3} = 4 + 3\sin 5\varphi = \alpha(\varphi)$.

Rješenje: Znamo da je rješenje dano formulom

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \Big(E_{1n} \cos n\varphi + E_{2n} \sin n\varphi \Big),$$

gdje je

$$E_{10} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\varphi) \mathrm{d}\varphi,$$

$$E_{1n} = \frac{1}{3^n \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\varphi) \cos n\varphi \mathrm{d}\varphi, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$E_{2n} = \frac{1}{3^n \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\varphi) \sin n\varphi \mathrm{d}\varphi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Za $n \in \mathbb{N}_0$ računamo koeficijente:

$$E_{10} = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi} \sin 2\varphi \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$E_{1n} = \frac{2}{3^n \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\varphi \cos n\varphi \mathrm{d}\varphi = \begin{cases} \frac{2}{9}, & n = 2 \\ 0, & n \neq 2, \end{cases}$$

$$E_{2n} = \frac{2}{3^n \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\varphi \sin n\varphi \mathrm{d}\varphi = 0.$$

(a) Za $n \in \mathbb{N}_0$ računamo koeficijente:

$$E_{10} = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\sin 2\varphi\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$E_{1n} = \frac{2}{3^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\varphi \cos n\varphi \mathrm{d}\varphi = \begin{cases} \frac{2}{9}, & n = 2 \\ 0, & n \neq 2, \end{cases}$$

$$E_{2n} = \frac{2}{3^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\varphi \sin n\varphi \mathrm{d}\varphi = 0.$$

Prilikom određivanja koeficijenata E_{1n} i E_{2n} koristili smo svojstvo ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija. Rješenje zadanog problema ravnoteže kružne membrane je funkcija

$$u(r, \varphi) = \frac{2}{9}r^2 \cos 2\varphi, \quad r \in [0, 3], \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

(b) Za $n \in \mathbb{N}_0$ računamo koeficijente:

$$E_{10} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(4 + 3\sin 5\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\left(4\varphi - \frac{3}{5}\cos 5\varphi\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(4\pi - \frac{3}{5}\cos 5\pi + 4\pi + \frac{3}{5}\cos 5\pi\right) = \frac{8\pi}{2\pi} = 4,$$

(b) Za $n \in \mathbb{N}_0$ računamo koeficijente:

$$E_{10} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(4+3\sin 5\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\left(4\varphi - \frac{3}{5}\cos 5\varphi\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(4\pi - \frac{3}{5}\cos 5\pi + 4\pi + \frac{3}{5}\cos 5\pi\right) = \frac{8\pi}{2\pi} = 4,$$

$$E_{1n} = \frac{1}{3^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(4+3\sin 5\varphi)\cos n\varphi \mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{4}{3^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\varphi \mathrm{d}\varphi + \frac{3}{3^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 5\varphi\cos n\varphi \mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{4}{3^n n\pi}\sin n\varphi\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$
\begin{aligned}
E_{2n} &= \frac{1}{3^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(4+3\sin 5\varphi)\sin n\varphi \mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{1}{3^n\pi}\left(-\frac{4}{n}\cos n\varphi\Big|_{-\pi}^{\pi} + 3\int_{-\pi}^{\pi}\sin 5\varphi \sin n\varphi \mathrm{d}\varphi\right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{81}, & n=5 \\ 0, & n\neq 5, \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{2n} &= \frac{1}{3^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(4+3\sin 5\varphi)\sin n\varphi \mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{1}{3^n\pi}\left(-\frac{4}{n}\cos n\varphi\Big|_{-\pi}^{\pi} + 3\int_{-\pi}^{\pi}\sin 5\varphi \sin n\varphi \mathrm{d}\varphi\right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{81}, & n=5 \\ 0, & n\neq 5, \end{cases}
\end{aligned}
$$

Prilikom određivanja koeficijenata E_{1n} i E_{2n} koristili smo svojstvo ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija. Rješenje postavljenog problema ravnoteže kružne membrane je funkcija

$$
u(r,\varphi) = 4 + \frac{1}{81}r^5\sin 5\varphi, \quad r\in[0,3], \quad \varphi\in[0,2\pi).
$$

Poissonova jednadžba za kružnu membranu

Pogledajmo sad jedan specijalni slučaj djelovanja vanjske sile na kružnu membranu, u kojem vanjska sila ne ovisi o kutu φ nego samo o r, tj. imamo radijalno djelovanje.

Poissonova jednadžba za kružnu membranu

Pogledajmo sad jedan specijalni slučaj djelovanja vanjske sile na kružnu membranu, u kojem vanjska sila ne ovisi o kutu φ nego samo o r, tj. imamo radijalno djelovanje. Rješavamo problem

$$\left.\begin{array}{l}\Delta u(r,\varphi) = g(r) \\ u\,|_R = \alpha(\varphi)\end{array}\right\},$$

tj. preciznije rješavamo

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = g(r)$$

uz rubni uvjet

$$u\,|_R = u(R,\varphi) = \alpha(\varphi).$$

Poissonova jednadžba za kružnu membranu

Kako $g(r)$ ne ovisi o φ, niti funkcija progiba u ne ovisi o φ pa vrijedi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Kako $g(r)$ ne ovisi o φ, niti funkcija progiba u ne ovisi o φ pa vrijedi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Dakle, problem se svodi na

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = g(r)$$

uz rubni uvjet

$$u\mid_R = u(R,\varphi) = \alpha(\varphi).$$

Zadatak (4.)

Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R = 2$, napetosti $p = 3$, ako je zadana gustoća vanjske sile $f(r) = 2r + 5$ (sila djeluje radijalno) i rubni uvjet $u|_{r=2} = 0$.

Zadatak (4.)

Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R = 2$, napetosti $p = 3$, ako je zadana gustoća vanjske sile $f(r) = 2r + 5$ (sila djeluje radijalno) i rubni uvjet $u|_{r=2} = 0$.

Rješenje: Rješavamo Poissonovu jednadžbu

$$-3\Delta u = 2r + 5,$$

uz rubni uvjet $u|_{r=2} = 0$. Budući da vanjska sila djeluje radijalno, ravnotežni položaj membrane ne ovisi o kutu φ, pa se Poissonova jednadžba svodi na oblik

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{2r+5}{3}.$$

Pomnožimo gornju jednadžbu s r,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{2r^2}{3} - \frac{5r}{3}$$

i integriramo po r,

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2r^3}{9} - \frac{5r^2}{6} + C_1.$$

Pomnožimo gornju jednadžbu s r,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{2r^2}{3} - \frac{5r}{3}$$

i integriramo po r,

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2r^3}{9} - \frac{5r^2}{6} + C_1.$$

Sada dobivenu jednadžbu podijelimo s r,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2r^2}{9} - \frac{5r}{6} + \frac{C_1}{r}$$

i ponovno integriramo po r,

$$u(r) = -\frac{2r^3}{27} - \frac{5r^2}{12} + C_1 \ln r + C_2.$$

Pomnožimo gornju jednadžbu s r,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{2r^2}{3} - \frac{5r}{3}$$

i integriramo po r,

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2r^3}{9} - \frac{5r^2}{6} + C_1.$$

Sada dobivenu jednadžbu podijelimo s r,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2r^2}{9} - \frac{5r}{6} + \frac{C_1}{r}$$

i ponovno integriramo po r,

$$u(r) = -\frac{2r^3}{27} - \frac{5r^2}{12} + C_1 \ln r + C_2.$$

Uočimo da približavanjem središtu membrane r teži prema nuli, pa u slučaju da je $C_1 \neq 0$ progib membrane teži u ∞ što je fizikalno nemoguće.

Stoga moramo uzeti da je $\boxed{C_1 = 0}$.

Iz rubnog uvjeta $u\big|_{r=2} = 0$ izračunamo C_2. Imamo

$$-2\frac{2^3}{27} - 5\frac{2^2}{12} + C_2 = 0,$$

pa je $C_2 = \frac{61}{27}$.

Iz rubnog uvjeta $u|_{r=2} = 0$ izračunamo C_2. Imamo

$$-2\frac{2^3}{27} - 5\frac{2^2}{12} + C_2 = 0,$$

pa je $C_2 = \frac{61}{27}$.

Dakle, rješenje postavljenog problema ravnoteže kružne membrane ima oblik

$$u(r) = -\frac{2r^3}{27} - \frac{5r^2}{12} + \frac{61}{27}, \quad r \in [0, 2].$$

Dirichletov problem u kružnom vijencu

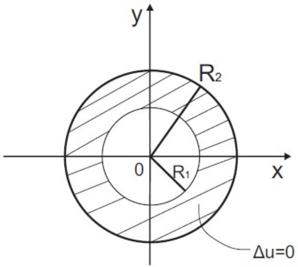
Promotrimo problem ravnoteže kružne membrane polumjera R_2 s kružnom rupom u sredini polumjera R_1, gdje je $R_2 > R_1 > 0$.

Dirichletov problem u kružnom vijencu

Promotrimo problem ravnoteže kružne membrane polumjera R_2 s kružnom rupom u sredini polumjera R_1, gdje je $R_2 > R_1 > 0$.

Rješavamo Laplaceovu jednadžbu uz rubne uvjete $u(R_1, \varphi) = \alpha(\varphi)$ i $u(R_2, \varphi) = \beta(\varphi)$, tj.

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u = 0, & R_1 < r < R_2 \\ u \,|_{r=R_1} = \alpha(\varphi) & \\ u \,|_{r=R_2} = \beta(\varphi). & \end{array}\right\}$$



Dirichletov problem u kružnom vijencu

Rješenje je oblika

$$u(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_{1n} r^n + \frac{B_{1n}}{r^n} \right) \cos n\varphi + \left(A_{2n} r^n + \frac{B_{2n}}{r^n} \right) \sin n\varphi \right],$$

za $r \in [R_1, R_2]$ i $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Dirichletov problem u kružnom vijencu

Rješenje je oblika

$$u(r,\varphi)=A_0+B_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_{1n}r^n+\frac{B_{1n}}{r^n}\right)\cos n\varphi+\left(A_{2n}r^n+\frac{B_{2n}}{r^n}\right)\sin n\varphi\right],$$

za $r\in[R_1,R_2]$ i $\varphi\in[0,2\pi)$.

Napomenimo da u rješenju imamo više članova jer nula nije u domeni, pa ne odbacujemo članove zbog neograničenosti. Koeficijente A_0 i B_0 računamo iz sustava jednadžbi

$$A_0+B_0\ln R_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\alpha(\varphi)\mathrm{d}\varphi,$$

$$A_0+B_0\ln R_2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\beta(\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

Koeficijenti A_{1n} i B_{1n} određuju se za svako $n \in \mathbb{N}$ iz sustava jednadžbi

$$A_{1n} R_1^n + \frac{B_{1n}}{R_1^n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\varphi) \cos n\varphi \mathrm{d}\varphi,$$
$$A_{1n} R_2^n + \frac{B_{1n}}{R_2^n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta(\varphi) \cos n\varphi \mathrm{d}\varphi,$$

Dirichletov problem u kružnom vijencu

Koeficijenti A_{1n} i B_{1n} određuju se za svako $n \in \mathbb{N}$ iz sustava jednadžbi

$$A_{1n}R_1^n + \frac{B_{1n}}{R_1^n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\varphi)\cos n\varphi \mathrm{d}\varphi,$$

$$A_{1n}R_2^n + \frac{B_{1n}}{R_2^n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \beta(\varphi)\cos n\varphi \mathrm{d}\varphi,$$

a koeficijenti A_{2n} i B_{2n} iz sustava jednadžbi

$$A_{2n}R_1^n + \frac{B_{2n}}{R_1^n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\varphi)\sin n\varphi \mathrm{d}\varphi,$$

$$A_{2n}R_2^n + \frac{B_{2n}}{R_2^n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \beta(\varphi)\sin n\varphi \mathrm{d}\varphi.$$

Zadatak (5.)

Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R_2 = e^3$ s kružnom rupom polumjera $R_1 = e$ u sredini, uz rubne uvjete $u(R_1, \varphi) = \cos 2\varphi$ i $u(R_2, \varphi) = \sin 2\varphi$.

Zadatak (5.)

Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R_2 = e^3$ s kružnom rupom polumjera $R_1 = e$ u sredini, uz rubne uvjete $u(R_1, \varphi) = \cos 2\varphi$ i $u(R_2, \varphi) = \sin 2\varphi$.

Rješenje: Rješenje problema je dano formulom

$$u(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_{1n} r^n + \frac{B_{1n}}{r^n} \right) \cos n\varphi + \left(A_{2n} r^n + \frac{B_{2n}}{r^n} \right) \sin n\varphi \right].$$

Zadatak (5.)

Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R_2 = e^3$ s kružnom rupom polumjera $R_1 = e$ u sredini, uz rubne uvjete $u(R_1, \varphi) = \cos 2\varphi$ i $u(R_2, \varphi) = \sin 2\varphi$.

Rješenje: Rješenje problema je dano formulom

$$u(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_{1n} r^n + \frac{B_{1n}}{r^n} \right) \cos n\varphi + \left(A_{2n} r^n + \frac{B_{2n}}{r^n} \right) \sin n\varphi \right].$$

Koeficijente A_0 i B_0 računamo iz sustava

$$A_0 + B_0 \ln e = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\varphi \mathrm{d}\varphi = 0$$

$$A_0 + B_0 \ln e^3 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\varphi \mathrm{d}\varphi = 0$$

Prema tome, $A_0 + B_0 = 0$ i $A_0 + 3B_0 = 0$, odakle dobivamo $A_0 = B_0 = 0$.

Koeficijente A_{1n} i B_{1n} za $n \in \mathbb{N}$ određujemo iz sustava

$$A_{1n}e^n + \frac{B_{1n}}{e^n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\varphi \cos n\varphi \mathrm{d}\varphi,$$

$$A_{1n}e^{3n} + \frac{B_{1n}}{e^{3n}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\varphi \cos n\varphi \mathrm{d}\varphi.$$

Za $n \neq 2$ dobijemo sustav $A_{1n}e^n + \frac{B_{1n}}{e^n} = 0$ i $A_{1n}e^{3n} + \frac{B_{1n}}{e^{3n}} = 0$, pa je $A_{1n} = B_{1n} = 0$.

Koeficijente A_{1n} i B_{1n} za $n \in \mathbb{N}$ određujemo iz sustava

$$A_{1n}e^n + \frac{B_{1n}}{e^n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\varphi \cos n\varphi \mathrm{d}\varphi,$$

$$A_{1n}e^{3n} + \frac{B_{1n}}{e^{3n}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\varphi \cos n\varphi \mathrm{d}\varphi.$$

Za $n \neq 2$ dobijemo sustav $A_{1n}e^n + \frac{B_{1n}}{e^n} = 0$ i $A_{1n}e^{3n} + \frac{B_{1n}}{e^{3n}} = 0$, pa je $A_{1n} = B_{1n} = 0$.

Koristeći ortogonalnost trigonometrijskih funkcija za $n = 2$ dobijemo sustav

$$A_{12}e^2 + \frac{B_{12}}{e^2} = 1,$$

$$A_{12}e^6 + \frac{B_{12}}{e^6} = 0,$$

čije je rješenje

$$A_{12} = \frac{1}{e^2(1-e^8)} \quad \text{i} \quad B_{12} = \frac{e^{10}}{e^8-1}.$$

Koeficijente A_{2n} i B_{2n} za $n \in \mathbb{N}$ određujemo iz sustava

$$A_{2n}e^n + \frac{B_{2n}}{e^n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\varphi \sin n\varphi \mathrm{d}\varphi,$$

$$A_{2n}e^{3n} + \frac{B_{2n}}{e^{3n}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\varphi \sin n\varphi \mathrm{d}\varphi.$$

Za $n \neq 2$ dobijemo sustav $A_{2n}e^n + \frac{B_{2n}}{e^n} = 0$ i $A_{2n}e^{3n} + \frac{B_{2n}}{e^{3n}} = 0$, pa je $A_{2n} = B_{2n} = 0$.

Koeficijente A_{2n} i B_{2n} za $n \in \mathbb{N}$ određujemo iz sustava

$$A_{2n}e^n + \frac{B_{2n}}{e^n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\varphi \sin n\varphi \mathrm{d}\varphi,$$

$$A_{2n}e^{3n} + \frac{B_{2n}}{e^{3n}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\varphi \sin n\varphi \mathrm{d}\varphi.$$

Za $n \neq 2$ dobijemo sustav $A_{2n}e^n + \frac{B_{2n}}{e^n} = 0$ i $A_{2n}e^{3n} + \frac{B_{2n}}{e^{3n}} = 0$, pa je $A_{2n} = B_{2n} = 0$.

Primjenom ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija za $n = 2$ dobijemo sustav

$$A_{22}e^2 + \frac{B_{22}}{e^2} = 0,$$

$$A_{22}e^6 + \frac{B_{22}}{e^6} = 1,$$

čije je rješenje

$$A_{22} = \frac{e^2}{e^8 - 1} \quad \text{i} \quad B_{22} = \frac{e^6}{1 - e^8}.$$

Prema tome, rješenje postavljenog problema ravnoteže kružne membrane je

$$u(r,\varphi) = \left(\frac{r^2}{e^2(1-e^8)} + \frac{e^{10}}{(e^8-1)r^2}\right)\cos 2\varphi + \left(\frac{e^2 r^2}{e^8-1} + \frac{e^6}{(1-e^8)r^2}\right)\sin 2\varphi,$$

za $r \in [e, e^3]$ i $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Zadatak (6.)

Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R_2 = e^4$ s kružnom rupom polumjera $R_1 = e^2$ u sredini, ako je napetost membrane $p = 2$ i na membranu djeluje vanjska sila gustoće $f(r) = r$ (progib ne ovisi o kutu), uz rubne uvjete $u(R_1) = u(R_2) = 0$.

Zadatak (6.)

Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R_2 = e^4$ s kružnom rupom polumjera $R_1 = e^2$ u sredini, ako je napetost membrane $p = 2$ i na membranu djeluje vanjska sila gustoće $f(r) = r$ (progib ne ovisi o kutu), uz rubne uvjete $u(R_1) = u(R_2) = 0$.

Rješenje: Rješavamo Poissonovu jednadžbu

$$-2\Delta u = r.$$

Budući da vanjska sila djeluje radijalno, ravnotežni položaj membrane ne ovisi o kutu φ, pa se Poissonova jednadžba svodi na oblik

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{r}{2}.$$

Pomnožimo gornju jednadžbu s r,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{r^2}{2},$$

i integriramo po r,

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{r^3}{6} + C_1.$$

Sada dobivenu jednadžbu podijelimo s r,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{r^2}{6} + \frac{C_1}{r},$$

i ponovno integriramo po r,

$$u(r) = -\frac{r^3}{18} + C_1 \ln r + C_2.$$

Iz rubnih uvjeta slijedi

$$-\frac{e^6}{18} + 2C_1 + C_2 = 0,$$

$$-\frac{e^{12}}{18} + 4C_1 + C_2 = 0.$$

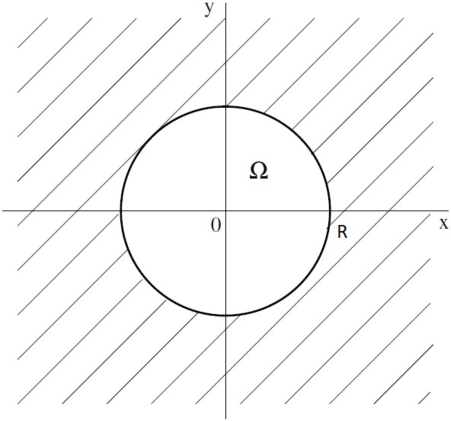
Koeficijent C_1 izračunamo tako da prvu jednadžbu pomnožimo s -1 i dodamo drugoj jednadžbi, pa dobijemo $C_1 = \frac{e^{12}-e^6}{36}$. Sada C_1 uvrstimo u prvu jednadžbu i izračunamo $C_2 = \frac{2e^6-e^{12}}{18}$. Rješenje problema ravnoteže kružne membrane s rupom je

$$u(r) = -\frac{r^3}{18} + \frac{e^{12}-e^6}{36}\ln r + \frac{2e^6-e^{12}}{18}, \quad r \in [e^2, e^4].$$

Vanjski Dirichletov problem

Promatramo sljedeći problem

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{za } R < r < \infty \\ u\,|_{r=R} = u(R,\varphi) = \alpha(\varphi), & 0 \le \varphi < 2\pi. \end{array}\right\}$$



Vanjski Dirichletov problem

Iz rješenja za kružni vijenac odbacujemo $\ln r$, $r^n \cos n\varphi$ i $r^n \sin n\varphi$, jer su ona neograničena kad $r \to \infty$.

Vanjski Dirichletov problem

Iz rješenja za kružni vijenac odbacujemo $\ln r$, $r^n \cos n\varphi$ i $r^n \sin n\varphi$, jer su ona neograničena kad $r \to \infty$.

Ostaje rješenje

$$\boxed{u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n}(E_{1n} \cos n\varphi + E_{2n} \sin n\varphi)},$$

za $r \in [R, \infty]$ i $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Vanjski Dirichletov problem

Iz rješenja za kružni vijenac odbacujemo $\ln r$, $r^n \cos n\varphi$ i $r^n \sin n\varphi$, jer su ona neograničena kad $r \to \infty$.

Ostaje rješenje

$$\boxed{u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n}(E_{1n} \cos n\varphi + E_{2n} \sin n\varphi)},$$

za $r \in [R, \infty]$ i $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Koeficijente računamo po formulama

$$E_{10} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\varphi) \mathrm{d}\varphi,$$

$$E_{1n} = \frac{R^n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\varphi) \cos n\varphi \mathrm{d}\varphi, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{i}$$

$$E_{2n} = \frac{R^n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\varphi) \sin n\varphi \mathrm{d}\varphi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak

Riješite vanjski Dirichletov problem

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{za } 1 < r < \infty \\ u\,|_{r=1} = u(1,\varphi) = 1 + \sin\varphi + \cos 3\varphi, & 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{array}\right\}$$

Zadatak

Riješite vanjski Dirichletov problem

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{za } 1 < r < \infty \\ u\,|_{r=1} = u(1,\varphi) = 1 + \sin\varphi + \cos 3\varphi, & 0 \le \varphi < 2\pi. \end{array}\right\}$$

Rješenje: Znamo da je rješenje oblika

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n}(E_{1n}\cos n\varphi + E_{2n}\sin n\varphi).$$

Računamo koeficijente

$$E_{10} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1 + \sin\varphi + \cos 3\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi = 1.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$E_{1n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\sin\varphi+\cos 3\varphi)\cos n\varphi \mathrm{d}\varphi$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\varphi \mathrm{d}\varphi}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\varphi\cos n\varphi \mathrm{d}\varphi}_{=0} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 3\varphi\cos n\varphi \mathrm{d}\varphi$$
$$= \begin{cases} 1, & n=3 \\ 0, & n\neq 3 \end{cases}$$

$$E_{2n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin n\varphi \mathrm{d}\varphi + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\varphi\sin n\varphi \mathrm{d}\varphi + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 3\varphi\sin n\varphi \mathrm{d}\varphi$$
$$= \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n\neq 1 \end{cases}$$

Dakle, rješenje ovog vanjskog Dirichletovog problema je

$$u(r,\varphi) = 1 + \frac{1}{r}\sin\varphi + \frac{1}{r^3}\cos 3\varphi.$$

Zadatak (11.)

Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R = 4$, uz zadane rubne uvjete:

a) $u|_{r=4} = \sin 4\varphi$,
b) $u|_{r=4} = 2 + 3\cos 7\varphi$.

Zadatak (12.)

Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R = 4$ i napetosti $p = 1$, ako je zadana gustoća vanjske sile $f(r) = r^2 + 3r + 1$ (sila djeluje radijalno), uz rubni uvjet $u|_{r=4} = 1$.

Domaća zadaća

Zadatak (13.)

Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R_2 = e^3$ s kružnom rupom polumjera $R_1 = e^2$ u sredini, uz rubne uvjete $u(R_1, \varphi) = \sin 2\varphi$ i $u(R_2, \varphi) = \cos 2\varphi$.

Zadatak (14.)

Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R_2 = e^4$ s kružnom rupom polumjera $R_1 = e$ u sredini, ako je napetost membrane $p = 3$ i na membranu djeluje vanjska sila gustoće $f(r) = 3r^3$ (progib ne ovisi o kutu), uz rubne uvjete $u(R_1, \varphi) = u(R_2, \varphi) = 0$.

Domaća zadaća

Zadatak

Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R_2 = 6$ s kružnom rupom polumjera $R_1 = 2$ uz rubne uvjete

$$u\,|_{r=2} = \cos\varphi + \cos 3\varphi \quad \text{i} \quad u\,|_{r=6} = \cos\varphi.$$

Rješenje:

$$u(r,\varphi) = \left(\frac{r}{8} + \frac{3}{2r}\right)\cos\varphi + \left(-\frac{r^3}{5824} + \frac{729}{91r^3}\right)\cos 3\varphi$$

Zadatak

Odredite ravnotežni oblik homogene kružne membrane radijusa $R = 3$ napetosti $p = 1$ i površinske gustoće $\rho = 10$ ako na membranu djeluje vanjska sila gustoće $f(r) = 5r + 2$. Rubni uvjet je $u(3,\varphi) = 2$.

Rješenje:

$$u(r,\varphi) = -\frac{5r^3}{9} - \frac{r^2}{2} + \frac{43}{2}$$

Domaća zadaća

Zadatak

Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R_2 = 5$ s kružnom rupom polumjera $R_1 = 2$ u sredini, napetosti $p = 1$ i površinske gustoće $\rho = 1$ ako na membranu djeluje vanjska sila gustoće $f(r) = r^2$. Rubni uvjeti su $u(2, \varphi) = -1$ i $u(5, \varphi) = 2$.