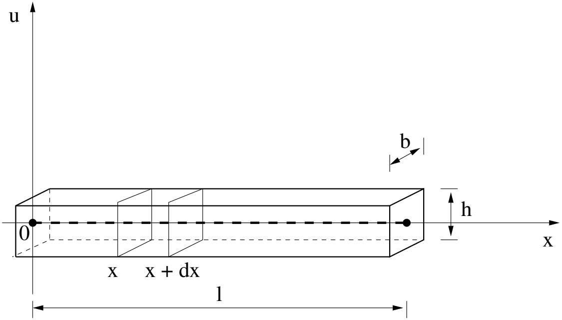
Ravnoteža i oscilacije grede

Oscilacije grede

Promatramo štap oblika kvadra (gredu) koji je duljine l, širine b i visine h. U nedeformiranom položaju njegova os se podudara sa segmentom $[0, l]$ na osi x. Zanima nas $u(x, t)$, funkcija koja opisuje progib točke koja u nedeformiranom položaju ima koordinatu $x \in [0, l]$.



Promatramo poprečne oscilacije. Smatramo da se sve odvija u (x, u)-ravnini!

Jednadžba oscilacija štapa

U homogenom slučaju, poprečne oscilacije su opisane parcijalnom diferencijalnom jednadžbom 4. reda:

$$\boxed{\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x,t)}$$

Jednadžba oscilacija štapa

U homogenom slučaju, poprečne oscilacije su opisane parcijalnom diferencijalnom jednadžbom 4. reda:

$$\boxed{\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x,t)}$$

- ρ = gustoća štapa (kg/m^3)
- S = površina poprečnog presjeka (m^2)
- E = modul elastičnosti materijala štapa (N/m^2)
- J = moment inercije pravokutnog presjeka u odnosu na horizontalnu os, tj.

$$J = b \int_{-h/2}^{h/2} \eta^2 \, d\eta = \frac{bh^3}{12}$$

- $f(x,t)$ = gustoća vanjske sile koja djeluje na štap u smjeru osi u

Jednadžba oscilacija štapa

Ako označimo s $a^2 = \dfrac{EJ}{\rho S}$, dobijemo jednadžbu oscilacija štapa

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = g(x, t)},$$

gdje je $g(x, t) = \dfrac{f(x, t)}{\rho S}$. Jednadžba je 4. reda zbog postojanja zakretnog momenta.

Jednadžba oscilacija štapa

Ako označimo s $a^2 = \frac{EJ}{\rho S}$, dobijemo jednadžbu oscilacija štapa

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = g(x,t)},$$

gdje je $g(x,t) = \frac{f(x,t)}{\rho S}$. Jednadžba je 4. reda zbog postojanja zakretnog momenta.

Za jedinstvenost rješenja trebaju nam **početni i rubni uvjeti**.

Jednadžba oscilacija štapa

Ako označimo s $a^2 = \dfrac{EJ}{\rho S}$, dobijemo jednadžbu oscilacija štapa

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = g(x,t)},$$

gdje je $g(x,t) = \dfrac{f(x,t)}{\rho S}$. Jednadžba je 4. reda zbog postojanja zakretnog momenta.

Za jedinstvenost rješenja trebaju nam **početni i rubni uvjeti**.

Početni uvjeti su istog tipa kao za žicu, tj. zadani su početni položaj i početna brzina

(1) $u(x,0) = \varphi(x)$ - **početni položaj**

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$ - **početna brzina**

Rubni uvjeti

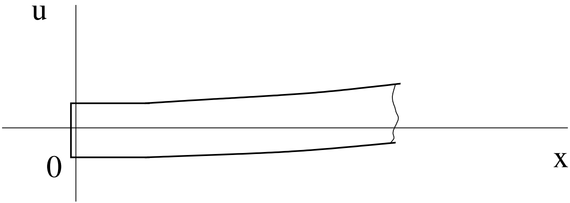
Rubni uvjeti su malo složeniji. Na svakom kraju moramo zadati dvije vrijednosti (jer imamo jednažbu 4. reda), pa postoje tri različita tipa rubnih uvjeta

(i) učvršćen/upet kraj

(ii) slobodan kraj

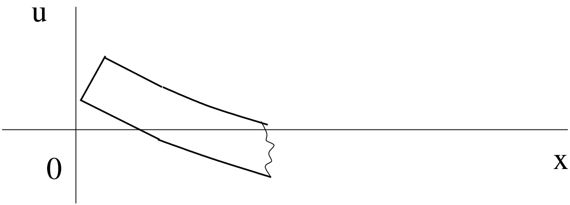
(iii) zglob/šarnir

Učvršćen kraj



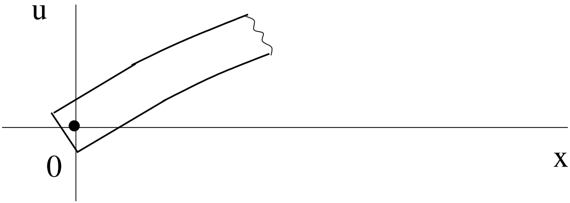
- $u = 0$: nema progiba
- $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$: nema rotacije oko osi presjeka.

Slobodan kraj



- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$: nema momenta
- $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$: nema sile.

Zglob



- $u = 0$: nema progiba
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$: nema momenta.

Ravnoteža štapa

Promotrimo sad problem ravnoteže štapa.

Ravnoteža štapa

Promotrimo sad problem ravnoteže štapa.

- funkcija progiba $u(x)$ više ne ovisi o vremenu

Ravnoteža štapa

Promotrimo sad problem ravnoteže štapa.

- funkcija progiba $u(x)$ više ne ovisi o vremenu
- $u(x)$ sad zadovoljava običnu diferencijalnu jednadžbu

$$\boxed{u^{(4)}(x) = h(x)},$$

gdje je

$$h(x) = \frac{g(x)}{a^2} = \frac{f(x)}{EJ}$$

Ravnoteža štapa

Promotrimo sad problem ravnoteže štapa.

- funkcija progiba $u(x)$ više ne ovisi o vremenu
- $u(x)$ sad zadovoljava običnu diferencijalnu jednadžbu

$$\boxed{u^{(4)}(x) = h(x)},$$

gdje je

$$h(x) = \frac{g(x)}{a^2} = \frac{f(x)}{EJ}$$

- rubni uvjeti su zadani kao i prije (učvršćen kraj, slobodan kraj ili zglob)

Zadatak (1.)

Odredite ravnotežni položaj štapa na koji djeluje sila teža ako je lijevi kraj učvršćen, a desni je zglob.

Zadatak (1.)

Odredite ravnotežni položaj štapa na koji djeluje sila teža ako je lijevi kraj učvršćen, a desni je zglob.

Rješenje: Rješavamo jednadžbu

$$u^{(4)}(x) = h(x),$$

uz rubne uvjete

$$u(0) = u'(0) = 0 \qquad \text{i} \qquad u(l) = u''(l) = 0$$

i

$$h(x) = \frac{g(x)}{a^2} = \frac{g(x)\rho S}{EJ} = \frac{f(x)}{EJ} = -\frac{gM}{EJl},$$

jer je gustoća vanjske sile $f(x) = -\frac{gM}{l}$ (M je masa štapa).

Kad jednadžbu

$$u^{(4)}(x) = -\frac{gM}{EJl}$$

integriramo 4 puta, dobijemo

$$u(x) = -\frac{gM}{EJl}\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4.$$

Kad jednadžbu

$$u^{(4)}(x) = -\frac{gM}{EJl}$$

integriramo 4 puta, dobijemo

$$u(x) = -\frac{gM}{EJl}\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Iz rubnih uvjeta dobijemo:

- $u(0) = 0 : \; C_4 = 0$
- $u'(0) = 0 : \; C_3 = 0$
- $u(l) = 0 : \; -\frac{gM}{EJl}\frac{l^4}{24} + C_1\frac{l^3}{6} + C_2\frac{l^2}{2} = 0$
- $u''(l) = 0 : \; -\frac{gM}{EJl}\frac{l^2}{2} + C_1 l + C_2 = 0$

Množenjem predzadnje jednadžbe s $2/l^2$ dobijamo sustav 2 jednadžbe s dvije nepoznanice

$$-\frac{gM}{EJl}\frac{l^2}{12} + C_1\frac{l}{3} + C_2 = 0$$
$$-\frac{gM}{EJl}\frac{l^2}{2} + C_1 l + C_2 = 0$$

Oduzimanjem gornje dvije jednadžbe dobijemo

$$C_1 = \frac{5}{8}\frac{gM}{EJ} \implies C_2 = -\frac{1}{8}\frac{gMl}{EJ},$$

pa je

$$u(x) = -\frac{gM}{EJl}\left(\frac{x^4}{24} - \frac{5x^3 l}{48} + \frac{x^2 l^2}{16}\right).$$

Zadatak (2.)

Odredite ravnotežni položaj štapa duljine $l = 2$ na koji djeluje sila $h(x) = 10x$ ako je lijevi kraj slobodan, a desni je učvršćen.

Zadatak (2.)

Odredite ravnotežni položaj štapa duljine $l = 2$ na koji djeluje sila $h(x) = 10x$ ako je lijevi kraj slobodan, a desni je učvršćen.

Rješenje: Rješavamo jednadžbu

$$u^{(4)}(x) = 10x,$$

uz rubne uvjete

$$u''(0) = u'''(0) = 0 \qquad \text{i} \qquad u(2) = u'(2) = 0.$$

Opet integriramo jednadžbu 4 puta i dobijemo

$$u(x) = \frac{10}{120}x^5 + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4.$$

Iz rubnih uvjeta dobijemo:

- $u''(0) = 0 : \; C_2 = 0$
- $u'''(0) = 0 : \; C_1 = 0$
- $u(2) = 0 : \; \frac{10}{120} 2^5 + 2C_3 + C_4 = 0$
- $u''(2) = 0 : \; \frac{10}{24} 2^4 + C_3 = 0.$

Iz zadnje dvije jednadžbe slijedi $C_3 = -\frac{20}{3}, C_4 = \frac{32}{3}$, pa je

$$u(x) = \frac{1}{12}(x^5 - 80x + 128).$$

Zadatak (3.)

Odredite ravnotežni položaj štapa duljine $l = 2$ na koji djeluje sila $h(x) = 9e^{3x}$ ako su lijevi i desni kraj zglobovi.

Zadatak (3.)

Odredite ravnotežni položaj štapa duljine $l = 2$ na koji djeluje sila $h(x) = 9e^{3x}$ ako su lijevi i desni kraj zglobovi.

Rješenje: Rješavamo jednadžbu

$$u^{(4)}(x) = 9e^{3x},$$

uz rubne uvjete

$$u(0) = u''(0) = 0 \qquad \text{i} \qquad u(2) = u''(2) = 0.$$

Opet integriramo jednadžbu 4 puta i dobijemo

$$u(x) = \frac{9}{3^4}e^{3x} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4.$$

Iz rubnih uvjeta dobijemo:

- $u(0) = 0 : \frac{1}{9} + C_4 = 0 \implies C_4 = -\frac{1}{9}$
- $u''(0) = 0 : 1 + C_2 = 0 \implies C_2 = -1$
- $u(2) = 0 : \frac{1}{9}e^6 + \frac{C_1}{6}8 - \frac{1}{2}4 + 2C_3 - \frac{1}{9} = 0$
- $u''(2) = 0 : e^6 + 2C_1 - 1 = 0.$

Iz zadnje dvije jednadžbe slijedi $C_1 = \frac{1-e^6}{2}$, $C_3 = \frac{1-e^6}{18}$, pa je

$$u(x) = \frac{1}{9}e^{3x} + \frac{1-e^6}{12}x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{1-e^6}{18}x - \frac{1}{9}.$$

Zadatak (4.)

Odredite ravnotežni položaj štapa duljine $l = 3$ na koji djeluje sila $h(x) = 4\sin 2x$ ako su oba kraja učvršćena.

Zadatak (4.)

Odredite ravnotežni položaj štapa duljine $l = 3$ na koji djeluje sila $h(x) = 4\sin 2x$ ako su oba kraja učvršćena.

Rješenje: Rješavamo jednadžbu

$$u^{(4)}(x) = 4\sin 2x,$$

uz rubne uvjete

$$u(0) = u'(0) = 0 \qquad \text{i} \qquad u(3) = u'(3) = 0.$$

Opet integriramo jednadžbu 4 puta i dobijemo

$$u(x) = \frac{4}{16}\sin 2x + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Iz rubnih uvjeta dobijemo:

- $u(0) = 0 : \; C_4 = 0$
- $u'(0) = 0 : \; \dfrac{1}{2} + C_3 = 0 \implies C_3 = -\dfrac{1}{2}$
- $u(3) = 0 : \; \dfrac{1}{4}\sin 6 + \dfrac{9\,C_1}{2} + \dfrac{9\,C_2}{2} - \dfrac{3}{2} = 0$
- $u'(3) = 0 : \; \dfrac{1}{2}\cos 6 + \dfrac{9\,C_1}{2} + 3\,C_2 - \dfrac{2}{2} = 0.$

Iz zadnje dvije jednadžbe slijedi

$$C_1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\sin 6 - \frac{1}{3}\cos 6, \qquad C_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\sin 6 + \frac{1}{3}\cos 6.$$

Slobodne oscilacije štapa

Promotrimo sad problem **slobodnih oscilacija** štapa, ali samo u slučaju kad su oba kraja zglobovi. Dakle

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0},$$

uz rubne uvjete

$$u(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l,t) = 0$$

i početne uvjete

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x).$$

Ostale kombinacije rubnih uvjeta nećemo razmatrati, jer se u tim slučajevima ne može primijeniti Fourierov pristup.

Rješenje jednadžbe oscilacija štapa

Metodom separacije varijabli odredimo rješenje

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{an^2\pi^2 t}{l^2} + B_n \sin \frac{an^2\pi^2 t}{l^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}},$$

Rješenje jednadžbe oscilacija štapa

Metodom separacije varijabli odredimo rješenje

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{an^2\pi^2 t}{l^2} + B_n \sin \frac{an^2\pi^2 t}{l^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}},$$

pri čemu za svaki $n \in \mathbb{N}$ koeficijente A_n i B_n računamo na sljedeći način:

Rješenje jednadžbe oscilacija štapa

Metodom separacije varijabli odredimo rješenje

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{an^2\pi^2 t}{l^2} + B_n \sin \frac{an^2\pi^2 t}{l^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}},$$

pri čemu za svaki $n \in \mathbb{N}$ koeficijente A_n i B_n računamo na sljedeći način:

$$\boxed{A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x}$$

Rješenje jednadžbe oscilacija štapa

Metodom separacije varijabli odredimo rješenje

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}+B_n\sin\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}},$$

pri čemu za svaki $n\in\mathbb{N}$ koeficijente A_n i B_n računamo na sljedeći način:

$$\boxed{A_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{B_n=\frac{2l}{an^2\pi^2}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x.}$$

Zadatak (5.)

Riješite problem slobodnih oscilacija štapa čiji su krajevi zglobovi i

$$\varphi(x) = \sin\frac{3\pi x}{l} \quad \text{i} \quad \psi(x) = \cos\frac{\pi x}{l}.$$

Zadatak (5.)

Riješite problem slobodnih oscilacija štapa čiji su krajevi zglobovi i

$$\varphi(x) = \sin\frac{3\pi x}{l} \quad \text{i} \quad \psi(x) = \cos\frac{\pi x}{l}.$$

Rješenje: Rješavamo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0,$$

uz $\varphi(x) = \sin\frac{3\pi x}{l}$ i $\psi(x) = \cos\frac{\pi x}{l}$ i

$$u(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l,t) = 0.$$

Znamo da je

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}+B_n\sin\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

- koristeći ortogonalnost trigonometrijskih funkcija

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{l}\int_0^l \sin\frac{3\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = \begin{cases} 1, & \text{za } n=3, \\ 0, & \text{za } n\neq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

-

$$B_n=\frac{2l}{an^2\pi^2}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2l}{an^2\pi^2}\int_0^l \cos\frac{\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

Za računanje B_n ne možemo iskoristiti ortogonalnost trigonometrijskih funkcija, nego koristimo formule pretvorbe umnoška u zbroj. Iz

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

slijedi

Za računanje B_n ne možemo iskoristiti ortogonalnost trigonometrijskih funkcija, nego koristimo formule pretvorbe umnoška u zbroj. Iz

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

slijedi

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{l}{an^2\pi^2} \int_0^l \left(\sin \frac{(n+1)\pi x}{l} + \sin \frac{(n-1)\pi x}{l} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{l}{an^2\pi^2} \left(- \frac{l}{(n+1)\pi} \cos \frac{(n+1)\pi x}{l} - \frac{l}{(n-1)\pi} \cos \frac{(n-1)\pi x}{l} \right) \Bigg|_0^l \\
&= \begin{cases} 0, & \text{za } n \text{ neparan}, \\ \frac{l}{an^2\pi^2} \left(\frac{2l}{(n+1)\pi} + \frac{2l}{(n-1)\pi} \right), & \text{za } n \text{ paran} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{za } n \text{ neparan}, \\ \frac{4l^2}{an(n^2-1)\pi^3}, & \text{za } n \text{ paran} \end{cases}
\end{aligned}$$

Konačno,

$$u(x,t) = \cos\frac{9a\pi^2 t}{l^2}\sin\frac{3\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4l^2}{2ka(4k^2-1)\pi^3}\sin\frac{4ak^2\pi^2 t}{l^2}\sin\frac{2k\pi x}{l},$$

jer svaki paran broj n možemo zapisati u obliku $n = 2k$.

Zadatak (6.)

Riješite problem slobodnih oscilacija štapa čiji su krajevi nehomogeni zglobovi, tj.

$$u(0,t) = \alpha, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = \beta, \quad u(l,t) = \gamma, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l,t) = \delta.$$

Početna brzina je $\psi(x) = 0$, a početni položaj je

$$\varphi(x) = \sin\frac{6\pi x}{l} + \frac{\delta - \beta}{6l}x^3 + \frac{\beta}{2}x^2 + \left(\frac{\gamma}{l} - \frac{\delta l}{6} - \frac{\beta l}{3} - \frac{\alpha}{l}\right)x + \alpha.$$

Zadatak (6.)

Riješite problem slobodnih oscilacija štapa čiji su krajevi nehomogeni zglobovi, tj.

$$u(0,t)=\alpha, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t)=\beta, \quad u(l,t)=\gamma, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l,t)=\delta.$$

Početna brzina je $\psi(x)=0$, a početni položaj je

$$\varphi(x)=\sin\frac{6\pi x}{l}+\frac{\delta-\beta}{6l}x^3+\frac{\beta}{2}x^2+\left(\frac{\gamma}{l}-\frac{\delta l}{6}-\frac{\beta l}{3}-\frac{\alpha}{l}\right)x+\alpha.$$

Rješenje: Rješavamo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0.$$

Rubni uvjeti su nehomogeni, pa rješenje (kao i u slučaju oscilacija žice) tražimo u obliku

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x).$$

(1) $w(x)$ je rješenje jednadžbe $\boxed{w^{(4)}(x) = 0}$ uz rubne uvjete

$$w(0) = \alpha, \quad w''(0) = \beta, \quad w(l) = \gamma, \quad w''(l) = \delta$$

Ako $w^{(4)}(x) = 0$ integriramo četiri puta, dobijemo

$$w(x) = \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4,$$

a iz rubnih uvjeta

$$C_1 = \frac{\delta - \beta}{l}, \quad C_2 = \beta, \quad C_3 = \frac{\gamma}{l} - \frac{\delta l}{6} - \frac{\beta l}{3} - \frac{\alpha}{l}, \quad C_4 = \alpha$$

$$\Longrightarrow \boxed{w(x) = \frac{\delta - \beta}{6l}x^3 + \frac{\beta}{2}x^2 + \left(\frac{\gamma}{l} - \frac{\delta l}{6} - \frac{\beta l}{3} - \frac{\alpha}{l}\right)x + \alpha}.$$

(2) $v(x,t)$ je rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0$$

uz homogene rubne uvjete

$$v(0,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,t) = 0, \qquad v(l,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(l,t) = 0$$

i početne uvjete

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x) = \varphi(x) - w(x) = \sin \frac{6\pi x}{l} = \varphi_1(x)$$

i

$$\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) = 0$$

Znamo da je

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{an^2\pi^2 t}{l^2} + B_n \sin \frac{an^2\pi^2 t}{l^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

- $B_n = 0$, jer je $\psi(x) = 0$
- koristeći ortogonalnost trigonometrijskih funkcija

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{6\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x = \begin{cases} 1, & \text{za } n = 6, \\ 0, & \text{za } n \neq 6. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad v(x,t) = \cos \frac{36a\pi^2 t}{l^2} \sin \frac{6\pi x}{l}$$

$$u(x,t) = \cos \frac{36a\pi^2 t}{l^2} \sin \frac{6\pi x}{l} + w(x) \qquad !!$$

Domaća zadaća

Zadatak

Odredite ravnotežni položaj štapa duljine 1, modula elastičnosti 2.5 i momenta inercije 2 na koji djeluje vanjska sila gustoće $f(x) = 80\cos(4x)$ ako je lijevi kraj zglob, a desni učvršćen.

Rješenje:

$$u(x) = \frac{\cos(4x)}{16} + \left(-\frac{27}{16} + \frac{3\sin 4}{4} + \frac{3\cos 4}{16}\right)\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \left(\frac{5}{32} + \frac{\sin 4}{8} + \frac{3\cos 4}{32}\right)x - \frac{1}{16}.$$

Zadatak

Odredite ravnotežni položaj štapa duljine $l = 10$ na koji djeluje sila gustoće $h(x) = e^{2x}$ ako je lijevi kraj učvršćen, a desni slobodan.

Rješenje:

$$u(x) = \frac{e^{2x}}{16} - \frac{e^{20}x^3}{12} + \frac{19e^{20}x^2}{8} - \frac{x}{8} - \frac{1}{16}.$$

Zadatak

Riješite problem slobodnih oscilacija štapa duljine $l = 10$, opisanih jednadžbom

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0,$$

čiji su krajevi nehomogeni zglobovi uz

$$u(0,t) = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = 1, \quad u(10,t) = \frac{106}{3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(10,t) = 3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad \text{i} \qquad u(x,0) = \sin(2\pi x) + \frac{x^3}{30} + \frac{x^2}{2} - 5x + 2.$$

Rješenje:

$$u(x,t) = \cos(4\pi t)\sin(2\pi x) + \cos(8\pi t)\sin(4\pi x) + x - 4.$$