Oscilacije žice

Jednadžba oscilacija žice

Promatramo sad kako se ponaša žica **u vremenu** ako na nju djelujemo nekom vanjskom silom.

Jednadžba oscilacija žice

Promatramo sad kako se ponaša žica **u vremenu** ako na nju djelujemo nekom vanjskom silom.
Progib žice $u(x,t)$ u točki x i vremenu t opisuje parcijalna diferencijalna jednadžba

$$\boxed{\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + q(x)u(x,t) = f(x,t).}$$

Jednadžba oscilacija žice

Promatramo sad kako se ponaša žica **u vremenu** ako na nju djelujemo nekom vanjskom silom.

Progib žice $u(x,t)$ u točki x i vremenu t opisuje parcijalna diferencijalna jednadžba

$$\boxed{\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + q(x)u(x,t) = f(x,t).}$$

- $\rho(x)$ = linijska gustoća žice u točki x

Jednadžba oscilacija žice

Promatramo sad kako se ponaša žica **u vremenu** ako na nju djelujemo nekom vanjskom silom.
Progib žice $u(x,t)$ u točki x i vremenu t opisuje parcijalna diferencijalna jednadžba

$$\boxed{\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + q(x)u(x,t) = f(x,t).}$$

- $\rho(x)$ = linijska gustoća žice u točki x
- $p(x,t)$ = napetost žice u točki x, u trenutku t

Jednadžba oscilacija žice

Promatramo sad kako se ponaša žica **u vremenu** ako na nju djelujemo nekom vanjskom silom.

Progib žice $u(x,t)$ u točki x i vremenu t opisuje parcijalna diferencijalna jednadžba

$$\boxed{\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + q(x)u(x,t) = f(x,t).}$$

- $\rho(x)$ = linijska gustoća žice u točki x
- $p(x,t)$ = napetost žice u točki x, u trenutku t
- $q(x)$ = koeficijent elastičnosti sredstva u kojem se žica nalazi

Jednadžba oscilacija žice

Promatramo sad kako se ponaša žica **u vremenu** ako na nju djelujemo nekom vanjskom silom.
Progib žice $u(x,t)$ u točki x i vremenu t opisuje parcijalna diferencijalna jednadžba

$$\boxed{\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + q(x)u(x,t) = f(x,t).}$$

- $\rho(x)$ = linijska gustoća žice u točki x
- $p(x,t)$ = napetost žice u točki x, u trenutku t
- $q(x)$ = koeficijent elastičnosti sredstva u kojem se žica nalazi
- $f(x,t)$ = linijska gustoća vanjske sile koja djeluje na žicu u točki x, u trenutku t (isto se misli na y komponentu vanjske sile)

Kao i kod ravnoteže žice pretpostavljamo da se radi o malim deformacijama, tj.

$$\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right| \ll 1.$$

$\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ je mjera deformacije (u slučaju ravnotežnog problema mjera deformacije je bila $u'(x)$).

Valna jednadžba

- Promotrimo specijalan slučaj jednadžbe kada je žica homogena ($\rho(x) = \rho > 0$), a napetost žice je konstantna ($p(x,t) = p > 0$). Osim toga, pretpostavimo da žica nije uronjena u elastično sredstvo ($q(x) = 0$) i da na nju ne djeluje vanjska sila ($f(x,t) = 0$).

Valna jednadžba

- Promotrimo specijalan slučaj jednadžbe kada je žica homogena ($\rho(x) = \rho > 0$), a napetost žice je konstantna ($p(x,t) = p > 0$). Osim toga, pretpostavimo da žica nije uronjena u elastično sredstvo ($q(x) = 0$) i da na nju ne djeluje vanjska sila ($f(x,t) = 0$).
- Imamo

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = p \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad \text{tj.}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}, \quad \text{gdje je } c^2 = \frac{p}{\rho}.$$

Valna jednadžba

- Promotrimo specijalan slučaj jednadžbe kada je žica homogena ($\rho(x) = \rho > 0$), a napetost žice je konstantna ($p(x,t) = p > 0$). Osim toga, pretpostavimo da žica nije uronjena u elastično sredstvo ($q(x) = 0$) i da na nju ne djeluje vanjska sila ($f(x,t) = 0$).
- Imamo
$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = p \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad \text{tj.}$$
$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}, \quad \text{gdje je } c^2 = \frac{p}{\rho}.$$
- Ovu diferencijalnu jednadžbu zovemo **valna jednadžba**. Ona opisuje gibanje homogene žice koja je konstantno napeta u neelastičnom sredstvu i bez utjecaja vanjske sile.

Valna jednadžba

- Promotrimo specijalan slučaj jednadžbe kada je žica homogena ($\rho(x) = \rho > 0$), a napetost žice je konstantna ($p(x,t) = p > 0$). Osim toga, pretpostavimo da žica nije uronjena u elastično sredstvo ($q(x) = 0$) i da na nju ne djeluje vanjska sila ($f(x,t) = 0$).

- Imamo

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = p \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad \text{tj.}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}, \quad \text{gdje je } c^2 = \frac{p}{\rho}.$$

- Ovu diferencijalnu jednadžbu zovemo **valna jednadžba**. Ona opisuje gibanje homogene žice koja je konstantno napeta u neelastičnom sredstvu i bez utjecaja vanjske sile.

- Valna jednadžba je **hiperbolički** tip parcijalne diferencijalne jednadžbe 2. reda.

Homogeni rubni uvjeti

Rubni i početni uvjeti osiguravaju jedinstvenost rješenja. Za početak, pretpostavimo da imamo sljedeće početne i rubne uvjete:

Homogeni rubni uvjeti

Rubni i početni uvjeti osiguravaju jedinstvenost rješenja. Za početak, pretpostavimo da imamo sljedeće početne i rubne uvjete:

(1) **homogeni rubni uvjeti**

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0 \quad \text{(pričvršćeni krajevi)}$$

Homogeni rubni uvjeti

Rubni i početni uvjeti osiguravaju jedinstvenost rješenja. Za početak, pretpostavimo da imamo sljedeće početne i rubne uvjete:

(1) **homogeni rubni uvjeti**

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0 \quad \text{(pričvršćeni krajevi)}$$

(2) početni oblik žice (početni položaj)

$$u(x,0) = \alpha(x), \quad x \in [0,l]$$

(3) početna brzina žice

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \beta(x), \quad x \in [0,l]$$

Rješenje valne jednadžbe

Metodom separacije varijabli odredimo rješenje valne jednadžbe

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(E_n\cos\frac{n\pi ct}{l}+F_n\sin\frac{n\pi ct}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}},$$

Rješenje valne jednadžbe

Metodom separacije varijabli odredimo rješenje valne jednadžbe

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + F_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}},$$

pri čemu za svaki $n \in \mathbb{N}$ koeficijente E_n i F_n računamo na sljedeći način:

Rješenje valne jednadžbe

Metodom separacije varijabli odredimo rješenje valne jednadžbe

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + F_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}},$$

pri čemu za svaki $n \in \mathbb{N}$ koeficijente E_n i F_n računamo na sljedeći način:

$$\boxed{E_n = \frac{2}{l} \int_0^l \alpha(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x}$$

Rješenje valne jednadžbe

Metodom separacije varijabli odredimo rješenje valne jednadžbe

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + F_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}},$$

pri čemu za svaki $n \in \mathbb{N}$ koeficijente E_n i F_n računamo na sljedeći način:

$$\boxed{E_n = \frac{2}{l} \int_0^l \alpha(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x}$$

$$\boxed{F_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l \beta(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x.}$$

Zadatak (1.)

Pronađite zakon titranja homogene žice duljine $l = 3$, napetosti $p = 8$, linijske gustoće $\rho = 2$, koja je pričvršćena na rubovima. Početni položaj žice dobiven je izvlačenjem žice iz ravnotežnog položaja na trećini svoje duljine počevši od lijevog ruba za 1, a linearna (afina) je na ostatku žice. Početne brzine nema, a nema niti utjecaja vanjske sile.

Zadatak (1.)

Pronađite zakon titranja homogene žice duljine $l = 3$, napetosti $p = 8$, linijske gustoće $\rho = 2$, koja je pričvršćena na rubovima. Početni položaj žice dobiven je izvlačenjem žice iz ravnotežnog položaja na trećini svoje duljine počevši od lijevog ruba za 1, a linearna (afina) je na ostatku žice. Početne brzine nema, a nema niti utjecaja vanjske sile.

Rješenje: Rješavamo valnu jednadžbu

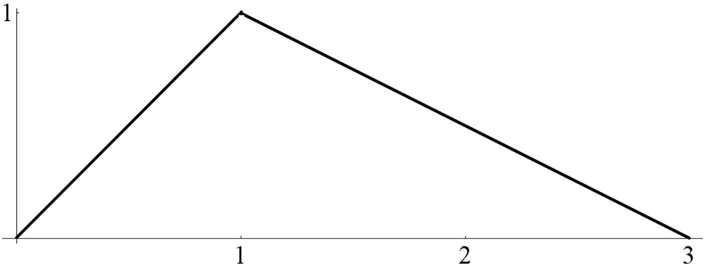
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

gdje je $c^2 = \dfrac{p}{\rho} = 4$ i $c = 2$.

- rubni uvjeti: $u(0, t) = u(3, t) = 0$

- rubni uvjeti: $u(0,t) = u(3,t) = 0$
- početni uvjeti:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 = \beta(x)$$



$$u(x,0) = \alpha(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{2}(3-x) & 1 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

Rješenje tražimo u obliku:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \cos \frac{cn\pi t}{l} + F_n \sin \frac{cn\pi t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \cos \frac{2n\pi t}{3} + F_n \sin \frac{2n\pi t}{3} \right) \sin \frac{n\pi x}{3}.
\end{aligned}
$$

Rješenje tražimo u obliku:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \cos \frac{cn\pi t}{l} + F_n \sin \frac{cn\pi t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \cos \frac{2n\pi t}{3} + F_n \sin \frac{2n\pi t}{3} \right) \sin \frac{n\pi x}{3}. \end{aligned}$$

- $F_n = 0, n \in \mathbb{N}$, jer je $\beta(x) = 0$

Rješenje tražimo u obliku:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(E_n \cos\frac{cn\pi t}{l} + F_n \sin\frac{cn\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(E_n \cos\frac{2n\pi t}{3} + F_n \sin\frac{2n\pi t}{3}\right)\sin\frac{n\pi x}{3}. \end{aligned}$$

- $F_n = 0, n \in \mathbb{N}$, jer je $\beta(x) = 0$
- računamo

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \alpha(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}\left[\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_1^3 (3-x)\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x\right], \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{3} \mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{cc} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin \frac{n\pi x}{3} \mathrm{d}x & v = -\frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} \end{array} \right| \\
&= -\frac{3x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} \bigg|_0^1 + \frac{3}{n\pi} \int_0^1 \cos \frac{n\pi x}{3} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{3} \bigg|_0^1 \\
&= -\frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{3}
\end{aligned}
$$

$$\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x & v = -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3} \end{array} \right|$$

$$= -\frac{3x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^1 + \frac{3}{n\pi}\int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^1$$

$$= -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}$$

$$\frac{1}{2}\int_1^3 (3-x)\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} u = 3-x & \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x & v = -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3} \end{array} \right|$$

$$= -\frac{3}{2n\pi}(3-x)\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_1^3 - \frac{3}{2n\pi}\int_1^3 \cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{9}{2n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}$$

Konačno,

$$
\begin{aligned}
E_n &= \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3} + \frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{9}{2n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}\right) \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{27}{2n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3} = \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Konačno,

$$E_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3} + \frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{9}{2n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{27}{2n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3} = \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Traženi zakon titranja je

$$u(x,t) = \frac{9}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{3}\cos\frac{2n\pi t}{3}\sin\frac{n\pi x}{3}.$$

Zadatak (2.)

Homogena žica duljine $l = 7$, napetosti $p = 64$ i linijske gustoće $\rho = 4$ učvršćena je na krajevima. Žica se pobudi na titranje udarom krutog ravnog čekića širine $\epsilon = 0.2$ u točki $x = 3$ tako da početna brzina žice na segmentu $[2.9, 3.1]$ bude jednaka 1. Riješite problem oscilacije žice ako je u trenutku $t = 0$ žica postavljena horizontalno.

Zadatak (2.)

Homogena žica duljine $l = 7$, napetosti $p = 64$ i linijske gustoće $\rho = 4$ učvršćena je na krajevima. Žica se pobudi na titranje udarom krutog ravnog čekića širine $\epsilon = 0.2$ u točki $x = 3$ tako da početna brzina žice na segmentu $[2.9, 3.1]$ bude jednaka 1. Riješite problem oscilacije žice ako je u trenutku $t = 0$ žica postavljena horizontalno.

Rješenje: Rješavamo valnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

uz rubne uvjete $u(0,t) = u(7,t) = 0$ (žica je učvršćena na krajevima).

Početni uvjeti:

- $u(x,0) = \alpha(x) = 0$ (u početnom trenutku žica se nalazi u horizontalnom položaju)
- $$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \beta(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 2.9, \\ 1, & 2.9 \leq x < 3.1, \\ 0, & 3.1 \leq x \leq 7. \end{cases}$$

Znamo da rješenje postavljenog problema ima oblik

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \cos \frac{4n\pi t}{7} + F_n \sin \frac{4n\pi t}{7} \right) \sin \frac{n\pi x}{7}.$$

- vrijedi $E_n = 0$ za svaki n, jer je $\alpha(x) = 0$

- Odredimo koeficijente F_n:

$$F_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^l \beta(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{2}{4n\pi}\int_{2.9}^{3.1}\sin\frac{n\pi x}{7}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{7}{2n^2\pi^2}\left(-\cos\frac{n\pi x}{7}\right)\Big|_{2.9}^{3.1} = \frac{7}{2n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2.9n\pi}{7} - \cos\frac{3.1n\pi}{7}\right)$$

$$= \frac{7}{n^2\pi^2}\sin\frac{3n\pi}{7}\sin\frac{n\pi}{70}$$

Traženi zakon titranja zato je

$$u(x,t) = \frac{7}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{3n\pi}{7}\sin\frac{n\pi}{70}\sin\frac{4n\pi t}{7}\sin\frac{n\pi x}{7},$$

za $x \in [0,7]$ i $t \geq 0$.

Nehomogeni rubni uvjeti

Vratimo se sada na valnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

gdje je $c^2 = \frac{p}{\rho}$.

Tražimo njeno rješenje uz nehomogene rubne uvjete

$$\boxed{u(0,t) = a \text{ i } u(l,t) = b}, \quad t \geq 0$$

i uz početne uvjete

$$u(x,0) = \alpha(x), \quad x \in [0,l] \quad \text{i}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \beta(x), \quad x \in [0,l].$$

Nehomogeni rubni uvjeti

Opisani problem rješavamo tako da rješenje tražimo u obliku

$$\boxed{u(x,t) = v(x,t) + w(x).}$$

(1) $v(x,t)$ rješenje valne jednadžbe

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2},$$

uz homogene rubne uvjete $v(0,t) = v(l,t) = 0, t \geq 0$, i početne uvjete

$$v(x,0) = \alpha_1(x) = \alpha(x) - w(x), \quad x \in [0,l] \quad \text{i}$$

$$\left.\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \beta(x), \quad x \in [0,l],$$

(2) $w(x)$ je rješenje jednadžbe $w''(x) = 0$ uz rubne uvjete $w(0) = a$ i $w(l) = b$. Lako se pokaže da je

$$\boxed{w(x) = \frac{b-a}{l}x + a.}$$

Zadatak (4.)

Riješite problem slobodnih oscilacija žice duljine $l = 5$, gustoće $\rho = 3$ i napetosti $p = 27$. Pri tome je lijevi kraj žice učvršćen na visini 1 ($u(0,t) = 1$), a desni kraj žice na visini 11 ($u(5,t) = 11$), početni položaj žice je opisan funkcijom $u(x,0) = \alpha(x) = 1 + 2x + \sin\frac{3\pi x}{5}$, a početne brzine nema ($\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = \beta(x) = 0$).

Zadatak (4.)

Riješite problem slobodnih oscilacija žice duljine $l = 5$, gustoće $\rho = 3$ i napetosti $p = 27$. Pri tome je lijevi kraj žice učvršćen na visini 1 ($u(0,t) = 1$), a desni kraj žice na visini 11 ($u(5,t) = 11$), početni položaj žice je opisan funkcijom $u(x,0) = \alpha(x) = 1 + 2x + \sin\frac{3\pi x}{5}$, a početne brzine nema ($\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \beta(x) = 0$).

Rješenje: Rješavamo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

uz rubne i početne uvjete navedene u zadatku.

Rubni uvjeti su nehomogeni, pa rješenje tražimo u obliku

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x).$$

- $w(x)$ je rješenje jednadžbe $w''(x) = 0$ uz $w(0) = 1$ i $w(5) = 11$, tj.

$$w(x) = \frac{11-1}{5}x + 1 = 2x + 1$$

- $v(x,t)$ je rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

uz homogene rubne uvjete $v(0,t) = v(5,t) = 0$ i početne uvjete

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x) = \alpha_1(x) = \sin\frac{3\pi x}{5}$$

i

$$\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \beta(x) = 0$$

Znamo da je $v(x,t)$ oblika

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(E_n\cos\frac{3n\pi t}{5}+F_n\sin\frac{3n\pi t}{5}\right)\sin\frac{n\pi x}{5},$$

za $x\in[0,5]$ i $t\geq 0$.

- $F_n=0$ za svaki prirodan broj n, jer je $\beta(x)=0$
- E_n računamo korištenjem relacija ortogonalnosti:

$$E_n=\frac{2}{5}\int_0^5\sin\frac{3\pi x}{5}\sin\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x=\begin{cases}1, & \text{za } n=3,\\ 0, & \text{za } n\neq 3.\end{cases}$$

Sve skupa,

$$v(x,t) = \cos\frac{9\pi t}{5}\sin\frac{3\pi x}{5}.$$

Problem slobodnih oscilacija žice je opisan funkcijom

$$u(x,t) = \cos\frac{9\pi t}{5}\sin\frac{3\pi x}{5} + 2x + 1.$$

Domaća zadaća

Zadatak (5.)

Pronađite zakon titranja homogene žice duljine 5, napetosti 36 i linijske gustoće 4, koja je pričvršćena na rubovima. Početni položaj žice dobiven je izvlačenjem žice iz ravnotežnog položaja na prvoj četvrtini svoje duljine za 1, a na ostatku žice je linearna (afina). Početne brzine nema, a nema niti utjecaja vanjske sile.

Zadatak (6.)

Pronađite zakon titranja homogene žice duljine 10, napetosti 100 i linijske gustoće 4, koja je pričvršćena na rubovima. Početni položaj žice dobiven je izvlačenjem žice iz ravnoteženog položaja na tri četvrtine svoje duljine za 2. Početna brzina jednaka je $\beta(x) = 5$, a utjecaja vanjske sile nema.

Domaća zadaća

Zadatak (10.)

Riješite problem oscilacija žice duljine 3, gustoće 1, napetosti 4, ako nema utjecaja vanjske sile. Pri tome za progib u vrijedi $u(0,t) = 2$, $u(3,t) = 8$, $u(x,0) = 2 + \sin\frac{\pi x}{3}$ i $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

Domaća zadaća

Zadatak

Riješite problem slobodnih oscilacija homogene žice duljine 5, linijske gustoće 1 i napetosti 16, ako su dani sljedeći početni i rubni uvjeti:

$$u(0,t) = -3,\ u(5,t) = 7,\ u(x,0) = \sin(3\pi x) + 2x - 3,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Rješenje: $u(x,t) = \cos(12\pi t)\sin(3\pi x) + 2x - 3.$

Zadatak

Riješite problem slobodnih oscilacija homogene žice duljine 7, linijske gustoće 2 i napetosti 8, ako su dani sljedeći početni i rubni uvjeti:

$$u(0,t) = -4,\ u(7,t) = 3,\ u(x,0) = \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x) + x - 4,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Rješenje: $u(x,t) = \cos(4\pi t)\sin(2\pi x) + \cos(8\pi t)\sin(4\pi x) + x - 4.$