1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$

PREZIME I IME:	**GRUPA:**

MATEMATIKA 1 Drugi kolokvij 19.12.2022. α

1. a) (3 boda) Odredite parametar λ tako da vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{k}$ i $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j} + \lambda\vec{k}$ budu komplanarni.

   b) (5 bodova) Odredite sve točke na pravcu $p \ldots \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-5} = \frac{z+3}{-2}$ koje su jednako udaljene od ravnina $\pi_1 \ldots 3x + 3y - 2 = 0$ i $\pi_2 \ldots 4x + y + z + 4 = 0$.

Rješenje:

a) Vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su komplanarni ako i samo ako vrijedi $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$. Računamo

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda - 6 + 4 + 2 = -\lambda.$$

Zaključujemo da su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni ako i samo ako je $-\lambda = 0$, odnosno $\lambda = 0$.

b) Prelaskom na parametarski oblik jednadžbe pravca p dobivamo da su sve točke koje leže na pravcu p oblika $(3t + 2, -5t - 3, -2t - 3)$, za neki $t \in \mathbb{R}$. Neka je $t \in \mathbb{R}$ te neka je $T(3t + 2, -5t - 3, -2t - 3)$ točka na pravcu p. Iz formule za udaljenost točke od ravnine dobivamo

$$d(T, \pi_1) = \frac{|3(3t + 2) + 3(-5t - 3) + 0(-2t - 3) - 2|}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 0^2}} = \frac{|-6t - 5|}{3\sqrt{2}},$$

$$d(T, \pi_2) = \frac{|4(3t + 2) + 1(-5t - 3) + 1(-2t - 3) + 4|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|5t + 6|}{3\sqrt{2}}.$$

Želimo naći sve $t \in \mathbb{R}$ za koje su ove udaljenosti jednake. Stoga, preostaje rješiti jednadžbu

$$\frac{|-6t - 5|}{3\sqrt{2}} = \frac{|5t + 6|}{3\sqrt{2}}.$$

Množenjem obje strane sa $3\sqrt{2}$ svodimo jednadžbu na $|-6t - 5| = |5t + 6|$. Imamo dva slučaja

$$-6t - 5 = 5t + 6 \text{ ili } -6t - 5 = -(5t + 6).$$

Iz prvog slučaja dobivamo $t = -1$, a iz drugog $t = 1$. Uvrštavanjem dobivamo da su tražene točke $T_1(-1, 2, -1)$ i $T_2(5, -8, -5)$.

2. (8 bodova) Neka je zadana matrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -12 & 2 & -10 \\ -6 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore pridružene najvećoj svojstvenoj vrijednosti matrice A.

Rješenje:

Odredimo karakteristični polinom matrice A.

$$k_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 0 & -2 \\ 12 & \lambda - 2 & 10 \\ 6 & 0 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Svojstvene vrijednosti su nultočke karakterističnog polinoma. Stoga su $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ svojstvene vrijednosti matrice A. Najveća svojstvena vrijednost je $\lambda_3 = 2$. Svojstvene vektore određujemo rješavajući sustav

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \iff (A - 2I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -12 & 0 & -10 \\ -6 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Elementarnim transformacija $(6I + II)$ i $(3I + III)$ dobivamo ekvivalentan sustav

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + z = 0, 2z = 0, z = 0 \Rightarrow x = 0, z = 0.$$

Stavimo li $y = t$, $t \in \mathbb{R}$ dobivamo da su rješenja sustava $(x, y, z) = (0, t, 0)$. Svojstveni vektori za svojstvenu vrijednost $\lambda_3 = 2$ su onda dani sa

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

3. a) (4 boda) Odredite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}x \cdot \left(\sqrt{4+5x} - \sqrt{4-5x}\right)}{10x^2}$$

b) (4 boda) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^2 \cdot 7^n}$$

Rješenje:

a) Vrijedi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}x \cdot \left(\sqrt{4+5x} - \sqrt{4-5x}\right)}{10x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}x \cdot \left(\sqrt{4+5x} - \sqrt{4-5x}\right)\left(\sqrt{4+5x} + \sqrt{4-5x}\right)}{10x^2\left(\sqrt{4+5x} + \sqrt{4-5x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}x \cdot (4+5x-(4-5x))}{10x^2\left(\sqrt{4+5x} + \sqrt{4-5x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}x \cdot 10x}{10x^2\left(\sqrt{4+5x} + \sqrt{4-5x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot x\left(\sqrt{4+5x} + \sqrt{4-5x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{4+5x} + \sqrt{4-5x}\right)}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

b) Vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3(n+1)-1}{(n+1)^2 \cdot 7^{n+1}}}{\frac{3n-1}{n^2 \cdot 7^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+2)n^2 \cdot 7^n}{(3n-1)(n+1)^2 \cdot 7^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+2n^2}{7(3n^3+5n^2+n-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+2n^2}{7(3n^3+5n^2+n-1)} \cdot \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}}{7(3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3})} = \frac{3}{7\cdot 3} = \frac{1}{7} < 1.$$

Zaključujemo da po D'Alambertovom kriteriju dani red konvergira.

4. a) (4 boda) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x+2}\right) + \arcsin x.$$

b) (4 boda) Odredite sve asimptote funkcije $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x+1}$.

Rješenje:

a) Znamo da je $\mathcal{D}_{\ln} = \langle 0, +\infty\rangle$ te da je $\mathcal{D}_{\arcsin} = [-1, 1]$. Dobivamo uvjete

$$\frac{2x}{x+2} > 0 \text{ i } x \geq -1 \text{ i } x \leq 1.$$

Imamo da je $x \geq -1$ pa mora vrijediti $x+2 > 0$. Stoga je $\frac{2x}{x+2} > 0$ ako i samo ako $2x > 0$, odnosno $x > 0$. Dobili smo da su gornji uvjeti ekvivalentni sa

$$x > 0 \text{ i } x \geq -1 \text{ i } x \leq 1.$$

Zaključujemo da je domena funkcije f jednaka $\langle 0, 1]$.

b) Vrijedi $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Stoga, funkcija f nema horizontalnih asimptota. Vertikalna asimptota je pravac $x = -1$. Odredimo još kose asimptote. Imamo da je

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+1}{x^2+x} = 3.$$

Zaključujemo, ukoliko kosa asimptota $y = kx + l$ funkcije f postoji, onda joj je koeficijent smjera $k = 3$. Imamo da je

$$l = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x^2+1}{x+1} - 3x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x}{x+1} = -3.$$

Stoga je kosa asimptota funkcije f pravac $y = 3x - 3$.

5. (8 bodova) Odredite jednadžbe tangenti na graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x-2}$ koje prolaze točkom $T(1,0)$.

Rješenje:

Jednadžba tangente u točki $(x_0, f(x_0))$ je

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Derivacija funkcije f dana je sa $f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$. Kako je $T(1,0)$ na tangenti mora vrijediti

$$0 - \frac{1}{x_0 - 2} = -\frac{1}{(x_0 - 2)^2}(1 - x_0).$$

Množenjem sa $-(x_0 - 2)^2$ dobivamo

$$x_0 - 2 = 1 - x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{3}{2}.$$

Imamo da je $f'(\frac{3}{2}) = -4$ te da je $f(\frac{3}{2}) = -2$. Dakle, jednadžba tražene tangente je $y + 2 = -4(x - \frac{3}{2})$, odnosno $y = -4x + 4$.