Provođenje topline kroz štap

Provođenje topline

Provođenje topline ne vidimo. Iz fizike znamo da se promjenom temperature mijenja volumen tijela. Provođenje mjerimo promjenom temperature, to jest, promjenom volumena tijela.
Promatramo problem provođenja topline kroz štap $[0, l]$.

Kako je toplina energija, uz sljedeće oznake:

- $u(x,t) =$ temperatura poprečnog presjeka štapa u točki x u trenutku t,
- $\varphi(x,t) =$ količina topline po jedinici duljine u točki x u trenutku t,
- $\psi(x,t) =$ količina topline koja se prenese s desna na lijevo kroz poprečni presjek u točki x u trenutku t (u smjeru $-x$),
- $f(x,t) =$ količina topline koja se izvana prenese na štap u točki x u trenutku t,

po zakonu o očuvanju energija imamo:

$$\boxed{\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} + f(x,t)}.$$

Kako je $\boxed{\varphi(x,t) = \gamma(x)u(x,t)}$, gdje je $\gamma(x)$ toplinski kapacitet (specifična toplina) po jedinici duljine štapa u točki x, i $\boxed{\psi(x,t) = -\delta(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}$, gdje je $\delta(x)$ koeficijent provođenja (koeficijent toplinske vodljivosti), imamo:

$$\boxed{\gamma(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\delta(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big) + f(x,t)}.$$

Dakle, dobili smo jednadžbu provođenja topline. Na sličan način možemo dobiti i jednadžbu provođenja nekog fluida kroz cijev.

Stacionarno provođenje topline

Najprije pogledajmo slučaj kada temperatura poprečnog presjeka ne ovisi o vremenu, to jest, gledamo problem stacionarnog provođenja topline. Jednadžba glasi:

$$\boxed{-\left(\delta(x)u'(x)\right)' = f(x)}.$$

Ovo je ODJ drugog reda. Imamo sljedeće rubne uvjete:

- $\mathrm{u}(0) = \mathrm{a}$,
- $\mathrm{u}(\mathrm{l}) = \mathrm{b}$,

to jest, lijevi kraj štapa je na temperaturi a, a desni na temperaturi b.

Zadatak (1.)

Riješite problem stacionarnog provođenja topline kroz betonski štap duljine $2m$ ako je temperatura lijeve strane štapa $0^\circ C$, a desne $20^\circ C$. Koeficijent provođenja topline betona je $\delta = 1.3 \cdot 10^3$. Riješite problem u slučaju:

- a) ako je vanjski prijenos topline 0, to jest, štap je izoliran,
- b) ako je vanjski prijenos topline 1.3.

Zadatak (1.)

Riješite problem stacionarnog provođenja topline kroz betonski štap duljine $2m$ ako je temperatura lijeve strane štapa $0^\circ C$, a desne $20^\circ C$. Koeficijent provođenja topline betona je $\delta = 1.3 \cdot 10^3$. Riješite problem u slučaju:

- a) ako je vanjski prijenos topline 0, to jest, štap je izoliran,
- b) ako je vanjski prijenos topline 1.3.

Rješenje: Rješavamo problem

$$-\delta u''(x) = f(x)$$

uz rubne uvjete $u(0) = 0$ i $u(2) = 20$.

- a) $\delta = 1.3 \cdot 10^3, f = 0 \implies u(x) = C_1 x + C_2$
  $u(0) = 0 \implies C_2 = 0$
  $u(2) = 20 \implies 2C_1 + C_2 = 20 \implies C_1 = 10$
  $\implies u(x) = 10x.$
- b) $\delta = 1.3 \cdot 10^3, f = 1.3 \implies u''(x) = -10^{-3} \implies u(x) = -10^{-3}\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$
  $u(0) = 0 \implies C_2 = 0$
  $u(2) = 20 \implies -2 \cdot 10^{-3} + 2C_1 = 20 \implies C_1 = 10 + 10^{-3}$
  $\implies u(x) = -\frac{10^{-3}}{2}x^2 + (10 + 10^{-3})x.$

Dinamičko provođenje topline

Pogledajmo sada dinamičko provođenje topline, to jest, provođenje topline u vremenu. Promatramo jednadžbu:

$$\boxed{\gamma(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\delta(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}) + f(x,t).}$$

Pretpostavimo da su toplinski kapacitet i koeficijent provođenja konstantni ($\gamma(x) = \gamma, \delta(x) = \delta$), te da je štap (plašt štapa) izoliran ($f(x,t) = 0$). Tada rješavamo jednadžbu

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\delta}{\gamma}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

to jest, uz oznaku $c^2 = \frac{\delta}{\gamma}$ imamo:

$$\boxed{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.}$$

Ovu jednadžbu nazivamo jednadžba topline. Ona određuje temperaturu poprečnog presjeka homogenog i izoliranog štapa.

$$\boxed{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.}$$

Ovu jednadžbu nazivamo jednadžba topline. Ona određuje temperaturu poprečnog presjeka homogenog i izoliranog štapa.
Za jedinstvenost rješenja nam trebaju sljedeći uvjeti:

- $u(0,t) = 0$,
- $u(l,t) = 0$,
- $u(x,0) = g(x)$

Prva dva se zovu homogeni rubni uvjeti, a interpretacija je da su rubovi konstantno na temperaturi $0^\circ C$; treći je početna distribucija temperature štapa.

Slično kao i u slučaju oscilacija žice, rješenje jednadžbe $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ tražimo u obliku $u(x,t) = X(x)T(t)$.
Uz rubne uvjete $u(0,t) = u(l,t) = 0$ dobivamo

$$\boxed{X(x) = B_n \sin(\lambda_n x),}$$

gdje su $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, n \in \mathbb{N}$.
Pritom su λ_n svojstvene vrijednosti, a $X_n(x) = \sin(\lambda_n x)$ svojstvene funkcije.
Za funkciju $T(t)$ kao rješenje dobivamo

$$\boxed{T(t) = C_n e^{-(\lambda_n c)^2 t}.}$$

Zbog linearnosti diferencijalnog operatora dobivamo da je

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-(\lambda_n c)^2 t} \sin(\lambda_n x),}$$

gdje su $E_n = B_n C_n, n \in \mathbb{N}$. Brojeve E_n određujemo iz početnog uvjeta $u(x,0) = g(x)$, to jest,

$$\boxed{E_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin(\lambda_n x) dx.}$$

Zadatak (2.)

Tanki homogeni štap duljine l toplinski je bočno izoliran, dakle, nema prijenosa topline izvana. Neka je na krajevima temperatura $0^\circ C$ te neka je početna distribucija temperature dana formulom $u(x,0) = x(l-x)$. Pronađite zakon provođenja.

Zadatak (2.)

Tanki homogeni štap duljine l toplinski je bočno izoliran, dakle, nema prijenosa topline izvana. Neka je na krajevima temperatura $0^\circ C$ te neka je početna distribucija temperature dana formulom $u(x,0) = x(l-x)$. Pronađite zakon provođenja.

Rješenje: Rješavamo problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

uz rubne uvjete:

1) u(0,t) = u(l,t) = 0,
2) u(x,0) = x(l-x) = g(x).

Rješenje je oblika $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-(\lambda_n c)^2 t} \sin(\lambda_n x)$, gdje su $E_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin(\lambda_n x)dx$. Računamo

$$E_n = \frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin(\lambda_n x)dx$$
$$= \frac{4l^2}{n^3\pi^3}(1-\cos(n\pi))$$
$$= \frac{4l^2}{n^3\pi^3}(1-(-1)^n).$$

Dakle,

$$E_n = \begin{cases} 0, & n \text{ paran}, \\ \frac{8l^2}{n^3\pi^3}, & n \text{ neparan}. \end{cases}$$

Sve skupa,

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8l^2}{(2k+1)^3\pi^3} e^{-(\lambda_{2k+1}c)^2 t} \sin(\lambda_{2k+1}x).$$

Izolirani krajevi

Promotrimo sada problem provođenja topline kroz štap u slučaju kada su i krajevi i štap (to jest, plašt) izolirani.

Izolirani krajevi

Promotrimo sada problem provođenja topline kroz štap u slučaju kada su i krajevi i štap (to jest, plašt) izolirani.
Iz fizike znamo da je veličina provođenja topline proporcionalna gradijentu temperature, to jest, u slučaju kada su krajevi izolirani imamo nove rubne uvjete:

$$\frac{\partial}{\partial x}u(0,t) = \frac{\partial}{\partial x}u(l,t) = 0,$$

uz početnu distribuciju temperature

$$u(x,0) = g(x).$$

Izolirani krajevi

Promotrimo sada problem provođenja topline kroz štap u slučaju kada su i krajevi i štap (to jest, plašt) izolirani.
Iz fizike znamo da je veličina provođenja topline proporcionalna gradijentu temperature, to jest, u slučaju kada su krajevi izolirani imamo nove rubne uvjete:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(l, t) = 0,$$

uz početnu distribuciju temperature

$$u(x, 0) = g(x).$$

Dakle, u slučaju izoliranih krajeva, krajevi se ponašaju kao i štap (za razliku od prethodnog slučaja kada su krajevi bili na fiksnoj temperaturi).

Rješavamo problem

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},}$$

uz rubne uvjete $\frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(l, t) = 0$ i početni uvjet $u(x, 0) = g(x)$.
Kao i prije, rješenje tražimo u obliku

$$\boxed{u(x, t) = X(x)T(t).}$$

Dobivamo $X(x) = B_n X_n(x)$ i $T(t) = C_n T_n(t)$, gdje su $X_n(x) = \cos(\lambda_n x)$ i $T_n(t) = e^{-(\lambda_n c)^2 t}$, za $n = 0, 1, 2, \dots$
Iz linearnosti diferencijalnog operatora dobivamo da je rješenje

$$\boxed{u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos(\lambda_n x) e^{-(\lambda_n c)^2 t},}$$

gdje je $D_n = B_n C_n$.

D_n određujemo iz početnog uvjeta $u(x,0) = g(x)$, to jest,

$$D_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\cos(\lambda_n x)dx, \text{ za } n \geq 1,$$
$$D_0 = \frac{1}{l}\int_0^l g(x)dx.$$

Zadatak (3.)

Izračunajte temperaturu homogenog štapa sa izoliranim rubovima ako je inicijalna temperatura dana sa

$$u(x,0) = g(x) = \begin{cases} x, & na[0, \frac{l}{2}], \\ l - x, & na[\frac{l}{2}, l]. \end{cases}$$

Rješenje: Rješenje je oblika $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos(\lambda_n x) e^{-(\lambda_n c)^2 t}$, gdje su

$$D_0 = \frac{1}{l} \int_0^l g(x) dx = \frac{l}{4},$$

$$D_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \cos(\lambda_n x) dx = \frac{8l}{n^2 \pi^2} \sin^2(\frac{n\pi}{4}) \cos(\frac{n\pi}{2}).$$

Dakle,

$$u(x,t) = \frac{l}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8l}{n^2\pi^2} \sin^2(\frac{n\pi}{4}) \cos(\frac{n\pi}{2}) e^{-(\frac{n\pi}{l} c)^2 t} \cos(\frac{n\pi}{l} x).$$

Homogenizacija rubnih uvjeta

Promotrimo sada problem izoliranog homogenog štapa koji nema homogene rubne uvjete, to jest, rješavamo problem

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},}$$

uz rubne uvjete

$$\begin{aligned} u(0,t) &= a, \\ u(l,t) &= b, \\ u(x,0) &= g(x). \end{aligned}$$

Opet je ideja homogenizirati rubne uvjete (kao i u slučaju oscilacija žice).

Rješenje gornjeg problema tražimo u obliku

$$\boxed{u(x,t) = v(x,t) + w(x),}$$

Rješenje gornjeg problema tražimo u obliku

$$\boxed{u(x,t) = v(x,t) + w(x),}$$

gdje je $w(x)$ rješenje od

$$\begin{aligned} w''(x) &= 0, \\ w(0) &= a, \\ w(l) &= b, \end{aligned}$$

Rješenje gornjeg problema tražimo u obliku

$$\boxed{u(x,t) = v(x,t) + w(x),}$$

gdje je $w(x)$ rješenje od

$$\begin{aligned} w''(x) &= 0, \\ w(0) &= a, \\ w(l) &= b, \end{aligned}$$

a $v(x,t)$ je rješenje od

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ v(0,t) &= v(l,t) = 0, \\ v(x,0) &= u(x,0) - w(x) = g(x) - w(x). \end{aligned}$$

Očito je $w(x) = \frac{b-a}{l}x + a$.

Zadatak (5.)

Riješite problem provođenja topline izoliranog homogenog štapa duljine $l = 1$ uz rubne uvjete $u(0,t) = 0, u(1,t) = 1$ i $u(x,0) = x + \sin(2\pi x)$.

Zadatak (5.)

Riješite problem provođenja topline izoliranog homogenog štapa duljine $l = 1$ uz rubne uvjete $u(0,t) = 0, u(1,t) = 1$ i $u(x,0) = x + \sin(2\pi x)$.

Rješenje: Rješavamo $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ uz

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ u(1,t) &= 1, \\ u(x,0) &= x + \sin(2\pi x). \end{aligned}$$

Dakle, rješenje je oblika $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$, pri čemu imamo:

1) $w(x)$ je rješenje od $w''(x) = 0, w(0) = 0, w(1) = 1$, odakle slijedi da je $w(x) = x$.
2) $v(x,t)$ je rješenje od $\frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ uz $v(0,t) = v(1,t) = 0$ i $v(x,0) = u(x,0) - w(x) = \sin(2\pi x)$.

Vrijedi da je

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-(\lambda_n c)^2 t} \sin(\lambda_n x),$$

gdje su

$$\begin{aligned} E_n &= 2\int_0^1 v(x,0)\sin(\lambda_n x)dx \\ &= 2\int_0^1 \sin(2\pi x)\sin(n\pi x)dx = \begin{cases} 0, n \neq 2, \\ 1, n = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Dakle, $v(x,t) = e^{-(2\pi c)^2 t}\sin(2\pi x)$, pa je

$$u(x,t) = e^{-(2\pi c)^2 t}\sin(2\pi x) + x.$$

Zadatak (6.)

Izračunajte temperaturu izoliranog štapa duljine $l = 12$, toplinskog kapaciteta $\gamma = 4$ i koeficijenta provođenja $\delta = 16$, ako je inicijalna distribucija temperature dana s $u(x, 0) = \sin(3\pi x) + \sin(5\pi x) + \frac{1}{2}x - 3$. Rubni uvjeti su $u(0, t) = -3$ i $u(12, t) = 3$.

Zadatak (7.)

Izračunajte temperaturu izoliranog štapa duljine $l = 5$ koji ima koeficijent toplinskog kapaciteta $\gamma = 3$ i koeficijent provođenja $\delta = 27$, ako je na krajevima temperatura $0^\circ C$, a inicijalna distribucija temperature $u(x, 0) = -x^2 + 5x$ na $[0, 5]$.