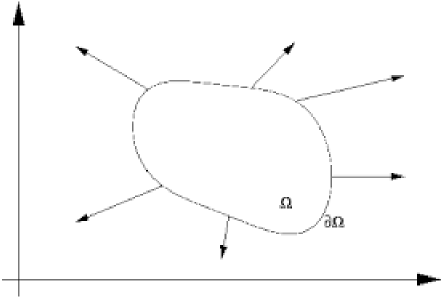
Pravokutna membrana

Oscilacije membrane

- Promotrimo membranu Ω u ravnini. Pretpostavljamo da je ona homogena, konstantne površinske gustoće ρ i **izotropno napeta** (napetost p je konstantna).

Oscilacije membrane

- Promotrimo membranu Ω u ravnini. Pretpostavljamo da je ona homogena, konstantne površinske gustoće ρ i **izotropno napeta** (napetost p je konstantna).
- Neka je $u(x, y, t)$ progib membrane u točki (x, y) u trenutku t, a $f(x, y, t)$ površinska gustoća sile koja se izvana prenese u točku (x, y) u trenutku t.



Oscilacije membrane

Iz zakona očuvanja količine gibanja dobivamo jednadžbu koja opisuje oscilacije membrane Ω:

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} = p\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t)}$$

za $(x, y) \in \Omega$ i $t \geq 0$.

Oscilacije membrane

Iz zakona očuvanja količine gibanja dobivamo jednadžbu koja opisuje oscilacije membrane Ω:

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} = p\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t)}$$

za $(x, y) \in \Omega$ i $t \geq 0$.

Definicija

Laplaceov operator definiramo kao

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Ravnoteža membrane

Promotrimo sada ravnotežu membrane, tj. slučaj kada progib $u(x, y, t) = u(x, y)$ ne ovisi o vremenu t.

Ravnoteža membrane

Promotrimo sada ravnotežu membrane, tj. slučaj kada progib $u(x, y, t) = u(x, y)$ ne ovisi o vremenu t.

Jednadžba ravnoteže membrane tada ima oblik

$$\boxed{p\Delta u + f = 0}, \quad \text{tj.}$$

$$\boxed{\Delta u = g}, \quad \text{gdje je} \quad g(x, y) = -\frac{f(x, y)}{p}.$$

Ravnoteža membrane

Promotrimo sada ravnotežu membrane, tj. slučaj kada progib $u(x, y, t) = u(x, y)$ ne ovisi o vremenu t.

Jednadžba ravnoteže membrane tada ima oblik

$$\boxed{p\Delta u + f = 0}, \quad \text{tj.}$$

$$\boxed{\Delta u = g}, \quad \text{gdje je} \quad g(x, y) = -\frac{f(x, y)}{p}.$$

(a) Ukoliko na membranu ne djeluje vanjska sila, tj. $f = 0$, ravnoteža je opisana **Laplaceovom jednadžbom**

$$\boxed{\Delta u = 0}.$$

Ravnoteža membrane

Promotrimo sada ravnotežu membrane, tj. slučaj kada progib $u(x,y,t) = u(x,y)$ ne ovisi o vremenu t.

Jednadžba ravnoteže membrane tada ima oblik

$$\boxed{p\Delta u + f = 0}, \quad \text{tj.}$$

$$\boxed{\Delta u = g}, \quad \text{gdje je} \quad g(x,y) = -\frac{f(x,y)}{p}.$$

(a) Ukoliko na membranu ne djeluje vanjska sila, tj. $f = 0$, ravnoteža je opisana **Laplaceovom jednadžbom**

$$\boxed{\Delta u = 0}.$$

(b) U slučaju djelovanja vanjske sile $f \neq 0$ rješavamo **Poissonovu jednadžbu**

$$\boxed{\Delta u = g}.$$

Laplaceova jednadžba za pravokutnu membranu

Opisuje ravnotežu pravokutne membrane $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ **bez** utjecaja vanjske sile.
Da bi imali jedinstveno rješenje trebaju nam rubni uvjeti.

(a) Donji rub membrane određen je funkcijom $\alpha(x)$, a lijevi, desni i gornji rub su učvršćeni, tj.

$$u(x, 0) = \alpha(x) \quad \text{i} \quad u(0, y) = u(a, y) = u(x, b) = 0.$$

Laplaceova jednadžba za pravokutnu membranu

Opisuje ravnotežu pravokutne membrane $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ **bez** utjecaja vanjske sile.
Da bi imali jedinstveno rješenje trebaju nam rubni uvjeti.

(a) Donji rub membrane određen je funkcijom $\alpha(x)$, a lijevi, desni i gornji rub su učvršćeni, tj.

$$u(x,0) = \alpha(x) \quad \text{i} \quad u(0,y) = u(a,y) = u(x,b) = 0.$$

U tom slučaju, rješenje problema ima oblik

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a}},$$

gdje za svako $n \in \mathbb{N}$ koeficijente računamo po formulama

$$\boxed{A_n = \frac{2}{a} \int_0^a \alpha(x) \sin \frac{n\pi x}{a} \mathrm{d}x} \quad \text{i} \quad \boxed{B_n = -A_n \operatorname{cth} \frac{n\pi b}{a}}.$$

Laplaceova jednadžba za pravokutnu membranu

(b) gornji rub membrane opisuje funkcija $\beta(x)$, a lijevi, desni i donji rub su učvršćeni, tj.

$$u(x, b) = \beta(x) \quad \text{i} \quad u(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = 0.$$

Laplaceova jednadžba za pravokutnu membranu

(b) gornji rub membrane opisuje funkcija $\beta(x)$, a lijevi, desni i donji rub su učvršćeni, tj.

$$u(x,b)=\beta(x) \quad \text{i} \quad u(0,y)=u(a,y)=u(x,0)=0.$$

U ovom slučaju, rješenje problema ima oblik

$$\boxed{u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sh}\frac{n\pi y}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}},$$

gdje za svako $n\in\mathbb{N}$ koeficijente B_n računamo po formuli

$$\boxed{B_n=\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{a}}\frac{2}{a}\int_0^a \beta(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x}.$$

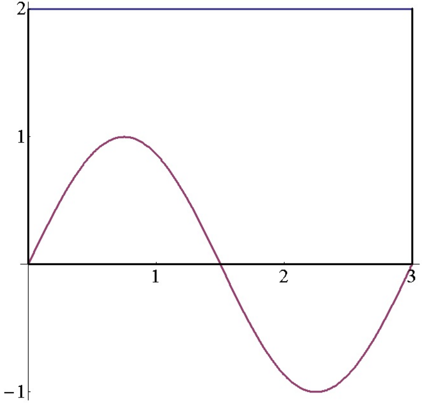
Zadatak (1.)

Riješite problem ravnoteže pravokutne membrane $\Omega = [0,3] \times [0,2]$ opisan Laplaceovom jednadžbom $\Delta u = 0$ uz rubne uvjete $u(x,0) = \sin \frac{2\pi}{3}x$ i $u(x,2) = u(0,y) = u(3,y) = 0$.

Zadatak (1.)

Riješite problem ravnoteže pravokutne membrane $\Omega = [0,3] \times [0,2]$ opisan Laplaceovom jednadžbom $\Delta u = 0$ uz rubne uvjete $u(x,0) = \sin \frac{2\pi}{3} x$ i $u(x,2) = u(0,y) = u(3,y) = 0$.

Rješenje:



- uz $a = 3$ i $b = 2$ znamo da je ravnoteža membrane opisana funkcijom

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \right) \sin \frac{n\pi}{a} x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{3} y + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{3} y \right) \sin \frac{n\pi}{3} x.$$

- uz $a = 3$ i $b = 2$ znamo da je ravnoteža membrane opisana funkcijom

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \right) \sin \frac{n\pi}{a} x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{3} y + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{3} y \right) \sin \frac{n\pi}{3} x.$$

- A_n, $n \in \mathbb{N}$, računamo primjenom svojstva ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija na sljedeći način:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{a} \int_0^a u(x,0) \sin \frac{n\pi}{a} x \mathrm{d}x = \frac{2}{3} \int_0^3 u(x,0) \sin \frac{n\pi}{3} x \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3} \int_0^3 \sin \frac{2\pi}{3} x \sin \frac{n\pi}{3} x \mathrm{d}x = \begin{cases} 1, & n = 2 \\ 0, & n \neq 2, \end{cases} \end{aligned}$$

- B_n dobijemo kao

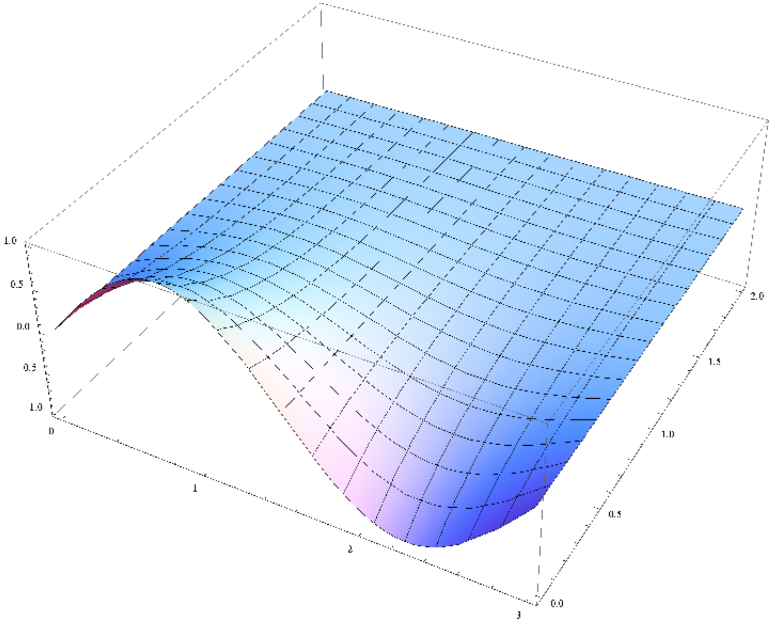
$$B_n = -A_n \operatorname{cth} \frac{bn\pi}{a} = -A_n \operatorname{cth} \frac{2n\pi}{3}$$

- B_n dobijemo kao

$$B_n = -A_n \operatorname{cth} \frac{bn\pi}{a} = -A_n \operatorname{cth} \frac{2n\pi}{3}$$

- rješenje zadanog problema ravnoteže pravokutne membrane je funkcija

$$u(x, y) = \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi}{3} y - \operatorname{cth} \frac{4\pi}{3} \operatorname{sh} \frac{2\pi}{3} y \right) \sin \frac{2\pi}{3} x$$



1.0
0.5
0.0
0.5
1.0
0
1
2
3
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

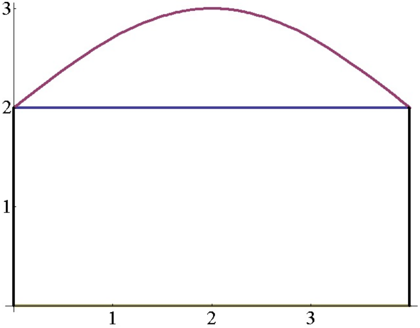
Zadatak (2.)

Riješite Laplaceovu jednadžbu $\Delta u = 0$ za pravokutnu membranu $\Omega = [0,4] \times [0,2]$ uz rubne uvjete $u(x,2) = \sin \frac{\pi}{4} x$ i $u(0,y) = u(4,y) = u(x,0) = 0$.

Zadatak (2.)

Riješite Laplaceovu jednadžbu $\Delta u = 0$ za pravokutnu membranu $\Omega = [0,4] \times [0,2]$ uz rubne uvjete $u(x,2) = \sin \frac{\pi}{4} x$ i $u(0,y) = u(4,y) = u(x,0) = 0$.

Rješenje:



- uz $a = 4$ i $b = 2$, imamo da je

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \sin \frac{n\pi}{a} x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{4} y \sin \frac{n\pi}{4} x,$$

gdje je

$$B_n = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{bn\pi}{a}} \frac{2}{a} \int_0^a u(x,2) \sin \frac{n\pi}{a} x \mathrm{d}x = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{2n\pi}{4}} \frac{2}{4} \int_0^4 u(x,2) \sin \frac{n\pi}{4} x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{2}} \frac{2}{4} \int_0^4 \sin \frac{\pi}{4} x \sin \frac{n\pi}{4} x \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2}}, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

- uz $a = 4$ i $b = 2$, imamo da je

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \sin \frac{n\pi}{a} x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{4} y \sin \frac{n\pi}{4} x,$$

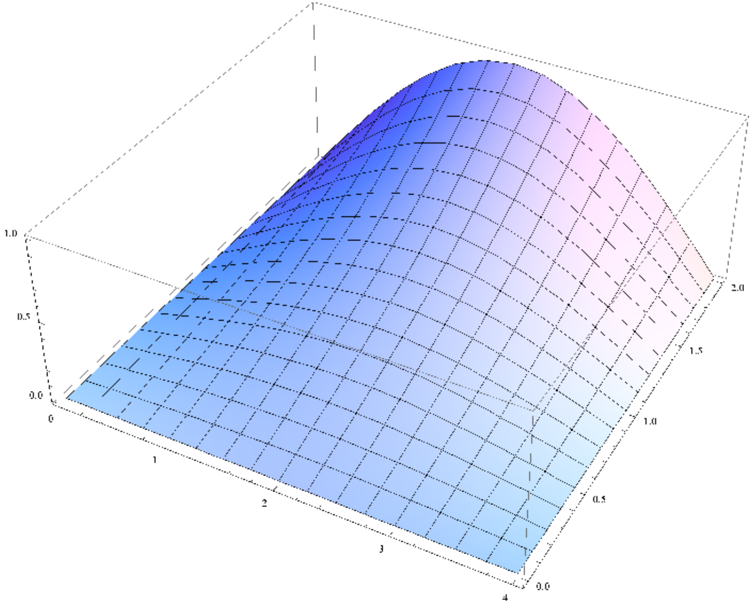
gdje je

$$B_n = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{bn\pi}{a}} \frac{2}{a} \int_0^a u(x,2) \sin \frac{n\pi}{a} x dx = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{2n\pi}{4}} \frac{2}{4} \int_0^4 u(x,2) \sin \frac{n\pi}{4} x dx$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{2}} \frac{2}{4} \int_0^4 \sin \frac{\pi}{4} x \sin \frac{n\pi}{4} x dx = \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2}}, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

- rješenje postavljenog problema je funkcija

$$u(x,y) = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2}} \operatorname{sh} \frac{\pi}{4} y \sin \frac{\pi}{4} x$$


1.0
0.5
0.0
0
1
2
3
4
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

Slobodne oscilacije pravokutne membrane

- Riješimo problem oscilacija pravokutne, homogene, izotropno napete membrane $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ na koju ne djeluje vanjska sila, tj. $f(x, y, t) = 0$.

Slobodne oscilacije pravokutne membrane

- Riješimo problem oscilacija pravokutne, homogene, izotropno napete membrane $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ na koju ne djeluje vanjska sila, tj. $f(x, y, t) = 0$.
- Problem je opisan parcijalnom diferencijalnom jednadžbom

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u}, \quad \text{gdje je} \quad c^2 = \frac{p}{\rho},$$

p predstavlja napetost, a ρ gustoću membrane.

Slobodne oscilacije pravokutne membrane

- Riješimo problem oscilacija pravokutne, homogene, izotropno napete membrane $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ na koju ne djeluje vanjska sila, tj. $f(x, y, t) = 0$.
- Problem je opisan parcijalnom diferencijalnom jednadžbom

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u}, \quad \text{gdje je} \quad c^2 = \frac{p}{\rho},$$

  p predstavlja napetost, a ρ gustoću membrane.
- Za jedinstvenost rješenja trebaju nam početni i rubni uvjeti:
  - $u|_{\partial\Omega} = 0$ - rub membrane je učvršćen (homogeni rub)
  - $u(x, y, 0) = \alpha(x, y)$ - početni oblik
  - $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \beta(x, y)$ - početna brzina.

Rješenje jednadžbe oscilacija pravokutne membrane

Opet koristimo metodu separacije varijabli, tj. pretpostavljamo da rješenje možemo pisati u obliku $u(x, y, t) = F(x, y) \cdot G(t)$. Dobijemo rješenje oblika

$$\boxed{u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn} \sin \lambda_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}},$$

za $(x, y) \in \Omega$ i $t \geq 0$, pri čemu je

$$\lambda_{mn} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad \text{za} \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Rješenje jednadžbe oscilacija pravokutne membrane

Opet koristimo metodu separacije varijabli, tj. pretpostavljamo da rješenje možemo pisati u obliku $u(x,y,t) = F(x,y) \cdot G(t)$. Dobijemo rješenje oblika

$$\boxed{u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}},$$

za $(x,y) \in \Omega$ i $t \geq 0$, pri čemu je

$$\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad \text{za} \quad m,n \in \mathbb{N}.$$

Koeficijente A_{mn} i B_{mn} za $m,n \in \mathbb{N}$ računamo prema formulama

$$\boxed{A_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a \alpha(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \qquad \text{i}$$

$$\boxed{B_{mn} = \frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^b\int_0^a \beta(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

Zadatak (7.)

Riješite problem oscilacija homogene izotropne pravokutne membrane $\Omega = [0,3] \times [0,1]$, gustoće $\rho = 2$ i napetosti $p = 32$. Početna brzina membrane je jednaka nuli, rubovi su homogeno pričvršćeni, a početni položaj membrane je zadan funkcijom $\alpha(x,y) = 0.2(3x - x^2)(y - y^2)$.

Zadatak (7.)

Riješite problem oscilacija homogene izotropne pravokutne membrane $\Omega = [0,3] \times [0,1]$, gustoće $\rho = 2$ i napetosti $p = 32$. Početna brzina membrane je jednaka nuli, rubovi su homogeno pričvršćeni, a početni položaj membrane je zadan funkcijom $\alpha(x,y) = 0.2(3x - x^2)(y - y^2)$.

Rješenje: Rješavamo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{32}{2} \Delta u,$$

uz zadane rubne i početne uvjete.

- Znamo da je rješenje oblika

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B_{mn}\sin\lambda_{mn}t\Big)\sin\frac{m\pi x}{3}\sin\frac{n\pi}{1}y,$$

gdje je $\lambda_{mn}=\sqrt{\frac{32}{2}}\pi\sqrt{\frac{m^2}{3^2}+\frac{n^2}{1^2}}=4\pi\sqrt{\frac{m^2}{9}+n^2}$ za $m,n\in\mathbb{N}$.

- Znamo da je rješenje oblika

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn} \sin \lambda_{mn} t \Big) \sin \frac{m\pi x}{3} \sin \frac{n\pi}{1} y,$$

gdje je $\lambda_{mn} = \sqrt{\frac{32}{2}}\pi \sqrt{\frac{m^2}{3^2} + \frac{n^2}{1^2}} = 4\pi \sqrt{\frac{m^2}{9} + n^2}$ za $m, n \in \mathbb{N}$.

- Vrijedi $B_{mn} = 0$, jer je početna brzina membrane jednaka nuli ($\beta(x, y) = 0$)

- Znamo da je rješenje oblika

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B_{mn}\sin\lambda_{mn}t\Big)\sin\frac{m\pi x}{3}\sin\frac{n\pi}{1}y,$$

gdje je $\lambda_{mn}=\sqrt{\frac{32}{2}}\pi\sqrt{\frac{m^2}{3^2}+\frac{n^2}{1^2}}=4\pi\sqrt{\frac{m^2}{9}+n^2}$ za $m,n\in\mathbb{N}$.

- Vrijedi $B_{mn}=0$, jer je početna brzina membrane jednaka nuli $(\beta(x,y)=0)$

- Računamo koeficijente A_{mn}:

$$\begin{aligned}A_{mn}&=\frac{4}{3\cdot 1}\int_0^1\int_0^3\frac{1}{5}(3x-x^2)(y-y^2)\sin\frac{m\pi x}{3}\sin\frac{n\pi}{1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{4}{15}\underbrace{\int_0^3(3x-x^2)\sin\frac{m\pi x}{3}\mathrm{d}x}_{=I_1}\underbrace{\int_0^1(y-y^2)\sin n\pi y\mathrm{d}y}_{=I_2}.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^3 (3x - x^2)\sin\frac{m\pi x}{3}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} u = 3x - x^2 & \mathrm{d}u = (3-2x)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin\frac{m\pi x}{3}\mathrm{d}x & v = -\frac{3}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{3} \end{array} \right| \\
&= \frac{3}{m\pi}(x^2 - 3x)\cos\frac{m\pi x}{3}\Big|_0^3 + \frac{3}{m\pi}\int_0^3 (3-2x)\cos\frac{m\pi x}{3}\mathrm{d}x \\
&= \left| \begin{array}{cc} u = 3 - 2x & \mathrm{d}u = -2\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos\frac{m\pi x}{3}\mathrm{d}x & v = \frac{3}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{3} \end{array} \right| \\
&= \frac{9}{m^2\pi^2}(3-2x)\sin\frac{m\pi x}{3}\Big|_0^3 + \frac{18}{m^2\pi^2}\int_0^3 \sin\frac{m\pi x}{3}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{54}{m^3\pi^3}\cos\frac{m\pi x}{3}\Big|_0^3 = \frac{54}{m^3\pi^3}(1 - \cos m\pi) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{za } m \text{ paran}, \\ \frac{108}{m^3\pi^3}, & \text{za } m \text{ neparan} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 (y-y^2)\sin n\pi y \mathrm{d}y = \left| \begin{array}{cc} u = y - y^2 & \mathrm{d}u = (1-2y)\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}v = \sin n\pi y \mathrm{d}y & v = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi y \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{n\pi}(y^2-y)\cos n\pi y \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 (1-2y)\cos n\pi y \mathrm{d}y \\
&= \left| \begin{array}{cc} u = 1-2y & \mathrm{d}u = -2\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}v = \cos n\pi y \mathrm{d}y & v = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi y \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{n^2\pi^2}(1-2y)\sin n\pi y \Big|_0^1 + \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 \sin n\pi y \mathrm{d}y \\
&= -\frac{2}{n^3\pi^3}\cos n\pi y \Big|_0^1 = \frac{2}{n^3\pi^3}(1-\cos n\pi) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{za } n \text{ paran,} \\ \frac{4}{n^3\pi^3}, & \text{za } n \text{ neparan} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Prema tome,

$$A_{mn} = \begin{cases} \frac{576}{5m^3n^3\pi^6}, & \text{za } m \text{ neparan i } n \text{ neparan}, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

tako da su oscilacije membrane dane funkcijom oblika

$$u(x,y,t) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{576}{5(2k+1)^3(2l+1)^3\pi^6} \cos \lambda_{2k+1,2l+1} t \sin \frac{(2k+1)\pi x}{3} \sin(2l+1)\pi y.$$

Zadatak (8.)

Riješite problem oscilacija homogene izotropne pravokutne membrane $\Omega = [0,5] \times [0,4]$, gustoće $\rho = 1$ i napetosti $p = 25$, ako su rubovi pričvršćeni, početni položaj je dan s $\alpha(x,y) = 0$, a početna brzina funkcijom $\beta(x,y) = 20xy$.

Rješenje: Rješavamo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\Delta u,$$

uz zadane rubne uvjete $u(x,0) = u(x,4) = u(0,y) = u(5,y) = 0$, te početne uvjete $\alpha(x,y) = 0$ i $\beta(x,y) = 20xy$.

- Znamo da je rješenje oblika

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B_{mn}\sin\lambda_{mn}t\Big)\sin\frac{m\pi x}{5}\sin\frac{n\pi y}{4},$$

gdje je $\lambda_{mn} = 5\pi\sqrt{\frac{m^2}{5^2}+\frac{n^2}{4^2}} = 5\pi\sqrt{\frac{m^2}{25}+\frac{n^2}{16}}$ za $m,n\in\mathbb{N}$.

- Vrijedi $A_{mn}=0$, jer membrana u početnom trenutku leži horizontalno ($\alpha(x,y)=0$).
- Koeficijente B_{mn} računamo:

$$\begin{aligned} B_{mn} &= \frac{4}{20\lambda_{mn}}\int_0^4\int_0^5 20xy\sin\frac{m\pi x}{5}\sin\frac{n\pi y}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{4}{\lambda_{mn}}\underbrace{\int_0^5 x\sin\frac{m\pi x}{5}\mathrm{d}x}_{=I_1}\underbrace{\int_0^4 y\sin\frac{n\pi y}{4}\mathrm{d}y}_{=I_2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_1 = \int_0^5 x \sin\frac{m\pi x}{5}\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{cc} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin\frac{m\pi x}{5}\mathrm{d}x & v = -\frac{5}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{5} \end{array} \right| \\
&= -\frac{5}{m\pi} x \cos\frac{m\pi x}{5}\Big|_0^5 + \frac{5}{m\pi}\int_0^5 \cos\frac{m\pi x}{5}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{25}{m\pi}\cos m\pi + \frac{25}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi x}{5}\Big|_0^5 \\
&= -\frac{25}{m\pi}\cos m\pi = \frac{25}{m\pi}(-1)^{m+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 = \int_0^4 y \sin\frac{n\pi y}{4}\mathrm{d}y &= \left| \begin{array}{cc} u = y & \mathrm{d}u = \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}v = \sin\frac{n\pi y}{4}\mathrm{d}y & v = -\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi y}{4} \end{array} \right| \\
&= -\frac{4}{n\pi} y \cos\frac{n\pi y}{4}\Big|_0^4 + \frac{4}{n\pi}\int_0^4 \cos\frac{n\pi y}{4}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{16}{n\pi}\cos n\pi + \frac{16}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi y}{4}\Big|_0^4 \\
&= -\frac{16}{n\pi}\cos n\pi = \frac{16}{n\pi}(-1)^{n+1}
\end{aligned}
$$

Prema tome,

$$B_{mn} = \frac{1600(-1)^{m+n}}{mn\pi^2\lambda_{mn}}, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

tako da je rješenje jednadžbe oscilacija

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1600(-1)^{m+n}}{mn\pi^2\lambda_{mn}} \cos \lambda_{mn} t \sin \frac{m\pi x}{5} \sin \frac{n\pi y}{4},$$

za $x \in [0, 5]$, $y \in [0, 4]$ i $t \geq 0$.

Domaća zadaća

Zadatak (9.)

Riješite problem ravnoteže pravokutne membrane $\Omega = [0,5] \times [0,1]$ opisan Laplaceovom jednadžbom $\Delta u = 0$, uz rubne uvjete $u(x,0) = \sin\frac{3\pi}{5}x$ i $u(x,1) = u(0,y) = u(5,y) = 0$.

Zadatak (10.)

Riješite Laplaceovu jednadžbu $\Delta u = 0$ za kvadratnu membranu $\Omega = [0,2] \times [0,2]$, uz rubne uvjete $u(x,2) = \sin\frac{\pi}{2}x$ i $u(0,y) = u(2,y) = u(x,0) = 0$.

Domaća zadaća

Zadatak

Odredite ravnotežni oblik homogene pravokutne membrane $\Omega = [0,2] \times [0,4]$, površinske gustoće $\rho = 5$ i napetosti $p = 20$ uz rubne uvjete $u(x,0) = \sin(9\pi x)$ i $u(0,y) = u(2,y) = u(x,4) = 0$.

Rješenje:

$$u(x,t) = [\mathrm{ch}(9\pi y) - \mathrm{cth}(36\pi)\,\mathrm{sh}(9\pi y)]\,\sin(9\pi x).$$

Domaća zadaća

Zadatak

Riješite problem oscilacija homogene, pravokutne membrane $\Omega = [0,6] \times [0,5]$ gustoće $\rho = 2.5$ i napetosti $p = 10$, ako su joj rubovi homogeno pričvršćeni, početna brzina je $\beta(x,y) = 0$, a početni položaj je dan s $\alpha(x,y) = 3\sin(\pi x)$.

Rješenje:

$$u(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{12}{(2k+1)\pi} \cos(\lambda_{6,2k+1} t) \sin(\pi x) \sin \frac{(2k+1)\pi y}{5}$$

$$\lambda_{6,2k+1} = 2\pi \sqrt{1 + \frac{(2k+1)^2}{25}}$$