

Poglavlje 1

Obične diferencijalne jednađbe

1.1 Osnovni pojmovi i primjeri

Obična diferencijalna jednađba je jednađba oblika

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

koja povezuje nezavisnu varijablu x , nepoznatu funkciju $y(x)$ i njene derivacija $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$. Ovdje F označava poznatu funkciju više varijabli. **Red diferencijalne jednađbe** je red najviše derivacije koja se u njoj pojavljuje.

Kod obične diferencijalne jednađbe tražimo nepoznatu funkciju jedne varijable $y(x)$. Diferencijalne jednađbe u kojima se pojavljuju nepoznate funkcije više varijabli zovemo **parcijalne diferencijalne jednađbe**.

Najjednostavnija obična diferencijalna jednađba je jednađba oblika

$$y' = f(x), \quad (1.2)$$

gdje je f poznata funkcija, neprekidna na nekom intervalu $[a, b]$. Ako je F primitivna funkcija od f , onda svaka funkcija oblika $y(x) = F(x) + C$ zadovoljava jednađbu (1.2). Iz toga vidimo da uvjet (1.2) ne određuje jedinstveno nepoznatu funkciju $y(x)$.

Primjer 1.1. *Jednađba $y' = y^3 + 2x$ je primjer obične diferencijalne jednađbe 1. reda, dok je $y'' + 2y' + y = \sin x$ primjer obične diferencijalne jednađbe 2. reda.*

Definicija 1.1. *Rješenje* obične diferencijalne jednačbe n -tog reda na intervalu $[a, b]$ je svaka funkcija $y = \varphi(x)$ koja na tom intervalu ima sve derivacije do uključivo n -tog reda i čije uvrštavanje u jednačbu pretvara istu u identitet na $[a, b]$. Graf rješenja diferencijalne jednačbe zove se **integralna krivulja** te jednačbe.

Primjer 1.2. Funkcija $y(x) = \sin x$ je rješenje diferencijalne jednačbe 2. reda $y'' + y = 0$ na intervalu $\langle -\infty, \infty \rangle$.

Obične diferencijalne jednačbe su vrlo bitne jer se mnogi problemi iz prirodnih i društvenih znanosti modeliraju pomoću njih. Pogledajmo par primjera:

Primjer 1.3. Odredimo krivulju čija tangenta u svakoj točki ima nagib (to jest koeficijant smjera) jednak ordinati te točke.

Neka je $y = y(x)$ jednačba tražene krivulje. Iz zadatka vidimo da mora vrijediti uvjet $y'(x) = y(x)$. Rješenje te diferencijalne jednačbe je $y(x) = e^x$. Također, funkcija $y(x) \equiv 0$ je rješenje. Ova dva rješenja su sadržana u rješenju $y(x) = Ce^x$, gdje je $C \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta.

Primjer 1.4. Odredimo zakon gibanja materijalne točke koja se pravocrtno giba s konstantnim ubrzanjem a .

Tražimo formulu za prijeđeni put oblika $s = s(t)$, gdje je t vrijeme. Jednačba koju trebamo riješiti je $s''(t) = a$ i to je obična diferencijalna jednačba 2. reda. Integriranjem dobivamo $s'(t) = at + C_1$ i $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + C_1t + C_2$. Konstante C_1 i C_2 određuju se iz početnih uvjeta $s(t_0) = s_0$ i $s'(t_0) = v_0$. Uvrštavanjem tih vrijednosti u formulu za rješenje dobivamo

$$v_0 = at_0 + C_1 \implies C_1 = v_0 - at_0$$

$$s_0 = \frac{1}{2}at_0^2 + (v_0 - at_0)t_0 + C_2 \implies C_2 = s_0 - v_0t_0 + \frac{at_0^2}{2}.$$

Sada vratimo C_1 i C_2 u formulu za rješenje i imamo rješenje

$$s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2.$$

Promatramo običnu diferencijalnu jednađžu $F(x, y, y') = 0$. Za dvije diferencijalne jednađže $F_1(x, y, y') = 0$ i $F_2(x, y, y') = 0$ kađemo da su **ekvivalentne** u nekom području D ako je svako rješenje jedne ujedno i rješenje druge jednađže i obratno. Kod rada s diferencijalnim jednađžbama moramo paziti da su transformirane jednađže ekvivalentne polaznima.

Obične diferencijalne jednađže mogu imati nijedno, jedno ili beskonačno mnogo rješenja. Za običnu diferencijalnu jednađžu

$$y' = f(x, y) \tag{1.3}$$

nam treba još i početni uvjet $y(x_0) = y_0$. Obična diferencijalna jednađža skupa s početnim uvjetom čine **Cauchyjev problem** za jednađžu (1.3).

1.2 Rješenje Cauchyjevog problema za jednadžbu 1. reda

Teorem 1.1. *Neka je*

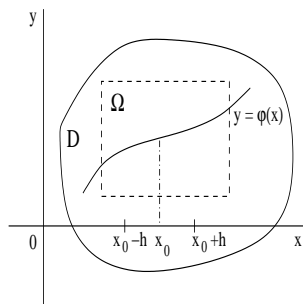
$$y' = f(x, y) \quad (1.4)$$

obična diferencijalna jednadžba. Ako postoji okolina Ω točke (x_0, y_0) takva da je

(i) *$f(x, y)$ neprekidna na Ω i*

(ii) *$\frac{\partial f}{\partial y}$ ograničeno na Ω ,*

onda postoji interval $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$ na kojem postoji jedinstveno rješenje $y = \varphi(x)$ jednadžbe (1.4) za koju je $\varphi(x_0) = y_0$.



Slika 1.1:

Geometrijski, Teorem 1.1 kaže da uz određene uvjete na $f(x, y)$ kroz točku (x_0, y_0) prolazi samo jedna integralna krivulja jednadžbe (1.4). Što znače ti uvjeti? Neprekidnost funkcije f definira se slično kao i za funkcije jedne varijable – male promjene u argumentima rezultiraju malim promjenama vrijednosti funkcije. Prvi uvjet povlači postojanje rješenja. (Rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi je poćenje integriranja, a sjetimo se da smo integral definirali za neprekidne funkcije.) Drugi uvjet, ograničenost $\frac{\partial f}{\partial y}$, daje nam jedinstvenost rješenja. Veličina $\frac{\partial f}{\partial y}$ mjeri brzinu promjene vrijednosti f u smjeru y kad je x konstantan. Kada taj drugi uvjet izostavimo, dolazimo do slabijeg rezultata:

Teorem 1.2. *Ako je funkcija $f(x, y)$ neprekidna na nekoj okolini točke (x_0, y_0) , onda jednačina (1.4) ima barem jedno rješenje $y = \varphi(x)$ koje za $x = x_0$ poprima vrijednost y_0 .*

Opće rješenje obične diferencijalne jednačbe $y' = f(x, y)$ (na nekom području egzistencije i jedinstvenosti) je jednoparametarska familija funkcija $\varphi_C(x)$ koje ovise o x i o parametru C , takva da za svaku vrijednost parametra C funkcija $\varphi_C(x)$ zadovoljava jednačbu (tj. vrijedi $\varphi'_C(x) = f(x, \varphi_C(x))$) i da za svaki y_0 postoji vrijednost parametra C_0 takva da je $\varphi_{C_0}(x_0) = y_0$.

Partikularno rješenje obične diferencijalne jednačbe je rješenje dobiveno iz općeg rješenja izborom određene vrijednosti parametra C (uključivo možda i $\pm\infty$). Opće rješenje možemo gledati kao skup svih partikularnih rješenja.

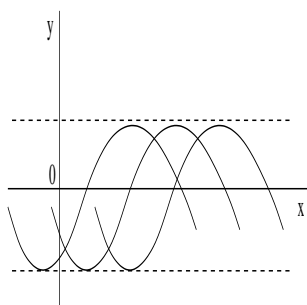
Često do općeg rješenja dolazimo u obliku komplicirane formule koja povezuje x , y i C , $\Phi(x, y, C) = 0$. Takvu formulu nazivamo **opći integral jednačbe** $y' = f(x, y)$. Partikularni integral je ono što dobijemo izborom konkretne vrijednosti parametra C , $\Phi(x, y) = 0$.

Rješenje $y = \varphi(x)$ jednačbe $y' = f(x, y)$ je **singularno** ako je uvjet jedinstvenosti narušen u svakoj njegovoj krivulji, to jest ako kroz svaku točku integralne krivulje prolazi neka druga integralna krivulja.

Primjer 1.5. *Nađimo singularna rješenja jednačbe $y' = \sqrt{1 - y^2}$.*

Kandidati su krivulje na kojima je $\frac{\partial f}{\partial y}$ beskonačno. Singularne integralne krivulje su ovojnice familije integralnih krivulja.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} \implies y^2 = 1, y = \pm 1.$$



Slika 1.2: Integralne krivulje

1.3 Jednadžbe rješive u kvadraturama

Obična diferencijalna jednadžba je **rješiva u kvadraturama** ako se njeno opće rješenje može dobiti kao rezultat konačnog niza elementarnih operacija nad poznatim funkcijama i integriranja tih funkcija.

Nisu sve obične diferencijalne jednadžbe rješive u kvadraturama. Na primjer, jednadžba $y' = x^2 + y^2$ nije. To nije iznenađujuće, vidjeli smo to kod integrala.

1.3.1 Jednadžbe sa separiranim varijablama

Promatramo jednadžbe oblika $y' = \frac{f_2(x)}{f_1(y)}$. Možemo ih, pišući $y' = \frac{dy}{dx}$, svesti na oblik

$$f_1(y)dy = f_2(x)dx. \quad (1.5)$$

Smatramo da su f_1 i f_2 poznate i neprekidne funkcije svojih argumenata. Integrirajući svaku stranu jednadžbe (1.5) zasebno dobijemo jednadžbu koju mora zadovoljavati svako rješenje jednadžbe (1.5):

$$\int f_1(y)dy = \int f_2(x)dx + C. \quad (1.6)$$

Primjer 1.6. Dana je jednadžba $(1 + y^2)xdx = (1 + x^2)ydy$.

Kako je $(1 + x^2)(1 + y^2) \neq 0$, dijeljenjem jednadžbe tim izrazom dolazimo do ekvivalentne jednadžbe

$$\frac{xdx}{1 + x^2} = \frac{ydy}{1 + y^2}.$$

Integriranjem dobivamo

$$\ln(1 + y^2) = \ln(1 + x^2) + C,$$

odnosno

$$\frac{1 + y^2}{1 + x^2} = C.$$

Moramo biti oprezni kod transformacija koje uključuju množenje i dijeljenje.

Primjer 1.7. Imamo jednadžbu $y' = f(ax + by + c)$.

Zamjenom $z = ax + by + c$ gornja jednačba postaje jednačba sa separiranim varijablama $z' = a + by' = a + bf(z)$, koja vodi na

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx.$$

Ako uzmemo $a = b = 1, c = 0$, odnosno gledamo jednačbu $y' = (x + y)^2$, imamo zamjenu $z = x + y$, pa jednačba postaje $z' = 1 + y' = 1 + z^2$ što vodi na $\frac{dz}{1+z^2} = dx$.

Integriranjem dolazimo do $\arctg z = x + C$ odnosno $z = \operatorname{tg}(x + C)$, a vraćanjem supstitucije dolazimo do rješenja $y = \operatorname{tg}(x + C) - x$.

Primjer 1.8. Riješimo jednačbu $y' = ky$, gdje je k neka konstanta.

$$\frac{dy}{dx} = ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = kdx \Rightarrow \ln y = kx + C \Rightarrow y = Ce^{kx}$$

Ako imamo početni uvjet $y(0) = y_0$, tada imamo rješenje $y = y_0 e^{kx}$.

Ako pak imamo početni uvjet $y(x_0) = y_0$, odnosno $y_0 = Ce^{kx_0}$, tada možemo izračunati $C = y_0 e^{-kx_0}$ i imamo rješenje $y = y_0 e^{k(x-x_0)}$.

Primjer 1.8 opisuje najjednostavniji model populacijske dinamike (za $k > 0$). Ista jednačba opisuje i, recimo, umnožavanje neutrona pri lančanoj reakciji (za $k > 0$) i radioaktivni raspad (za $k < 0$). Taj model podrazumijeva da su resursi potrebni za rast populacije neograničeni i da nema umiranja. Uzmemo li $k = m - n$, pri čemu je m stopa rađanja, a n stopa smrtnosti (relativna), možemo realističnije modelirati populacijsku dinamiku.

Realističniji model se dobiva kad se vodi računa o ograničenosti resursa. To se opisuje formulama

$$m = b_1 - b_2 y, \quad n = b_3 + b_4 y; \quad b_i > 0, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Odavde je

$$\begin{aligned} k = m - n &= b_1 - b_3 - (b_2 + b_4)y \\ &= b_2 + b_4 \left(\frac{b_1 - b_3}{b_2 + b_4} - y \right) = \alpha(A - y). \end{aligned}$$

Sad je diferencijalna jednačba oblika

$$y' = \alpha(A - y)y.$$

Takva se jednađba zove **logistička jednađba**. Opisuje širenje zaraze, glasina i druge pojave u biologiji i društvu.

Separacijom varijabli dobivamo:

$$\frac{dy}{(A-y)y} = \alpha dx \implies y = \frac{ACe^{A\alpha x}}{1 + e^{A\alpha x}}.$$

Uz početni uvjet $y(0) = y_0$ imamo

$$y(x) = \frac{A}{1 + \left(\frac{A}{y_0} - 1\right)e^{-A\alpha x}}.$$

Za $\alpha > 0$ i $A > 0$ imamo $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = A$. Broj A je kapacitet (granični) staništa.

1.3.2 Jednađbe homogene u x i y

Funkcija $f(x, y)$ je **homogena n -tog stupnja** ako vrijedi $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.

Primjer 1.9. Dana je funkcija $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$. Računamo:

$$f(tx, ty) = t^2x^2 - txy + t^2y^2 = t^2f(x, y)$$

i zaključujemo sa je f homogena drugog stupnja.

Definicija 1.2. Obična diferencijalna jednađba je **homogena u x i y** ako je $f(x, y)$ homogena nultog stupnja, odnosno

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y).$$

Kako to vrijedi za sve t , mora vrijediti i za $t = \frac{1}{x}$, pa imamo

$$f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x, y).$$

Označimo $f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ i iz prethodnog razmatranja slijedi da je obična diferencijalna jednađba homogena u x i y ako je

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Jednadžbe homogene u x i y svode se na jednadžbe sa separiranim varijablama. Uvodimo novu varijablu $u = \frac{y}{x}$. Odatle je $y = ux$ pa je $y' = u'x + u$. Nadalje,

$$\begin{aligned} y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) &\Rightarrow u + xu' = \varphi(u) \\ xu' &= \varphi(u) - u \\ \frac{du}{\varphi(u)-u} &= \frac{dx}{x} \quad \text{za } \varphi(u) \neq u \\ \int \frac{du}{\varphi(u)-u} &= \ln|x| + \ln C. \end{aligned}$$

Za $\varphi(u) = u$ imamo $y' = \frac{y}{x}$, što već je jednadžba sa separiranim varijablama.

Primjer 1.10. Riješimo jednadžbu $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$.

Za početak preuredimo jednadžbu na sljedeći način:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2(1 + \frac{y^2}{x^2})}{x^2 \frac{y}{x}} = \frac{1 + (\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}}.$$

Nakon supstitucije $u = \frac{y}{x}$ imamo:

$$\begin{aligned} xu' &= \frac{1+u^2}{u} - u = \frac{1}{u} \\ udu &= \frac{dx}{x} \quad / \int \\ \frac{u^2}{2} &= \ln x + \ln C = \ln Cx \\ u^2 &= \ln Cx \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2 \ln Cx. \end{aligned}$$

1.3.3 Linearna diferencijalna jednadžba 1. reda

Obična diferencijalna jednadžba je linearna ako je linearna u nepoznatoj funkciji i njenoj derivaciji. Općeniti oblik linearne jednadžbe prvog reda je sljedeći :

$$A(x)y' + B(x)y = f(x). \quad (1.7)$$

Funkcije A , B i f su definirane na nekom intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Funkcije A i B zovemo **koeficijenti** linearne jednadžbe.

Ako je $f \equiv 0$ na $\langle \alpha, \beta \rangle$, kažemo da je jednadžba (1.7) **homogena**. Inače kažemo da je **nehomogena**. Zove se još i **funkcija smetnje**.

Smatramo da je $A(x) \neq 0$ na $\langle \alpha, \beta \rangle$. Dijeljenjem jednadžbe (1.7) s $A(x)$ dobivamo

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (1.8)$$

pri čemu je $p(x) = \frac{B(x)}{A(x)}$, $q(x) = \frac{f(x)}{A(x)}$.

Teorem 1.3. *Ako su funkcije $p(x)$ i $q(x)$ neprekidne na $[a, b] \subseteq [\alpha, \beta]$, onda jednađba (1.8) ima jedinstveno rješenje koje zadovoljava početni uvjet $y(x_0) = y_0$ za sve $a < x_0 < b$, $-\infty < y_0 < \infty$.*

Dokaz. Iz (1.8) izrazimo $y' = -p(x)y + q(x)$. Desna strana te jednakosti zadovoljava uvjete Teorema 1.1; funkcija $f(x, y) = -p(x)y + q(x)$ je neprekidna i ima ograničenu derivaciju po y . Tvrdnja slijedi iz Teorema 1.1. \square

U homogenom slučaju, kada je $f(x) \equiv 0$, imamo jednađbu sa separiranim varijablama: $y' + p(x)y = 0$ i rješavamo je kao ranije:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= -p(x) \quad / \int \\ \ln |y| &= -\int p(x)dx + C \end{aligned}$$

te dolazimo do rješenja $y = Ce^{-\int p(x)dx}$. (Rješenje $y = 0$ koje smo izgubili dijeljenjem s y uključeno je u rješenje koje dobivamo izborom $C = 0$.)

Time smo dobili formulu za rješenje homogene diferencijalne jednađbe 1. reda:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Nehomogenu jednađbu rješavamo metodom varijacije konstanta (parametara). Tražimo njeno rješenje u obliku

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx},$$

pri čemu je $C(x)$ nepoznata funkcija. Ako je y rješenje jednađbe (1.7), onda $C(x)$ mora zadovoljavati određene uvjete. Te ćemo uvjete dobiti uvrštavanjem pretpostavljenog rješenja u (1.7). Prvo izračunamo y' :

$$\begin{aligned} y'(x) &= C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)) \\ &= [C'(x) - p(x)C(x)]e^{-\int p(x)dx}. \end{aligned}$$

Zatim uvrstimo u početnu jednađbu:

$$\begin{aligned} y'(x) + p(x)y &= q(x) \\ [C'(x) - p(x)C(x)]e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} &= q(x) \\ C'(x) &= q(x)e^{\int p(x)dx} \quad / \int \\ C(x) &= \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C. \end{aligned}$$

Vratimo u formulu za rješenje:

$$y(x) = \underbrace{C e^{-\int p(x) dx}}_{\substack{\text{opće rješenje} \\ \text{pripadne homogene} \\ \text{jednadžbe}}} + \underbrace{e^{-\int p(x) dx} \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx}_{\substack{\text{partikularno rješenje nehomogene} \\ \text{jednadžbe koje se dobije za } C = 0}}$$

$$y(x) = y_H + y_P$$

Početni uvjet $y(x_0) = y_0$ također ulazi u jednadžbu i imamo:

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx} \left[C + \int_{x_0}^x q(x) e^{\int_{x_0}^x p(x) dx} dx \right].$$

Za $x = x_0$ granice u integralima se podudaraju pa su svi integrali 0. Dakle je $y(x_0) = y_0 = C$, pa je

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx} \left[y_0 + \int_{x_0}^x q(x) e^{\int_{x_0}^x p(x) dx} dx \right] - \text{Cauchyjev oblik}$$

Primjer 1.11. *Riješimo jednadžbu $y' + y \cos x = 2 \cos x$.*

Prvo gledamo pripadnu homogenu jednadžbu $y' + y \cos x = 0$. Separacijom varijabli dobijemo njeno opće rješenje $y = C e^{-\sin x}$. Zatim radimo varijaciju konstanta $y(x) = C(x) e^{-\sin x}$. Računamo y' :

$$y' = C'(x) e^{-\sin x} - C(x) \cos x e^{-\sin x}$$

i uvrštavamo u jednadžbu:

$$C'(x) e^{-\sin x} = 2 \cos x$$

$$C'(x) = 2 \cos x e^{\sin x} \quad / \int$$

$$C(x) = 2 \int \cos x e^{\sin x} dx = 2 e^{\sin x} + C.$$

Dakle je

$$\begin{aligned} y(x) &= (2 e^{\sin x} + C) e^{-\sin x} \\ &= C e^{-\sin x} + 2 \end{aligned}$$

Do gornjeg smo rješenja mogli doći i pogađanjem. Pretpostavka $y = 2$ daje $2' + 2 \cos x = 2 \cos x$, sve se slaže. O pogađanju će biti više riječi za obične linearne diferencijalne jednadžbe 2. reda.

1.4 Diferencijalne jednađbe višeg reda

1.4.1 Cauchyjev problem za diferencijalnu jednađbu višeg reda

Neka je

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.9)$$

diferencijalna jednađba n -tog reda.

Koji su uvjeti potrebni da jednađba (1.9) ima definirano partikularno rješenje? Kod diferencijalne jednađbe prvog reda $y' = f(x, y)$ vidjeli smo da je uz neke uvjete na funkciju f dovoljno zadati vrijednost y_0 partikularnog rješenja u nekoj točki x_0 .

Za diferencijalne jednađbe višeg reda to neće biti dovoljno, na primjer jednađba $y'' = 0$ ima rješenje $y = C_1x + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, tako da nam za jedinstvenost rješenja treba i dodatan uvjet $y'(x_0) = y'_0$.

U općem slučaju diferencijalne jednađbe n -tog reda za dobivanje partikularnog rješenja trebamo n uvjeta:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (1.10)$$

gdje su $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ neki realni brojevi.

Ovi uvjeti se zovu početni uvjeti diferencijalne jednađbe (1.9).

Cauchyjev problem za diferencijalnu jednađbu (1.9) definiran je na sljedeći način: za zadani x_0 nađi rješenje diferencijalne jednađbe (1.9) koje zadovoljava početne uvjete (1.10).

Mi ćemo u ovom kolegiju rješavati diferencijalne jednađbe drugog reda, odnosno promatrat ćemo sljedeći Cauchyjev problem:

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1.11)$$

$$\left. \begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y'_0 \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

O egzistenciji i jedinstvenosti rješenja ovakvog problema govori sljedeći teorem:

Teorem 1.4. *Neka je*

$$y'' = f(x, y, y')$$

diferencijalna jednačba drugog reda. Ako je $f(x, y, y')$ neprekidna funkcija na nekoj okolini točke $M(x_0, y_0, y'_0)$, tada postoji pozitivan broj h takav da na intervalu $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$ postoji barem jedno rješenje $y = f(x)$ jednačbe (1.11), koje zadovoljava početne uvjete $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Nadalje, ako funkcija $f(x, y, y')$ ima ograničene parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$ na Ω , onda je takvo rješenje jedinstveno.

Definicija 1.3. *Opće rješenje jednačbe (1.11) na nekoj okolini Ω gdje postoji jedinstveno rješenje Cauchyjevog problema je dvoparametarska familija S funkcija $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ ovisna o x i dvije proizvoljne konstante C_1 i C_2 takve da*

- (1) za svaki izbor konstanti C_1, C_2 funkcija $y = \varphi(x, C_1, C_2) \in S$ je rješenje od (1.11), odnosno

$$\varphi''(x, C_1, C_2) = f(x, \varphi(x, C_1, C_2), \varphi'(x, C_1, C_2)), \quad x \in \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$$

- (2) za bilo koji početni uvjet $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ takav da je $(x, y_0, y'_0) \in \Omega$, gdje postoji jedinstveno rješenje Cauchyjevog problema (1.11), možemo naći C_1^0, C_2^0 takve da rješenje $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0) \in S$ zadovoljava početne uvjete.

Rješenje dobiveno iz općeg uvrštavanjem konstanti C_1 i C_2 zove se **partikularno rješenje**, a njegov graf koji je krivulja u xy -prostoru, zove se **integralna krivulja rješenja**.

Relacija $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, koja implicitno definira opće rješenje, zove se **opći ili potpuni integral** od (1.11).

1.4.2 Snižavanje reda diferencijalne jednačbe

U ovom ćemo poglavlju pokazati kako u nekim slučajevima rješavamo diferencijalnu jednačbu 2. reda tako da supstitucijama tu jednačbu svedemo na diferencijalnu jednačbu 1. reda.

- (1) Promotrimo jednačbu

$$y'' = f(x).$$

Integriranjem dobivamo

$$y' = \int f(x) dx + C_1$$

i

$$y = \int \left(\int f(x) dx \right) dx + C_1 x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 1.12. *Riješimo jednadžbu $y'' = 2x$*

Integriramo i dobivamo jednadžbu $y' = \int 2x dx + C_1 = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 = x^2 + C_1$ koju opet integriramo te dobivamo rješenje

$$y = \int x^2 dx + C_1 x + C_2 = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(2) Promotrimo jednadžbu oblika

$$F(x, y', y'') = 0.$$

Ovdje uvodimo supstituciju $y'(x) = p(x)$, gdje sada p promatramo kao funkciju od x -a.

Tada je $y''(x) = p'(x)$, odnosno naša jednadžba postaje $F(x, p, p') = 0$, što je diferencijalna jednadžba 1. reda.

Primjer 1.13. *Riješimo jednadžbu $y'' - \frac{y'}{x} = 0$.*

$$p = y', \quad p' = y'' \Rightarrow p' - \frac{p}{x} = 0$$

$$p' = \frac{p}{x} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \quad \Bigg/ \int$$

$$\ln p = \ln x + \ln C_1 \Rightarrow p = C_1 x$$

$$y' = C_1 x \Rightarrow y = C_1 \int x dx + C_2 \Rightarrow y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$$

$$y = \overline{C}_1 x^2 + C_2, \quad \overline{C}_1 = \frac{C_1}{2} \text{ (neka nova konstanta)}, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(3) Promotrimo jednadžbu oblika

$$F(y, y', y'') = 0.$$

Ovdje koristimo istu supstituciju $y' = p$, ali p promatramo kao funkciju od y —a, odnosno imamo: $y'(x) = p(y(x))$, tada je $y''(x) = p'(y(x)) \cdot y'(x)$, odnosno $y' = p$, a $y'' = p'p$, pa smo našu jednadžbu ponovno sveli na diferencijalnu jednadžbu 1. reda $F(y, p, p'p) = 0$.

Primjer 1.14. *Riješimo jednadžbu $yy'' + (y')^2 = 0$.*

$$y' = p, \quad y'' = p'p \Rightarrow yp'p + p^2 = 0$$

Ukoliko je $p \neq 0$ dobivamo $yp' + p = 0$.

$$p' = -\frac{p}{y} \Rightarrow \frac{dp}{dy} = -\frac{p}{y} \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y} \quad \Bigg/ \int$$

$$\ln p = -\ln y + \ln C_1 \Rightarrow p = \frac{C_1}{y} \Rightarrow y' = \frac{C_1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{y} \Rightarrow ydy = C_1 dx \quad \Bigg/ \int$$

$$\frac{y^2}{2} = C_1 x + C_2, \text{ odnosno } y^2 = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2, \quad \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{R}.$$

Primijetimo da je u ovom rješenju uključen i slučaj $p = 0$.

1.4.3 Linearna homogena diferencijalna jednadžba 2. reda

Linearna diferencijalna jednadžba drugog reda je jednadžba koja je linearna u traženoj funkciji y i njenim derivacijama. Oblika je

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = g(x),$$

gdje su $a_0(x), a_1(x), a_2(x), g(x)$ funkcije definirane na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Ako je $g(x) \equiv 0$ na tom intervalu, onda kažemo da je jednadžba homogena, a inače je nehomogena.

Za početak promatramo linearnu homogenu diferencijalnu jednadžbu:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0.$$

Opišimo postupak rješavanja:

Ako je $a_0(x) \neq 0$ na nekom intervalu, onda možemo cijelu jednadžbu podijeliti s $a_0(x)$ i dobivamo

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1.13)$$

i to je oblik jednadžbe koji ćemo promatrati u daljnjim razmatranjima.

Predstojeći teoremi opisuju strukturu rješenja te jednadžbe.

Teorem 1.5. *Ako je funkcija $y_0(x)$ rješenje linearne homogene diferencijalne jednadžbe (1.13), tada je i funkcija $Cy_0(x)$ rješenje jednadžbe (1.13) za svaku konstantu $C \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Ako je $y_0(x)$ rješenje vrijedi $y_0'' + p(x)y_0' + q(x)y_0 = 0$. Kada to pomnožimo s $C \in \mathbb{R}$ slijedi da je $Cy_0(x)$ također rješenje i teorem je dokazan. \square

Teorem 1.6. *Ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ rješenja linearne homogene diferencijalne jednadžbe (1.13), onda je i njihov zbroj $y_1(x) + y_2(x)$ rješenje iste jednadžbe.*

Dokaz. Neka su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ rješenja od (1.13), to jest neka vrijedi

$$y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) = 0,$$

$$y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x) = 0.$$

Ako ove dvije jednakosti zbrojimo, dobit ćemo da je i $y_1(x) + y_2(x)$ rješenje iste jednadžbe. \square

Korolar 1.1. *Ako su $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ rješenja linearne homogene diferencijalne jednadžbe (1.13), onda je i njihove linearna kombinacija $\sum_{i=1}^m C_i y_i(x)$ rješenje te iste jednadžbe za bilo koji izbor konstanti $C_1, C_2, \dots, C_m \in \mathbb{R}$.*

Linearna zavisnost i nezavisnost funkcija

Promotrimo sistem funkcija $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ definiran na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Definicija 1.4. *Kažemo da su funkcije $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ **linearno zavisne** na intervalu $\langle a, b \rangle$, ako postoje brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ne svi 0, takvi da vrijedi*

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

za sve $x \in \langle a, b \rangle$.

Ako jednakost vrijedi samo za $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, kažemo da su funkcije $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ **linearno nezavisne** na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Primjer 1.15. Funkcije $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = 2x$ su linearno zavisne na svakom intervalu $\langle a, b \rangle$. Da bismo to pokazali uzмимо $\alpha_1 = 2$ i $\alpha_2 = -1$. Tada je $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 2x - 2x = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Primjer 1.16. Funkcije $1, x, x^2, \dots, x^n$ su linearno nezavisne na svakom intervalu $\langle a, b \rangle$.

Pomoću sljedećeg teorema možemo provjeriti jesu li funkcije linearno nezavisne kada to nije očito kao u prethodnim primjerima.

Teorem 1.7. (Nužan uvjet za linearnu zavisnost funkcija)

Ako su funkcije $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, koje imaju derivacije do uključivo $(n-1)$ -og reda, linearno zavisne na intervalu $\langle a, b \rangle$, onda je na tom intervalu determinanta

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

koja se zove **determinanta Wronskog** (ili kraće *Wronskijan*) sistema funkcija $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ identički jednaka nuli, odnosno $W(x) = 0$ za sve $x \in \langle a, b \rangle$.

Teorem 1.8. Ako Wronskijan $W(x)$ suatava od n funkcija nije identički jednak nuli na intervalu $\langle a, b \rangle$, onda su te funkcije linearno nezavisne na tom intervalu.

Primjenimo sada ove teoreme na rješenja linearne homogene diferencijale jednadžbe:

Teorem 1.9. (Nužan uvjet linearne nezavisnosti rješenja)

Ako su funkcije $y_1(x), y_2(x)$ linearno nezavisna rješenja linearne homogene

diferencijalne jednađbe (1.13) na intervalu $\langle a, b \rangle$, onda je Wronskijan

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

različit od 0 u svakoj točki intervala $\langle a, b \rangle$.

Teorem 1.10. *Neka su $y_1(x)$, $y_2(x)$ rješenja linearne homogene diferencijalne jednađbe (1.13). Nužan i dovoljan uvjet da ona budu linearno nezavisna na intervalu $\langle a, b \rangle$ je da njihov Wronskijan bude različit od 0.*

Struktura općeg rješenja linearne homogene diferencijalne jednađbe 2. reda

Teorem 1.11. *Linearna homogena diferencijalna jednađba*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

gdje su koeficijenti $p(x)$ i $q(x)$ neprekidne funkcije na segmentu $[a, b]$, ima na intervalu $\langle a, b \rangle$ opće rješenje

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

pri čemu su $y_1(x)$, $y_2(x)$ linearno nezavisna partikularna rješenja dane jednađbe na $\langle a, b \rangle$, a $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ su proizvoljne konstante.

Definicija 1.5. *Skup dvaju linearno nezavisnih partikularnih rješenja linearne homogene diferencijalne jednađbe zove se **fundamentalni skup rješenja**.*

Dakle, da bismo riješili ovu jednađbu dovoljno je naći dva linearno nezavisna partikularna rješenja, to jest fundamentalni skup rješenja. Takav skup postoji ukoliko su koeficijenti neprekidne funkcije:

Teorem 1.12. *Za svaku linearnu homogenu diferencijalnu jednađbu drugog reda (1.13) s neprekidnim koeficijentima $p(x)$, $q(x)$ postoji fundamentalni skup rješenja (štoviše, beskonačno mnogo fundamentalnih skupova rješenja).*

Linearna homogena diferencijalna jednačba 2. reda s konstantnim koeficijentima

Najjednostavnije neprekidne funkcije su konstantne funkcije i za njih ćemo opisati skup rješenja linearne homogene diferencijalne jednačbe drugog reda.

Promatramo jednačbu

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (1.14)$$

gdje su p i q neki brojevi.

Toj jednačbi pridružujemo njenu **karakterističnu jednačbu**

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

To je kvadratna jednačba s nepoznicom λ . Fundamentalni skup jednačbe (1.14) nalazimo u ovisnosti o korjenima λ_1, λ_2 karakteristične jednačbe na sljedeći način:

(1) Ako je $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i $\lambda_1 \neq \lambda_2$, fundamentalan skup rješenja čine

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

Dokaz: Provjerimo prvo da su y_1 i y_2 doista rješenja.

$$y_i = e^{\lambda_i x}, \quad i = 1, 2$$

$$y'_i = \lambda_i e^{\lambda_i x}, \quad y''_i = \lambda_i^2 e^{\lambda_i x}$$

$$y''_i + py'_i + qy_i = \lambda_i^2 e^{\lambda_i x} + p\lambda_i e^{\lambda_i x} + qe^{\lambda_i x} = e^{\lambda_i x} \underbrace{(\lambda_i^2 + p\lambda_i + q)}_{=0} = e^{\lambda_i x} \cdot 0 = 0$$

Da su to dva linearno nezavisna rješenja provjerimo pomoću Wronskijana.

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \lambda_2 e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \\ &= \underbrace{e^{\lambda_1 x + \lambda_2 x}}_{>0} (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0 \end{aligned}$$

za svaki x jer je $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

(2) Ako je $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$, imamo $y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = xe^{\lambda x}$.

(3) Ako je $\lambda_{1,2} = a \pm bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, imamo $y_1 = e^{ax} \cos(bx)$, $y_2 = e^{ax} \sin(bx)$.

Primjer 1.17. *Riješimo diferencijalnu jednadžbu $y'' + 2y' + 5y = 0$.*

Pripadna karakteristična jednadžba je $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ i njena rješenja su $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$.

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe dano je sa:

$$y = C_1 e^{-x} \cos(2x) + C_2 e^{-x} \sin(2x) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 1.18. *Linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima se pojavljuju u mnogim problemima s mehaničkim i električkim oscilacijama.*

Promotrimo jednadžbu slobodnih mehaničkih oscilacija:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + h \frac{dy}{dt} + ky = 0,$$

pri čemu je nezavisna varijabla t vrijeme, y udaljenost točke koja oscilira od ravnotežnog položaja, m je masa te materijalne točke, h je koeficijent trenja, a $k > 0$ je koeficijent elastičnosti.

Pripadna karakteristična jednadžba je $m\lambda^2 + h\lambda + k = 0$ i ona ima rješenja $\lambda_{1,2} = \frac{-h}{2m} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$.

Ukoliko je trenje dovoljno veliko, odnosno $h^2 > 4mk$, tada su njeni korijeni λ_1, λ_2 realni i negativni i opće rješenje je dano sa $y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$.

Kako su $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ zaključujemo da kad je trenje veliko, udaljenost do ravnotežnog položaja teži ka 0 kako se povećava t .

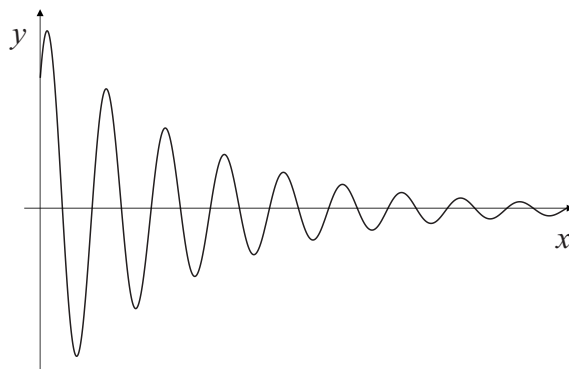
Ako je pak trenje malo, odnosno $h^2 < 4mk$, tada su korijeni karakteristične jednadžbe $\alpha \pm i\beta$, gdje je $\alpha = \frac{h}{2m} > 0$ i $\beta = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{h^2}{4m^2}}$.

U tom je slučaju opće rješenje dano sa $y = C_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 e^{-\alpha t} \sin(\beta t)$

ili

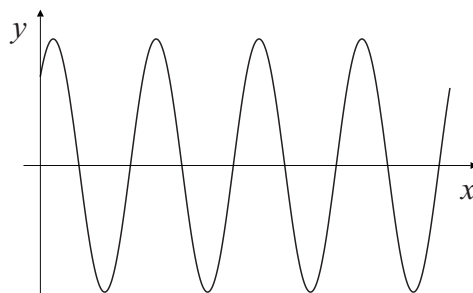
$$y = A e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \delta) \quad (C_1, C_2, A, \delta \text{ konstante.})$$

Iz toga vidimo da kad je trenje malo oscilacije se smanjuju.



Slika 1.3: Kad je trenje malo, oscilacije se smanjuju.

Ukoliko pak nema trenja, odnosno $h = 0$, tada je karakteristična jednadžba $m\lambda^2 + k = 0$ i ima rješenja $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$ pa je rješenje oblika $y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) = A \sin(\omega t + \delta)$, gdje je $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pa sad imamo stalne oscilacije.



Slika 1.4: Stalne oscilacije.

1.4.4 Linearna nehomogena diferencijalna jednadžba 2. reda

Na kraju ćemo promatrati jednadžbu

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (1.15)$$

i pokazati kako nju riješiti uz pretpostavku da znamo riješiti pripadnu homogenu jednadžbu $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

Teorem 1.13. *Ako je $\tilde{y}(x)$ rješenje nehomogene jednadžbe (1.15) i $y_0(x)$ rješenje pripadne homogene jednadžbe, onda je njihova suma $\tilde{y}(x) + y_0(x)$ također rješenje jednadžbe (1.15).*

Teorem 1.14. *(Struktura općeg rješenja)*

Opće rješenje jednadžbe

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

na intervalu $\langle a, b \rangle$, gdje su $p(x), q(x)$ i $f(x)$ neprekidne na segmentu $[a, b]$, je suma općeg rješenja pripadne homogene jednadžbe $y_H = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ i jednog partikularnog rješenja $y_P = \tilde{y}(x)$ nehomogene jednadžbe, odnosno

$$y = y_P + y_H.$$

Znači, ukoliko znamo riješiti pripadnu homogenu jednadžbu, za riješiti nehomogenu ostaje nam pronaći jedno partikularno rješenje, pa ćemo pokazati kako to možemo uraditi.

Metoda varijacije konstanti

Neka je dana jednadžba

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

i njena pripadna homogena jednadžba $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, te neka je rješenje te homogene jednadžbe dano sa

$$y_H = C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

Tada opće rješenje nehomogene jednadžbe možemo (slično kao i u slučaju linearne diferencijalne jednadžbe 1. reda) tražiti u obliku

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).$$

Uvrštavanjem u jednadžbu pokazuje se da konstante $C_1(x)$ i $C_2(x)$ zadovoljavaju sustav

$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) &= f(x), \end{aligned}$$

iz kojeg odredimo te konstante.

Primjer 1.19. Riješimo jednadžbu $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

Pripadna homogena jednadžba je $y'' + y = 0$.

Njena karakteristična jednadžba je $\lambda^2 + 1 = 0$ i ima korjene $\lambda_{1,2} = \pm i$.

Rješenje homogene jednadžbe je $y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Opće rješenje tražimo u obliku $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$.

$$\left. \begin{aligned} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x &= 0 & / \cdot \sin x \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x &= \frac{1}{\sin x} & / \cdot \cos x \end{aligned} \right\} +$$

$$C_2'(x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_1 = \frac{\cos x}{\sin x} \quad / \int dx$$

$$C_2(x) = \ln(\sin x) + C_2$$

$$\Rightarrow C_1'(x) \cos x + \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \sin x = 0 \quad \Rightarrow C_1'(x) = -1 \quad / \int dx$$

$$C_1(x) = -x + C_1$$

Pa je opće rješenje dano sa

$$y = \underbrace{-x \cos x + \sin x \ln(\sin x)}_{y_P} + \underbrace{C_1 \cos x + C_2 \sin x}_{y_H}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nehomogena linearna diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima

Opišimo postupak traženja partikularnog rješenja za jednadžbe sljedećeg oblika:

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

- (1) Ukoliko je $f(x)$ oblika $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, gdje je $\alpha \in \mathbb{R}$ i $P_n(x)$ polinom n -tog stupnja, partikularno rješenje tražimo u obliku $y_P = x^r e^{\alpha x} Q_n(x)$, gdje je

$$r = \begin{cases} 0; & \alpha \text{ nije rješenje karakteristične jednadžbe,} \\ 1; & \alpha \text{ je jednostruko rješenje karakteristične jednadžbe,} \\ 2; & \alpha \text{ je dvostruko rješenje karakteristične jednadžbe,} \end{cases}$$

a $Q_n(x)$ je nepoznati polinom n -tog stupnja koji treba naći.

(2) Ukoliko je $f(x)$ oblika $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x) \cos(\beta x) + Q_n(x) \sin(\beta x))$, gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a $P_m(x)$ i $Q_n(x)$ polinomi m -tog, odnosno n -tog stupnja (s tim da može neki od njih biti i nul-polinom), partikularno rješenje tražimo u obliku $y_P = x^r e^{\alpha x}(S_N(x) \cos(\beta x) + T_N(x) \sin(\beta x))$, gdje je

$$r = \begin{cases} 0; & \alpha + \beta i \text{ nije rješenje karakteristične jednadžbe,} \\ 1; & \alpha + \beta i \text{ je rješenje karakteristične jednadžbe,} \end{cases}$$

$N = \max\{m, n\}$, a $S_N(x)$ i $T_N(x)$ su nepoznati polinomi N -tog stupnja koje treba naći.

Primjer 1.20. Riješimo jednadžbu $y'' + y' = \sin x$.

Pripadna homogena jednadžba je $y'' + y' = 0$, njena karakteristična je $\lambda^2 + \lambda = 0$ i ona ima rješenja $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = -1$.

Rješenje homogene jednadžbe je $y_H = C_1 + C_2 e^{-x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Partikularno rješenje tražimo u obliku $y_P = A \cos x + B \sin x$.

Deriviramo $y'_P = -A \sin x + B \cos x$, $y''_P = -A \cos x - B \sin x$, i uvrstimo u jednadžbu $y''_P + y'_P = \sin x$.

Dobivamo sustav: $-A \cos x - B \sin x - A \sin x + B \cos x = \sin x$

$$\Rightarrow (B - A) \cos x - (A + B) \sin x = \sin x$$

$$\Rightarrow A - B = 0 \Rightarrow A = B$$

$$\Rightarrow A + B = -1 \Rightarrow A = B = -\frac{1}{2}.$$

$$y_P = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x.$$

Opće rješenje:

$$y = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + C_1 + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Poglavlje 2

Funkcije više varijabli

2.1 Osnovne definicije

Funkcije jedne varijable nisu nam dovoljne da opišemo što se događa u svijetu koji nas okružuje, već mnoge funkcije koje se pojavljuju u stvarnosti ovise o dvije ili više varijabli. Npr. volumen kvadra čije su stranice duljina x, y i z dan je funkcijom koja ima tri varijable $V(x, y, z) = xyz$.

Neka je \mathbb{R}^n n -dimenzionalni Euklidski prostor, $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ puta}}$,

to jest $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$.

Neka su dane dvije točke $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$ iz \mathbb{R}^n . Njihovu udaljenost definiramo sa

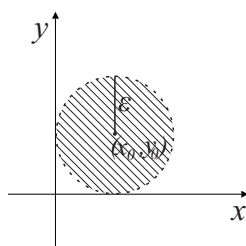
$$d(P, Q) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

Vidimo da ona odgovara formulama koje smo imali u \mathbb{R}, \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3 .

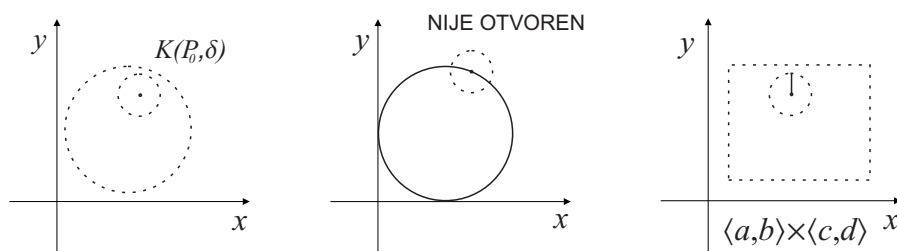
Definicija 2.1. Neka je $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ i neka je $\varepsilon > 0$ realan broj. Skup svih $M \in \mathbb{R}^n$ takvih da je $d(M, M_0) < \varepsilon$ zovemo (**n -dimenzionalna**) **otvorena kugla** sa središtem u M_0 radijusa ε .

Zapis: $K(M_0, \varepsilon) = \{M \in \mathbb{R}^n; d(M, M_0) < \varepsilon\}$.

Definicija 2.2. Za skup $E \subset \mathbb{R}^n$ kažemo da je **otvoren** ako za svaku točku $M \in E$ iz tog skupa postoji $\varepsilon > 0$ takav da je kugla sa središtem u toj točki radijusa ε unutar skupa E , to jest $K(M, \varepsilon) \subset E$.

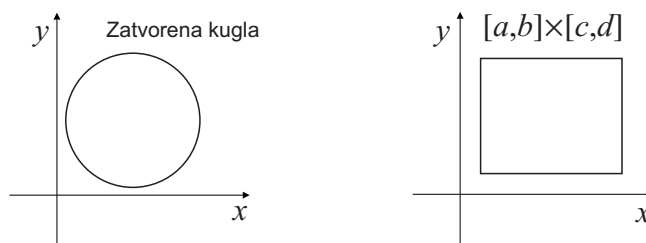


Slika 2.1: Otvorena kugla



Slika 2.2: Otvoreni skupovi

Definicija 2.3. Skup $E \subset \mathbb{R}^n$ je **zatvoren**, ako je njegov komplement $\mathbb{R}^n \setminus E$ otvoren.



Slika 2.3: Zatvoreni skupovi

Postoje skupovi koji nisu ni otvoreni ni zatvoreni, npr. $[a, b)$ u \mathbb{R} .

Definicija 2.4. Neka je $M \in \mathbb{R}^n$. Svaki otvoren skup koji sadrži točku M zove se **okolina** od M .

Rub ili **granica** skupa $E \subset \mathbb{R}^n$ je skup svih točaka $M \in \mathbb{R}^n$ takvih da svaka okolina točke M sadrži i točke koje pripadaju skupu E i točke izvan E . Rub od E označavamo ∂E . Unija skupa $E \subset \mathbb{R}^n$ i njegovog ruba ∂E zove se **zatvarač** od E u zapisu $\overline{E} = E \cup \partial E$ i to je najmanji zatvoren skup koji sadrži E .

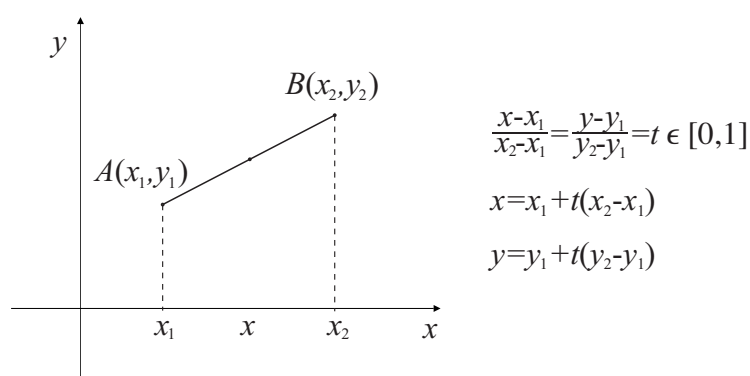
Definicija 2.5. Skup $E \subset \mathbb{R}^n$ je **ograničen** ako postoji otvorena kugla $K(M_0, \varepsilon)$ takva da je $E \subset K(M_0, \varepsilon)$.

Definicija 2.6. Neka su dane dvije točke

$A(x_1, x_2, \dots, x_n), B(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. **Spojnica točaka A i B** je skup

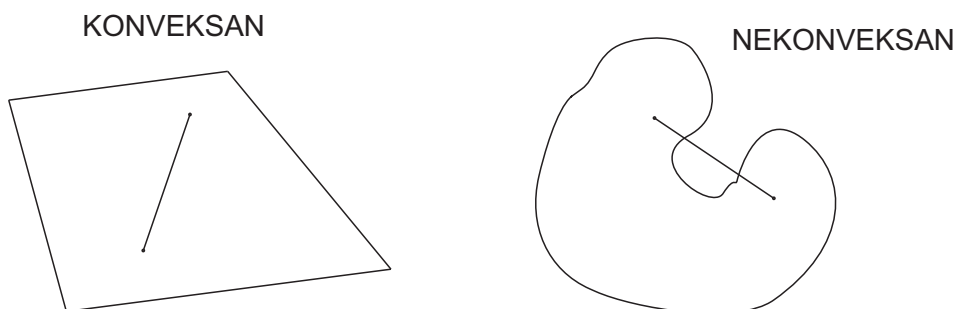
$$\overline{AB} = \{(x_1 + t(y_1 - x_1), x_2 + t(y_2 - x_2), \dots, x_n + t(y_n - x_n)) : t \in [0, 1]\}.$$

Vidimo da to odgovara onome što smo imali u \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3 .



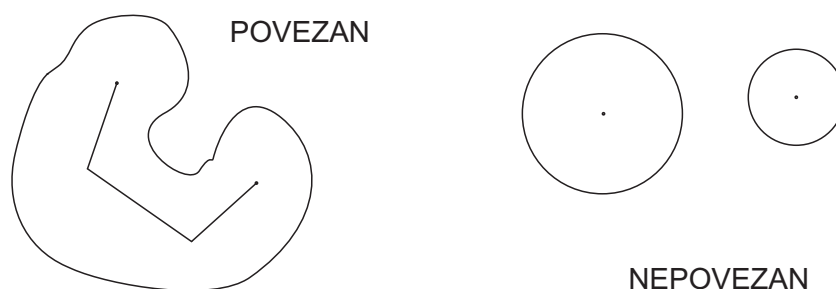
Slika 2.4: Spojnica u \mathbb{R}^2

Definicija 2.7. Skup $E \subset \mathbb{R}^n$ je **konveksan** ako za svake dvije točke $A, B \in E$ vrijedi $\overline{AB} \subset E$.



Slika 2.5: Konveksnost

Definicija 2.8. Skup $E \subset \mathbb{R}^n$ je **povezan** ako se svake dvije točke $A, B \in E$ mogu spojiti poligonijalnom linijom koja je sadržana u E (odnosno unijom konačnog broja spojnica koje su sadržane u E).



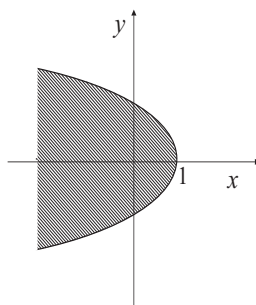
Slika 2.6: Povezanost

Definicija 2.9. *Otvoren i povezan skup se zove područje.*

Mi ćemo promatrati funkcije $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Obično će biti zadane formulom $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i tada skup svih $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ za koji je ova funkcija definirana zovemo **prirodnom domenom funkcije** f i označavamo $D(f)$.

Primjer 2.1. *Odredimo domenu funkcije $f(x, y) = x\sqrt{1-x-y^2}$.*

$$1 - x - y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 1 - y^2 \quad \Rightarrow \quad D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq 1 - y^2\}.$$

Slika 2.7: Domena od $f(x, y) = x\sqrt{1-x-y^2}$

Definicija 2.10. *Neka je $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Graf funkcije f je skup*

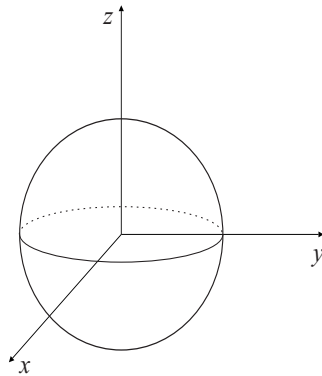
$$\Gamma_f = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)); (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Kako grafički možemo prikazivati samo u \mathbb{R}^3 , crtati ćemo samo grafove funkcija dviju varijabli $f(x, y)$.

2.2 Primjeri nekih ploha 2. reda

SFERA

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

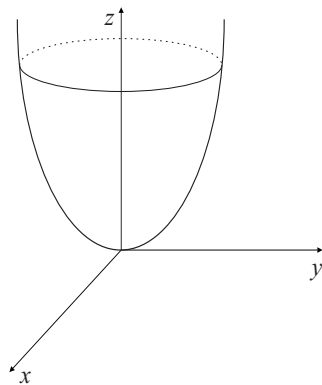


Slika 2.8: Sfera

2.2.1 Rotacijske plohe

ROTACIJSKI PARABOLOID

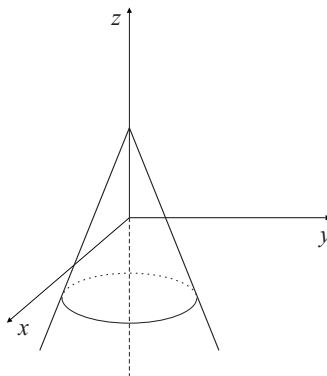
$$z = x^2 + y^2$$



Slika 2.9: Paraboloid

ROTACIJSKI STOŽAC

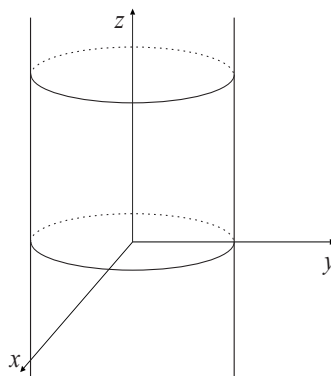
$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$



Slika 2.10: Rotacijski stožac

2.2.2 Cilindrične plohe

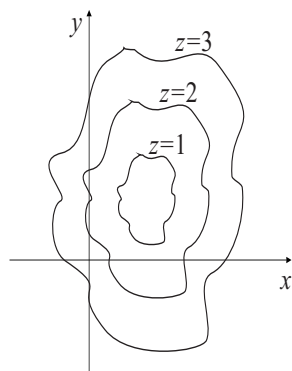
$$x^2 + y^2 = 1$$



Slika 2.11: Cilindar

Definicija 2.11. Neka je dana funkcija dvije varijable $f(x, y)$. *Nivo-krivulja* funkcije f je skup svih točaka u xy -ravnini za koje je vrijednost funkcije konstanta, odnosno $z = f(x, y) = c$.

To je još jedan način kako možemo grafički prikazivati grafove funkcija dvije varijable, ali ovaj puta u xy -ravnini.



Slika 2.12: Nivo krivulje

2.3 Limes i neprekidnost

Definicija 2.12. Neka je funkcija $f(M)$ definirana na nekoj okolini $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ točke M_0 , osim možda u samoj točki M_0 . Realan broj A se zove **limes funkcije f u točki M_0** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve točke $M \in \Omega$ različite od M_0 vrijedi $|f(M) - A| < \varepsilon$ kad god je $0 < d(M, M_0) < \varepsilon$.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)t.d.(0 < d(M, M_0) < \varepsilon \Rightarrow |f(M) - A| < \varepsilon)$$

To zapisujemo: $A = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$.

Napomena 2.1. Kao i kod funkcija jedne varijable, ako limes postoji, on je jedinstven.

Primjer 2.2. $f(x, y) = x^2 + y^2$

Izračunajmo $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Dokažimo da je $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0$.

Treba pokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ možemo naći $\delta > 0$ takav da

$$0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |x^2 + y^2 - 0| < \varepsilon,$$

a za to je dovoljno uzeti $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

Primjer 2.3. $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$

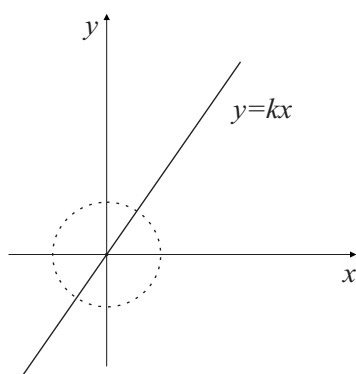
Pokušajmo izračunati $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Kako promatramo ponašanje funkcije $f(x, y)$ na otvorenoj kugli $K((0, 0), \delta)$, možemo promatrati restrikciju na pravac $y = kx$ jer će se tu uvijek nalaziti centar kugle za svaki k .

Tada je $f(x, kx) = \frac{2x \cdot kx}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1 + k^2}$ ako je $x \neq 0$.

No $f(x, kx) \rightarrow \frac{2k}{1 + k^2}$ kad $x \rightarrow 0$, pa bi za različite k -ove dobili drugačije ponašanje funkcije u okolini točke $(0, 0)$.

Zaključujemo da $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ne postoji.



Slika 2.13:

Teorem 2.1. *Neka funkcije $f(M)$ i $g(M)$ imaju limese u točki $M_0 \in \mathbb{R}^n$. Tada u točki M_0 limese imaju i funkcije $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$ i $\frac{f(M)}{g(M)}$ ako je $\lim_{M \rightarrow M_0} g(M) \neq 0$ i vrijedi*

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow M_0} (f(M) \pm g(M)) &= \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \pm \lim_{M \rightarrow M_0} g(M) \\ \lim_{M \rightarrow M_0} (f(M) \cdot g(M)) &= \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \cdot \lim_{M \rightarrow M_0} g(M) \\ \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M)}{g(M)} &= \frac{\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)}{\lim_{M \rightarrow M_0} g(M)} \quad \left(\lim_{M \rightarrow M_0} g(M) \neq 0 \right) \end{aligned}$$

Definicija 2.13. *Neka je funkcija $f(M)$ definirana u točki M_0 i na nekoj okolini $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ točke M_0 . Za funkciju f kažemo da je **neprekidna u točki** M_0 ako postoji limes funkcije u toj točki i jednak je vrijednosti funkcije u toj točki*

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0).$$

Napomena 2.2. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ područje i $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Tada je f neprekidna u točki $M_0 \in \Omega$ ako $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ takvi da za sve $M \in \Omega$ za koje je $d(M, M_0) < \delta$ vrijedi $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.*

*Ukoliko je f neprekidna u svakoj točki iz Ω , kažemo da je f **neprekidna na** Ω .*

Teorem 2.2. *Ako su funkcije $f(M)$ i $g(M)$ neprekidne u točki $M_0 \in \mathbb{R}^n$, onda su u M_0 neprekidne i funkcije $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$ i $\frac{f(M)}{g(M)}$ ako je $g(M_0) \neq 0$.*

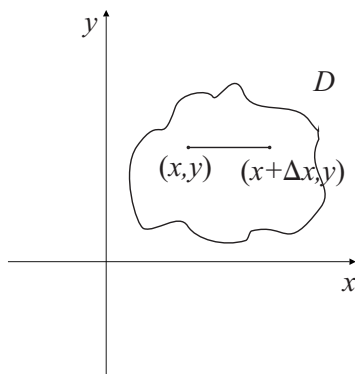
Definicija 2.14. *Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Za funkciju f kažemo da je **ograničena** (na Ω) ako postoji $M > 0$ takav da vrijedi $|f(P)| < M$ za sve $P \in \Omega$.*

Teorem 2.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ područje i $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u $M_0 \in \Omega$. Tada je f ograničena na nekoj okolini točke M_0 .*

Teorem 2.4. *Ako je funkcija $f(M)$ neprekidna na ograničenom i zatvorenom području D , tada je $f(M)$ ograničena na D , na D poprima svoj minimum i maksimum i sve međuvrijednosti.*

2.4 Parcijalne derivacije i diferencijali

Neka je funkcija $z = f(x, y)$ definirana na nekom području $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $(x, y) \in D$. Promotrimo prirast Δx u x tako da je $(x + \Delta x, y) \in D$.



Slika 2.14: Prirast varijable x

Prirast $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ se zove **parcijalni prirast u z** .

Definicija 2.15. Ako kvocijent $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ ima konačan limes kad $\Delta x \rightarrow 0$ taj limes zovemo **parcijalna derivacija** funkcije $z = f(x, y)$ u točki (x, y) po varijabli x . To označavamo: $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ ili $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

Znači

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Analogno se definira parcijalna derivacija u točki (x, y) po varijabli y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Primjer 2.4. Izračunajte $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ ako je $f(x, y) = xy^2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)y^2 - xy^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} y^2 = y^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{x(y + \Delta y)^2 - xy^2}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2xy\Delta y + x(\Delta y)^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (2xy + x\Delta y) = 2xy + 0 = 2xy.\end{aligned}$$

Primjer 2.5. *Primijetimo da nam kod funkcija dviju varijabli postojanje parcijalnih derivacija ne povlači neprekidnost kao kod funkcija jedne varijable.*

Neka je

$$f(x, y) \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Tada f nije neprekidna u $(0, 0)$ jer uopće nema limes u toj točki, ali

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0,$$

pa vidimo da ovdje diferencijabilnost funkcija dviju varijabli moramo nekako drugačije definirati.

Definicija 2.16. *Neka je $z = f(x, y)$ funkcija definirana na nekom području D i neka je $(x, y) \in D$. Neka Δx i Δy označavaju priraste u varijablama x i y takve da je $(x + \Delta x, y + \Delta y) \in D$. Za funkciju $z = f(x, y)$ kažemo da je **diferencijabilna u točki** $(x, y) \in D$ ako je njezin totalni prirast $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ prikaziv u obliku*

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

gdje A i B ne ovise o Δx i Δy (mogu ovisiti o x i y), a $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ i $\beta(\Delta x, \Delta y)$ teže nuli kad Δx i Δy teže nuli.

Ako je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna u točki (x, y) , tada $A\Delta x + B\Delta y$ zovemo **diferencijal** od $z = f(x, y)$ u točki (x, y) .

Diferencijal označavamo: $dz = A\Delta x + B\Delta y \Rightarrow \Delta z = dz + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$.

Primjer 2.6. *Izračunajmo totalni prirast od $z = x^2 + y^2$.*

Računamo :

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - x^2 - y^2 = 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x \cdot \Delta x + \Delta y \cdot \Delta y,$$

iz čega vidimo $A = 2x$, $B = 2y$, $\alpha(\Delta x, \Delta y) = \Delta x$, $\beta(\Delta x, \Delta y) = \Delta y$.

Očito α i β teže nuli kad $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$.

Znači funkcija $z = x^2 + y^2$ je diferencijabilna u svakoj točki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; i vrijedi $\Delta z = 2x\Delta x + 2y\Delta y$.

Teorem 2.5. Ako je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna u nekoj točki, onda je $f(x, y)$ neprekidna u toj točki.

Teorem 2.6. Ako je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna u nekoj točki, onda $f(x, y)$ ima parcijalne derivacije u toj točki.

U tom slučaju vrijedi

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y.$$

Teorem 2.7. Neka funkcija $z = f(x, y)$ ima parcijalne derivacije na nekoj okolini točke (x_0, y_0) i neka su te parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ neprekidne u (x_0, y_0) . Tada je $z = f(x, y)$ diferencijabilna u (x_0, y_0) .

Totalni diferencijal diferencijabilne funkcije $z = f(x, y)$ je

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

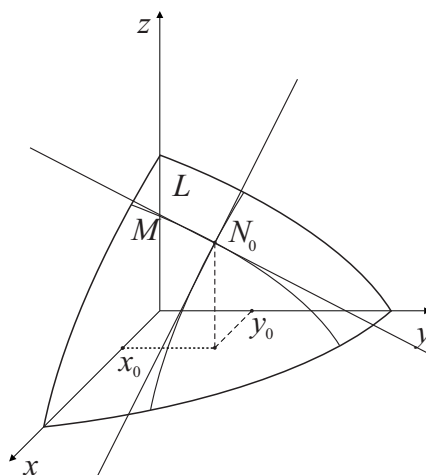
gdje su $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ diferencijali nezavisnih varijabli.

2.4.1 Geometrijska interpretacija parcijalnih derivacija

Promotrimo plohu S zadanu jednadžbom $z = f(x, y)$ u trodimenzionalnom prostoru gdje je $f(x, y)$ neprekidna funkcija koja ima parcijalne derivacije na nekom području D . Želimo interpretirati parcijalne derivacije funkcije $f(x, y)$ u točki $M_0(x_0, y_0) \in D$, koja odgovara točki $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ na plohi S .

Kad računamo parcijalnu derivaciju $\frac{\partial z}{\partial x}$ u M_0 promatramo $z = f(x, y)$ kao funkciju jedne varijable x , a y tretiramo kao konstantu $y = y_0$, odnosno $z = f(x, y_0) = f_1(x)$.

Funkciju $z = f_1(x)$ definira krivulja L dobivena presjekom plohe S ravninom $y = y_0$. Jasno je $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = f_1'(x_0)$ što je ustvari koeficijent smjera tangente na krivulju L u točki N_0 .



Slika 2.15: Tangente na presječne krivulje

Analogno je $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ koeficijent smjera tangente na krivulju M dobivenu kao presjek plohe S i ravnine $x = x_0$, u točki N_0 .

2.4.2 Derivacija kompozicije funkcija

Neka je funkcija $z = f(x, y)$ definirana na nekom području $D \subset \mathbb{R}^2$ i neka su x i y funkcije od varijable t takve da je $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$.

Pretpostavimo da je za svaku točku $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ odgovarajuća točka $(x, y) = (x(t), y(t))$ sadržana u D .

Tada je $z = f(x, y) = f[\varphi(t), \psi(t)]$ funkcija u jednoj varijabli t .

Teorem 2.8. *Ako u točki t postoji derivacija $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ i $\frac{dy}{dt} = \psi'(t)$ i ako je funkcija $f(x, y)$ diferencijabilna u $x = \varphi(t)$ i $y = \psi(t)$, onda funkcija $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ ima derivaciju i vrijedi*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Primjer 2.7. $z = x^2 + y^2$, $x = \sin t$, $y = t^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y, \quad \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2$$

$$\frac{dz}{dt} = 2x \cdot \cos t + 2y \cdot 3t^2 = 2 \sin t \cos t + 2t^3 \cdot 3t^2 = \sin(2t) + 6t^5.$$

Primijetimo sada sljedeću kompoziciju funkcija.

$$z = f(x, y), \quad x = \varphi(\xi, \eta), \quad y = \psi(\xi, \eta) \text{ pa je } z = z(\xi, \eta) = f(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)).$$

Neka postoje neprekidne parcijalne derivacije $\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \eta}$ u točki (ξ, η) i

neka je $f(x, y)$ diferencijabilna u točki $(x, y) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$.

Tada $z = z(\xi, \eta)$ ima parcijalne derivacije $\frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}$ i vrijedi

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

i

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

Primjer 2.8. $z = x^2y - xy^2, \quad x = \xi\eta, \quad y = \frac{\xi}{\eta}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 2xy, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = \eta, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \xi, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = -\frac{\xi}{\eta^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \xi} &= (2xy - y^2) \cdot \eta + (x^2 - 2xy) \cdot \frac{1}{\eta} \\ &= \left(2\xi\eta \frac{\xi}{\eta} - \frac{\xi^2}{\eta^2}\right) \cdot \eta + \left(\xi^2\eta^2 - 2\xi\eta \frac{\xi}{\eta}\right) \cdot \frac{1}{\eta} \\ &= 2\xi^2\eta - \frac{\xi^2}{\eta} - \xi^2\eta - 2\frac{\xi^2}{\eta} = 3\xi^2\eta - 3\frac{\xi^2}{\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \eta} &= (2xy - y^2) \cdot \xi + (x^2 - 2xy) \cdot \left(-\frac{\xi}{\eta^2}\right) \\ &= \left(2\xi\eta \frac{\xi}{\eta} - \frac{\xi^2}{\eta^2}\right) \cdot \xi + \left(\xi^2\eta^2 - 2\xi\eta \frac{\xi}{\eta}\right) \cdot \left(-\frac{\xi}{\eta^2}\right) \\ &= 2\xi^3 - \frac{\xi^3}{\eta^2} - \xi^3 + 2\frac{\xi^3}{\eta^2} = \xi^3 + \frac{\xi^3}{\eta^2} \end{aligned}$$

2.5 Implicitno zadane funkcije

Promatramo funkciju $F(x, y)$ dviju varijabli zadanu na nekom području G u xy -ravnini. Ako za svaki x u intervalu $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle$ postoji jedinstveni y takav da je $F(x, y) = 0$, onda pridruživanjem $x \mapsto y$ definiramo funkciju $y(x)$. Kažemo da je funkcija $y(x)$ **implicitno zadana** jednadžbom $F(x, y) = 0$.

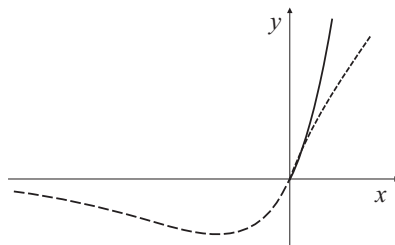
Primjer 2.9. *Jednadžbom $x^2 - y = 0$ implicitno je zadana funkcija $y(x) = x^2$.*

Primjer 2.10. *Jednadžbom $x^2 + y^2 + 1 = 0$ nije zadana nikakva funkcija, jer niti za jedan x ta jednadžba nema rješenje po y .*

Ako se jednadžba $F(x, y) = 0$ može riješiti po y , onda funkciju $y = y(x)$ imamo u **eksplicitnom** obliku.

Primjer 2.11. $F(x, y) = ye^y - x$.

Na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$ za svaki x imamo jedinstveni y za koji je $x = ye^y$. To znamo jer je y inverzna funkcija od xe^x . Ta funkcija postoji jer je xe^x bijekcija s $\langle 0, \infty \rangle$ na $\langle 0, \infty \rangle$. Funkcija y se ne može dobiti u eksplicitnom obliku preko elementarnih funkcija. Unatoč tome, ona je dobro definirana.



Slika 2.16: Graf implicitno zadane funkcije y

Pitanja:

- 1° Kada je jednadžbom $F(x, y) = 0$ implicitno zadana funkcija $y = y(x)$?
- 2° Možemo li o funkciji $y(x)$ implicitno zadanoj jednadžbom $F(x, y) = 0$ štogod zaključiti i ako je ne možemo eksplicitno prikazati?
(Rast, pad, ekstremi, . . .)

S pojmovima eksplicitno i implicitno smo se susretali kod jednadžbe pravca. Možemo li iz tog iskustva izvući neke zaključke?

Primjer 2.12. $F(x, y) = Ax + By + C = 0$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \text{ za } B \neq 0$$

$$x = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A} \text{ za } A \neq 0$$

Ako su $A, B = 0$, jednadžba $C = 0$ ne opisuje pravac. Dakle, da bi jednadžba $Ax + By + C = 0$ opisivala pravac (tj. graf polinoma 1. stupnja), barem jedan od A, B mora biti različit od nule, tj. $A^2 + B^2 > 0$. Eksplicitno se može izraziti ona koordinata uz koju je koeficijent različit od nule. Koeficijenti su vezani uz nagib, nagib je vezan uz derivaciju. Zaista, uz $F(x, y) = Ax + By + C$ imamo $A = \frac{\partial F}{\partial x}$, $B = \frac{\partial F}{\partial y}$.

Ova se opservacija formalizira sljedećim teoremom.

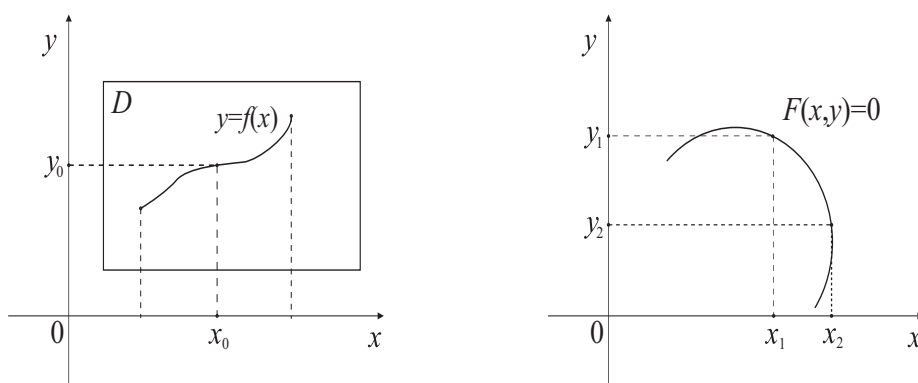
Teorem 2.9. (O implicitnoj funkciji) Neka je funkcija $F(x, y)$ definirana i neprekidna na $\langle x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1 \rangle \times \langle y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2 \rangle = D$ i neka su na D neprekidne i njene parcijalne derivacije $\frac{\partial F}{\partial x}$ i $\frac{\partial F}{\partial y}$. Neka je

$$(i) \quad F(x_0, y_0) = 0$$

$$(ii) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Tada postoji okolina $I = \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ točke x_0 na kojoj je zadana neprekidna funkcija $y = f(x)$ i $F(x, f(x)) = 0$ za sve x iz $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$. Štoviše, funkcija $f(x)$ je derivabilna na I i vrijedi

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$



Slika 2.17: Implicitno zadana funkcija

Uvjet (i) jamči postojanje rješenja, tj. da bar jedna točka zadovoljava $F(x, y) = 0$, a uvjet (ii) daje jedinstvenost, a time i svojstvo bivanja funkcijom. Gledamo desnu sliku. U točki (x_1, y_1) su uvjeti zadovoljeni, na nekoj okolini od x_1 je krivulja zadana s $F(x, y) = 0$ graf funkcije $y = f_1(x)$. U točki (x_2, y_2) je $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, pa nema okoline od x_2 na kojoj je krivulja $F(x, y) = 0$ graf neke funkcije $y = f_2(x)$.

Dokaz teorema o implicitnoj funkciji:

Prva tvrdnja teorema zahtijeva puno vremena i nećemo je dokazivati. Dokazat ćemo samo tvrdnju o derivaciji. U okolini točke (x_0, y_0) imamo zadan $y(x) = f(x)$ takav da je $F(x, f(x)) \equiv 0$. Dakle je i $\frac{d}{dx}F(x, f(x)) = 0$ za sve točke iz te okoline. Po pravilu za deriviranje složene funkcije,

$$\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad \text{Odatle, } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = f'(x).$$

Primjer 2.13. $F(x, y) = ye^y - x$.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^y + ye^y = (1 + y)e^y > 0 \quad \text{za sve } (x, y) \in \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, \infty \rangle.$$

$$\text{Sada imamo } y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{-1}{e^y(1 + y)} = \frac{1}{x + e^y}.$$

Primjer 2.14. $F(x, y) = x^2 + y^2 - R$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad y'(x) = -\frac{x}{y}, \quad y \neq 0.$$

Slično se može dokazati i teorem o uvjetima uz koje jednadžba $F(x, y, z) = 0$ implicitno zadaje funkciju $z = f(x, y)$ u okolini točke (x_0, y_0, z_0) za koju je $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Glavno je da vrijedi $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. (Prisjetimo se implicitne i eksplicitne jednadžbe ravnine.)

Tada imamo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

2.6 Tangencijalna ravnina i normala na plohu

Neka je S ploha zadana jednadžbom $F(x, y, z) = 0$. Točka M na plohi S je **regularna (nesingularna)** točka ako sve tri parcijalne derivacije $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ i $\frac{\partial F}{\partial z}$ postoje i neprekidne su u točki M i barem jedna od njih je različita od nule. Ako sve tri parcijalne derivacije iščezavaju u M ili barem jedna od njih ne postoji, točka M je **singularna**.

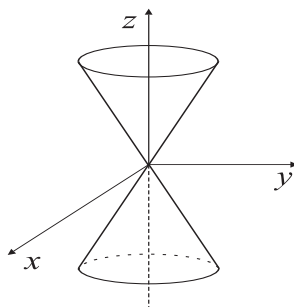
Uvjet regularnosti točke je $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 > 0$.

Primjer 2.15. Promatramo plohu zadanu s $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

To je stožac s vrhom u ishodištu.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -2z.$$

Jedina singularna točka je $(0, 0, 0)$, tj. ishodište.



Slika 2.18: Stožac

Primjer 2.16. Ravnina zadana s $Ax + By + Cz + D = 0$ nema singularnih točaka.

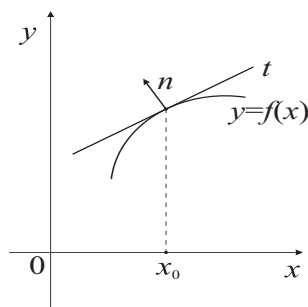
Kao prvo, znamo da je $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ uvjet da bi gornja jednadžba definirala ravninu. Tada ravninu možemo shvatiti kao plohu S definiranu jednadžbom $F(x, y, z) = 0$, pri čemu je $F(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$. Lagano vidimo da je $\frac{\partial F}{\partial x} = A$, $\frac{\partial F}{\partial y} = B$, $\frac{\partial F}{\partial z} = C$ pa nam gornji uvjet na koeficijente daje nesingularnost svih točaka ravnine.

Koje je značenje koeficijenata A, B, C u općoj jednadžbi ravnine? Prisjetimo se

da je vektor normale na ravninu $Ax + By + Cz + D = 0$ vektor

$$\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}.$$

Vidjet ćemo da isto vrijedi za plohe S definirane funkcijom $F(x, y, z)$.



Slika 2.19:

U svakoj točki grafa glatke funkcije $y = f(x)$ imamo jedinstvenu tangentu i normalu. Za razliku od toga, u svakoj regularnoj točki plohe S ima beskonačno mnogo tangenata. Može se pokazati da su one sve okomite na isti pravac, tj. njihovi vektori smjera su okomiti na vektor smjera tog pravca. To posebno znači da sve tangente na plohu S u njejoj regularnoj točki M leže u istoj ravnini.

Tangencijalna ravnina na plohu S u regularnoj točki P je skup svih tangenata na S u točki P . Pravac kroz P okomit na tangencijalnu ravninu zove se **normala** na S u točki P .

Vektor \vec{n} dan sa $\vec{n} = \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_P \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_P \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_P \vec{k}$ je vektor normale na plohu S u njejoj regularnoj točki P .

Jednadžba tangencijalne ravnine na plohu S zadanu jednadžbom $F(x, y, z) = 0$ u njejoj regularnoj točki $P(x_0, y_0, z_0)$ dana je s

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0, z_0)}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0, y_0, z_0)}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(x_0, y_0, z_0)}(z - z_0) = 0.$$

Jednadžba normale u toj točki je

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0, z_0)}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0, y_0, z_0)}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(x_0, y_0, z_0)}}.$$

Ako je ploha S zadana eksplicitno kao $z = f(x, y)$, jednadžbe tangencijalne ravnine i normale u regularnoj točki $P(x_0, y_0, z_0)$ postaju

$$z = f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0),$$

$$\frac{x - x_0}{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}} = \frac{y - y_0}{\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Zašto nas uopće zanima tangencijalna ravnina? Kao što je tangenta na graf realne funkcije realne varijable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ u točki (x_0, y_0) najbolja linearna aproksimacija te krivulje oko točke (x_0, y_0) (pravac najbliži krivulji), tako je i tangencijalna ravnina na plohu $z = f(x, y)$ u točki M najbolje aproksimira plohu u toj točki. To je linearna aproksimacije te plohe u okolini točke M .

2.7 Potpuni diferencijal

Gledamo plohu S i tangencijalnu ravninu u njenoj regularnoj točki $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Neka je S zadano kao $z = f(x, y)$. Stavimo li u jednadžbi tangencijalne ravnine $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$ imamo

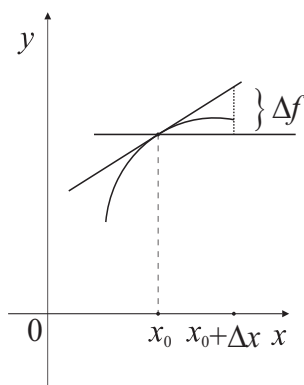
$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Izraz na desnoj strani je promjena z -koordinate točke na tangencijalnoj ravnini kad se iz (x_0, y_0) maknemo za Δx po x i za Δy po y . To je linearna funkcija dviju varijabli, Δx i Δy , a koeficijenti su joj vrijednosti parcijalnih derivacija funkcije f u točki (x_0, y_0) . Prirast po tangencijalnoj ravnini je aproksimacija prirasta po plohi. Polinom u dvjema varijablama h i k s koeficijentima $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ se zove **potpuni diferencijal** funkcije f u točki (x_0, y_0) . To je polinom 1. stupnja u svojim varijablama.

$$\underbrace{df(x_0, y_0)}_{\text{ime}} \underbrace{(h, k)}_{\text{argumenti}} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}_{\text{koeficijent}} h + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{\text{koeficijent}} k$$

$$\begin{aligned} df(x_0, y_0)(dx, dy) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{j} \right) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}). \end{aligned}$$

Prisjetimo se situacije iz jedne dimenzije: $df(x_0)(dx) = f'(x_0)dx$.



Slika 2.20:

2.8 Derivacije i diferencijali višeg reda

Neka funkcija $z = f(x, y)$ ima parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$. Te su derivacije i same funkcije dviju varijabli, pa i one mogu imati svoje parcijalne derivacije u nekim (ili u svim) točkama.

Ako postoji $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ onda kažemo da f ima drugu parcijalnu derivaciju po x i

$$\text{pišemo } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

$$\text{Slično, } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \text{ i } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Funkcije $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ su **mješovite** parcijalne derivacije.

Primjer 2.17. $f(x, y) = x^3 y^2 - x y^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^2 - y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 y - 3x y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x^2 y - 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3 - 6x y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2 y - 3y^2$$

U gornjem primjeru je $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Je li to slučajno?

Teorem 2.10. (Schwarz)

Neka funkcija $f(x, y)$ ima parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ u nekoj okolini točke $M_0 = (x_0, y_0)$ i neka su $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ neprekidne u M_0 .

Tada je $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ u M_0 .

Analogno se definiraju i parcijalne derivacije viših redova. Za mješovite parcijalne derivacije vrijedi analogon Schwarzovog teorema.

Pogledajmo potpuni diferencijal funkcije $z = f(x, y)$: $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$.

To je funkcija od x i y , pa možemo tražiti njezin potpuni diferencijal. Drugi diferencijal ili diferencijal drugog reda $d^2 z$ definiramo kao $d^2 z = d(dz)$.

Izračunajmo d^2z :

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right) \\ &= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy \end{aligned}$$

(dx i dy su konstantni)

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dy$$

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$$

Ovo se može kompaktno zapisati preko simboličkog kvadriranja:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z$$

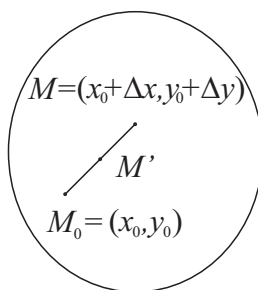
Analogno se definiraju i diferencijali višeg reda: $d^n z = d(d^{n-1}z)$.

Ako $z = f(x, y)$ ima neprekidne sve parcijalne derivacije do reda uključivo n , možemo pisati

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.$$

2.9 Taylorov teorem

Neka funkcija $z = f(x, y)$ ima neprekidne parcijalne derivacije do reda uključivo n na nekoj okolini točke (x_0, y_0) i neka je točka $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ u toj okolini. Zanima nas kako se mijenja vrijednost funkcije f ako se iz (x_0, y_0) pomaknemo u $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Što više informacija imamo o funkciji u M_0 (tj. što više njenih derivacija znamo), to bolju informaciju možemo dobiti o vrijednosti u M . Postupamo po analogiji sa slučajem funkcije jedne varijable, samo što umjesto vrijednosti derivacija u x_0 moramo uzimati diferencijale.



Slika 2.21: Spojnica $\overline{M_0M}$

Teorem 2.11.

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right) f \Big|_{(x_0, y_0)} \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^2 f \Big|_{(x_0, y_0)} + \dots \\ &+ \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^{n-1} f \Big|_{(x_0, y_0)} \\ &+ \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^n f \Big|_{(x', y')} \end{aligned}$$

pri čemu je točka $M' = (x', y')$ na spojnici točaka $\overline{M_0M}$.

Ovo je **Taylorova formula** za funkciju dviju varijabli. Sastoji se od polinomijalnog komada tzv. Taylorovog polinoma i ostatka.

Taylorov polinom je polinom u varijablama Δx i Δy , koeficijenti su mu vrijednosti parcijalnih derivacija funkcije $z = f(x, y)$ u točki $M_0 = (x_0, y_0)$.

Ostatak je vrijednost n -tog diferencijala, no njegovu su koeficijenti vrijednosti

parcijalnih derivacija funkcije f u **nepoznatoj** točki M' . Kako se točka M' nalazi između M_0 i M , gornji se teorem još zove i Taylorov teorem srednje vrijednosti.

Primjer 2.18. *Taylorov polinom 2. stupnja funkcije $f(x, y)$ u točki (x_0, y_0) je*

$$\begin{aligned} (T_2 f(x_0, y_0))(\Delta x, \Delta y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\Delta x \Delta y \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\Delta y^2 \right) \end{aligned}$$

Sada imamo $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = (T_2 f(x_0, y_0))(\Delta x, \Delta y) + R_3$, gdje R_3 uključuje vrijednosti trećih parcijalnih derivacija funkcije $f(x, y)$ u nepoznatoj točki koja se nalazi između (x_0, y_0) i $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Taylorov polinom funkcije $f(x, y)$ u točki $(0, 0)$ zove se Maclaurinov polinom. Za dovoljno glatke funkcije imamo i razvoj u Taylorov (Maclaurinov) red.

2.10 Ekstremi funkcija više varijabli

Promatramo funkciju $z = f(x, y)$ definiranu na području D i točku $M_0 = (x_0, y_0)$ u tom području.

Ako postoji okolina Ω točke M_0 takva da je

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) \leq 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega,$$

kažemo da u točki M_0 funkcija ima **lokalni maksimum**.

Ako za sve $(x, y) \in \Omega$ vrijedi

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) \geq 0,$$

kažemo da funkcija u M_0 ima **lokalni minimum**. Lokalni maksimum i lokalni minimum su **lokalni ekstremi**.

Ako su nejednakosti stroge, govorimo o strogim lokalnim ekstremima.

Dakle, točka $M_0 = (x_0, y_0)$ je točka lokalnog ekstrema ako postoji okolina Ω od M_0 tako da za sve točke $(x, y) \in \Omega$ prirast $\Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ ima konstantan predznak.

Primjer 2.19. $f(x, y) = x^2 + y^2$ ima (strogi) lokalni minimum u $(0, 0)$.

Primjer 2.20. $f(x, y) = -x^2 - y^2$ ima (strogi) lokalni maksimum u $(0, 0)$.

Primjer 2.21. $f(x, y) = y^2$ ima lokalni minimum u svakoj točki oblika $(x, 0)$.

Sljedeći teorem je dvodimenzionalni analogon Fermatove leme.

Teorem 2.12. (Nužan uvjet ekstrema)

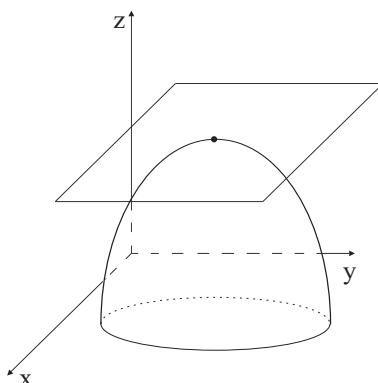
Ako glatka funkcija $f(x, y)$ ima lokalni ekstrem u točki $M_0 = (x_0, y_0)$ tada se sve parcijalne derivacije poništavaju u toj točki:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Dokaz: Znamo da f ima lokalni ekstrem u $M_0 = (x_0, y_0)$ pa zaključujemo da kad fiksiramo $y = y_0$, funkcija jedna varijable $f(x, y_0)$ ima lokalni ekstrem u x_0 . Po Fermatovoj lemi slijedi da je $f'(x, y_0) \Big|_{x=x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. Tvrdnja za parcijalnu derivaciju po drugoj varijabli slijedi analogno i teorem je dokazan.

Točka u kojoj se sve parcijalne derivacije poništavaju zove se **stacionarna točka**.

Geometrijski, stacionarna točka je točka u kojoj je tangencijalna ravnina na graf funkcije horizontalna.



Slika 2.22: Tangencijalna ravnina u točki globalnog maksimuma

Gornji teorem ne daje dovoljne uvjete, tj. ne mora svaka stacionarna točka biti točka lokalnog ekstrema.

Primjer 2.22. Pogledajmo funkciju $f(x, y) = xy$. Računamo parcijalne derivacije: $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$. Zaključujemo da je $(0, 0)$ stacionarna točka. No kada pogledamo priraste:

$$\Delta f(0, 0) = xy - 0 = xy \begin{cases} > 0 & \text{za } x \text{ i } y \text{ istog predznaka} \\ < 0 & \text{za } x \text{ i } y \text{ različitog predznaka} \end{cases}$$

vidimo da se graf penje dok se udaljava od ishodišta u 1. i 3. kvadrantu, a spušta u 2. i 4. kvadrantu. Zaključak je da $(0, 0)$ nije lokalni ekstrem od f . Ishodište je za ovu plohu **sedlasta točka**.

Jedna od pretpostavki gornjeg teorema je glatkoća funkcije. Ukoliko tu pretpostavku izbacimo, teorem se modificira na sljedeći način:

Teorem 2.13. Ako funkcija $f(x, y)$ ima lokalni ekstrem u (x_0, y_0) , onda se svaka parcijalna derivacija ili poništava u (x_0, y_0) ili ne postoji u (x_0, y_0) .

Primjer 2.23. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Parcijalne derivacije nisu definirane u $(0,0)$, a u toj točki f ima lokalni minimum. Ishodište zbog nepostojanja parcijalnih derivacija nije regularna točka pa u toj točki nema normale ni tangencijalne ravnine.

Dovoljni uvjeti za postojanje ekstrema dani su sljedećim teoremom.

Teorem 2.14. Neka je $M_0 = (x_0, y_0)$ stacionarna točka funkcije $f(x, y)$, pri čemu je $f \in C^2(\Omega)$. Neka je D determinanta definirana s

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

(i) Ako je $D > 0$ tada:

- a) Za $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ f ima u M_0 lokalni minimum.
- b) Za $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ f ima u M_0 lokalni maksimum.

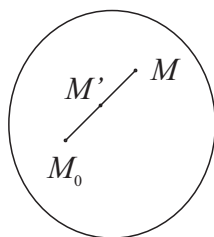
(ii) Ako je $D < 0$, onda f u M_0 nema lokalni ekstrem.

(iii) Ako je $D = 0$, ne možemo zaključiti ima li f u M_0 lokalni ekstrem bez dodatnih razmatranja.

Skica dokaza.

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f(x_0, y_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y}_0 \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x', y')(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x', y')\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x', y')(\Delta y)^2 \right], \end{aligned}$$

pri čemu je $M'(x', y')$ točka negdje na spojnici točaka $M_0 = (x_0, y_0)$ i $M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Slika 2.23: Spojnica $\overline{M_0M}$

Sada je

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M')}_A (\Delta x)^2 + 2 \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M')}_B \Delta x \Delta y + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M')}_C (\Delta y)^2 \right]. \end{aligned}$$

Ako je u M_0 zadovoljeno $AC - B^2 > 0$, onda, zbog neprekidnosti drugih parcijalnih derivacija ($f \in C^2(\Omega)$) mora biti $AC - B^2 > 0$ i na nekoj okolini od M_0 .

Ako je $A > 0$ u M_0 , onda mora biti pozitivno i na nekoj okolini.

Mi želimo ocijeniti predznak izraza $A(\Delta x)^2 + 2B\Delta x\Delta y + C(\Delta y)^2$. Taj izraz možemo pisati kao

$$A(\Delta x)^2 + 2B\Delta x\Delta y + C(\Delta y)^2 = \frac{1}{A} \left[\underbrace{(A\Delta x + B\Delta y)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(AC - B^2)(\Delta y)^2}_{> 0} \right].$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{> 0}$

No predznak od Δf je isti kao i predznak gornjeg izraza, dakle u M_0 f ima lokalni minimum.

Ostale se tvrdnje dokazuju analogno. □

Glatka funkcija dviju varijabli u okolini stacionarne točke (lokalno) izgleda ili kao eliptički paraboloid ($D > 0$) okrenut prema gore ($A > 0$) ili dolje ($A < 0$) ili kao hiperbolički paraboloid ($D < 0$), ili ima $D = 0$.

Što ako je $D = 0$? Pogledajmo funkcije $f_1(x, y) = x^4 + y^4$, $f_2(x, y) = x^3y^3$.

Funkcija f_1 ima lokalni minimum u 0, a f_2 ima sedlo. Dobra je ideja gledati

ponašanje na zrakama $y = kx$. Za $x^4 + y^4$ gledamo

$$\Delta f(0,0) = f(x,y) - f(0,0) = x^4 + y^4 > 0$$

pa vidimo da f ima u $(0,0)$ strogi lokalni minimum.

2.10.1 Uvjetni (vezani) ekstremi

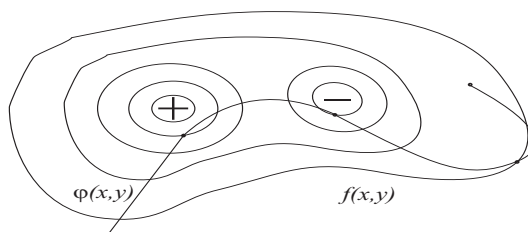
Često se pojavljuje potreba određivanja ekstrema funkcije više varijabli ne na cijelom području definicije nego na nekom podskupu definiranom dodatnim uvjetima.

Promatrat ćemo situaciju u kojoj su ti dodatni uvjeti opisani krivuljom u području definicije funkcije čije ekstreme tražimo.

$$\left. \begin{array}{l} f(x,y) \rightarrow \text{extr.} \\ \varphi(x,y) = 0 \end{array} \right\} \text{problem uvjetnog ekstrema}$$

Jedan takav problem je sljedeći:

Primjer 2.24. Zanimaju nas najviša i najniža točka na stazi opisanoj krivuljom $\varphi(x,y) = 0$ koja se nalazi na terenu čija je nadmorska visina opisana funkcijom $f(x,y)$.



Slika 2.24: Slika terena

U jednostavnim slučajevima problem se može svesti na nalaženje ekstrema funkcije jedne varijable.

Primjer 2.25. Nađimo ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2$ na krivulji u ravnini zadanoj sa $\varphi(x,y) = x + y - 1 = 0$.

Izrazimo y iz $\varphi(x,y)$ preko x , $y = 1 - x$, uvrstimo u funkciju

$$f(x,y) = x^2 + (1-x)^2 = 1 - 2x + 2x^2$$

i nađemo ekstreme od $f(x)$. $f'(x) = -2 + 4x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ je stacionarna točka, $f''(\frac{1}{2}) = 2 > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ je lokalni minimum, pa je rješenje našeg problema točka $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, i $f_{min} = \frac{1}{2}$.

Što ako se $\varphi(x, y)$ ne može riješiti po x ili y ? Vratimo se Primjeru 2.24. Što možemo očitati sa slike terena?

Ekstremalne vrijednosti na stazi se postižu tamo gdje ona dira izohipse, tj. tamo gdje je paralelna s njima. Paralelnost krivulja znači paralelnost tangenata, a komponente vektora smjera tangenata su parcijalne derivacije. Dakle, tražimo točke u kojima su parcijalne derivacije od $f(x, y)$ i $\varphi(x, y)$ proporcionalne.

Ova metoda zove se metoda Lagrangeovih multiplikatora. Počinjemo uvođenjem veličine λ koju zovemo **Lagrangeov multiplikator** (množitelj) i formiramo Lagrangeovu funkciju:

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y).$$

Nakon toga tražimo stacionarne točke funkcije $F(x, y)$ koje zadovoljavaju traženi uvjet:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \varphi(x, y) \end{aligned} \right\}$$

Iz ovoga nađemo λ i koordinate (x_0, y_0) moguće točke ekstrema. Postojanje i prirodu ekstrema provjeravamo ispitujući predznak drugog diferencijala Lagrangeove funkcije,

$$d^2F(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2,$$

u okolini točke (x_0, y_0) i λ , uz uvjet $\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$.

Ako je $d^2F < 0$ imamo uvjetni maksimum, ako je $d^2F > 0$ imamo uvjetni minimum.

Ako je u stacionarnoj točki (x_0, y_0) determinanta

$$D(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0,$$

onda imamo uvjetni ekstrem, uvjetni maksimum za $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, odnosno uvjetni minimum za $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$.

Pogledajmo traženje uvjetnih ekstrema metodom Lagrangeovih multiplikatora na konkretnim primjerima:

$$\text{Primjer 2.26. } \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 \rightarrow \text{extr.} \\ x + y = 1 \end{array} \right\}$$

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\frac{\lambda}{2} \\ y = -\frac{\lambda}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow y = x \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow$$

$$x = y = \frac{1}{2}, \lambda = -1 \Rightarrow F(x, y, -1) = x^2 + y^2 - x - y + 1.$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0; \quad D = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

$$D > 0 \ \& \ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0 \Rightarrow \text{točka } M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ je točka lokalnog minimuma.}$$

Ako Lagrangeova funkcija ima bezuvjetni ekstrem, onda f ima uvjetni ekstrem. Postupak koji smo opisali daje dovoljne uvjete; no može se dogoditi da Lagrangeova funkcija nema bezuvjetni ekstrem, a da $f(x, y)$ ima uvjetni ekstrem.

$$\text{Primjer 2.27. } \left. \begin{array}{l} f(x, y) = xy \rightarrow \text{extr.} \\ \varphi(x, y) = y - x = 0 \end{array} \right\}$$

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda y - \lambda x, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = y - \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x + \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = y - x$$

Izjednačavanjem s 0 dobijemo $x + y = 0$. Zajedno s trećom jednadžbom to daje $x = y = 0$. Oдавde je i $\lambda = 0$. Lagrangeova funkcija je onda $F(x, y, 0) = xy$. Znamo da ta funkcija u $(0, 0)$ nema ekstrem. No iz $\varphi(x, y) = y - x = 0$ dobivamo $y = x$, pa funkcija $f(x, y)|_{x=y} = x^2$ ima ekstrem (minimum) za $x = 0$.

Metoda Lagrangeovih množitelja može se primijeniti i na funkcije više od dva argumenta.

$$\left. \begin{array}{l} z = f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \text{extr.} \\ \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\} \text{ograničenja } m < n.$$

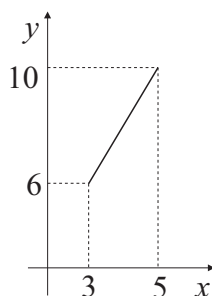
$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_m \varphi_m.$$

Izjednačimo s nulom sve parcijalne derivacije od F . Dobijemo sustav od $n + m$ jednadžbi iz kojih nađemo $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ i x_1, \dots, x_n .

2.10.2 Globalni ekstremi neprekidne funkcije

Promatramo zatvoreno područje $\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$ na kojem je definirana neprekidna funkcija $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Po Bolzano-Weierstrassovom teoremu znamo da f na \bar{D} poprima najveću i najmanju vrijednost. Ako je funkcija f glatka i ako se maksimum (minimum) postiže u unutrašnjosti područja, onda će se on postizati u stacionarnoj točki. (Ako f nije glatka, onda se postiže ili u stacionarnoj ili u singularnoj točki.) No ekstrem se može postizati i na rubu, a takve točke ne možemo naći preko stacionarnih točaka.

Primjer 2.28. Pogledajmo situaciju u \mathbb{R} . Tu je potrebno naći sve stacionarne točke i ispitati ih te još provjeriti vrijednosti na rubovima. Gledamo sljedeću funkciju $f(x) = 2x$, $\bar{D} = [3, 5]$.



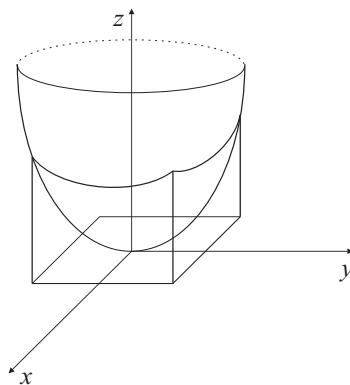
Slika 2.25: Graf funkcije $f(x) = 2x$

Sa grafa vidimo da se minimum postiže u lijevom, a maksimum u desnom

rubu.

Za nalaženje globalnih ekstrema funkcije $f(x, y)$ na zatvorenom i ograničenom skupu \overline{D} moramo naći sve lokalne ekstreme u D i sve ekstreme na rubu ∂D . Najveća (najmanja) od tih vrijednosti je globalni maksimum (minimum) na \overline{D} .

Primjer 2.29. Naći globalne ekstreme funkcije $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ na $\overline{D} = [-1, 1] \times [-1, 1]$.



Slika 2.26: Ploha $z = x^2 + y^2$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{array} \right\} (0, 0) \text{ je stacionarna točka}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad D = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0,$$

$\Rightarrow (0, 0)$ je lokalni minimum.

Dalje gledamo rub. Za $x = 1$ imamo $f(1, y) = 1 + y^2$. Na $[-1, 1]$ ta funkcija ima minimum u $y = 0$ (lokalni), a maksimum za $y = 1$ i $y = -1$. Vidimo da u točkama $(1, 1)$ i $(1, -1)$ funkcija f ima maksimume, $f(1, 1) = f(1, -1) = 2$. Slično i za $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$.

Dakle, f na $[-1, 1] \times [-1, 1]$ ima globalni minimum čija je vrijednost 0 u $(0, 0)$ i 4 globalna maksimuma koja iznose 2 u točkama $(\pm 1, \pm 1)$.

Dovoljni uvjeti ekstrema daju se u terminima determinante složene od drugih derivacija funkcije u stacionarnoj točki.

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

Označimo s $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ vodeće determinante reda $1, 2, \dots, n$ u D .

Ako je f derivabilna u nekoj okolini stacionarne točke M_0 i dvaput derivabilna u M_0 , onda

(i) za $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \dots, \delta_n > 0$ f ima lokalni minimum u M_0 ,

(ii) za $\delta_1 < 0, \delta_2 > 0, \delta_3 < 0, \delta_4 > 0, \dots$ f ima lokalni maksimum u M_0 .

Poglavlje 3

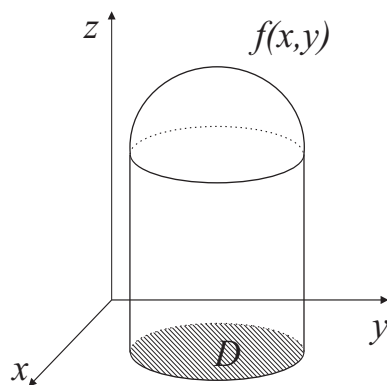
Višestruki integrali

3.1 Dvostruki integral

3.1.1 Motivacija i definicija

Motivacija - problem volumena cilindričkog tijela.

Cilindričko tijelo je tijelo omeđeno podskupom D ravnine xy , plohom koja je graf neprekidne funkcije $z = f(x, y)$ za $(x, y) \in D$ i cilindričkom plohom čije izvodnice prolaze rubom od D i paralelne su s osi z . D nazivamo **osnovicom** ili **bazom** tijela.



Slika 3.1: Cilindričko tijelo

Pri računanju volumena krećemo od dvaju osnovnih načela:

- (1) razlomimo li tijelo u dijelove, volumen tijela mora biti jednak zbroju volumena dijelova;
- (2) volumen uspravnog cilindričkog tijela omeđenog ravninom $z = c$ (gdje je c neka konstanta iz \mathbb{R}) jednak je površini osnovice D pomnoženoj s visinom tijela.

Nadalje, smatramo da je osnovica D omeđena (tj. da leži u krugu sa središtem u $(0, 0)$ zadanog konačnog polumjera) i da ima površinu koja se može izračunati. (Postoje skupovi u \mathbb{R}^2 za koje nije moguće izračunati površinu.) Funkcija $f(x, y)$ je neprekidna na D , a zbog jednostavnosti ćemo dodatno pretpostaviti i da je $f(x, y) \geq 0$ na D .

Označimo sad traženi volumen cilindričkog tijela s V . Postupak njegovog računanja je slijedeći:

- 1) Podijelimo osnovicu D na komade. Oni mogu biti proizvoljnog oblika sve dok imaju površinu, ali presjek bilo koja dva komada ne smije imati pozitivnu površinu. Obično se uzima da je D podijeljeno u pravokutnike (osim blizu ruba), no to nije ni bitno. Takva podjela naziva se **subdivizija**.
- 2) Označimo komade na koje smo podijelili D s D_1, D_2, \dots, D_n , a njihove površine s $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. Definiramo **dijametar** skupa D_k kao $\text{diam } D_k = \sup d(P, Q)$, pri čemu su $P, Q \in D_k$, i neka je $d = \max_k \text{diam } D_k$.
- 3) U svakom D_k odaberemo jednu točku $P_k = (x_k, y_k)$ i nad njome konstruiramo cilindar visine $f(P_k)$. Njegov volumen je tada $\Delta V_k = \Delta S_k \cdot f(P_k) = f(P_k) \Delta S_k$. Zbrajajući volumene svih tako konstruiranih cilindara dobijemo

$$V_n = \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta S_k.$$

Intuitivno je jasno da je V_n to bolja aproksimacija traženog volumena V što je finija podjela D na D_1, D_2, \dots, D_n , tj. što je manji d (najveći od dijametara subdivizije).

- 4) Po definiciji, smatramo da je volumen V limes od V_n kad $n \rightarrow \infty$ i kad d teži u 0. Prirodno je očekivati da V ne ovisi o podjeli ni o izboru P_k .

Razmatranja ovog tipa možemo provesti i za općenitu funkciju f . Izraz $V_n = \sum_{k=1}^n f(P_k)\Delta S_k$ zovemo **integralna suma** koja odgovara subdiviziji D_1, D_2, \dots, D_n i izboru točaka P_1, P_2, \dots, P_n , gdje je $P_k \in D_k$.

Definicija 3.1. Ako postoji limes integralnih suma $\sigma = \sum_{k=1}^n f(P_k)\Delta S_k$ kad $n \rightarrow \infty$ i $d \rightarrow 0$ koji ne ovisi ni o subdiviziji $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$ ni o izboru točaka $P_k \in D_k$, onda taj limes zovemo **dvostrukim integralom od f po D** i pišemo

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Dakle,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty, d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k)\Delta S_k.$$

Ako integral $\iint_D f(x, y) dx dy$ postoji kažemo da je funkcija f **integrabilna** na D .

Podijelimo li pravokutnik P na $m \times n$ malih pravokutnika, integralna suma poprima oblik $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(x_i, y_j)\Delta x_i\Delta y_j$. Pri prelasku na limes za $m \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, $\Delta x_i \rightarrow 0$, $\Delta y_j \rightarrow 0$ sume prelaze u integral, a površine malih komada u $dx dy$.

Vratimo li se na problem računanja volumena cilindričkog tijela, vidimo da je

$$V = \int \int_D f(P) dP = \int \int_D f(x, y) dx dy.$$

(Ako je $f(x, y) \leq 0$ na D , onda je $V = - \int \int_D f(x, y) dx dy$. Ako funkcija $f(x, y)$ mijenja predznak na D , onda je volumen algebarska suma volumena; oni iznad xy ravnine se uzimaju s predznakom $+$, a oni ispod s predznakom $-$.)

Postavlja se pitanje za kakve funkcije f možemo izračunati $\int \int_D f dx dy$? Samo ograničenost nije dovoljna - primjer za to je Dirichletova funkcija koja je ograničena, ali nije integrabilna. Može se pokazati da je neprekidnost ipak dovoljna.

Teorem 3.1. Svaka funkcija $f(x, y)$ koja je neprekidna na ograničenom i zatvorenom skupu D je integrabilna na D .

Uvjet neprekidnosti se može i oslabiti.

Teorem 3.2. *Ako je funkcija f ograničena na omeđenom zatvorenom skupu $D \subset \mathbb{R}^2$ i neprekidna na D osim na skupu površine nula, onda je f i integrabilna na D .*

(Za skup kažemo da je površine nula ako ga možemo omediti mnogokutom proizvoljno male površine.)

3.1.2 Osnovna svojstva dvostrukog integrala

Svojstva dvostrukog integrala slična su svojstvima određenog integrala funkcije jedne varijable.

(1) **Linearnost:**

Ako su f i g integrabilne na D i ako su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, onda vrijedi

$$\int \int_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \int \int_D f(x, y) dx dy + \beta \int \int_D g(x, y) dx dy.$$

(2) **Monotonost:**

Ako je $f(x, y) \leq g(x, y)$ na D , onda je

$$\int \int_D f(x, y) dx dy \leq \int \int_D g(x, y) dx dy.$$

Posebno, uz $-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)|$ slijedi

$$-\int \int_D |f(x, y)| dx dy \leq \int \int_D f(x, y) dx dy \leq \int \int_D |f(x, y)| dx dy,$$

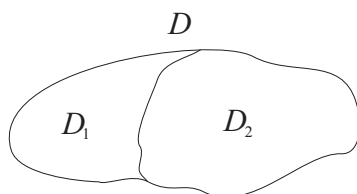
tj.

$$\left| \int \int_D f(x, y) dx dy \right| \leq \int \int_D |f(x, y)| dx dy.$$

(3) **Aditivnost po području integracije:**

Ako je f integrabilna na D i ako je $D = D_1 \cup D_2$, pri čemu je $D_1 \cap D_2$ površine 0, tj. D_1 i D_2 nemaju zajedničkih unutarnjih točaka, onda je

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_{D_1} f(x, y) dx dy + \int \int_{D_2} f(x, y) dx dy$$

Slika 3.2: D_1 i D_2 nemaju zajedničkih unutarnjih točaka**(4) Ograde:**

Neka je f neprekidna na omeđenom i zatvorenom skupu D . Tada postoje m i M takvi da je $m \leq f(x, y) \leq M$, za sve $(x, y) \in D$. Vrijedi:

$$m \cdot S \leq \int \int_D f(x, y) dx dy \leq M \cdot S,$$

gdje je S površina od D .

(5) Površina:

Površina omeđenog i zatvorenog skupa D u ravnini jednaka je integralu funkcije $f(x, y) \equiv 1$ po D . Dakle,

$$S = \int \int_D 1 dx dy \quad \left(S = \mu(D) = \int \int_D dx dy. \right)$$

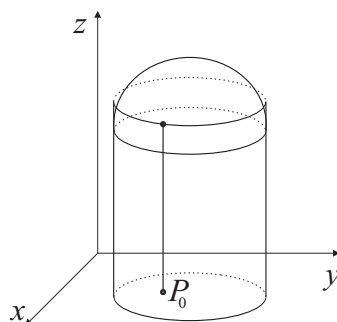
(6) Teorem srednje vrijednosti:

Neka je funkcija f neprekidna na zatvorenom i omeđenom skupu D . Tada postoji barem jedna točka P_0 u D takva da je

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = f(P_0) \cdot S.$$

Veličina $\frac{1}{S} \int \int_D f(x, y) dx dy$ se zove **srednja vrijednost funkcije f na D** . Teorem kaže da za neprekidnu funkciju f postoji točka P_0 u kojoj se srednja vrijednost postiže.

Geometrijska interpretacija: $f(P_0)$ je visina cilindra s osnovicom D istog volumena kao i cilindričko tijelo pokriveno plohom $f(x, y)$.



Slika 3.3:

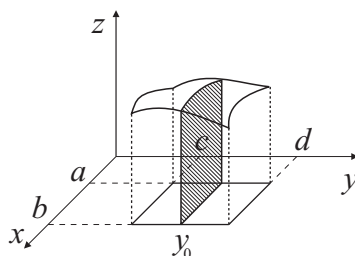
3.1.3 Računanje dvostrukog integrala

Prvo ćemo razmotriti slučaj kad je D pravokutnik, tj. $D = [a, b] \times [c, d]$.

Promatramo presjek cilindričkog tijela nad D pokrivenog plohom $f(x, y)$ (f je neprekidna funkcija na D) i ravnine $y = y_0$. Taj presjek je krivolinijski trapez, a njegova površina dana je s $\int_a^b f(x, y_0) dx$.

Ova veličina nam daje površinu presjeka cilindričkog tijela kao funkciju od y . Pišemo $S(y) = \int_a^b f(x, y) dx$. Odavde je $V = \int_c^d S(y) dy$, odnosno

$$V = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$



Slika 3.4:

Može se pokazati da za svaku funkciju integrabilnu na D vrijedi

$$\begin{aligned} \int \int_D f(x, y) dx dy &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Ponekad se još piše

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

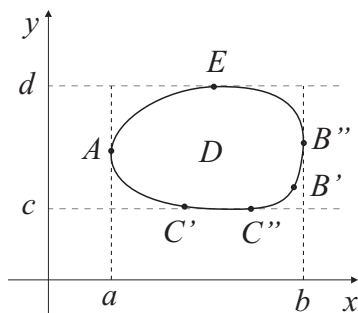
Dakle, računanje dvostrukog integrala po pravokutniku se svodi na računanje dva jednostruka integrala. Desnu stranu gornjih formula još zovemo iterirani ili ponovljeni integrali.

Primjer 3.1.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^1 (x^2 + y^2) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 y^2 dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 \right) \Big|_{x=0}^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2 \right) dy \\ &= \left(\frac{1}{3}y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Pogledajmo sada općenito područje D . Ponovno, jednostavnosti radi, ograničimo D na slučaj kad svaki pravac $x = x_0$ (za $a \leq x_0 \leq b$) siječe rub od D u najviše dvije točke ili u cijelom (jednom) segmentu.

Stavimo D u neki pravokutnik $[a, b] \times [c, d]$. Segmenti $[a, b]$ i $[c, d]$ su ortogonalne projekcije skupa D na koordinatne osi.

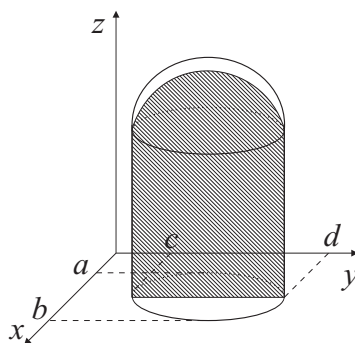


Slika 3.5: Skup D u pravokutniku

Točkama $AC'C''B'$ određena je krivulja koja je graf neke neprekidne funkcije $\varphi_1(x)$. Slično, s AEB'' određena je krivulja koja je graf neprekidne funkcije $\varphi_2(x)$. Presijecimo tijelo ravninom $x = x_0$. Površina tog presjeka je dana jednostrukim

integralom po y , u granicama od $\varphi_1(x_0)$ do $\varphi_2(x_0)$:

$$S(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y) dy.$$



Slika 3.6:

Sada se volumen dobije integriranjem funkcije $S(x)$ od a do b :

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Ako je područje D takvo da umjesto "gornje" i "donje" ima "lijevu" i "desnu" granicu koje se daju izraziti kao funkcije $x = \psi_1(y)$ i $x = \psi_2(y)$, onda imamo

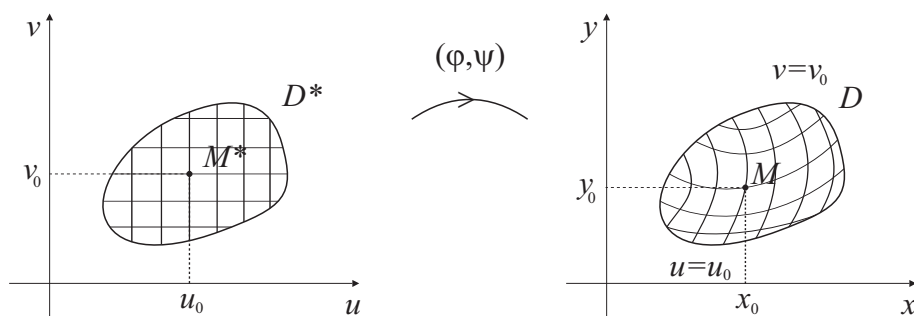
$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

U oba slučaja je površina od D dana kao

$$S = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy dx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx dy.$$

Ako je granica područja komplicirana, rasiječemo ga na područja gornjeg tipa i koristimo aditivnost po području integracije.

3.1.4 Zamjena varijabli u dvostrukom integralu



Slika 3.7: Zamjena varijabli

Promatramo skup D^* u uv -ravnini i skup D u xy -ravnini. Neka je na D^* zadan par funkcija

$$x = \varphi(u, v) \quad \text{i} \quad y = \psi(u, v)$$

koje preslikavaju D^* na D , neprekidne su i imaju neprekidne parcijalne derivacije. Ako različitim točkama $(u, v) \in D^*$ odgovaraju različite točke $(x, y) \in D$, to znači da se gornje jednačbe mogu riješiti po u i v :

$$u = g(x, y) \quad \text{i} \quad v = h(x, y).$$

U tom slučaju preslikavanje (φ, ψ) je bijekcija s D^* u D . Tada se neprekidna krivulja L^* u D^* preslikava u neprekidnu krivulju L u D . Ako su funkcije $g(x, y)$ i $h(x, y)$ neprekidne, onda se neprekidna krivulja L u D preslikava u neprekidnu krivulju L^* u D^* .

Kako uz gornje uvjete svakoj točki M^* u D^* odgovara jedinstvena točka $M \in D$, to par brojeva (u_0, v_0) jedinstveno određuje i točku

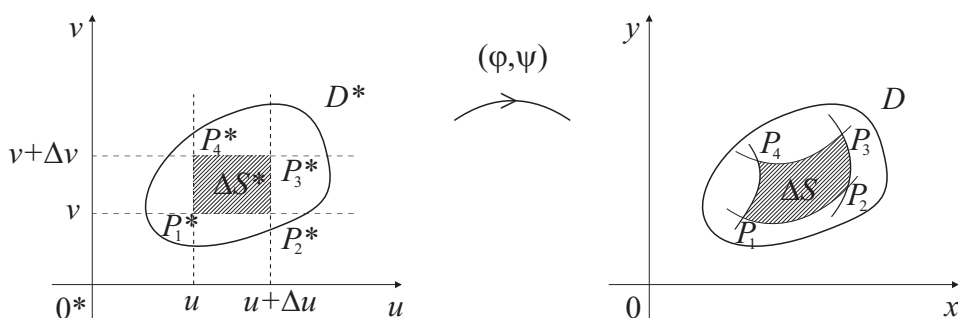
$$M(x_0, y_0) = (\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0)) \in D.$$

Time dobivamo nove koordinate (u, v) točaka u xy -ravnini. To su **krivolinijske koordinate** točke M .

Skup točaka u D za koje je jedna koordinata konstantna zovemo **koordinatna krivulja (koordinatna linija)**. $x = \varphi(u, v_0)$, $y = \psi(u, v_0)$ su jednačbe (parametarske) koordinatne krivulje. Za razne vrijednosti $v = \text{const}$ dobivamo razne

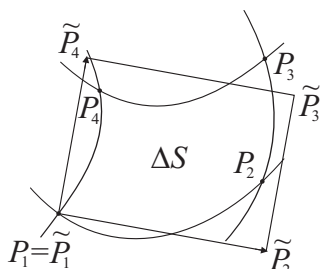
koordinatne krivulje, one čine jednu familiju. Slično, koordinatne krivulje koje dobijemo za razne vrijednosti $u = \text{const}$ čine drugu familiju koordinatnih krivulja.

Ako je preslikavanje $D^* \rightarrow D$ bijekcija, onda kroz svaku točku iz D prolazi točno jedna krivulja iz svake familije, i krivulje iz iste familije se ne sijeku. Mreža krivolinijskih koordinata u D je slika mreže pravokutnih koordinata u D^* .



Slika 3.8: Element površine

Važnu ulogu u definiciji dvostrukog integrala ima element površine ΔS . U pravokutnim koordinatama to se lako računa, $\Delta S = \Delta x \Delta y$. Ideja kod zamjene varijabli je prijeći u koordinate u kojima se granice područja i/ili podintegralna funkcija zapisuju jednostavnije nego u originalnom koordinatnom sustavu. Iz slučaja jednostrukog integrala znamo da se osim granica i podintegralne funkcije transformira i diferencijal dx . Za uspješnu zamjenu varijabli moramo biti u stanju transformirati ΔS , tj. element površine.



Slika 3.9:

$$\begin{aligned}
P_1^* &= (u, v), & P_1 &= (\varphi(u, v), \psi(u, v)) \\
P_2^* &= (u + \Delta u, v), & P_2 &= (\varphi(u + \Delta u, v), \psi(u + \Delta u, v)) \\
P_3^* &= (u + \Delta u, v + \Delta v), & P_3 &= (\varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), \psi(u + \Delta u, v + \Delta v)) \\
P_4^* &= (u, v + \Delta v), & P_4 &= (\varphi(u, v + \Delta v), \psi(u, v + \Delta v)) \\
\Delta S^* &= \Delta u \Delta v
\end{aligned}$$

Zamijenimo točne izraze za koordinate točaka P_1, P_2, P_3, P_4 približnim izrazima dobivenima linearizacijom preslikavanja φ i ψ :

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_1 &= (\varphi, \psi) \\
\tilde{P}_2 &= \left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u, \psi + \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u \right) \\
\tilde{P}_3 &= \left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v, \psi + \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v \right) \\
\tilde{P}_4 &= \left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v, \psi + \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v \right).
\end{aligned}$$

Iz gornjih izraza vidimo da je $\overrightarrow{\tilde{P}_1 \tilde{P}_2} = \overrightarrow{\tilde{P}_4 \tilde{P}_3}$. Dakle, četverokut $\tilde{P}_1 \tilde{P}_2 \tilde{P}_3 \tilde{P}_4$ je paralelogram. Za male vrijednosti $\Delta u, \Delta v$ površina tog paralelograma je blizu površine ΔS . Vrijedi

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\tilde{P}_1 \tilde{P}_2} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u \vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u \vec{j} \\
\overrightarrow{\tilde{P}_1 \tilde{P}_4} &= \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v \vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v \vec{j}.
\end{aligned}$$

Sada je $\Delta S \approx |\overrightarrow{\tilde{P}_1 \tilde{P}_2} \times \overrightarrow{\tilde{P}_1 \tilde{P}_4}|$, pa je

$$\Delta S = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \right| \Delta u \Delta v.$$

Determinanta $J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$ se zove **Jacobijan** funkcija od (φ, ψ) .

Dakle,

$$\Delta S = |J(u, v)| \Delta u \Delta v.$$

Izraz $|J(u, v)|\Delta u\Delta v$ je **element površine** u krivolinijskim koordinatama.

Iz $\Delta S^* = \Delta u\Delta v$ imamo $|J(u, v)| \approx \frac{\Delta S}{\Delta S^*}$.

Odatle slijedi geometrijska interpretacija Jacobijana kao koeficijenta "rastezanja" (lokalnog) elementa površine pri transformaciji $(u, v) \mapsto (x, y)$. Relacija je približna za konačne Δu , Δv i postaje točna u limesu:

$$|J(u, v)| = \lim_{\text{diam } \Delta S^* \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta S^*}.$$

Idemo sad to primijeniti na zamjenu varijabli u dvostrukom integralu. Hoćemo s koordinata (x, y) prijeći na koordinate (u, v) . Varijable (x, y) se preko (u, v) izražavaju kao $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$. Smatramo da je (φ, ψ) neprekidna bijekcija s D^* na D , da ima neprekidne parcijalne derivacije i da je podintegralna funkcija $f(x, y)$ neprekidna na D . Uvrštavanjem izraza za x i y preko u i v podintegralna funkcija $f(x, y)$ postaje neka funkcija $F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$. Promatramo integralne sume

$$\sum_{D_k} f(x, y)\Delta S \approx \sum_{D_k^*} F(u, v)|J|\Delta S^* \quad / \quad \lim_{d \rightarrow 0}$$

Puštanjem limesa kad $d \rightarrow 0$ (d je najveći dijametar subdivizije) dobijemo formulu zamjene varijabli u dvostrukom integralu:

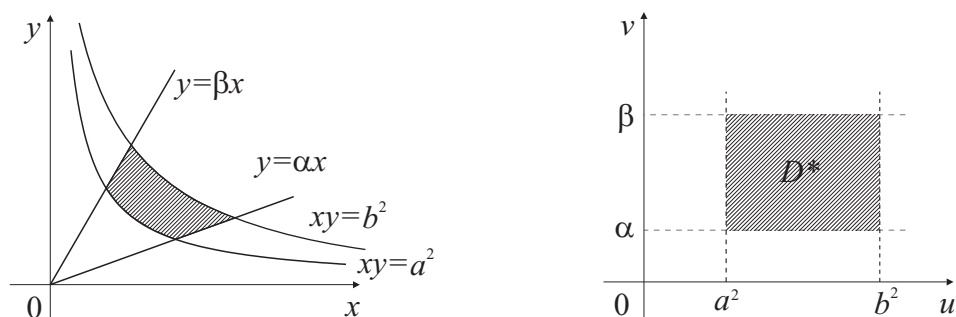
$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_{D^*} F(u, v)|J(u, v)| du dv,$$

gdje je $J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ Jacobijan.

Uvjet $J(u, v) \neq 0$ znači da je preslikavanje $(u, v) \mapsto (x, y)$ lokalna bijekcija. Geometrijski : nema lijepljenja točaka, tj. nema "uništavanja" površine.

Primjer 3.2. Nađimo površinu područja D omeđenog hiperbolama $xy = a^2$, $xy = b^2$ i pravcima $y = \alpha x$, $y = \beta x$ ($a^2 < b^2$, $0 < \alpha < \beta$).

Zanima nas u kojim koordinatama bi područje D imalo lijepe granice, na primjer konstante?



Slika 3.10: Promjena koordinata

$$\left. \begin{array}{l} a^2 \leq xy \leq b^2 \\ \alpha \leq \frac{y}{x} \leq \beta \end{array} \right\} \Rightarrow u = xy, \quad v = \frac{y}{x}$$

Trebaju nam izrazi za x i y preko u i v i treba nam Jacobijan.

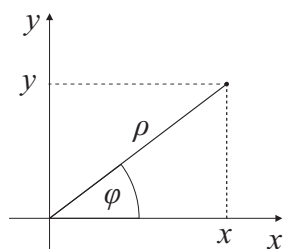
$$x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \quad y = \sqrt{uv} \quad (\text{iz } uv = y^2, \quad \frac{u}{v} = x^2).$$

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Integriramo $f(x, y) \equiv 1$, pa je i $F(u, v) \equiv 1$. Dakle,

$$\begin{aligned} \mu(D) &= \int \int_D dx dy = \int \int_{D^*} |J(u, v)| du dv = \int_{a^2}^{b^2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2v} dv du \\ &= \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} du \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dv}{v} = \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \ln \frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

3.1.5 Polarne koordinate u ravnini

Slika 3.11: $(x, y) \leftrightarrow (\rho, \varphi)$

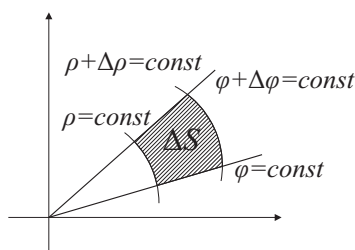
$$\left. \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{array} \right\}, \quad 0 \leq \rho \leq \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho.$$

$dS = \rho d\rho d\varphi$ - element površine u polarnim koordinatama.

Iz formule o zamjeni varijabli u dvostrukom integralu slijedi:

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_{D^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$



Slika 3.12: Geometrijska interpretacija

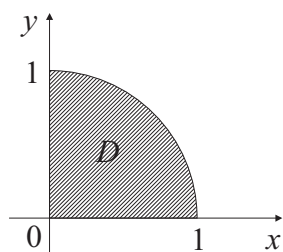
Za male $\Delta\rho$ i $\Delta\varphi$ element ΔS je blizu pravokutnika, čija je površina jednaka produktu stranica. Jedna stranica mu je $\Delta\rho$, a duljina druge ovisi o $\Delta\varphi$ i o tome koliki je tamo ρ ; isti $\Delta\varphi$ daje različite duljine na različitim udaljenostima od 0, tj. za različite ρ . Duljina druge stranice je $\rho\Delta\varphi$, pa je $\Delta S = \rho\Delta\varphi\Delta\rho$. U limesu to ide u $dS = \rho d\rho d\varphi$.

Tehnika računanja dvostrukog integrala je ista kao i za Kartezijeve koordinate, tj. svodi se na iterirane integrale.

Na polarne koordinate se prelazi kad granice i/ili podintegralna funkcija sadrže izraze tipa $x^2 + y^2$ koji ukazuju na rotacijsku simetriju.

Primjer 3.3.

$$\begin{aligned} \int \int_D \frac{dx dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho d\varphi d\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} = \frac{\pi}{2} \int_1^2 \frac{\frac{1}{2} du}{\sqrt{u}} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^2 \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{u} \Big|_1^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \pi. \end{aligned}$$



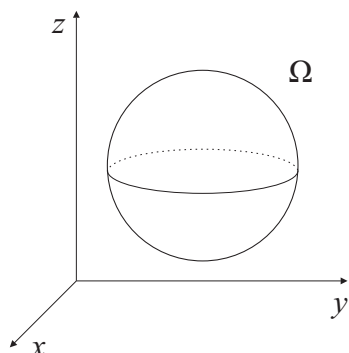
Slika 3.13:

Napomena 3.1. *Bijektivnost preslikavanja $(\rho, \varphi) \mapsto (x, y)$ je narušena za $\rho = 0$. To se vidi iz $J(0, \varphi) = 0$ za bilo koji φ . Unatoč tome preslikavanje je bijekcija na svakoj okolini oko ishodišta koja ne sadrži ishodište.*

3.2 Trostruki integral

3.2.1 Motivacija i definicija

Promatramo materijalno tijelo koje zauzima skup $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Skup Ω je omeđen i zatvoren. U svakoj točki skupa Ω poznata je vrijednost funkcije gustoće mase koju označavamo s $\mu(P) = \mu(x, y, z)$. Želimo odrediti ukupnu masu tijela Ω .



Slika 3.14: Materijalno tijelo

Provodimo sljedeći postupak:

- 1) Podijelimo skup Ω na nepreklapajuće komade $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ čija je unija cijeli Ω i koji imaju volumene $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$.
- 2) U svakom komadu Ω_k izaberemo točku $P_k \in \Omega_k$ i smatramo da je gustoća cijelog komada Ω_k konstantna i jednaka $\mu(P_k)$. Tada je masa komada Ω_k jednaka $\Delta m_k = \mu(P_k)\Delta V_k$. Zbroj svih takvih masa bit će približno jednak masi cijelog tijela Ω ,

$$m = \sum_{k=1}^n \mu(P_k)\Delta V_k.$$

- 3) Označimo s d najveći od dijametara komada Ω_k . Ako gornji izraz ima limes kad $n \rightarrow \infty$ i $d \rightarrow 0$ koji je neovisan o podjeli $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ i izboru točaka $P_k \in \Omega_k$, onda za masu tijela Ω uzimamo upravo taj limes.

Možemo provesti ovakvo razmatranje i za općenite funkcije f . Uzmimo zatvoreni, omeđeni skup Ω koji ima volumen i na njemu definiranu ograničenu funkciju f . Podijelimo Ω u n komada $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ koji se ne preklapaju i čija

unija je cijeli Ω . Njihovi volumeni su $\Delta V_1, \dots, \Delta V_n$. Izaberimo proizvoljne točke $P_k \in \Omega_k$ i formiramo integralnu sumu

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta V_k.$$

Neka je d najveći od dijametara od komada Ω_k , $k = 1, \dots, n$.

Definicija 3.2. *Ako postoji limes integralnih suma za $n \rightarrow \infty$ i $d \rightarrow 0$ koji ne ovisi ni o podjeli $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ ni o izboru točaka $P_k \in \Omega_k$, onda se taj limes naziva **trostruki integral** funkcije f po Ω i označava s*

$$\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) dV \quad \text{ili} \quad \int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Funkcija f je tada **integrabilna** na Ω .

$$\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty, d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k.$$

Teorem 3.3. *Ako je funkcija f neprekidna na zatvorenom omeđenom skupu Ω koji ima volumen, onda je f i integrabilna na Ω .*

Teorem 3.4. *Ako je funkcija f ograničena na zatvorenom omeđenom skupu Ω (koji ima volumen) i ako je neprekidna na Ω svuda osim na skupu volumena 0, onda je f i integrabilna na Ω .*

Skup $S \subset \mathbb{R}^3$ je volumena 0 ako ga se može smjestiti u tijelo (poliedar) po volji malog volumena.

3.2.2 Svojstva trostrukog integrala

(1) Linearnost:

Ako su f i g integrabilne na Ω , onda je i $\alpha f + \beta g$ integrabilna na Ω za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i vrijedi

$$\int \int \int_{\Omega} (\alpha f + \beta g) dV = \alpha \int \int \int_{\Omega} f dV + \beta \int \int \int_{\Omega} g dV.$$

(2) **Monotonost:**

Ako su f i g integrabilne na Ω i vrijedi $f(P) \leq g(P)$, $\forall P \in \Omega$, onda je

$$\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \leq \int \int \int_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz.$$

Posebno,

$$\left| \int \int \int_{\Omega} f(P) dV \right| \leq \int \int \int_{\Omega} |f(P)| dV.$$

(3) **Aditivnost po području integracije:**

Ako je f integrabilna na Ω i $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, tako da je $\text{Vol}(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 0$, onda je

$$\int \int \int_{\Omega} f(P) dV = \int \int \int_{\Omega_1} f(P) dV + \int \int \int_{\Omega_2} f(P) dV.$$

(4) **Ograde:**

Neka je f neprekidna na omeđenom i zatvorenom skupu Ω . Tada f na Ω postiže svoj minimum m i maksimum M i vrijedi

$$mV \leq \int \int \int_{\Omega} f(P) dV \leq MV,$$

gdje je V volumen od Ω .

(5) **Volumen:**

Volumen skupa Ω računamo kao

$$V = \int \int \int_{\Omega} 1 dV = \int \int \int_{\Omega} dx dy dz.$$

(6) **Teorem srednje vrijednosti:**

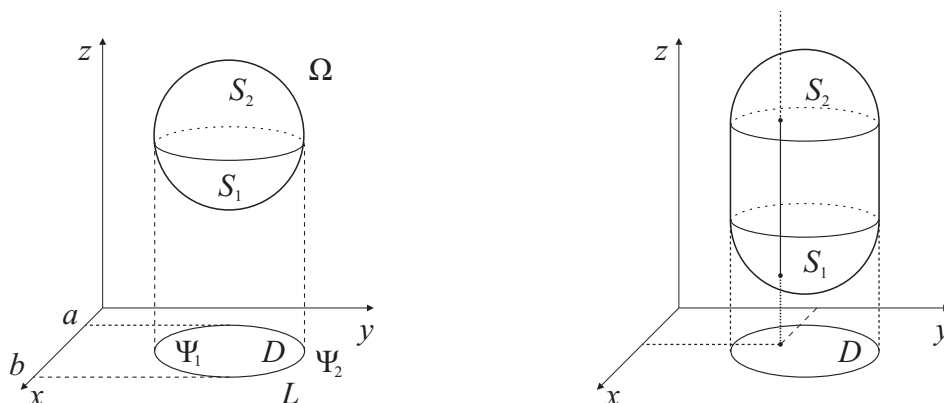
Neka je funkcija f neprekidna na omeđenom zatvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Tada postoji barem jedna točka $P_0 \in \Omega$ za koju vrijedi

$$\int \int \int_{\Omega} f(P) dV = f(P_0) \cdot V.$$

Veličina $\frac{1}{V} \int \int \int_{\Omega} f(P) dV$ se zove **srednja vrijednost** funkcije f na Ω . Teorem kaže da se za neprekidnu funkciju njezina srednja vrijednost i postiže u nekoj točki P_0 iz Ω .

3.2.3 Računanje trostrukog integrala

Promatramo prvo slučaj kad je skup Ω omeđen plohom S koja se može prikazati kao unija dviju ploha S_1 i S_2 , od kojih je svaka graf neke neprekidne funkcije $\varphi_1(x, y)$ i $\varphi_2(x, y)$ definirane na projekciji D skupa Ω u xy ravnini. Označimo rub od D s L . (Sva razmatranja ostaju valjana i ako su S_1 i S_2 odvojene cilindričkom plohom kojoj je L ravnalica, a izvodnice su joj paralelne s osi z .)



Slika 3.15:

Neka je na Ω zadana neka integrabilna funkcija f . Za fiksni $(x, y) \in D$, presjek pravca kroz (x, y) paralelnog s osi z i skupa Ω je dužina koja u Ω ulazi u točki $\varphi_1(x, y) \in S_1$ i izlazi iz Ω u točki $\varphi_2(x, y) \in S_2$. Na toj dužini su x i y fiksni, mijenja se z i to od $\varphi_1(x, y)$ do $\varphi_2(x, y)$. Doprinos te dužine integralu $\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ je dan kao integral od $f(x, y, z)$ po z u granicama od $\varphi_1(x, y)$ do $\varphi_2(x, y)$. Dakle,

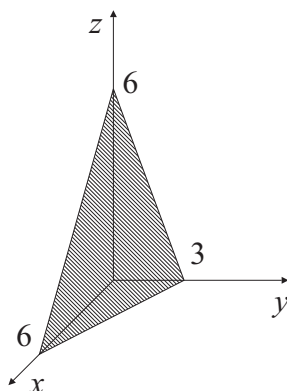
$$\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int \int_D \left[\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy,$$

jer se ukupni integral dobije uzimajući sve doprinose za fiksne (x, y) . Ako je skup D takav da se njegov rub L može prikazati kao unija dviju krivulja od kojih je svaka graf neprekidne funkcije, recimo $\psi_1(x)$ i $\psi_2(x)$, desnu stranu možemo dalje raspisati:

$$\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Analogno se mogu dobiti i formule za slučaj kad je zgodnije prvo integrirati po x ili po y . Za kompliciranije skupove razbijemo skup na jednostavnije komade gornjeg tipa i primijenimo aditivnost po području integracije.

Primjer 3.4. *Izračunajmo volumen tetraedra omeđenog ravninama $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $x + 2y + z - 6 = 0$.*



Slika 3.16:

$$\begin{aligned}
 V &= \int \int \int_T dx \, dy \, dz = \int_0^6 \int_0^{3-\frac{x}{2}} \int_0^{6-x-2y} dz \, dy \, dx \\
 &= \int_0^6 \int_0^{3-\frac{x}{2}} (6-x-2y) \, dy \, dx = \int_0^6 (6-x)y \Big|_0^{3-\frac{x}{2}} dx - \int_0^6 y^2 \Big|_0^{3-\frac{x}{2}} dx \\
 &= \int_0^6 (6-x) \underbrace{\left(3-\frac{x}{2}\right)}_{\frac{6-x}{2}} dx - \int_0^6 \underbrace{\left(3-\frac{x}{2}\right)^2}_{\frac{(6-x)^2}{4}} dx = \frac{1}{4} \int_0^6 (6-x)^2 dx \\
 &= -\frac{1}{4} \int_0^6 (6-x)^2 d(6-x) = -\frac{(6-x)^3}{12} \Big|_0^6 = 18.
 \end{aligned}$$

U ovom slučaju volumen tijela možemo i lakše izračunati kao $\frac{1}{6}(6 \cdot 6 \cdot 3) = 18$.

3.2.4 Krivolinijske koordinate i zamjena varijabli u trostrukom integralu

U brojnim primjenama praktičnije je točku u prostoru umjesto Kartezijevim koordinatama (x, y, z) označiti nekim drugim veličinama (u, v, w) koje su prikladne

u danom slučaju. Pretpostavimo da je svaka točka M u prostoru jedinstveno određena tim veličinama (u, v, w) . Tada se (u, v, w) nazivaju **krivolinijskim koordinatama** točke M .

Skup točaka u kojima je jedna koordinata konstantna ($u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $w = \text{const}$) zovemo **koordinatna ploha**. Presjek dvije koordinatne plohe zovemo **koordinatna krivulja**.

Često nam je neku funkciju lakše integrirati po krivolinijskim koordinatama (u, v, w) , nego po Kartezijevim (x, y, z) . Takva zamjena varijabli u trostrukom integralu provodi se na sličan način kao zamjena varijabli u dvostrukom integralu. Promatramo skup $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ u xyz -prostoru i skup $\Omega^* \subset \mathbb{R}^3$ u uvw -prostoru. Neka su na Ω^* zadane funkcije

$$\begin{aligned}x &= \varphi(u, v, w), \\y &= \psi(u, v, w), \\z &= \phi(u, v, w),\end{aligned}$$

koje preslikavaju Ω^* na Ω , neprekidne su i imaju neprekidne parcijalne derivacije. Neka je dodatno preslikavanje $\Omega^* \rightarrow \Omega$ bijekcija.

Definiramo **Jacobijan** funkciju od (φ, ψ, ϕ) na sljedeći način:

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

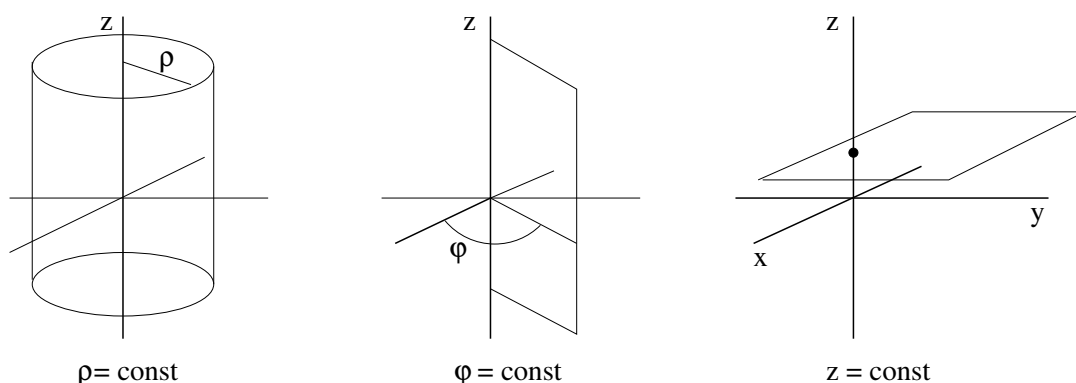
Pretpostavimo sad da je f funkcija koja je neprekidna i integrabilna na Ω . Ako je $J(u, v, w) \neq 0$, za svaki $(u, v, w) \in \Omega^*$, onda se analogno kao u slučaju dvostrukog integrala pokaže da vrijedi formula zamjene varijabli

$$\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{\Omega^*} F(u, v, w) |J(u, v, w)| du dv dw,$$

gdje je $F(u, v, w) = f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \phi(u, v, w))$.

3.2.5 Cilindrične koordinate u prostoru

U cilindričnim koordinatama pozicija točke M u prostoru određena je s ρ , φ i z , gdje je $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ i $-\infty < z < \infty$.



Slika 3.17: Koordinatne plohe u cilindričnim koordinatama

$$(x, y, z) \leftrightarrow (\rho, \varphi, z)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{array} \right\} \quad 0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

$$\begin{aligned} J(\rho, \varphi, z) &= \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} \\ &= \rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho. \end{aligned}$$

$dV = \rho d\rho d\varphi dz$ - element volumena u cilindričnim koordinatama.

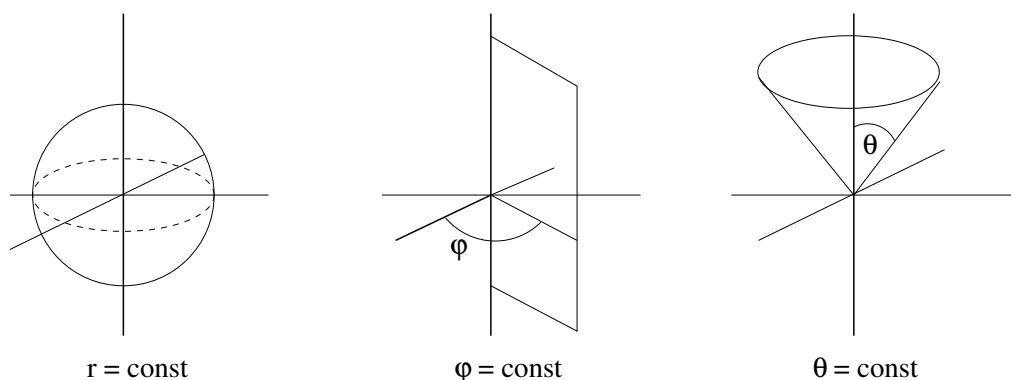
Iz formule o zamjeni varijabli u trostrukom integralu slijedi:

$$\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{\Omega^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz.$$

Tehnika računanja trostrukog integrala je ista kao i za Kartezijeve koordinate, tj. svodi se na iterirane integrale.

3.2.6 Sferne koordinate ili prostorne polarne koordinate

U sfernim koordinatama pozicija točke M u prostoru određena je s r , θ i φ , gdje je $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ i $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.



Slika 3.18: Koordinatne plohe u sfernim koordinatama

$$(x, y, z) \leftrightarrow (r, \theta, \varphi)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$\begin{aligned} J(r, \theta, \varphi) &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \cos \theta \begin{vmatrix} r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} + r \sin \theta \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} \\ &= r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + r^2 \sin^3 \theta = r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Budući da je $\theta \in [0, \pi]$ vrijedi $\sin \theta \geq 0$, pa je $|J(r, \theta, \varphi)| = r^2 \sin \theta$.

Sada je $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ element volumena u sfernim koordinatama.

Iz formule o zamjeni varijabli u trostrukom integralu slijedi:

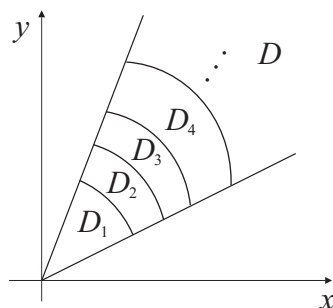
$$\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{\Omega^*} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

Opet se integrali ovakvog tipa računaju svodenjem na iterirane integrale.

3.3 Nepravi višestruki integrali na neomeđenim područjima

Do sada smo višestruke integrale uvijek promatrali na omeđenim područjima. Što ako je područje integracije D neomeđeno?

Ideja je: uzmimo niz ograničenih domena D_1, \dots, D_n koje na monoton način pokrivaju područje D kad $n \rightarrow \infty$. Dakle, $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \dots \subset D_n \subset D$, $D_n \rightarrow D$ za $n \rightarrow \infty$. Sad promatramo što se zbiva s $\int \int_{D_n} f(x, y) dx dy$ kad $D_n \rightarrow D$.



Slika 3.19:

Definicija 3.3. Nepravi integral funkcije $f(x, y)$ po neomeđenom području D definira se kao limes niza integrala $\int \int_{D_n} f(x, y) dx dy$ koji ne ovisi o izboru niza D_n . Dakle,

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \int_{D_n} f(x, y) dx dy.$$

Ako gornji limes postoji i konačan je, kažemo da nepravi integral **konvergira**. U suprotnom nepravi integral **divergira**.

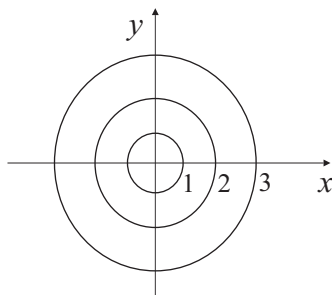
Nepravi trostruki integrali se definiraju analogno.

Primjer 3.5. Želimo izračunati nepravi integral

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Definirajmo $D_n := \{(x, y); x^2 + y^2 \leq n^2\}$.

3.3. NEPRAVI VIŠESTRUKI INTEGRALI NA NEOMEĐENIM PODRUČJIMA 87



Slika 3.20: D_1, D_2, D_3

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2} &= \int_0^{2\pi} \int_0^n \frac{\rho d\rho}{(1+\rho^2)^2} d\varphi = 2\pi \int_0^n \frac{\rho d\rho}{(1+\rho^2)^2} \\ &= 2\pi \int_0^n \frac{\frac{1}{2} d(1+\rho^2)}{(1+\rho^2)^2} = 2\pi \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{1+\rho^2} \Big|_0^n \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+n^2)} \right). \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+n^2)} \right) \right] = \pi - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{1+n^2} = \pi. \end{aligned}$$

Primjer 3.6. *Izračunajmo sad nepravi integral*

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Taj integral konvergira. Zašto?

Za $x \geq 1$ je $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, a znamo da nepravi integral $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ konvergira i da je jednak 1. Po kriteriju uspoređivanja, onda i $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ konvergira.

Taj integral ne možemo izraziti preko elementarnih funkcija, ali ga možemo izračunati na sljedeći način.

Označimo $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = I$. Računamo I^2 :

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} e^{-u} du \\ &= \frac{\pi}{4} \left(-e^{-u} \Big|_0^{\infty} \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Dakle, $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Oдавде dobivamo da je

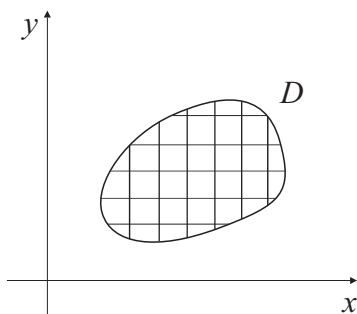
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Funkcija $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ je posebno važna u vjerojatnosti i statistici, jer predstavlja distribuciju normalne razdiobe.

3.4 Primjene višestrukih integrala

3.4.1 Masa ravninskog lika

Promatramo ravninski lik D na kojem je zadana gustoća mase $\gamma(x, y)$. Uzmimo da je γ neprekidna funkcija na D . Podijelimo područje D na manja područja D_1, D_2, \dots, D_n s površinama $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$.



Slika 3.21:

U svakom D_k odaberemo točku P_k i aproksimiramo masu svakog komadića D_k s $\gamma(P_k)\Delta S_k$. Zbrajajući sve takve doprinose dobivamo aproksimaciju mase područja D . Dakle,

$$m \approx \sum_{k=1}^n \gamma(x_k, y_k) \Delta S_k.$$

Ovaj izraz ima strukturu integralne sume. Za $n \rightarrow \infty$ i $d \rightarrow 0$ dobivamo

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy.$$

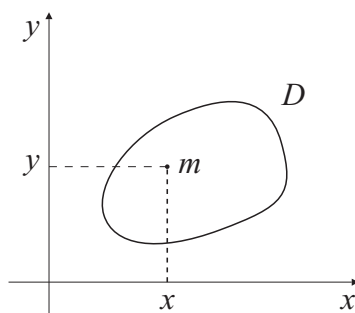
Za homogeni lik, $\gamma(x, y) = \text{const} = \gamma$, imamo

$$m = \gamma \iint_D dx dy = \gamma S.$$

3.4.2 Statički momenti i središte mase ravnog lika

Statički moment materijalne točke s masom m u odnosu na os x je umnožak mase i udaljenosti od osi x , tj. $M_x = m \cdot y$. Slično, statički moment te točke s obzirom na os y je $M_y = m \cdot x$.

Imamo li konačan broj materijalnih točaka, njihovi se statički momenti zbrajaju.



Slika 3.22:

Općenito, ravninski lik D podijelimo u komade D_1, D_2, \dots, D_n , uzmemo da je masa svakog od njih jednaka $\gamma(P_k)\Delta S_k$ za neki $P_k = (x_k, y_k) \in D_k$ i da je sva masa koncentrirana u točki P_k . Onda je statički moment komada D_k s obzirom na os x dan kao $y_k\gamma(x_k, y_k)\Delta S_k$. Zbrajajući po svim komadićima dobivamo aproksimaciju

$$M_x \approx \sum_{k=1}^n y_k \gamma(x_k, y_k) \Delta S_k,$$

a prelaskom na limes dobivamo

$$M_x = \iint_D y \gamma(x, y) dx dy.$$

Slično,

$$M_y = \iint_D x \gamma(x, y) dx dy.$$

Pomoću statičkih momenata možemo izračunati koordinate središta mase (težišta) ravninskog lika D .

$$x_S = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_D x \gamma(x, y) dx dy}{m} = \frac{\iint_D x \gamma(x, y) dx dy}{\iint_D \gamma(x, y) dx dy}.$$

$$y_S = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_D y \gamma(x, y) dx dy}{m} = \frac{\iint_D y \gamma(x, y) dx dy}{\iint_D \gamma(x, y) dx dy}.$$

Za homogeni lik ($\gamma = \text{const}$) imamo

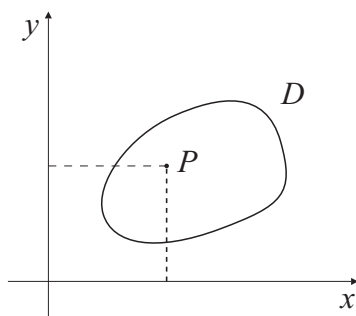
$$x_S = \frac{\iint_D x dx dy}{S}, \quad y_S = \frac{\iint_D y dx dy}{S}.$$

U polarnim koordinatama je

$$x_S = \frac{\iint \rho^2 \cos \varphi \gamma(\rho, \varphi) d\rho d\varphi}{\iint \rho \gamma(\rho, \varphi) d\rho d\varphi}, \quad y_S = \frac{\iint \rho^2 \sin \varphi \gamma(\rho, \varphi) d\rho d\varphi}{\iint \rho \gamma(\rho, \varphi) d\rho d\varphi}.$$

3.4.3 Momenti inercije ravninskog lika

Moment inercije (ustrajnosti, tromosti) materijalne točke mase m s obzirom na os od koje je točka udaljena za r dan je formulom $I = mr^2$.



Slika 3.23:

Za ravninski lik D računamo momente inercije s obzirom na koordinatne osi zbrajajući (integrirajući) doprinose svih njegovih točaka. U točki $P = (x, y)$ je gustoća dana funkcijom $\gamma(x, y)$, a udaljenosti od koordinatnih osi s y, x , redom. Doprinos točke $P = (x, y)$ je dan kao

$$dI_x = y^2 dm = y^2 \gamma(x, y) dx dy, \quad dI_y = x^2 dm = x^2 \gamma(x, y) dx dy$$

Odavde,

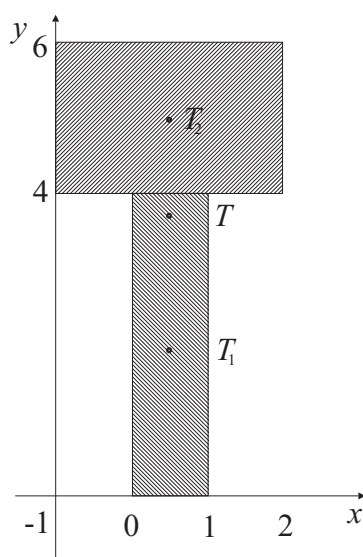
$$I_x = \int \int_D y^2 \gamma(x, y) dx dy, \quad I_y = \int \int_D x^2 \gamma(x, y) dx dy.$$

Slično, moment inercije s obzirom na ishodište računa se kao

$$I_0 = \int \int_D (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dx dy.$$

Digresija: Što ako je lik kompliciran? Recimo, sastavljen od više komada?

Primjer 3.7. Zadan je homogeni T-profil s dimenzijama (u metrima) označenim na slici. Odredimo mu koordinate težišta.



Slika 3.24:

Zbog simetričnosti je očito $x_T = 0.5m$.

Za odrediti y_T računamo y -koordinatu težišta (y_T) svakog od dva pravokutnika posebno. Za donji pravokutnik je $y_{T_1} = 2$, za gornji je $y_{T_2} = 5$. Masa donjeg je 4, masa gornjeg je 6. Dakle,

$$y_T = \frac{4 \cdot 2 + 6 \cdot 5}{10} = 3.8.$$

(Provjera jedinica: masa pravokutnika je $4\rho m^2$ za donji i $6\rho m^2$ za gornji; onda je $y_T = \frac{(2 \cdot 4\rho + 5 \cdot 6\rho)m^3}{10\rho m^2} = 3.8m$.)

Primjer 3.8. Odredimo težište (homogenog) lika na slici.

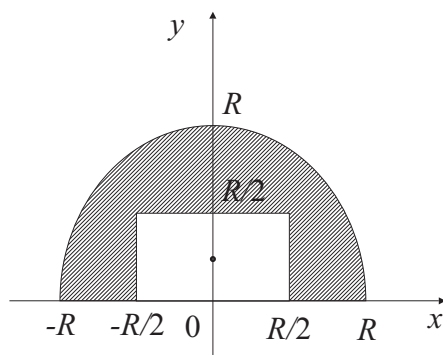
Zbog simetričnosti je jasno da je $x_T = 0$, a y -koordinatu težišta ćemo dobiti tako da lik nadopunimo do polukruga.

Masa cijelog polukruga iznosi $m = \frac{1}{2}R^2\pi\rho$. Masa dijela koji nedostaje je $m_1 = \frac{R^2}{2}\rho$, a preostalu masu označimo s m_2 (to je masa lika čije težište tražimo). Sada je

$$y_T = \frac{m_1 y_{T_1} + m_2 y_{T_2}}{m},$$

pa iz toga slijedi da je

$$y_{T_2} = \frac{m y_T - m_1 y_{T_1}}{m_2}.$$



Slika 3.25:

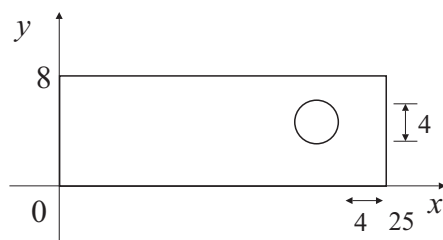
Znamo da je $y_{T_1} = \frac{R}{4}$ i

$$\begin{aligned} y_T &= \frac{\int \int_D y \, dx \, dy}{\frac{1}{2}R^2\pi} = \frac{2 \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y \, dy \, dx}{\frac{1}{2}R^2\pi} = \frac{2 \int_0^R \left(\frac{1}{2}y^2\right) \Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx}{\frac{1}{2}R^2\pi} \\ &= \frac{2 \int_0^R (R^2 - x^2) \, dx}{R^2\pi} = \frac{2(R^2x - \frac{x^3}{3}) \Big|_0^R}{R^2\pi} = \frac{\frac{4}{3}R^3}{R^2\pi} = \frac{4R}{3\pi}, \end{aligned}$$

pa kad to uvrstimo u gornju formulu dobijemo da je

$$y_{T_2} = \frac{\frac{2R^3\rho}{3} - \frac{R^3\rho}{8}}{\frac{1}{2}R^2\rho(\pi - 1)} = \frac{13R}{12(\pi - 1)}.$$

Primjer 3.9. Odredimo težište (homogenog) lika na slici.



Slika 3.26:

Zbog simetričnosti je jasno da je $y_T = 4$, a x - koordinatu težišta ćemo dobiti tako da lik nadopunimo do pravokutnika.

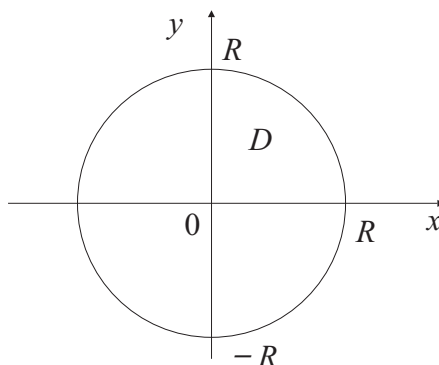
Masa cijelog pravokutnika je $m = 200\rho$, a masa dijela koji nedostaje je $m_1 =$

$4\pi\rho$. Vidimo da je $x_T = 12.5$, a $x_{T_1} = 19$. Sada kao u prethodnom zadatku dobijemo da je x -koordinata lika čije težište tražimo

$$x_{T_2} = \frac{mx_T - m_1x_{T_1}}{m - m_1} = 12.06.$$

Moment inercije pri rotacijskom gibanju igra ulogu sličnu ulozi mase kod ravninskog gibanja. Npr. kinetička energija materijalne točke mase m koja se rotira oko osi/točke na udaljenosti r je $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$ (ω je kutna brzina.) Moment inercije je uvijek pozitivan.

Primjer 3.10. *Odredimo moment inercije (homogenog) kruga s obzirom na njegov promjer.*



Slika 3.27:

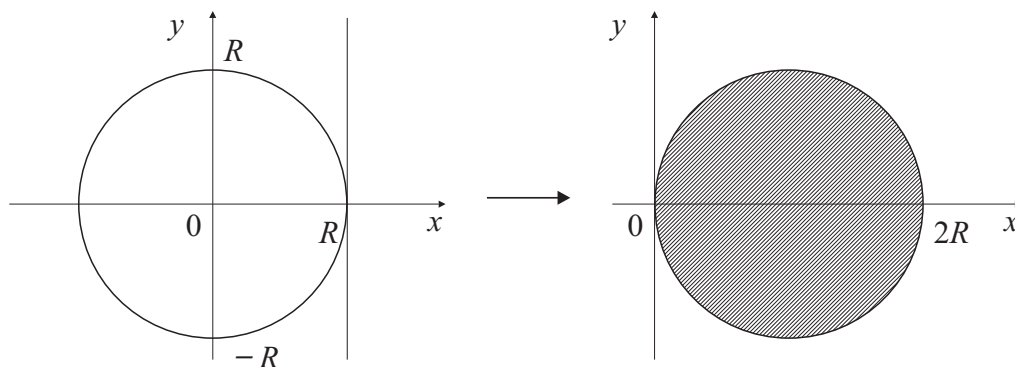
Računat ćemo moment inercije s obzirom na promjer na osi y .

$$\begin{aligned} I_y &= \int \int_D x^2 dm = \gamma \int \int_D x^2 dx dy = \gamma \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \cos^2 \varphi \rho d\rho d\varphi \\ &= \gamma \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\gamma R^4}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\gamma R^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi \\ &= \frac{\gamma R^4}{8} (\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi) \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi\gamma R^4}{8} = \frac{\gamma R^2 \pi R^2}{4} = \frac{mR^2}{4}. \end{aligned}$$

Primjer 3.11. *Odredimo moment inercije kruga s obzirom na os kroz središte okomitu na ravninu kruga.*

$$\begin{aligned} I_0 &= \int \int_D (x^2 + y^2) \gamma dx dy = \gamma \int \int_D \rho^2 \rho d\rho d\varphi = \gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho \\ &= 2\gamma\pi \frac{R^4}{4} = \frac{\gamma R^2 \pi R^2}{2} = \frac{mR^2}{2}. \end{aligned}$$

Primjer 3.12. *Odredimo moment inercije (homogenog) kruga polumjera R s obzirom na njegovu tangentu.*



Slika 3.28:

Sad među polarnim koordinatama vrijede relacije $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ i $0 \leq \rho \leq 2R \cos \varphi$.

$$\begin{aligned} I_t &= \int \int_D x^2 \gamma \, dx \, dy = \gamma \int \int_D \rho^2 \cos^2 \varphi \rho \, d\rho \, d\varphi = \gamma \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \, d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} \rho^3 \, d\rho \\ &= \gamma R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{16 \cos^4 \varphi}{4} \cos^2 \varphi \, d\varphi = 4\gamma R^4 \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi \, d\varphi}_{\frac{5\pi}{16}} = 5 \frac{\gamma R^4 \pi}{4} = 5 \frac{mR^2}{4} = 5I_y. \end{aligned}$$

Gornji rezultat još možemo pisati kao

$$I_t = \frac{mR^4}{4} + mR^2 = I_y + mR^2.$$

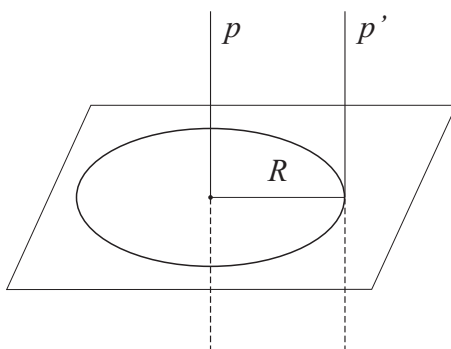
To je manifestacija općeg pravila koje se zove Steinerov teorem.

Teorem 3.5. *Neka je D ravninski lik, p pravac kroz njegovo težište i p' pravac paralelan s p udaljen za d od p . Tada je*

$$I_{p'} = I_p + md^2,$$

gdje je m masa lika D .

Primjer 3.13. *Odredimo sad moment inercije (homogenog) kruga polumjera R s obzirom na os kroz točku na rubu okomitu na ravninu kruga.*



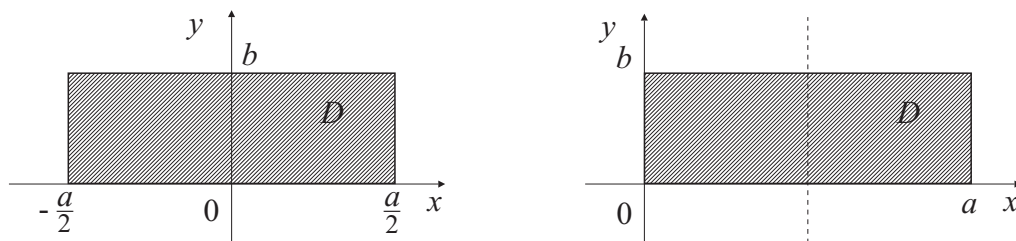
Slika 3.29: Primjena Steinerovog teorema

Znamo da je $I_p = I_0 = \frac{mR^2}{2}$, $d = R$ i $m = R^2\pi\gamma$.

Prema gornjem teoremu sada vrijedi

$$I_{p'} = \frac{mR^2}{2} + m \cdot R^2 = \frac{3}{2}mR^2 = 3I_0.$$

Primjer 3.14. Odredimo moment inercije s obzirom na os kroz težište (homogenog) pravokutnika paralelnu jednoj stranici.



Slika 3.30:

$$I_T = \gamma \int \int_D x^2 dx dy = \gamma \int_0^b dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx = \gamma b \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{1}{12} \gamma a^3 b = \frac{1}{12} m a^2.$$

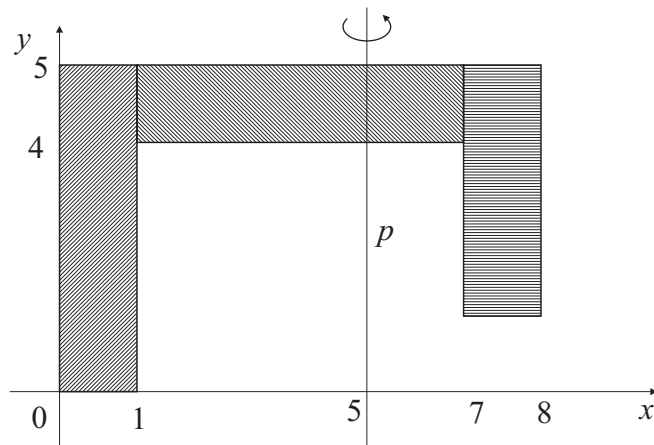
Stranice ne ulaze simetrično!

Moment inercije homogenog pravokutnika s obzirom na stranicu možemo izračunati preko Steinerovog teorema:

$$I_b = I_T + m \left(\frac{a}{2}\right)^2 = m \left(\frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{m a^2}{3}.$$

Moment inercije je aditivan (po dijelovima lika). To znači da za složene likove možemo računati momente inercije za jednostavnije komponente i onda ih pozbrajati.

Primjer 3.15. *Odredimo moment inercije nacrtanog (homogenog) lika s obzirom na označenu os.*



Slika 3.31:

Razbijemo profil na tri pravokutnika sa stranicama (a_i, b_i) , gdje je

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & b_1 &= 5 \\ a_2 &= 6, & b_2 &= 1 \\ a_3 &= 1, & b_3 &= 4. \end{aligned}$$

Udaljenost osi p od s njom paralelne osi kroz težište pravokutnika i označimo s d_i . Sada je $d_1 = 4.5$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2.5$.

Znamo da je $I_T = \frac{1}{12}\gamma a^3b$, pa je

$$I_{T_1} = \frac{1}{12}\gamma \cdot 5, \quad I_{T_2} = \frac{1}{12}\gamma \cdot 216, \quad I_{T_3} = \frac{1}{12}\gamma \cdot 4.$$

Na kraju (iz Steinerovog teorema) dobivamo

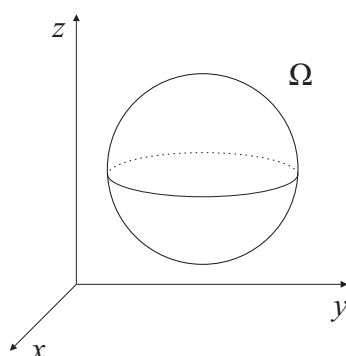
$$\begin{aligned} I_p &= \frac{5}{12}\gamma + (4.5)^2 \cdot \underbrace{\gamma \cdot 5}_{m_1} + 18\gamma + \underbrace{\gamma \cdot 1 \cdot 6}_{m_2} + \frac{\gamma}{3} + (2.5)^2 \cdot \underbrace{1 \cdot 4 \cdot r}_{m_3} \\ &= \gamma \left[\frac{5}{12} + 101.25 + 18 + 6 + \frac{4}{12} + 6.25 \cdot 4 \right] \\ &= \gamma [102 + 24 + 25] = 151\gamma. \end{aligned}$$

3.4.4 Masa tijela

Ako je tijelo smješteno u području $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sa zadanom raspodjelom gustoće mase $\gamma(x, y, z)$, onda je ukupna masa tijela dana kao

$$m = \int \int \int_{\Omega} \gamma(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{\Omega} dm.$$

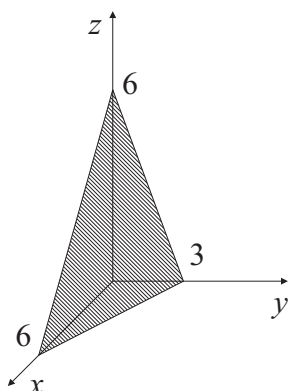
Za homogeno tijelo imamo $m = \gamma \int \int \int_{\Omega} dx dy dz = \gamma V$.



Slika 3.32:

Primjer 3.16. Izračunajmo masu tetraedra omeđenog ravninama $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $x + 2y + z - 6 = 0$ ako mu je zadana gustoća $\gamma(x, y, z) = 6 - z$.

$$\begin{aligned} m &= \int \int \int_T \gamma(x, y, z) dx dy dz = \int_0^6 \int_0^{3-\frac{x}{2}} \int_0^{6-x-2y} (6-z) dz dy dx \\ &= \int_0^6 \int_0^{3-\frac{x}{2}} \left(6z - \frac{z^2}{2}\right) \Big|_0^{6-x-2y} dy dx = \int_0^6 \int_0^{3-\frac{x}{2}} \left(18 - \frac{x^2}{2} - 2xy - 2y^2\right) dy dx \\ &= \int_0^6 \left(18 - \frac{x^2}{2}\right) y \Big|_0^{3-\frac{x}{2}} dx - \int_0^6 xy^2 \Big|_0^{3-\frac{x}{2}} dx - \int_0^6 \frac{2y^3}{3} \Big|_0^{3-\frac{x}{2}} dx \\ &= \int_0^6 \left(18 - \frac{x^2}{2}\right) \underbrace{\left(3 - \frac{x}{2}\right)}_{\frac{6-x}{2}} dx - \int_0^6 x \underbrace{\left(3 - \frac{x}{2}\right)^2}_{\frac{(6-x)^2}{4}} dx - \int_0^6 x \underbrace{\left(3 - \frac{x}{2}\right)^3}_{\frac{(6-x)^3}{8}} dx \\ &= \frac{1}{8} \int_0^6 (6-x) \left(-\frac{2x^2}{3} - 4x + 48\right) dx = \frac{1}{8} \int_0^6 \left(\frac{2x^3}{3} - 72x + 288\right) dx \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{x^4}{6} - 36x^2 + 288x\right) \Big|_0^6 = \frac{1}{8} (216 - 1296 + 1728) = 81. \end{aligned}$$



Slika 3.33:

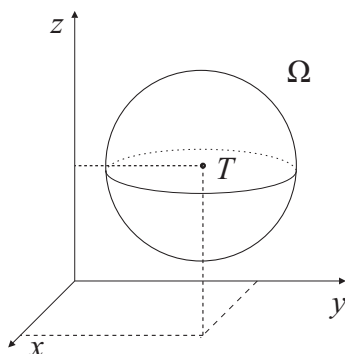
3.4.5 Statički momenti i koordinate središta mase tijela

Slično kao i u slučaju dviju dimenzija imamo:

$$M_{xy} = \int \int \int_{\Omega} z \, dm = \int \int \int_{\Omega} z \gamma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$M_{yz} = \int \int \int_{\Omega} x \, dm = \int \int \int_{\Omega} x \gamma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$M_{xz} = \int \int \int_{\Omega} y \, dm = \int \int \int_{\Omega} y \gamma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

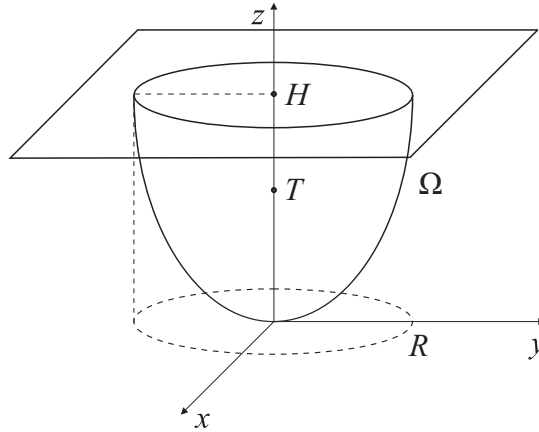


Slika 3.34:

Sada su koordinate težišta dane preko statičkih momenata

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\int \int \int_{\Omega} x \, dm}{\int \int \int_{\Omega} dm} = \frac{\int \int \int_{\Omega} x \gamma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\int \int \int_{\Omega} \gamma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}, \\ y_T &= \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\int \int \int_{\Omega} y \, dm}{\int \int \int_{\Omega} dm} = \frac{\int \int \int_{\Omega} y \gamma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\int \int \int_{\Omega} \gamma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}, \\ z_T &= \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\int \int \int_{\Omega} z \, dm}{\int \int \int_{\Omega} dm} = \frac{\int \int \int_{\Omega} z \gamma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\int \int \int_{\Omega} \gamma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}. \end{aligned}$$

Primjer 3.17. Odredimo koordinate težišta (homogenog) tijela omeđenog ravninom $z = H$ i paraboloidom $z = x^2 + y^2$.



Slika 3.35:

Očito je zbog simetrije $x_T = y_T = 0$.

$$z_T = \frac{\int \int \int_{\Omega} z \, dm}{\int \int \int_{\Omega} dm} = \frac{\gamma \int \int \int_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz}{\gamma \int \int \int_{\Omega} dx \, dy \, dz} = \frac{\int \int \int_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz}{V}.$$

$0 \leq R \leq \sqrt{H}$, pa prelaskom na cilindrične koordinate dobivamo

$$\begin{aligned} V &= \int \int \int_{\Omega} dV = \int_0^{\sqrt{H}} \int_0^{2\pi} \int_{\rho^2}^H \rho \, dz \, d\varphi \, d\rho = 2\pi \int_0^{\sqrt{H}} \rho \int_{\rho^2}^H dz \, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{H}} (\rho H - \rho^3) d\rho = 2\pi \left(\frac{H^2}{2} - \frac{H^2}{4} \right) = \frac{H^2 \pi}{2}, \end{aligned}$$

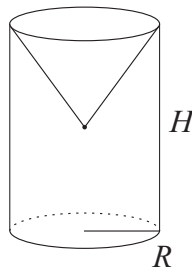
$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int \int \int_{\Omega} z \, dV = \int_0^{\sqrt{H}} \int_0^{2\pi} \int_{\rho^2}^H z \, dz \, d\varphi \, \rho \, d\rho = 2\pi \int_0^{\sqrt{H}} \rho \left(\frac{H^2}{2} - \frac{\rho^4}{2} \right) d\rho \\ &= \pi H^2 \frac{H}{2} - \pi \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^{\sqrt{H}} = \frac{H^3 \pi}{2} - \frac{H^3 \pi}{6} = \frac{1}{3} H^3 \pi. \end{aligned}$$

Konačno,

$$z_T = \frac{\frac{1}{3}H^3\pi}{\frac{H^2\pi}{2}} = \frac{2}{3}H.$$

Načelo aditivnosti vrijedi i za težišta.

Primjer 3.18. *Odredimo koordinate težišta (homogenog) tijela koje ostaje kad iz valjka polumjera osnovice R i visine H izvadimo stožac iste osnovice i visine $\frac{H}{2}$ (kao na slici).*



Slika 3.36:

Masa cijelog valjka iznosi $m = \gamma R^2 H \pi$, a masa stošca koji nedostaje je $m_1 = \frac{1}{6} \gamma R^2 H \pi$. Označimo masu preostalog tijela s m_2 , $m_2 = m - m_1 = \frac{5}{6} \gamma R^2 H \pi$ (to je masa tijela čije težište tražimo). Očito je zbog simetrije $x_{T_2} = y_{T_2} = 0$. Preostaje nam još izračunati z -koordinatu težišta. Vrijedi

$$z_T = \frac{m_1 z_{T_1} + m_2 z_{T_2}}{m} \quad \Rightarrow \quad z_{T_2} = \frac{m z_T - m_1 z_{T_1}}{m - m_1}.$$

Znamo da je $z_T = \frac{H}{2}$ i prelaskom na cilindrične koordinate dobivamo

$$\begin{aligned} z_{T_1} &= \frac{\int \int \int_{\Omega_1} z \, dm}{m_1} = \frac{6}{\gamma R^2 H \pi} \gamma \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{H}{2} + \frac{H}{2R}\rho}^H z \rho \, dz \, d\rho \, d\varphi \\ &= \frac{6}{R^2 H \pi} 2\pi \int_0^R \rho \left(\frac{H^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{H}{2} + \frac{H}{2R}\rho \right)^2 \right) d\rho \\ &= \frac{12}{R^2 H} \int_0^R \left(\frac{3H^2}{8} \rho - \frac{H^2}{4R} \rho^2 - \frac{H^2}{8R^2} \rho^3 \right) d\rho = \frac{12}{R^2 H} \left(\frac{3H^2 R^2}{16} - \frac{H^2 R^2}{12} - \frac{H^2 R^2}{32} \right) \\ &= \frac{12}{R^2 H} \frac{7H^2 R^2}{96} = \frac{7H}{8}. \end{aligned}$$

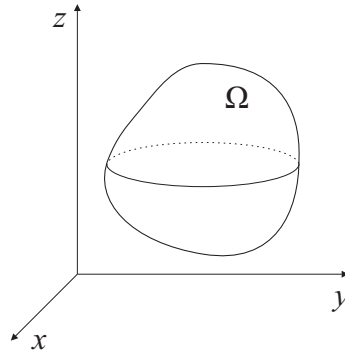
Sada je

$$z_{T_2} = \frac{\gamma R^2 H \pi \frac{H}{2} - \frac{1}{6} \gamma R^2 H \pi \frac{7H}{8}}{\frac{5}{6} \gamma R^2 H \pi} = \frac{\frac{H}{2} - \frac{7H}{48}}{\frac{5}{6}} = \frac{17}{40} H.$$

3.4.6 Momenti inercije tijela

Moment inercije tijela s obzirom na os p definira se kao integral doprinosa svih njegovih točaka:

$$I_p = \int \int \int_{\Omega} d^2 dm = \int \int \int_{\Omega} d((x, y, z), p)^2 \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$



Slika 3.37:

Posebno, za koordinatne osi imamo

$$I_z = \int \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2) dm,$$

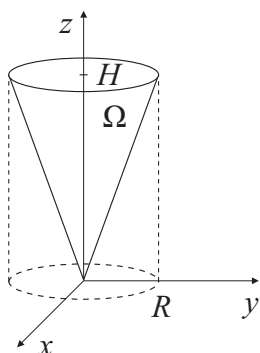
$$I_y = \int \int \int_{\Omega} (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{\Omega} (x^2 + z^2) dm,$$

$$I_x = \int \int \int_{\Omega} (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{\Omega} (y^2 + z^2) dm.$$

Primjer 3.19. Izračunajmo moment inercije homogenog stošca polumjera osnovice R i visine H oko njegove osi.

Budući da je $z = \frac{H}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$, prelaskom na cilindrične koordinate dobit ćemo

$$\begin{aligned} I_z &= \gamma \int \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = \gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{H}{R}\rho}^H dz \int_0^R \rho^2 \cdot \rho d\rho \\ &= \gamma \cdot 2\pi \int_0^R \int_{\frac{H}{R}\rho}^H dz \rho^3 d\rho = 2\pi\gamma \int_0^R \left(H - \frac{H}{R}\rho \right) \rho^3 d\rho \\ &= 2\pi\gamma \left(\frac{HR^4}{4} - \frac{H}{R} \frac{R^5}{5} \right) = \frac{HR^4\pi\gamma}{10} = \frac{R^2\pi H}{3} \gamma \cdot \frac{3R^2}{10} = \frac{3}{10} mR^2. \end{aligned}$$



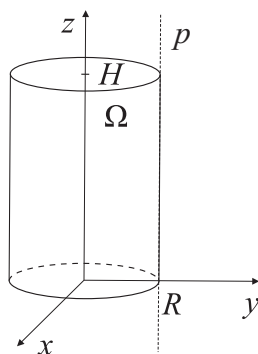
Slika 3.38:

Za tijela također vrijedi Steinerov teorem.

Teorem 3.6. *Neka je Ω tijelo mase m u prostoru, p os kroz njegovo težište i p' pravac paralelan s p na udaljenosti d od p . Tada za moment inercije tijela Ω s obzirom na p' vrijedi*

$$I_{p'}(\Omega) = I_p(\Omega) + d^2 m.$$

Primjer 3.20. *Izračunati moment inercije homogenog valjka polumjera osnovice R i visine H oko njegove osi i oko izvodnice.*



Slika 3.39:

Slično kao u prethodnom primjeru prelaskom na cilindrične koordinate

dobijemo

$$\begin{aligned} I_z &= \gamma \int \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = \gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz \int_0^R \rho^2 \cdot \rho d\rho \\ &= \gamma \cdot 2\pi H \int_0^R \rho^3 d\rho = 2\pi\gamma H \cdot \frac{R^4}{4} = R^2\pi H \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2}mR^2. \end{aligned}$$

Sada prema Steinerovom teoremu moment inercije s obzirom na izvodnicu p iznosi

$$I_p = I_z + d^2m = (d = R) = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 = 3I_z.$$

Poglavlje 4

Skalarna i vektorska polja

4.1 Skalarna polja

4.1.1 Motivacija i definicija

Funkcija koja svakoj točki prostora/ravnine (ili nekog područja u prostoru/ravnini) pridružuje neku vrijednost naziva se **polje**. Ako je ta vrijednost skalarna, imamo **skalarno polje**. Primjerice temperatura, tlak, koncentracija, osvijetljenost, gustoća...

$$u = f(M) = f(x, y, z), \quad \text{za } M = (x, y, z) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$$

Nivo-ploha skalarnog polja je skup točaka u prostoru za koje to polje poprima istu vrijednost, dakle ploha zadana jednadžbom

$$f(x, y, z) = C,$$

za određenu konstantu C . Nivo-ploha je poopćenje pojma nivo-krivulje.

Primjer 4.1. *Odredimo nivo-plohe polja $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:*

$$u = C \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = C \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = C^2.$$

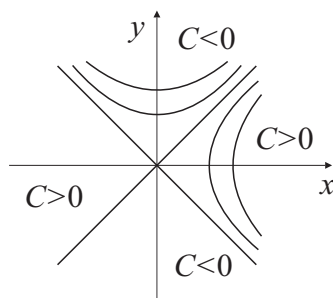
Vidimo da su nivo-plohe zadanog polja koncentrične sfere sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava.

Skalarno polje je **ravninsko**, ako je jednako u svim ravninama paralelnim s nekom fiksnom ravninom. Primjerice, ako je to (x, y) -ravnina, takvo ravninsko polje ne

ovisi o koordinati z , tj. $u = f(x, y)$. Ravninska polja su karakterizirana nivo-krivuljama.

Primjer 4.2. Odredimo nivo-krivulje skalarnog polja $u = x^2 - y^2$.

Iz jednadžbe $x^2 - y^2 = C$ dobivamo par pravaca $y = \pm x$ za $C = 0$ i dvije familije hiperbola za $C > 0$ i $C < 0$.



Slika 4.1: Nivo-krivulje

Nivo-plohe popunjavaju cijelo područje na kojem je zadano polje. Dvije nivo-plohe $f(M) = C_1$ i $f(M) = C_2$ nikad se ne sijeku za $C_1 \neq C_2$. Tamo gdje su nivo-plohe gušće, polje se brže mijenja.

4.1.2 Usmjereni derivacija

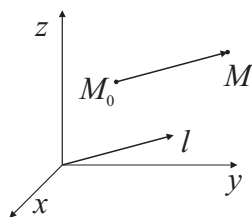
Promatrajmo skalarno polje $u = f(M)$. Fiksirajmo točku M_0 i vektor \vec{l} . Pomaknimo se iz M_0 za vektor \vec{l} i nazovimo točku u koju smo stigli M , dakle

$$\Delta l = |\overrightarrow{M_0 M}| = |\vec{l}|.$$

Zanima nas promjena polja u u točki M_0 u smjeru vektora \vec{l} . Uvedimo oznaku $\Delta u = f(M) - f(M_0)$ i promotrimo

$$\frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{f(M) - f(M_0)}{\Delta l}.$$

Taj kvocijent je srednja brzina promjene skalarnog polja u (po jedinici duljine) u smjeru vektora \vec{l} . Pustimo li da $\Delta l \rightarrow 0$ dok vektor $\overrightarrow{M_0 M}$ ostaje paralelan s \vec{l} , dobit ćemo pravu vrijednost brzine promjene skalarnog polja u u točki M_0 u smjeru vektora \vec{l} .



Slika 4.2:

Definicija 4.1. Derivacija skalarnog polja $u = f(M)$ u smjeru vektora \vec{l} (odnosno *usmjerena derivacija*) u točki M_0 je limes (ako postoji)

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{|\overrightarrow{M_0 M}|}$$

uz uvjet $\overrightarrow{M_0 M} \parallel \vec{l}$, te da su iste orijentacije.

Usmjerena derivacija je skalarna veličina, te ne ovisi o izboru koordinatnog sustava.

Kako se računa $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}$? Uzmimo jedinični vektor \vec{l}_0 u smjeru vektora \vec{l} , tj. $\vec{l}_0 = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$.

Vektor \vec{l}_0 je određen svojim kosinusima smjera $\vec{l}_0 = (\cos \alpha)\vec{i} + (\cos \beta)\vec{j} + (\cos \gamma)\vec{k}$, gdje su α , β i γ kutovi koje vektor \vec{l} zatvara s pozitivnim smjerovima osi x , y i z redom.

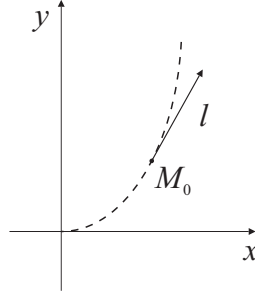
Iz Taylorovog teorema znamo

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\Delta z + \varepsilon \Delta l, \end{aligned}$$

pri čemu $\varepsilon \rightarrow 0$ kad $\Delta l \rightarrow 0$, $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \underbrace{\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta l}}_{\cos \alpha} + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \underbrace{\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta l}}_{\cos \beta} + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \underbrace{\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta l}}_{\cos \gamma} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \cos \gamma. \end{aligned}$$

Primjer 4.3. Izračunajmo usmjerenu derivaciju skalarnog polja $u = \operatorname{arctg} xy$ u točki $M_0 = (1, 1)$ u smjeru tangente na parabolu $y = x^2$ u toj točki (gdje je x varijabla).



Slika 4.3:

Prvo odredimo kosinuse smjera. Tangenta ima jednadžbu $y - 1 = 2(x - 1)$, tj. $y = 2x - 1$. Vektor smjera ima komponente $\vec{i} + 2\vec{j}$, jedinični vektor smjera je

$$\vec{l}_0 = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}}_{\cos \alpha} \vec{i} + \underbrace{\frac{2}{\sqrt{5}}}_{\cos \beta} \vec{j}.$$

Računamo parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = \frac{y}{1 + x^2 y^2} \Big|_{(1,1)} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = \frac{x}{1 + x^2 y^2} \Big|_{(1,1)} = \frac{1}{2},$$

te na kraju:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

Primjer 4.4. Izračunajmo derivaciju polja $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ u točki $(0, 0, 1)$ u smjeru vektora $(1, 1, 0)$.

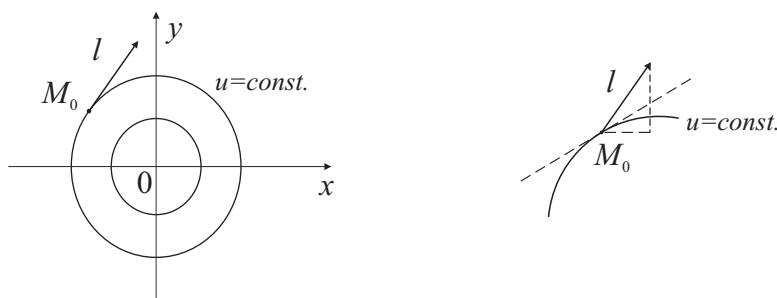
$$\vec{l} = \vec{i} + \vec{j}, \quad |\vec{l}| = \sqrt{2}, \quad \vec{l}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(0, 0, 1) &= \underbrace{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{(0,0,1)}}_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \underbrace{\frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{(0,0,1)}}_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &+ \underbrace{\frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{(0,0,1)}}_1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Postoji intuitivno objašnjenje zašto smo u ovom slučaju dobili nula. Smjer \vec{l} leži u tangencijalnoj ravnini na nivo-plohu polja u u točki M_0 . Nema promjene polja na nivo-plohi!

Slično, derivacija u smjeru tangente na nivo-krivulju ravninskog skalarnog polja je 0, u tom smjeru nema promjene polja.

U kojem smjeru je usmjerena derivacija u danoj točki najveća?



Slika 4.4:

Izraz $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$ ima strukturu skalarnog produkta.

Za fiksnu točku M_0 variramo smjer \vec{l} . Veličina $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ će biti najveća kad je \vec{l} paralelan s vektorom čije su komponente parcijalne derivacije polja u u točki M_0 .

4.1.3 Gradijent skalarnog polja

Definicija 4.2. *Gradijent* skalarnog polja $u = f(M)$ u točki M_0 je vektor

$$\text{grad } u = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} \vec{i} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} \vec{j} + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} \vec{k}.$$

Gradijent ovisi i o f i o M_0 . Uz ovu oznaku imamo

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = (\text{grad } u) \cdot \vec{l}_0.$$

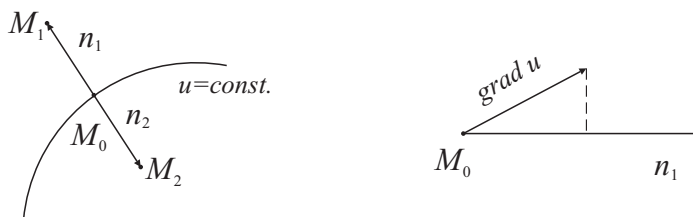
Dakle, derivacija skalarnog polja u u točki M_0 u smjeru vektora \vec{l} je skalarni produkt gradijenta tog polja u M_0 i jediničnog vektora smjera \vec{l}_0 .

Teorem 4.1. *Gradijent skalarnog polja u u točki M_0 je okomit na nivo-plohu tog polja u M_0 (ili na nivo-krivulju ako je polje ravninsko).*

Dokaz. Kroz točku M_0 prolazi točno jedna nivo-ploha $u = C$. Za svaki smjer \vec{l} iz tangencijalne ravnine na plohu $u = C$ u M_0 imamo $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = 0$ (jer nema promjene polja u smjeru nivo-plohe). No zbog $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = (\text{grad } u) \cdot \vec{l}$ slijedi da je $(\text{grad } u) \cdot \vec{l} = 0$ za sve \vec{l} iz te tangencijalne ravnine, pa je $\text{grad } u$ okomit na tu ravninu. To po definiciji znači i da je okomit na nivo-plohu. \square

Teorem 4.2. *Gradijent pokazuje u smjeru porasta polja.*

Dokaz. Znamo iz dokaza teorema 4.1 da gradijent pokazuje u smjeru normale. U točki M_0 imamo dvije jedinične normale na krivulju $u = \text{const}$, označimo ih s \vec{n}_1 i \vec{n}_2 . U smjeru jedne od njih funkcija raste, u smjeru druge pada. Neka raste u smjeru \vec{n}_1 .



Slika 4.5:

Izračunajmo $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_1}$ u točki M_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_1} = \lim_{\substack{\Delta l \rightarrow 0 \\ \vec{l} \parallel \vec{M}_0 \vec{M}_1}} \frac{f(M) - f(M_0)}{\Delta l} \geq 0,$$

jer je brojnik pozitivan.

Sada iz $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_1} \right|_{M_0} = \text{grad } u(M_0) \cdot \vec{n}_1 \geq 0$ slijedi da je projekcija od $\text{grad } u(M_0)$ na \vec{n}_1 nenegativna, pa zaključujemo da $\text{grad } u$ pokazuje na istu stranu kao i normala u smjeru koje funkcija raste. \square

Teorem 4.3. *Duljina gradijenta skalarnog polja u točki jednaka je najvećoj usmjerenomj derivaciji skalarnog polja u toj točki, tj.*

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} = \max_{\vec{i}} \frac{\partial u}{\partial \vec{l}}.$$

Dokaz. Vrijedi $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = (\text{grad } u) \cdot \vec{l}_0 = |\text{grad } u| \cdot 1 \cdot \cos \varphi$, gdje je φ kut između $\text{grad } u$ i \vec{l} . Taj se produkt očito maksimizira kad je $\cos \varphi = 1$, tj. $\varphi = 0$, dakle kada su \vec{l} i $\text{grad } u$ paralelni. \square

Iz teorema 4.2 i 4.3 zaključujemo da gradijent skalarnog polja u nekoj točki pokazuje smjer najbržeg porasta polja u toj točki.

Primjer 4.5. U kojem smjeru skalarno polje $u(x, y, z) = xy + yz + zx$ najbrže raste iz točke $M_0 = (1, 1, 1)$?

Imamo $\text{grad } u = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (y+x)\vec{k}$, pa je $\text{grad } u(M_0) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Stoga je smjer najbržeg porasta $2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, a iznos je

$$\max_{\vec{l}} \frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(1, 1, 1) = |\text{grad } u(1, 1, 1)| = 2\sqrt{3}.$$

Gradijent skalarnog polja možemo definirati i bez pozivanja na koordinatni sustav kao vektor u smjeru normale na nivo-plohu polja orijentiran u smjeru porasta polja. To je *invarijantna definicija* – ne ovisi o koordinatnom sustavu.

Teorem 4.4 (Svojstva gradijenta). Vrijedi:

- (a) $\text{grad}(C \cdot u) = C \text{ grad } u$ za $C \in \mathbb{R}$,
- (b) $\text{grad}(u + v) = \text{grad } u + \text{grad } v$,
- (c) $\text{grad}(u \cdot v) = u \cdot \text{grad } v + v \cdot \text{grad } u$,
- (d) $\text{grad} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{u \cdot \text{grad } v - v \cdot \text{grad } u}{v^2}$, za $v \neq 0$,
- (e) $\text{grad } F(u) = F'(u) \text{ grad } u$, gdje je F funkcija jedne varijable.

Svojstva (a) i (b) zajedno zovemo linearnost gradijenta.

Dokaz. Svojstva (a)-(d) slijede izravno iz svojstava parcijalnih derivacija.

Dokažimo preostalo svojstvo (e):

$$\begin{aligned} \text{grad } F(u) &= \frac{\partial F(u)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F(u)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F(u)}{\partial z} \vec{k} \\ &= F'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + F'(u) \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + F'(u) \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \\ &= F'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right) = F'(u) \text{ grad } u. \end{aligned}$$

\square

Primjer 4.6. Iz $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ slijedi

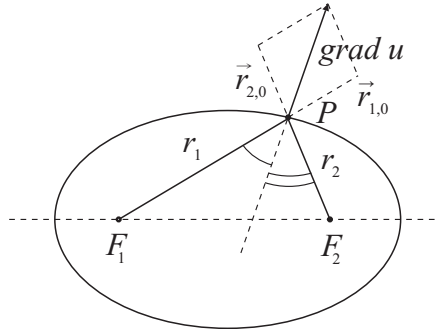
$$\begin{aligned} \text{grad } r &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{1}{|\vec{r}|} \cdot \vec{r} = \vec{r}_0. \end{aligned}$$

Primjer 4.7. Odredimo derivaciju skalarnog polja $u = \sin |\vec{r}|$ u smjeru radij-vektora \vec{r} :

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{r}} = (\text{grad } u) \cdot \vec{r}_0 = (\text{grad}(\sin r)) \cdot \vec{r}_0 = (\cos r \cdot \vec{r}_0) \cdot \vec{r}_0 = \cos r.$$

Primjer 4.8. Neka su u ravnini dane dvije točke, F_1 i F_2 . Promatrajmo skalarno polje $u = r_1 + r_2$, gdje su r_1 i r_2 udaljenosti varijabilne točke P od F_1 i F_2 , redom. Što su nivo-krivulje polja u ?

Sjetimo se da je $r_1 + r_2 = C = 2a$ jednadžba elipse sa žarištima F_1 i F_2 . Iz teorema 4.4(b) i primjera 4.6, zaključujemo $\text{grad}(r_1 + r_2) = \vec{r}_{1,0} + \vec{r}_{2,0}$.



Slika 4.6:

Prema teoremu 4.1, taj je vektor okomit na elipsu u točki P , te raspolavlja kut između vektora \vec{r}_1 i \vec{r}_2 . Budući da za refleksiju valova znamo da upadni kut mora biti jednak kutu odraza, to znači da će zraka svjetlosti s izvorom u F_1 proći kroz F_2 nakon odraza na elipsi.

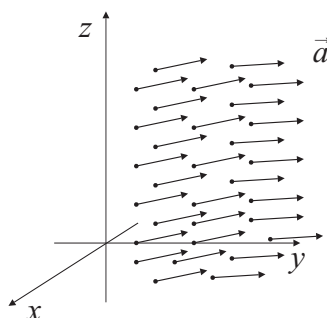
4.2 Vektorska polja

4.2.1 Definicija

Ako u svakoj točki $M = (x, y, z) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ imamo definiranu vektorsku veličinu $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, onda je time zadano **vektorsko polje** na Ω . Primjeri vektorskih polja su polje sila, polje brzina, polje fluida...

Vektorsko polje je zadano trima skalarnim funkcijama, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z)$. Vektorsko polje je klase $C^k(\Omega)$ ako su P , Q i R klase $C^k(\Omega)$.

Vektorsko polje vizualiziramo srelicama:



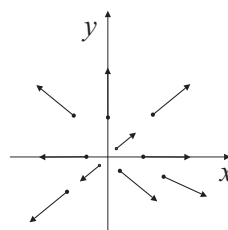
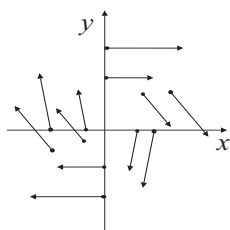
Slika 4.7: Vizualizacija vektorskog polja

Vektorsko polje je **ravninsko** ako je jednako u svim ravninama paralelnima nekoj zadanoj ravnini i ako su svi vektori tog polja paralelni nekoj ravnini.

Primjer 4.9. *Skicirajmo sljedeća vektorska polja:*

$$\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j}$$

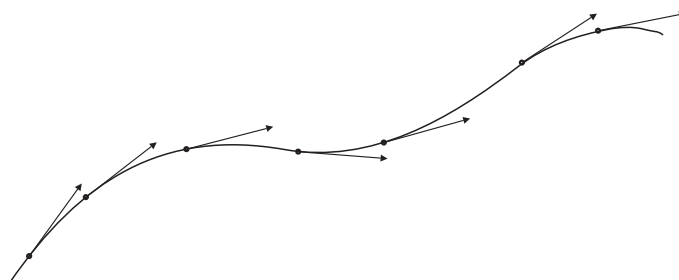
$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$$



Slika 4.8: Primjeri vektorskih polja

4.2.2 Vektorske krivulje

Vektorska krivulja (vektorska linija) vektorskog polja \vec{a} je krivulja kojoj u svakoj točki tangenta ima smjer vektorskog polja \vec{a} u toj točki.

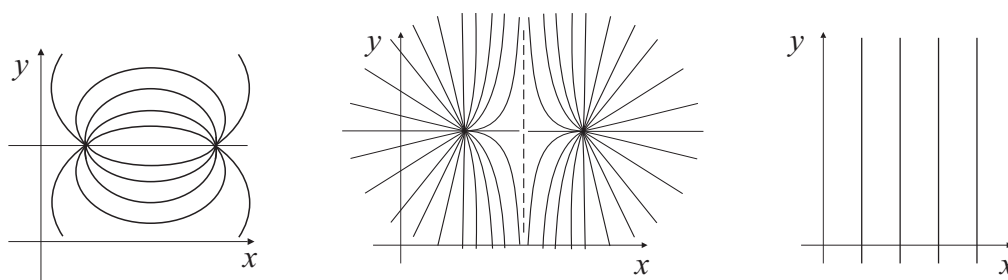


Slika 4.9: Vektorska krivulja

Ako je \vec{a} polje sila, vektorske krivulje se zovu **silnice**.

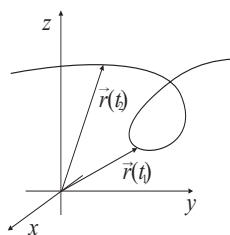
Ako je \vec{a} polje brzina, njegove vektorske krivulje se zovu **strujnice**.

Primjer 4.10.



Slika 4.10: Vektorske krivulje nekih vektorskih polja

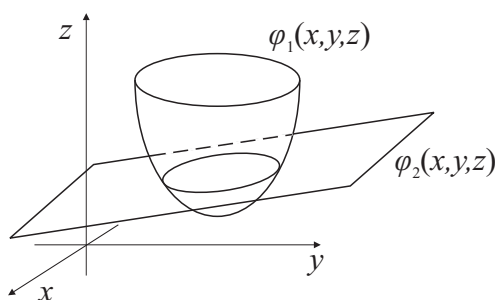
Napomena 4.1. *Kako opisujemo/zadajemo krivulje u prostoru? Jedan način je parametarski, tako da se zadaju funkcije $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ koje opisuju koordinate vrha radij-vektora točke na krivulji: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. O parametru t možemo razmišljati kao o vremenu.*



Slika 4.11: Krivulja zadana parametrom

Drugi način je zadavanje krivulje kao presjeka dviju ploha:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= C_1 \\ \varphi_2(x, y, z) &= C_2. \end{aligned} \right\}$$



Slika 4.12: Krivulja zadana presjekom dvije plohe

Tangenta na krivulju $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ dana je $s \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$. Sada se činjenica da je $\vec{r}(t)$ vektorska krivulja polja \vec{a} iskazuje preko paralelnosti \vec{a} i tangente na $\vec{r}(t)$:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

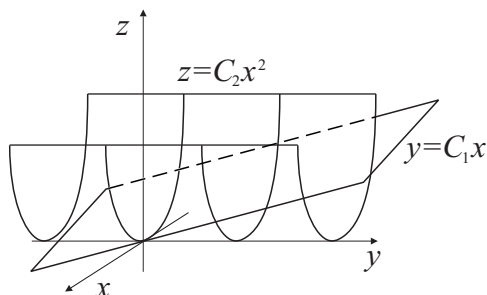
Dva nezavisna rješenja ovog sustava u presjeku nam daju traženu krivulju.

Primjer 4.11. Nađimo vektorske krivulje polja $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Iz jednadžbi $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z}$ dobivamo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{dy}{y} \\ \frac{dx}{x} &= \frac{dz}{2z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y &= C_1 x \\ z &= C_2 x^2 \end{aligned} \right\}$$

Dakle, vektorske krivulje su presjeci ravnina $y = C_1x$ i paraboličkih cilindara $z = C_2x^2$.



Slika 4.13:

4.2.3 Potencijalno polje

Vidjeli smo da je gradijent skalarnog polja vektorsko polje. No, ne može se svako vektorsko polje dobiti kao gradijent nekog skalarnog polja.

Definicija 4.3. Vektorsko polje \vec{a} je **potencijalno** ako postoji glatko (derivabilno) skalarno polje u takvo da je $\text{grad } u = \vec{a}$. Skalarno polje u se zove **potencijal** vektorskog polja \vec{a} . Nivo-plohe potencijala zovu se **ekvipotencijalne plohe**.

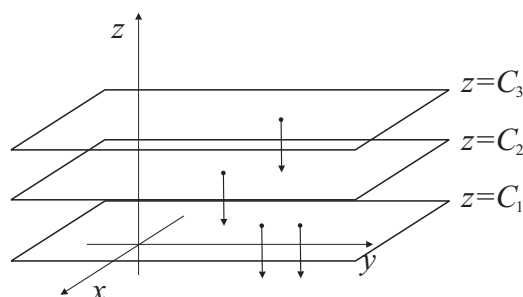
Uvjet potencijalnosti $\vec{a} = \text{grad } u$ ekvivalentan je uvjetima

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z).$$

Napomena 4.2. Često se u literaturi iz tehničkih razloga potencijal vektorskog polja \vec{a} definira uvjetom $\vec{a} = -\text{grad } u$. To je stvar dogovora.

Primjer 4.12. Odredimo ekvipotencijalne plohe potencijala vektorskog polja $\vec{a} = -\vec{k}$.

Iz $\vec{a} = \text{grad } u$ imamo $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 1$, a odavde slijedi $u = -z + C$. Vidimo da je potencijal određen do na konstantu. Iz $u = \text{const}$ dobijemo $z + C = C'$, odnosno $z = \text{const}$ kao jednadžbu ekvipotencijalne plohe. Primijetimo da je gradijent okomit na ekvipotencijalne plohe.



Slika 4.14:

Primjer 4.13. Da li je vektorsko polje $\vec{a} = r\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ potencijalno?

Iz uvjeta $\frac{\partial u}{\partial x} = x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = y$, $\frac{\partial u}{\partial z} = z$ dobivamo

$$u = \frac{x^2}{2} + C_1 + \frac{y^2}{2} + C_2 + \frac{z^2}{2} + C_3 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + C = \frac{r^2}{2} + C.$$

Dakle, potencijal od \vec{r} jednak je $\frac{r^2}{2} + C$, tj. vrijedi $\vec{r} = \text{grad } \frac{r^2}{2}$.

Primjer 4.14. Pokažimo da je svako vektorsko polje oblika $\vec{a} = f(r)\vec{r}$ potencijalno.

Pretpostavimo da je $f(r)\vec{r} = \text{grad } \varphi(r)$ za neku funkciju $\varphi(r)$, te pronađimo takvu. Vrijedi $\text{grad } \varphi(r) = \varphi'(r) \text{grad } r = \varphi'(r)\vec{r}_0$, pa je $\varphi'(r)\vec{r}_0 = f(r)r\vec{r}_0$. Odatle vidimo da mora biti $\varphi'(r) = f(r)r$, pa je $\varphi(r) = \int f(r)r dr$ potencijal polja $f(r)\vec{r}$.

Napomena 4.3. Gradijent možemo opisati simbolički kao djelovanje vektorskog diferencijalnog operatora ∇ na skalarno polje u :

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} = \text{Hamiltonov operator nabla},$$

$$\nabla u = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \vec{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial u}{\partial z} = \text{grad } u.$$

Operator ∇ je simbolički vektor s kojim možemo ulaziti u skalarni i vektorski produkt. To nam daje dvije nove operacije nad vektorskim poljima.

Često se susrećemo sa sljedećim problemima:

- (1) Je li zadano vektorsko polje potencijalno?
- (2) Ako jest, što mu je potencijal?

U nastavku ovog poglavlja ćemo dati neke odgovore na gornja pitanja.

4.2.4 Divergencija vektorskog polja

Definicija 4.4. Neka je $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ glatko vektorsko polje na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Njegova **divergencija** je skalarno polje $\operatorname{div} \vec{a}$ definirano kao

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Divergencija vektorskog polja je skalarno polje. Do sada smo upoznali dva diferencijalna operatora:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} & : \text{skalarno polje} \mapsto \text{vektorsko polje} \\ \operatorname{div} & : \text{vektorsko polje} \mapsto \text{skalarno polje.} \end{aligned}$$

Divergenciju također možemo simbolički pisati kao

$$\operatorname{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}, \text{ jer } \operatorname{div} \vec{a} = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}).$$

Primjer 4.15. Izračunajmo divergenciju polja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$:

$$\operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Primjer 4.16. Izračunajmo divergenciju polja $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j}$:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}y + \frac{\partial}{\partial y}(-x) = 0.$$

Teorem 4.5 (Svojstva divergencije). Vrijedi:

- (a) $\operatorname{div} \vec{c} = 0$, za konstantno vektorsko polje \vec{c} ,
- (b) $\operatorname{div}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha \operatorname{div} \vec{a} + \beta \operatorname{div} \vec{b}$, za konstante α i β (linearnost),
- (c) $\operatorname{div}(u\vec{a}) = u \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} u$, za skalarno polje u .

Dokaz. Direktno iz svojstava parcijalnih derivacija. □

Primjer 4.17. Odredimo divergenciju polja $\vec{a} = \varphi(r)\vec{r}_0 = \varphi(r)\frac{\vec{r}}{r}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a} &= \frac{\varphi(r)}{r} \operatorname{div} \vec{r} + \vec{r} \cdot \operatorname{grad} \frac{\varphi(r)}{r} = 3 \frac{\varphi(r)}{r} + \frac{\varphi'(r)r - \varphi(r)}{r^2} \underbrace{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}}_r \\ &= \frac{3\varphi(r)}{r} + \varphi'(r) - \frac{\varphi(r)}{r} = 2 \frac{\varphi(r)}{r} + \varphi'(r). \end{aligned}$$

4.2.5 Rotacija vektorskog polja

Definicija 4.5. Neka je $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ vektorsko polje klase $C^1(\Omega)$.

Rotacija polja \vec{a} je vektorsko polje $\text{rot } \vec{a}$ definirano formulom

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{a}, \quad \text{tj.}$$

$$\text{rot } \vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Istaknimo poseban slučaj kada je \vec{a} dvodimenzionalno vektorsko polje; u tom slučaju je $\text{rot } \vec{a} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$.

Primjer 4.18. Izračunajmo rotaciju vektorskog polja \vec{r} :

$$\text{rot } \vec{r} = \text{rot}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

Primjer 4.19. Izračunajmo rotaciju vektorskog polja $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j}$:

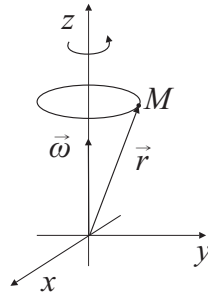
$$\text{rot}(y\vec{i} - x\vec{j}) = (-1 - 1)\vec{k} = -2\vec{k}.$$

Definicija 4.6. Ako u nekom području Ω vrijedi $\text{rot } \vec{a} = \vec{0}$, onda kažemo da je polje \vec{a} tamo **bezvrtložno**.

Definicija 4.7. Vektorsko polje \vec{a} je **solenoidalno** ako postoji (dovoljno glatko) vektorsko polje \vec{b} takvo da je $\vec{a} = \text{rot } \vec{b}$.

Otkud nativ rotacija? Ako se točka M rotira oko osi z , vektor njene kutne brzine je $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$. Linearna brzina \vec{v} je $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j}$. Izračunajmo $\text{rot } \vec{v}$:

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\vec{k} = 2\vec{\omega}.$$



Slika 4.15:

Teorem 4.6 (Svojstva rotacije). *Vrijedi:*

- (a) $\text{rot } \vec{c} = 0$, za konstantno vektorsko polje \vec{c} ,
- (b) $\text{rot}(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \alpha \text{rot } \vec{a} + \beta \text{rot } \vec{b}$, za konstante α i β (linearnost),
- (c) $\text{rot}(u\vec{a}) = u \text{rot } \vec{a} + (\text{grad } u) \times \vec{a}$, za skalarno polje u .

Dokaz. Direktno iz svojstava parcijalnih derivacija. □

4.2.6 Teorem o rastavu vektorskog polja

Teorem 4.7. *Svako vektorsko polje klase $C^2(\Omega)$ može se rastaviti na zbroj potencijalnog i solenoidalnog vektorskog polja.*

Teorem 4.8. *Vektorsko polje \vec{a} klase $C^2(\Omega)$ je potencijalno ako i samo ako je bezvrtložno.*

Dokaz. Dokazujemo samo jedan smjer. Neka je $\vec{a} = \text{grad } u$. Tada koristeći Schwarzov teorem vidimo:

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

□

Teorem 4.9. *Vektorsko polje \vec{a} klase $C^2(\Omega)$ je solenoidalno ako i samo ako je $\text{div } \vec{a} = 0$.*

Dokaz. Ponovo dokazujemo samo jedan smjer. Neka je polje \vec{a} solenoidalno, tj. $\vec{a} = \text{rot } \vec{b}$. Tada je $\text{div } \vec{a} = \text{div}(\text{rot } \vec{b}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0$, gdje u zadnjoj jednakosti opet koristimo Schwarzov teorem. \square

Solenoidalna polja vizualno predočavamo kao polja koja nemaju izvora ni ponora.

4.2.7 Diferencijalni operatori 2. reda. Laplacijan.

Diferencijalne operatore grad, div i rot možemo u određenim poretcima komponirati, ako su polja dovoljno glatka:

	$u(x, y, z)$	$\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$	$\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$
	grad	div	rot
grad	////	grad div \vec{a}	////
div	div grad $u = \Delta u$	////	div rot $\vec{a} = 0$
rot	rot grad $u = 0$	////	rot rot \vec{a}

Definicija 4.8. Neka je u skalarno polje klase $C^2(\Omega)$. **Laplacijan** od u je skalarno polje definirano formulom

$$\Delta u = \text{div grad } u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Fizikalna interpretacija Δu je odstupanje od srednje vrijednosti.

Definicija 4.9. Funkcija $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je **harmonička** na Ω , ako je $\Delta f = 0$ na Ω .

Harmoničke funkcije su značajne u matematičkoj fizici, termodinamici, mehanici kontinuuma, itd.

Napomena 4.4. Laplacijan povezuje preostala dva diferencijalna operatora 2. reda iz gornje tablice. Vrijedi formula:

$$\Delta \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \text{rot rot } \vec{a}.$$

Primjer 4.20. *Izračunajmo Laplacijan skalarnog polja r :*

$$\begin{aligned}\Delta r &= \operatorname{div} \operatorname{grad} r = \operatorname{div} \vec{r}_0 = \operatorname{div} \frac{1}{r} \vec{r} = \frac{1}{r} \operatorname{div} \vec{r} + \vec{r} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \\ &= \frac{3}{r} + \left(-\frac{1}{r^2}\right) \underbrace{\operatorname{grad} r \cdot \vec{r}}_{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}.\end{aligned}$$

Primjer 4.21. *Izračunajmo Laplacijan skalarnog polja $\frac{1}{r}$:*

$$\begin{aligned}\Delta \left(\frac{1}{r}\right) &= \operatorname{div} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r}\right) = \operatorname{div} \left(-\frac{1}{r^2} \vec{r}_0\right) = \operatorname{div} \left(-\frac{1}{r^3} \vec{r}\right) \\ &= -\frac{1}{r^3} \operatorname{div} \vec{r} + \vec{r} \cdot \operatorname{grad} \left(-\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^4} \vec{r}_0 \cdot \vec{r} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dakle, funkcija $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ je harmonička na $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

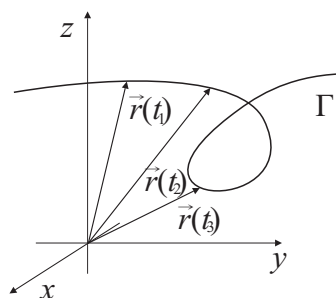
Poglavlje 5

Krivuljni i plošni integrali

5.1 Zadavanje krivulje u ravnini i prostoru

Najčešći način zadavanja krivulje je parametarski. To znači da se koordinate točaka na krivulji zadaju kao funkcije neke veličine na nekom intervalu. Tu veličinu nazivamo **parametrom**. Korisno je o parametru razmišljati kao o vremenu, a o funkcijama koje opisuju koordinate točke na krivulji kao o koordinatama vrha radij-vektora koji se miče i opisuje krivulju. Taj radij-vektor možemo zapisati kao

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b].$$



Slika 5.1: Krivulja zadana parametrom

Vektorska funkcija $\vec{r} : [a, b] \rightarrow X_0(E) = \mathbb{R}^3$ je, u stvari, uređena trojka funkcija $(x(t), y(t), z(t))$, pri čemu je $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Uređeni par $([a, b], \vec{r})$ nazivamo **parametrizacijom krivulje** Γ .

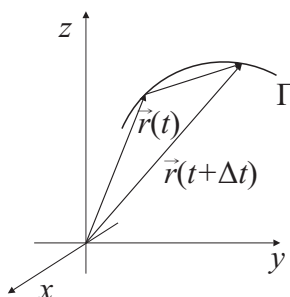
Vektorska funkcija \vec{r} je neprekidna ako i samo ako su neprekidne sve tri njene komponente. Slično, vektorska funkcija je diferencijabilna (derivabilna) (u nekoj točki ili na nekom intervalu) ako i samo ako su (u toj točki ili na tom intervalu) derivabilne njene komponente. Vrijedi

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Iz definicije derivacije znamo da je

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

pa slijedi da je $\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ vektorska veličina i da smjer $\frac{d\vec{r}}{dt}$ određuje smjer tangente na krivulju Γ u točki $\vec{r}(t)$.



Slika 5.2:

Želimo li izbjeći neke "patološke" slučajeve (kao što su neprekidna krivulja koja nigdje nema tangentu ili krivulja koja popunjava cijelu ravninu ili prostor) moramo nametnuti još i dodatna ograničenja na parametrizaciju $([a, b], \vec{r})$.

Za krivulju Γ kažemo da je **jednostavna glatka krivulja** ili **Jordanov luk** ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

(J1) Funkcija $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ je injekcija na $[a, b]$;

(J2) Funkcija \vec{r} je klase $C^1[a, b]$;

(J3) $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ na $[a, b]$.

Krivulja Γ je zatvorena jednostavna glatka krivulja ili zatvoreni Jordanov luk ako vrijede uvjeti (J2) i (J3), a uvjet (J1) zamijenimo s

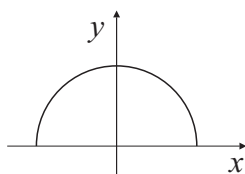
(J1') Funkcija $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ je injekcija na $[a, b]$ osim za a i b gdje imamo $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

Gornji uvjeti su nam važni, jer eliminiraju samopresjeke, lomove i šiljke kod krivulja.

Sve "razumne" (tj. fizikalno zanimljive) krivulje mogu se složiti iz konačnog broja Jordanovih lukova i zatvorenih Jordanovih lukova.

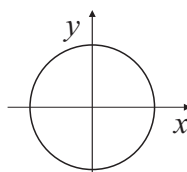
Za krivulju u ravnini dovoljne su dvije parametarske funkcije, $x(t)$ i $y(t)$. Neke krivulje u ravnini mogu se zadati i kao grafovi glatkih funkcija u Kartezijevom ili polarnom sustavu, ali parametarski način je općenitiji ($x(t) = t$, $y(t) = f(t)$).

Primjer 5.1. $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \in [0, \pi]$:



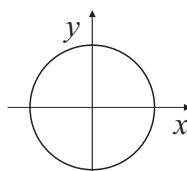
Slika 5.3:

Primjer 5.2. $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$:



Slika 5.4:

Primjer 5.3. $x(t) = \cos(2t)$, $y(t) = \sin(2t)$, $t \in [0, \pi]$:

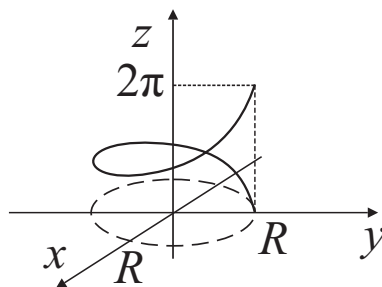


Slika 5.5:

Iz gornjih primjera vidimo da parametrizacija krivulje **nije jedinstvena**.

Primjer 5.4. Dana je parametrizacija $\vec{r}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, krivulje Γ s

$$x(t) = R \cos t, \quad y(t) = R \sin t, \quad z(t) = Ct.$$



Slika 5.6: Krivulja Γ – jedan zavoje helikoide

Sad nas zanima jednadžba tangente na Γ u točki $\vec{r}(\frac{\pi}{2})$. Tangenta prolazi kroz točku

$$(x(\frac{\pi}{2}), y(\frac{\pi}{2}), z(\frac{\pi}{2})) = (0, R, \frac{C\pi}{2})$$

i ima vektor smjera

$$\vec{r}'(\frac{\pi}{2}) = x'(\frac{\pi}{2})\vec{i} + y'(\frac{\pi}{2})\vec{j} + z'(\frac{\pi}{2})\vec{k} = -R\vec{i} + C\vec{k}.$$

Iz toga slijedi da jednadžba tangente u točki $\vec{r}(\frac{\pi}{2})$ u kanonskom obliku glasi

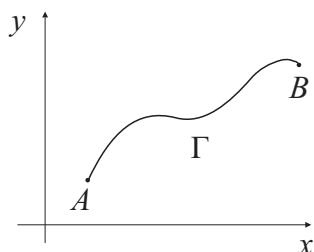
$$t \equiv \frac{x}{-R} = \frac{y - R}{0} = \frac{z - \frac{C\pi}{2}}{C}.$$

5.2 Krivuljni integral 1. vrste

5.2.1 Motivacija i definicija

Promatramo (otvorenu) krivulju Γ u ravnini s krajnjim točkama A i B . Oznaka: $\gamma = \widehat{AB}$. Neka je Γ zadana parametarskim jednadžbama

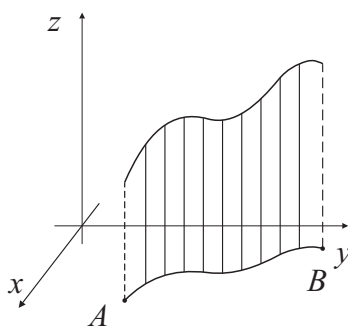
$$\left. \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array} \right\} t_0 \leq t \leq t_1.$$



Slika 5.7:

(To znači da je parametrizacija od Γ $\vec{r}(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j}$.)

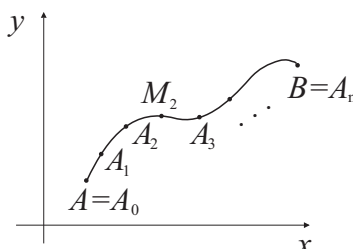
Neka su φ, ψ glatke na $[t_0, t_1]$. Želimo naći površinu cilindričke plohe koju čine izvodnice okomite nad γ čija je visina nad nekom točkom $M \in \Gamma$ dana funkcijom $f(M) = f(x, y)$.



Slika 5.8:

Kad bi f bila konstanta na Γ , onda bi ta površina bila jednaka duljini krivulje γ pomnoženoj visinom. No što ako f nije konstanta?

Podijelimo krivulju Γ točkama $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = B$ na n lukova $\widehat{A_k A_{k+1}}$. U svakom od njih odaberemo točku $M_k \in \widehat{A_k A_{k+1}}$.



Slika 5.9:

Pretpostavimo li da se f ne mijenja jako na $\widehat{A_k A_{k+1}}$, veličina $f(M_k)\Delta l_k$ će dobro aproksimirati doprinos komada iznad $\widehat{A_k A_{k+1}}$ ukupnom rezultatu. Ovdje je Δl_k duljina luka $\widehat{A_k A_{k+1}}$. Zbrajanjem svih takvih doprinosa dobivamo

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\Delta l_k.$$

To je **integralna suma** od $f(M)$ po krivulji Γ . Uzmimo sve finiju i finiju podjelu od Γ i promatramo ponašanje od σ kad $\Delta l = \max \Delta l_k \rightarrow 0$. Ako taj limes postoji, zovemo ga **krivuljnim integralom 1. vrste** od f po Γ i označavamo s

$$\int_{\Gamma} f(M) dl = \int_{\widehat{AB}} f(x, y) dl.$$

Veličina dl zove se **diferencijal luka**.

Teorem 5.1. *Ako je funkcija $f(M)$ neprekidna na glatkoj krivulji Γ onda njen krivuljni integral prve vrste po Γ postoji.*

5.2.2 Svojstva krivuljnog integrala 1. vrste

(1) Integral ne ovisi o smjeru kretanja po krivulji, tj.

$$\int_{\widehat{AB}} f dl = \int_{\widehat{BA}} f dl.$$

(2) Linearnost:

Ako postoje krivuljni integrali 1. vrste funkcija f i g po Γ , onda postoji i $\int_{\Gamma}(\alpha f + \beta g) dl$ za bilo koje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i vrijedi

$$\int_{\Gamma}(\alpha f + \beta g) dl = \alpha \int_{\Gamma} f dl + \beta \int_{\Gamma} g dl.$$

(3) Aditivnost po području integracije:

Ako je C točka na Γ između A i B , vrijedi

$$\int_{\widehat{AB}} f dl = \int_{\widehat{AC}} f dl + \int_{\widehat{CB}} f dl.$$

(4) Monotonost:

Ako je $f \geq 0$ na Γ , onda je i $\int_{\Gamma} f dl \geq 0$.

(5) Ako je f integrabilna po Γ , onda je i $|f|$ integrabilna na Γ i vrijedi

$$\left| \int_{\Gamma} f dl \right| \leq \int_{\Gamma} |f| dl.$$

(6) Teorem srednje vrijednosti:

Ako je funkcija f neprekidna na Γ , onda postoji barem jedna točka $M_m \in \Gamma$ takva da je

$$\int_{\Gamma} f(M) dl = f(M_m)L,$$

gdje je L duljina krivulje Γ .

Sva gornja svojstva vrijede za krivulje Γ i u ravnini i u prostoru.

Jedna od posljedica je i sljedeći rezultat:

Duljina krivulje Γ računa se kao

$$L = \int_{\Gamma} dl.$$

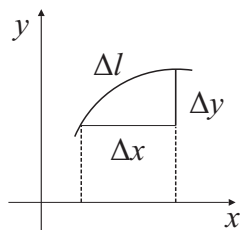
To je ujedno i definicija duljine krivulje.

Zanimljivo je napomenuti da neke "nestandardne" krivulje, kao na primjer Kochova krivulja, uopće ne moraju imati duljinu.

5.2.3 Računanje krivuljnih integrala 1. vrste

Neka je glatka krivulja Γ zadana parametrizacijom $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ na segmentu $[t_0, t_1]$. Funkcije φ i ψ su klase $C^1([t_0, t_1])$ i vrijedi $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 > 0$. (Svojstvo (J3)).

Za izračunati integral $\int_{\Gamma} f(M) dl$ potreban nam je diferencijal luka, dl .



Slika 5.10: Diferencijal luka

Sa slike vidimo da je

$$(\Delta l)^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Zbog $\Delta x = \varphi'(t)\Delta t$ i $\Delta y = \psi'(t)\Delta t$ sad dobivamo da je

$$(\Delta l)^2 \approx (\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2)(\Delta t)^2.$$

Ako sad pustimo limes kad $\Delta t \rightarrow 0$ dobijemo

$$dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Dakle,

$$\int_{\widehat{AB}} f(M) dl = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Ako je Γ zadana kao $y = g(x)$ na $x \in [a, b]$, gornja se formula svodi na

$$\int_{\Gamma} f(M) dl = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx.$$

Parametarski oblik se izravno poopćava i na krivulju Γ u prostoru. Ako je $\Gamma = \widehat{AB}$ zadana parametarski kao $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \omega(t)$ na $[t_0, t_1]$, vrijedi

$$\int_{\Gamma} f(M) dl = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\omega'(t))^2} dt.$$

Za slučaj krivulje Γ u ravnini zadane u polarnim koordinatama jednadžbom $\rho = \rho(\varphi)$, vrijedi

$$\int_{\Gamma} f(M) dl = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(\rho(\varphi)) \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi.$$

5.2.4 Primjene krivuljnog integrala 1. vrste

Duljina i masa krivulje

Duljina i masa krivulje u \mathbb{R}^3 dane su formulama

$$L = \int_{\Gamma} dl = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\omega'(t))^2} dt,$$

$$m = \int_{\Gamma} dm = \int_{t_0}^{t_1} \gamma(x, y, z) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

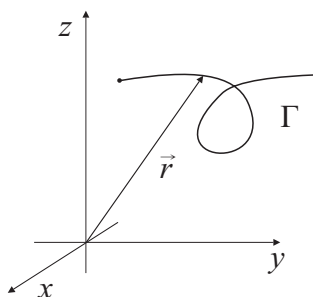
Izbacivanjem z -koordinata dobijemo formule za duljinu i masu krivulje u \mathbb{R}^2 .

Težište (središte mase)

Koordinate težišta krivulje dobijemo na sličan način kao koordinate težišta nekog tijela mase:

$$\left. \begin{aligned} x_T &= \frac{\int_{\Gamma} x dm}{m} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} x(t) \gamma(x, y, z) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt}{m} & / \cdot \vec{i} \\ y_T &= \frac{\int_{\Gamma} y dm}{m} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} y(t) \gamma(x, y, z) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt}{m} & / \cdot \vec{j} \\ z_T &= \frac{\int_{\Gamma} z dm}{m} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} z(t) \gamma(x, y, z) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt}{m} & / \cdot \vec{k} \end{aligned} \right\} +$$

$$\vec{r}_T = \frac{\int_{\Gamma} \vec{r} dm}{m} = \frac{\int_{\Gamma} \vec{r}(t) \gamma(x, y, z) dl}{m} = \frac{\int_{\Gamma} \vec{r} dm}{\int_{\Gamma} dm}.$$



Slika 5.11:

Momenti inercije

Momenti inercije s obzirom na x , y i z os dani su sa

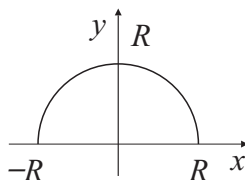
$$I_x = \int_{\Gamma} (y^2 + z^2) dm = \int_{t_0}^{t_1} (y(t)^2 + z(t)^2) \gamma(x, y, z) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt,$$

$$I_y = \int_{\Gamma} (x^2 + z^2) dm = \int_{t_0}^{t_1} (x(t)^2 + z(t)^2) \gamma(x, y, z) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt,$$

$$I_z = \int_{\Gamma} (x^2 + y^2) dm = \int_{t_0}^{t_1} (x(t)^2 + y(t)^2) \gamma(x, y, z) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

I za krivuljne integrale vrijedi Steinerov teorem.

Primjer 5.5. *Odredimo težište (homogene) polukružnice polumjera R sa središtem u ishodištu.*

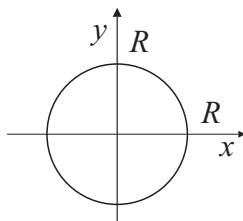


Slika 5.12:

Zbog simetrije s obzirom na y -os, jasno je da je $x_T = 0$. Masa polukružnice iznosi $m = \gamma L = \gamma R\pi$. Preostalo nam je još za izračunati y_T .

$$\begin{aligned} y_T &= \frac{\int_{\Gamma} y \, dm}{m} = \frac{1}{m} \gamma \int_0^{\pi} y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt \\ &= \frac{1}{m} \gamma R^2 \int_0^{\pi} \sin t \sqrt{(\cos'(t))^2 + (\sin'(t))^2} \, dt = \frac{1}{m} \gamma R^2 \int_0^{\pi} \sin t \, dt \\ &= \frac{2\gamma R^2}{m} = \frac{2\gamma R^2}{\gamma R\pi} = \frac{2}{\pi} R. \end{aligned}$$

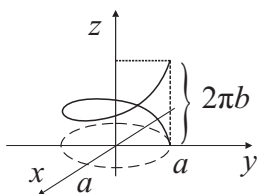
Primjer 5.6. Odredimo moment inercije (homogene) kružnice polumjera R oko promjera.



Slika 5.13:

$$\begin{aligned} I_y &= \int_{\Gamma} x^2 \, dm = R^3 \gamma \int_0^{2\pi} \cos^2 t \underbrace{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}}_1 \, dt \\ &= R^2 \gamma \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \gamma R^3 \pi = \frac{m R^2}{2}. \end{aligned}$$

Primjer 5.7. Odredimo duljinu jednog namotaja helikoide čija je parametризacija dana s $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $t \in [0, 2\pi]$.



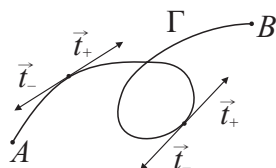
Slika 5.14:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\sqrt{a^2 + b^2}\pi. \end{aligned}$$

5.3 Krivuljni integral 2. vrste

5.3.1 Orijehtacija krivulje

Neka je krivulja $\Gamma = \widehat{AB}$ Jordanov luk. **Orijentaciju** od Γ definiramo kao pridruživanje jednog od dvaju mogućih smjerova tangente u svakoj točki od Γ .

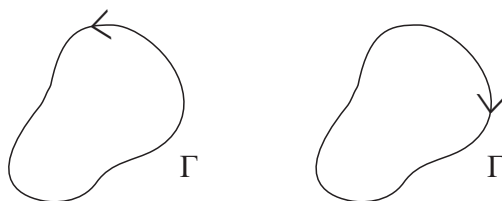


Slika 5.15: Izbor orijentacije krivulje

Postoji beskonačno mnogo orijentacija krivulje Γ , no samo su dvije neprekidne: jedna odgovara obilasku od A do B , druga od B do A . Samo nas te dvije orijentacije zanimaju.

Orijentiranu krivulju označavamo s $\vec{\Gamma}$ ili \overrightarrow{AB} . Promjenu orijentacije označavamo promjenom predznaka; npr. $\vec{\Gamma} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA} = -\vec{\Gamma}$.

Za zatvoreni Jordanov luk $\vec{\Gamma}$ kažemo da je **pozitivno orijentiran** ako je smjer obilaska od Γ suprotan smjeru kazaljke na satu. U suprotnom kažemo da je $\vec{\Gamma}$ **negativno orijentiran**.



Slika 5.16: Pozitivna i negativna orijentacija

Zašto nam treba orijentacija? Za neke veličine smjer kretanja po krivulji nije bitan, npr. duljina i masa ne ovise o smjeru obilaska. Za neke druge veličine, kao što je rad, smjer je bitan.

5.3.2 Motivacija i definicija krivuljnog integrala 2. vrste

Formula za rad sile F na putu s dana je s $W = F \cdot s$. Smatramo da je sila konstantna po iznosu i smjeru i da djeluje u smjeru puta koji je ravni segment. Ako sila nije konstantna, rad računamo preko integrala:

$$W = \int_a^b F(x) dx.$$

Što ako put nije ravan?

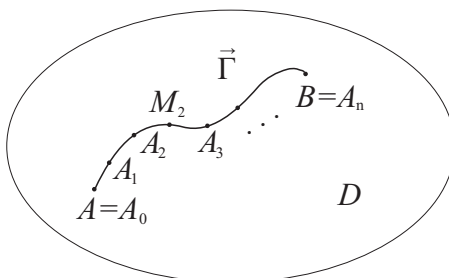
Treba nam poopćenje integrala kojim ćemo integrirajući vektorsko polje po krivulji dobiti skalar.

Promatramo područje $D \subseteq \mathbb{R}^2$ u kojem je definirano vektorsko polje

$$\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j}.$$

Neka je krivulja $\vec{\Gamma} = \overrightarrow{AB}$ sadržana u D .

Podijelimo $\vec{\Gamma}$ na lukove $\overrightarrow{A_k A_{k+1}}$ tačkama $A = A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ (koordinate tačke A_k su (x_k, y_k)). Sad u svakom $\overrightarrow{A_k A_{k+1}}$ uzmimo tačku M_k i zamijenimo $\vec{F}(M)$ na $\overrightarrow{A_k A_{k+1}}$ vrijednošću $\vec{F}(M_k)$.



Slika 5.17:

Formiramo sumu

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} [P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k] = \sum_{k=0}^{n-1} \vec{F}(M_k) \overrightarrow{A_k A_{k+1}},$$

gdje je $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$.

Označimo s Δl najveću od duljina lukova $\overrightarrow{A_k A_{k+1}}$.

Ako gornja suma ima konačan limes kad $n \rightarrow \infty$ i $\Delta l \rightarrow 0$ koji ne ovisi ni o subdiviziji A_1, \dots, A_n ni o izboru $M_k \in \overrightarrow{A_k A_{k+1}}$, onda taj limes nazivamo **krivuljnim integralom 2. vrste od \vec{F} po $\vec{\Gamma}$** i označavamo s

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{F} d\vec{l}.$$

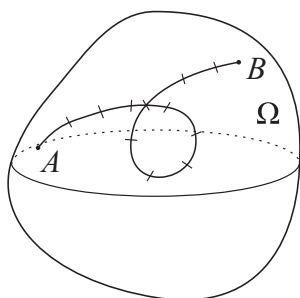
Dakle,

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{F}(M) d\vec{l} = \int_{\overrightarrow{AB}} P dx + Q dy = \lim_{n \rightarrow \infty, \Delta l \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} [P(M_k) \Delta x_k + Q(M_k) \Delta y_k].$$

Teorem 5.2. *Ako su u području D koje sadrži krivulju \overrightarrow{AB} funkcije P i Q neprekidne, onda postoji krivuljni integral 2. vrste od \vec{F} po \overrightarrow{AB} .*

Potpuno analogno definira se i krivuljni integral 2. vrste po krivulji $\vec{\Gamma}$ u \mathbb{R}^3 .

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{F} d\vec{l} = \int_{\overrightarrow{AB}} P dx + Q dy + R dz = \int_{\overrightarrow{AB}} \vec{F} d\vec{r}.$$



Slika 5.18:

5.3.3 Računanje krivuljnih integrala 2. vrste

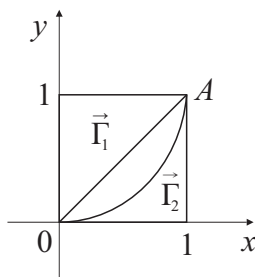
Neka je krivulja Γ zadana parametrizacijom $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \omega(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Tada je $dx = \varphi'(t) dt$, $dy = \psi'(t) dt$, $dz = \omega'(t) dt$. Uvrstimo li to u gornju formulu dobijemo:

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{F}(M) d\vec{l} = \int_{t_0}^{t_1} [P(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))\psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))\omega'(t)] dt$$

Primjer 5.8. Izračunajmo krivuljni integral 2. vrste vektorskog polja

$$\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

po dužini \vec{OA} i po luku parabole $y = x^2$ od O do A .



Slika 5.19:

Parametrizacija dužine $\vec{OA} = \vec{\Gamma}_1$ dana je s

$$x = t, \quad y = t, \quad dx = dy = dt,$$

pa je

$$\int_{\vec{\Gamma}_1} \vec{F} \vec{dl} = \int_{\vec{\Gamma}_1} [-y dx + x dy] = \int_0^1 (-t dt + t dt) = 0.$$

S druge strane, parametrizacija od luka parabole, tj. krivulje $\vec{\Gamma}_2$ dana je s

$$x = t, \quad y = t^2, \quad dx = dt, \quad dy = 2t dt,$$

pa krivuljni integral 2. vrste računamo kao

$$\int_{\vec{\Gamma}_2} \vec{F} \vec{dl} = \int_{\vec{\Gamma}_2} [-y dx + x dy] = \int_0^1 (-t^2 dt + t \cdot 2t dt) = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

Primjer 5.9. Pokažimo da $\int_{\vec{AB}} \vec{r} \vec{dl}$ ovisi samo o krajnjim točkama krivulje AB .

Neka je $\Gamma = \widehat{AB}$ zadana parametrizacijom $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \omega(t)$,

$t \in [t_0, t_1]$. Računamo:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{r} \, d\vec{l} &= \int_{t_0}^{t_1} [\varphi(t)\varphi'(t) + \psi(t)\psi'(t) + \omega(t)\omega'(t)] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [\vec{r}(t)\vec{r}'(t)] dt = \int_{t_0}^{t_1} [r(t)\vec{r}_0 \cdot r'(t)\vec{r}_0] dt = \int_{t_0}^{t_1} r(t)r'(t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}r^2(t) \right) dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (r^2(t)) dt = \frac{1}{2} r^2(t) \Big|_{t_0}^{t_1} \\ &= \frac{1}{2} (r^2(t_1) - r^2(t_0)) = \frac{1}{2} [x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 - x_A^2 - y_A^2 - z_A^2]. \end{aligned}$$

Vidimo da gornji integral ovisi samo o udaljenostima točaka A i B od ishodišta.

5.3.4 Svojstva krivuljnih integrala

(i) Ovisi o smjeru (orijentaciji):

$$\int_{\vec{AB}} \vec{F} \, d\vec{l} = - \int_{\vec{BA}} \vec{F} \, d\vec{l}$$

(ii) Linearnost:

$$\int_{\vec{AB}} (\alpha\vec{F} + \beta\vec{G}) \, d\vec{l} = \alpha \int_{\vec{AB}} \vec{F} \, d\vec{l} + \beta \int_{\vec{AB}} \vec{G} \, d\vec{l},$$

za bilo koje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(iii) Aditivnost po području integracije:

$$\int_{\vec{AB}} \vec{F} \, d\vec{l} = \int_{\vec{AC}} \vec{F} \, d\vec{l} + \int_{\vec{CB}} \vec{F} \, d\vec{l},$$

za bilo koju točku C između A i B .

5.3.5 Odnos krivuljnih integrala 1. i 2. vrste

Vrijedi sljedeća relacija:

$$\int_{\vec{r}} \vec{F} \, d\vec{l} = \int_{\vec{r}} \vec{F} \, d\vec{r} = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{t} \, dl,$$

gdje je \vec{t} jedinični vektor tangente. Dakle,

$$\underbrace{\int_{\vec{\Gamma}} \vec{F} d\vec{l}}_{2. \text{ vrste}} = \underbrace{\int_{\Gamma} (\vec{F} \cdot \vec{t}) dl}_{1. \text{ vrste}}.$$

Promjena orijentacije krivulje $\vec{\Gamma}$ manifestira se promjenom predznaka \vec{t} .

5.3.6 Greenova formula

Ako je krivulja Γ zatvorena, onda krivuljni integral 2. vrste funkcije \vec{F} po Γ zovemo **cirkulacija** vektorskog polja \vec{F} . Oznaka je

$$\oint_{\vec{\Gamma}} \vec{F} d\vec{l}.$$

Teorem 5.3 (Greenova formula). *Neka je D zatvoreno područje u ravnini omeđeno po dijelovima glatkom krivuljom L . Neka su $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ neprekidne na D i neka tamo imaju neprekidne parcijalne derivacije $\frac{\partial Q}{\partial x}$ i $\frac{\partial P}{\partial y}$. Tada vrijedi*

$$\oint_L (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

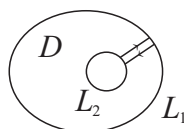
Gornji izraz zovemo **Greenova formula**.

Uvjet da se rub od D , u oznaci ∂D , sastoji od jednog komada zove se uvjet **1 - povezanosti**. Taj uvjet nije ispunjen za područje s "rupama".



Slika 5.20: Područje bez "rupa" i područje s "rupama"

Greenova formula vrijedi i u višestruko povezanim područjima, samo je dokaz kompliciraniji. Integral po ∂D je zbroj integrala po L_1 i L_2 , onda L_1 i L_2 spojimo rezom po kojem integriramo dvaput, u suprotnim smjerovima, tako da se integrali po rezu dokuinju.

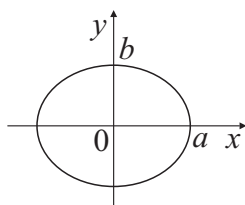


Slika 5.21:

Važan specijalni slučaj Greenove formule daje nam mogućnost računanja površine ravninskog lika pomoću krivuljnog integrala 2. vrste: Ako je lik D omeđen po dijelovima glatkom jednostavnom zatvorenom krivuljom L , onda je

$$S = \iint_D 1 \, dx \, dy = \frac{1}{2} \oint_L (-y \, dx + x \, dy) = \frac{1}{2} \oint_L (x \, dy - y \, dx).$$

Primjer 5.10. Izračunajmo površinu elipse s poluosima a i b .



Slika 5.22:

Prvi način računanja površine elipse je standardan.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \Rightarrow \quad a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

pa površinu elipse dobijemo kao

$$P = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx.$$

Drugi način je da površinu napišemo kao

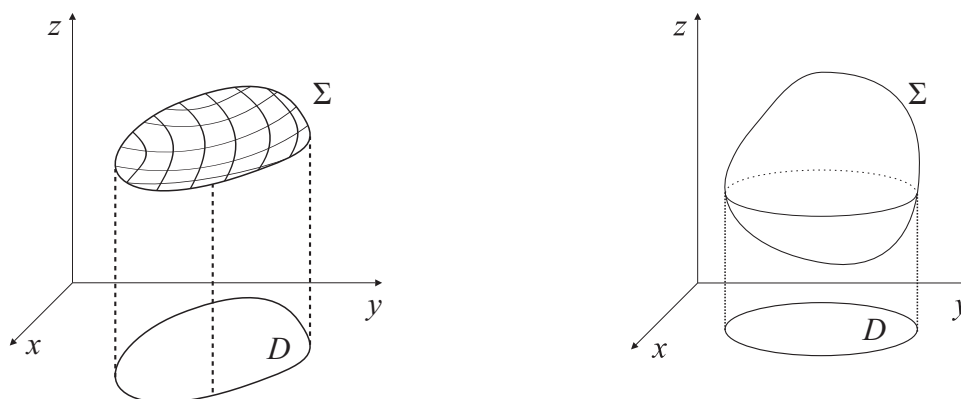
$$P = \iint_D dx \, dy,$$

gdje skup D predstavlja danu elipsu.

Parametrizacija elipse dana je s $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, pa koristeći Greenovu formulu dobivamo

$$P = \frac{1}{2} \oint_L (x \, dy - y \, dx) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) \, dt = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = ab\pi.$$

5.4 Plohe i načini njihovog zadavanja



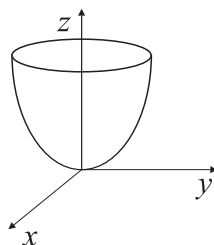
Slika 5.23: Otvorena i zatvorena ploha u \mathbb{R}^3

U ovom potpoglavlju nećemo davati strogo formalnu definiciju plohe. Zanimat će nas samo načini zadavanja i opisivanja glatkih i po dijelovima glatkih ploha. **Glatka ploha** je ona kod koje u svakoj točki postoji tangencijalna ravnina.

5.4.1 Eksplicitno zadavanje plohe

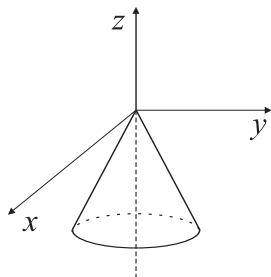
Plohu eksplicitno zadajemo kao graf (glatke) funkcije na nekom području $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Primjer 5.11. (a) $z = x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$



Slika 5.24:

(b) $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$



Slika 5.25:

Prednosti eksplicitnog zadavanja ploha su sažetost i što je sva informacija dana u formuli. Nedostatci su problemi sa zadavanjem zatvorenih ploha (npr. sfera), ploha s više grana i nekih drugih složenijih ploha.

Eksplicitni prikaz plohe nije uvijek moguć.

Da bi plohu eksplicitno zadali ne moramo uvijek z -koordinatu zadavati preko druge dviju, nego možemo x zadati preko y i z ili y preko x i z .

Tangencijalna ravnina u točki P_0 dana je preko svog vektora normale

$$\vec{n}(P_0) = \text{grad}(z - f(x, y))(P_0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\vec{j} + \vec{k}.$$

5.4.2 Implicitno zadavanje plohe

Dana je formula koja povezuje koordinate točaka na plohi, $F(x, y, z) = 0$. Smatramo da je funkcija $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ klase C^1 . Po teoremu o implicitnoj funkciji, mora postojati barem jedna točka (x_0, y_0, z_0) koja zadovoljava $F(x, y, z) = 0$ i barem jedna od parcijalnih derivacija u (x_0, y_0, z_0) mora biti različita od nule. To sažeto pišemo

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 > 0.$$

Primjer 5.12. Sfera polumjera R :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Tangencijalna ravnina se zadaje kao

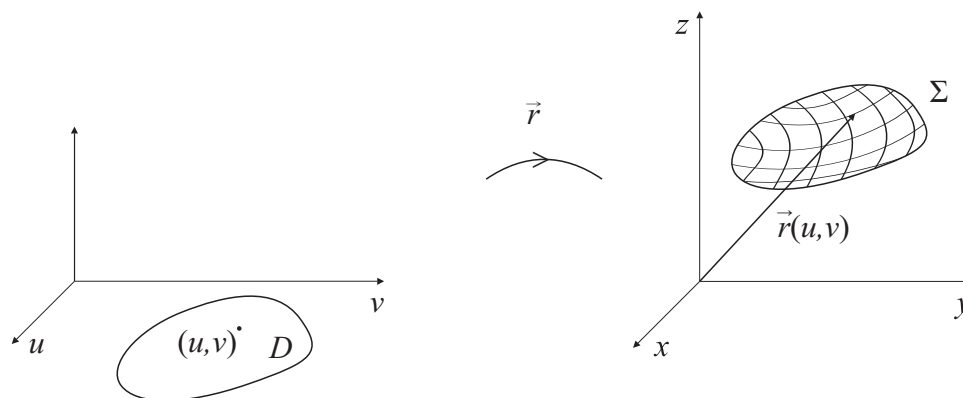
$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0,$$

a vektor normale u P_0 je

$$\vec{n}(P_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(P_0)\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\vec{k}.$$

5.4.3 Parametarsko zadavanje ploha

Slično je kao parametarsko zadavanje krivulje, samo što nam trebaju dva parametra.



Slika 5.26: Ploha zadana parametrima

$$\vec{r}: D \rightarrow X_0(E), \quad \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k},$$

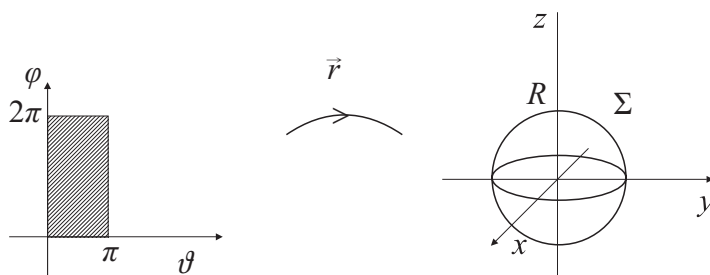
$$\Sigma = \{\vec{r}(u, v); (u, v) \in D\}.$$

(D, \vec{r}) je parametrizacija plohe Σ .

Za $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ gornja parametrizacija daje dvije familije krivulja.

Primjer 5.13. *Parametrizacija sfere polumjera R .*

$$\left. \begin{aligned} x(\vartheta, \varphi) &= R \sin \theta \cos \varphi \\ y(\vartheta, \varphi) &= R \sin \theta \sin \varphi \\ z(\vartheta, \varphi) &= R \cos \theta \end{aligned} \right\} D = \underbrace{[0, \pi]}_{\theta} \times \underbrace{[0, 2\pi]}_{\varphi}$$

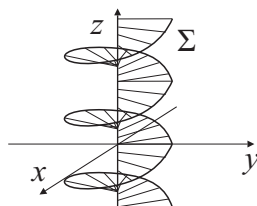


Slika 5.27: Parametrizacija sfere

Primjer 5.14. *Neka je*

$$\vec{r}(t) = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + b v \vec{k}, \quad D = [0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Tada parametrizacija (D, \vec{r}) daje helikoidalnu plohu Σ .



Slika 5.28:

Vektor normale se računa kao vektorski produkt derivacija $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$,

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Nužan uvjet glatkosti parametarski zadane plohe je

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \neq \vec{0}.$$

5.5 Plošni integral 1. vrste

5.5.1 Motivacija i definicija

Neka je ploha Σ zadana kao podskup od $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ na kojem je zadano skalarno polje $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Takvo skalarno polje može biti, recimo, gustoća mase. Kako računamo ukupnu masu plohe Σ ?

- (1) Prvo podijelimo Σ na male komadiće $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ čija je unija cijeli skup Σ . Neka je površina (tj. ploština) komadića Σ_k jednaka ΔS_k .
- (2) Odaberemo točku $M_k \in \Sigma_k$ za svaki k i zamijenimo vrijednosti $f(M)$ s $f(M_k)$ za sve $M \in \Sigma_k$. Formiramo sumu

$$\sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta S_k.$$

To je integralna suma funkcije f po plohi Σ koja odgovara subdiviziji $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$. Za očekivati je da će profinjavanjem subdivizije, tj. uzimanjem više komada Σ_k tako da

$$\Delta S = \max_k \Delta S_k \rightarrow 0$$

za $n \rightarrow \infty$ integralna suma sve bolje i bolje aproksimirati masu plohe Σ .

Ako integralna suma

$$\sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta S_k$$

ima limes kad $n \rightarrow \infty$ i $\Delta S \rightarrow 0$ koji ne ovisi ni o načinu podjele plohe Σ na $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$, ni o izboru točaka $M_k \in \Sigma_k$, onda se taj limes zove **plošni integral 1. vrste** funkcije f po Σ i označava s

$$\int \int_{\Sigma} f(M) dS.$$

Teorem 5.4. *Neka je Σ glatka ploha sadržana u omeđenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ na kojem je definirano skalarno polje f . Ako je f neprekidno, onda postoji plošni integral 1. vrste od f po plohi Σ .*

5.5.2 Svojstva plošnog integrala 1. vrste

(i) **Linearnost:**

Ako su f i g integrabilne po Σ , onda je i $\alpha f + \beta g$ integrabilna po Σ ,
 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i vrijedi

$$\int \int_{\Sigma} (\alpha f + \beta g) dS = \alpha \int \int_{\Sigma} f dS + \beta \int \int_{\Sigma} g dS.$$

(ii) **Aditivnost po području integracije:**

Ako je $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ i $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ je površine 0, onda je

$$\int \int_{\Sigma} f dS = \int \int_{\Sigma_1} f dS + \int \int_{\Sigma_2} f dS.$$

(iii) Ako je $f \geq 0$ na Σ , onda je $\int \int_{\Sigma} f dS \geq 0$.

(iv) **Teorem srednje vrijednosti:**

Ako je skalarno polje f neprekidno na plohi Σ , onda postoji barem jedna
 točka P_0 na Σ takva da je

$$\int \int_{\Sigma} f(M) dS = f(P_0) \cdot S,$$

gdje je S površina plohe Σ .

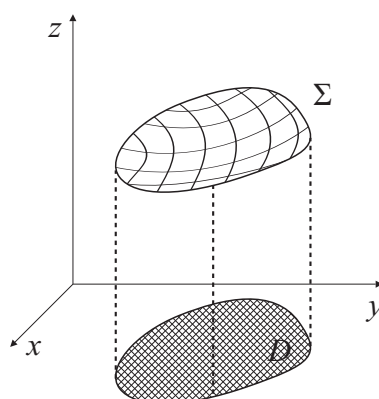
(Veličina $\frac{1}{S} \int \int_{\Sigma} f(M) dS$ je srednja vrijednost funkcije f na Σ .)

(v) Površina (ploština) plohe Σ računa se kao

$$S = \int \int_{\Sigma} dS.$$

5.5.3 Računanje plošnog integrala 1. vrste

Neka je Σ zadana kao graf glatke funkcije f na nekom $D \subset \mathbb{R}^2$, $z = f(x, y)$.
 Podijelimo, jednostavnosti radi, područje D u male pravokutnike i promatrajmo
 komad plohe Σ iznad jednog takvog pravokutnika. Označimo taj komad sa Σ_{ij} .

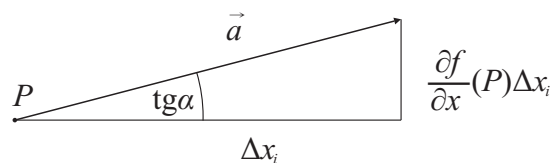
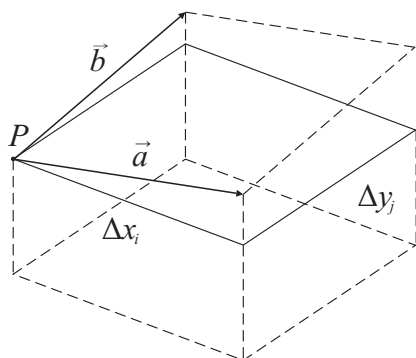


Slika 5.29:

Ako su Δx_i i Δy_j dovoljno mali, pogreška koju činimo zamjenom komada Σ_{ij} komadom tangencijalne ravnine u P će biti mala.

Vektor \vec{a} ima komponente Δx_i i $\frac{\partial f}{\partial x}(P)\Delta x_i$ u smjeru \vec{i} i \vec{k} . Dakle,

$$\vec{a} = \Delta x_i \cdot \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(P)\Delta x_i \vec{k}.$$



Slika 5.30:

Slično,

$$\vec{b} = \Delta y_j \cdot \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(P)\Delta y_j \vec{k}.$$

Sada je površina komada tangencijalne ravnine kojim zamjenjujemo Σ_{ij} dana

kao $|\vec{a} \times \vec{b}|$. Vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ računamo kao

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Delta x_i & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(P)\Delta x_i \\ 0 & \Delta y_j & \frac{\partial f}{\partial y}(P)\Delta y_j \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(P)\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(P)\vec{j} + \vec{k} \right) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Duljina ovog vektora iznosi

$$\Delta S_{ij} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(P) \right)^2} \Delta x_i \Delta y_j.$$

Kad pustimo $\Delta x_i \rightarrow 0$, $\Delta y_j \rightarrow 0$, gornji izraz u limesu ide prema

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dx dy.$$

Sad se integral skalarnog polja $h(x, y, z)$ po Σ računa kao

$$\begin{aligned} \int \int_{\Sigma} h(M) dS &= \int \int_D h(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dx dy \\ &= \int \int_D h(x, y, f(x, y)) |\vec{n}(x, y)| dx dy. \end{aligned}$$

Ako je ploha Σ zadana parametarski, parametrizacijom (D, \vec{r}) , vektor normale je $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$. To daje

$$\int \int_{\Sigma} h(M) dS = \int \int_D h(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv.$$

Sjetimo li se da je $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$ i uvedemo li oznake

$$\begin{aligned} E &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \\ G &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \\ F &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \end{aligned}$$

možemo duljinu normale pisati kao

$$|\vec{n}(u, v)| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Konačno,

$$\int \int_{\Sigma} h(M) dS = \int \int_D h(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Primjer 5.15. Izračunajmo površinu sfere polumjera R .

Parametrizacija sfere dana je s

$$\left. \begin{array}{l} x = R \sin \theta \cos \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \cos \theta \end{array} \right\} \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad D = [0, \pi] \times [0, 2\pi).$$

Računamo

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 = R^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + R^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + R^2 \sin^2 \theta \\ &= R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta = R^2, \end{aligned}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2}_0 = R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi = R^2 \sin^2 \theta,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \varphi}}_0 = R \cos \theta \cos \varphi \cdot R \sin \theta (-\sin \varphi)$$

$$+ R \cos \theta \sin \varphi \cdot R \sin \theta \cos \varphi = 0.$$

Sada je

$$\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin \theta,$$

iz čega slijedi da je

$$\begin{aligned} S &= \int \int_{\Sigma} dS = \int \int_D \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} R^2 \sin \theta d\varphi d\theta \\ &= 2R^2 \pi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 4R^2 \pi. \end{aligned}$$

5.5.4 Primjene plošnog integrala 1. vrste

Površina i masa plohe

$$S = \int \int_{\Sigma} dS, \quad m = \int \int_{\Sigma} dm = \int \int_{\Sigma} \gamma(M) dS$$

Koordinate težišta

$$\vec{r}_T = \frac{\int \int_{\Sigma} \vec{r} dm}{\int \int_{\Sigma} dm}$$
$$x_T = \frac{\int \int_{\Sigma} x \gamma dS}{\int \int_{\Sigma} \gamma dS}, \quad y_T = \frac{\int \int_{\Sigma} y \gamma dS}{\int \int_{\Sigma} \gamma dS}, \quad z_T = \frac{\int \int_{\Sigma} z \gamma dS}{\int \int_{\Sigma} \gamma dS}.$$

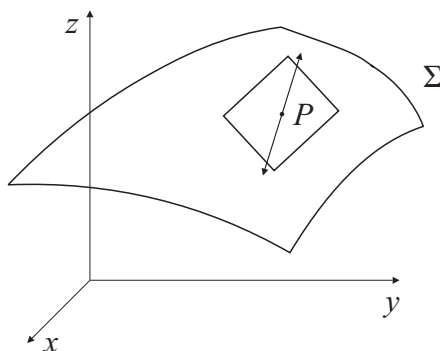
Momenti tromosti

$$I_z = \int \int_{\Sigma} (x^2 + y^2) dm, \quad I_y = \int \int_{\Sigma} (x^2 + z^2) dm, \quad I_x = \int \int_{\Sigma} (y^2 + z^2) dm.$$

5.6 Plošni integral 2. vrste

5.6.1 Orientacija i orijentabilnost plohe

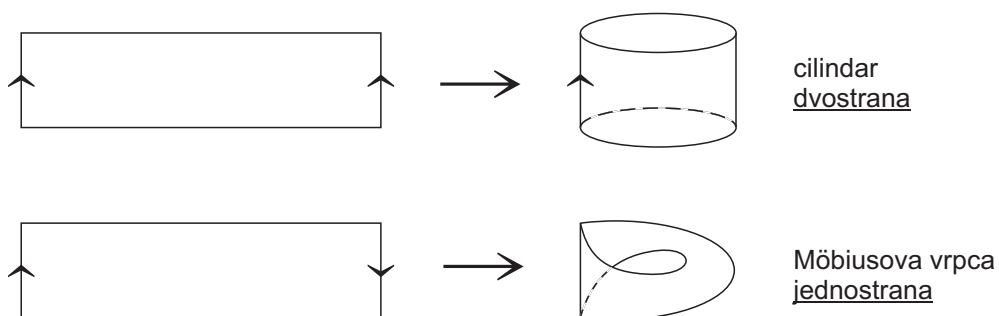
Neka je Σ glatka ploha. To znači da u svakoj točki postoji tangencijalna ravnina i da se u svakoj točki P na Σ mogu postaviti dva jedinična vektora normale.



Slika 5.31:

Izborom jednog od tih dvaju vektora dobivamo **orijentaciju plohe**. To možemo napraviti na beskonačno mnogo načina. Nas zanimaju oni kod kojih je takvo polje normala neprekidno. Ako ploha Σ dopušta takvu orijentaciju, kažemo da je Σ **orijentirana ploha**.

Znamo da je svaka glatka krivulja orijentirana. Je li svaka glatka ploha orijentirana?



Slika 5.32: Orijetirana ploha i neorijetirana ploha

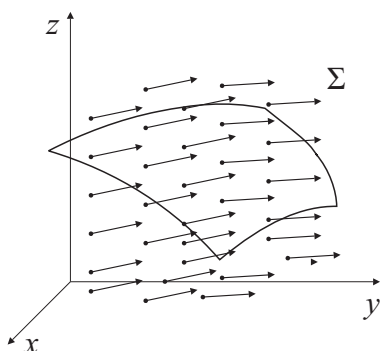
Glatka ploha ne mora biti orijentirana, primjer jedne takve **neorijetirane plohe**

je Móbiusova vrpca.

Plohe mogu biti i zatvorene, a neorijentirane - primjer takve plohe je Kleinova boca koja nastaje lijepljenjem pravokutnika.

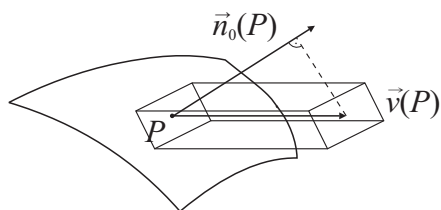
U nastavku ćemo promatrati samo glatke orijentirane plohe.

5.6.2 Motivacija i definicija



Slika 5.33: Polje brzina fluida

Promatramo polje brzina nekog fluida. To je vektorsko polje, \vec{v} . Neka je u području u kojem se giba fluid smještena (orijentirana) ploha $\vec{\Sigma}$. Neka je polje \vec{v} **stacionarno**, tj. neka \vec{v} ne ovisi o vremenu. Zanima nas tok fluida u jedinici vremena kroz plohu $\vec{\Sigma}$. Za odrediti tok treba nam i masa fluida. Neka je ona zadana (stacionarnim) skalarnim poljem ρ .



Slika 5.34:

Masa koja u jedinici vremena prođe kroz mali (pravokutni) element plohe Σ površine ΔS jednaka je gustoći pomnoženoj volumenom. Volumen koji prođe

dobijemo tako da ΔS pomaknemo u smjeru $\vec{v}(P)$. Taj volumen možemo aproksimirati volumenom paralelepipeda površine osnovice ΔS i visine $\vec{n}_0(P) \cdot \vec{v}(P)$. Dakle, tok kroz element površine ΔS iznosi približno

$$\Delta m \approx \rho(P) \vec{v}(P) \cdot \vec{n}_0(P) \Delta S.$$

Za očekivati je da će profinjavanjem podjele plohe Σ na sve sitnije elemente i zbrajanjem njihovih doprinosa aproksimacija težiti prema pravoj vrijednosti toka, tj.

$$\sum_n \rho(P) \vec{v}(P) \cdot \vec{n}_0(P) \Delta S_n \rightarrow T.$$

Time nam je motivirana sljedeća definicija.

Definicija 5.1. Neka je orijentirana ploha $\vec{\Sigma}$ sadržana u području $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ na kojem je zadano vektorsko polje $\vec{a} : \Omega \rightarrow X_0(E)$. Podijelimo $\vec{\Sigma}$ u komade $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ površina $\Delta S_1, \dots, \Delta S_n$. Ako postoji limes integralnih suma

$$\sum_{k=1}^n \vec{a}(M_k) \vec{n}_0(M_k) \Delta S_k$$

za $n \rightarrow \infty$, $\Delta S \rightarrow 0$, koji ne ovisi o podjeli Σ na $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ ni o izboru točaka $M_k \in \Sigma_k$, onda taj limes nazivamo **plošni integral 2. vrste** vektorskog polja \vec{a} po $\vec{\Sigma}$ i označavamo s $\int \int_{\vec{\Sigma}} \vec{a} d\vec{S}$. Dakle,

$$\int \int_{\vec{\Sigma}} \vec{a}(M) d\vec{S} = \lim_{n \rightarrow \infty, \Delta S \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \vec{a}(M_k) \underbrace{\vec{n}_0(M_k) \Delta S_k}_{d\vec{S}}.$$

Ako $\vec{n}_0(M)$ premjestimo iz $d\vec{S}$ u podintegralnu funkciju dobivamo vezu između plošnih integrala 1. i 2. vrste:

$$\int \int_{\vec{\Sigma}} \vec{a}(M) d\vec{S} = \int \int_{\Sigma} (\vec{a}(M) \cdot \vec{n}_0(M)) dS.$$

Iz gornje formule vidimo da promjena orijentacije plohe $\vec{\Sigma}$ rezultira promjenom predznaka vrijednosti plošnog integrala 2. vrste.

Svojstva plošnog integrala 2. vrste se pomoću gornje formule svode na svojstva plošnog integrala 1. vrste. Dakle, vrijedi linearnost i aditivnost po području integracije. Što je s teoremom srednje vrijednosti?

5.6.3 Računanje plošnih integrala 2. vrste

Vratimo se na vezu između plošnog integrala 2. i 1. vrste:

$$\int \int_{\vec{\Sigma}} \vec{a} \, d\vec{S} = \int \int_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) \, dS = \int \int_D (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) \underbrace{|\vec{n}|}_{dS} \, dx \, dy$$

(Područje $D \subset \mathbb{R}^2$ je ono nad kojim je zadana Σ ili na kojem je parametrizirana Σ .)

Kako je $|\vec{n}| \vec{n}_0 = \vec{n}$, konačno imamo

$$\int \int_{\vec{\Sigma}} \vec{a} \, d\vec{S} = \int \int_D (\vec{a} \cdot \vec{n}) \, dx \, dy.$$

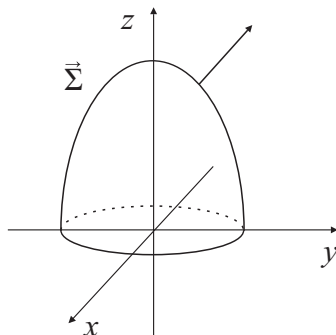
Ako je Σ zadana eksplicitno kao $z = f(x, y)$, onda je $\vec{n} = \text{grad}(z - f(x, y))$, pa je

$$\begin{aligned} \int \int_{\vec{\Sigma}} \vec{a} \, d\vec{S} &= \int \int_D (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \vec{k} \right) \, dx \, dy \\ &= \int \int_D \left(-P \frac{\partial f}{\partial x} - Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \right) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Ovo je formula za vektor normale \vec{n} koji zatvara šiljasti kut s vektorom \vec{k} , tj. koji pokazuje prema "gore". Ako za \vec{n} uzmemo vektor koji zatvara s \vec{k} tupi kut, tj. pokazuje prema "dolje", onda $\text{grad}(f(x, y) - z)$ daje normalu i imamo

$$\int \int_{\vec{\Sigma}} \vec{a} \, d\vec{S} = - \int \int_D \left(-P \frac{\partial f}{\partial x} - Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \right) \, dx \, dy.$$

Primjer 5.16. Neka je $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ vektorsko polje, a $\vec{\Sigma}$ dio paraboloida $z = 1 - x^2 - y^2$ iznad xy ravnine orijentirana normalom koja zatvara šiljast kut s \vec{k} .



Slika 5.35:

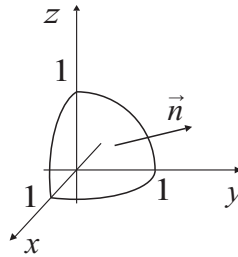
Tada je

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \text{grad}(z - f(x, y)) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}, \\ \vec{a} \cdot \vec{n} &= 2xyz + 2xyz + xy = xy(1 + 4z).\end{aligned}$$

Ako je ploha $\vec{\Sigma}$ zadana parametarski parametrizacijom (D, \vec{r}) , $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$, onda je $\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$, pa je $\vec{a} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)$ dano kao mješoviti produkt vektora \vec{a} , $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ i $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$.

$$\int \int_{\vec{\Sigma}} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int \int_D \vec{a} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) dx dy.$$

Primjer 5.17. Ploha $\vec{\Sigma}$ je komad sfere sa središtem u ishodištu polumjera 1 u prvom oktantu orijentirana normalom \vec{n} koja zatvara šiljasti kut s \vec{k} . Izračunajmo integral vektorskog polja $\vec{a} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ po $\vec{\Sigma}$.



Slika 5.36:

Parametrizacija dijela sfere u 1. oktantu dana je s

$$r(\theta, \varphi) = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Sada je

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\sin \theta \sin \varphi \vec{i} + \sin \theta \cos \varphi \vec{j},$$

pa iz toga slijedi

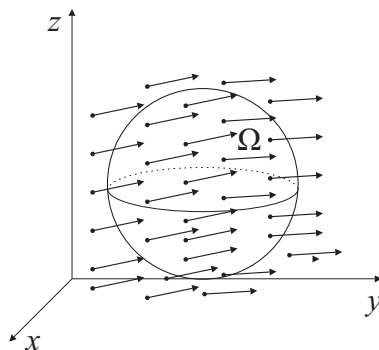
$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right) &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} \\ &= \cos \theta [\sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi + \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi] + \sin \theta [\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi] \\ &= \sin \theta \cos^2 \theta + \sin^3 \theta = \sin \theta.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\int \int_{\Sigma} \vec{r} d\vec{S} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\varphi d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Je li ovaj rezultat očekivan? Zašto?

5.7 Teorem o divergenciji i primjene



Slika 5.37:

Promatramo zatvoreno područje $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ čiji je rub orijentabilna (po dijelovima) glatka ploha bez samopresjeka. Neka je $\partial\Omega = \Sigma$. Kako je Σ orijentabilna i glatka, na Σ je zadano vektorsko polje jediničnih vanjskih normala \vec{n}_0 . Promatramo vektorsko polje $\vec{a} : \Omega \rightarrow X_0(E)$, $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Neka je $\vec{a} \in C^1(\Omega)$. Zanima nas tok polja \vec{a} kroz Σ .

Teorem 5.5 (Teorem o divergenciji; Green - Gauss - Ostrogradski). *Neka je vektorsko polje \vec{a} klase C^1 na nekom skupu koji sadrži zatvoreno područje Ω omeđeno orijentabilnom po dijelovima glatkom plohom Σ koja nema samopresjeka. Tada je tok polja \vec{a} kroz Σ dan formulom*

$$\oint_{\Sigma} \vec{a} \vec{n}_0 dS = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz.$$

(Vektorsko polje \vec{n}_0 je polje jediničnih vanjskih normala na Σ .)

Alternativni zapis je $\oint_{\vec{\Sigma}} \vec{a} d\vec{S} = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz$.

Primjer 5.18. *Izračunajmo tok vektorskog polja $\vec{a} = 2x\vec{i} - (z-1)\vec{k}$ kroz rub cilindra Ω omeđenog plohami $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ i $z = 1$.*

$$\begin{aligned} T &= \oint_{\vec{\Sigma}} (2x\vec{i} - (z-1)\vec{k}) d\vec{S} = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} (2x\vec{i} - (z-1)\vec{k}) dx dy dz \\ &= (\operatorname{div} \vec{a} = 2 - 1 = 1) = \int \int \int_{\Omega} 1 dx dy dz = V(\Omega) = 2^2\pi \cdot 1 = 4\pi. \end{aligned}$$

Iz gornje formule možemo izvesti formulu za računanje volumena tijela Ω pomoću plošnog integrala 2. vrste po rubu od Ω

$$V(\Omega) = \int \int \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} \, dx \, dy \, dz.$$

Treba naći vektorsko polje čija je divergencija jednaka 1. Znamo da je $\operatorname{div} \vec{r} = 3$, pa je prirodno uzeti $\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{r}$. Imamo

$$V(\Omega) = \frac{1}{3} \oint \oint_{\Sigma} \vec{r} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{3} \oint \oint_{\Sigma} r \vec{n}_0 \, dS.$$

Usporedimo gornju formulu s formulom $S(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} (x \, dy - y \, dx)$.

Iz teorema o divergenciji možemo zaključiti ponešto o fizikalnom smislu divergencije.

$$\oint \oint_{\Sigma} \vec{a} \vec{n}_0 \, dS = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} \, dx \, dy \, dz$$

Lijeva strana je tok kroz Σ , razlika onoga što je iz Ω izašlo i onoga što je u Ω ušlo. Ako je ta razlika pozitivna, ona je morala nastati u Ω , morala je doći iz izvora u Ω . Ako je razlika negativna, nešto je moralo nestati u Ω , tj. u Ω mora biti nekih ponora. Odatle slijedi da $\operatorname{div} \vec{a}$ mjeri gustoću izvora/ponora u točki područja Ω . To se može i formalno izvesti promatrajući limes omjera

$$\frac{\oint \oint_{\Sigma} \vec{a} \vec{n}_0 \, dS}{V(\Omega)}$$

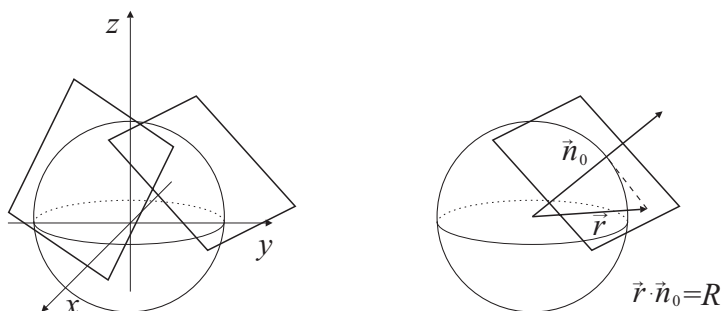
kad se $V(\Omega)$ (volumen područja oko neke točke M) sažima u samu točku M (tj. volumen teži u 0).

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{\oint \oint_{\partial \Omega} \vec{a} \vec{n}_0 \, dS}{V(\Omega)}.$$

Ovo je invarijantna definicija divergencije, ne ovisi o koordinatnom sustavu.

Primjer 5.19. *Odredimo tok vektorskog polja \vec{r} kroz rub tijela omeđenog dijelovima tangencijalnih ravnina na kuglu polumjera R ,*

$$T = \oint \oint_{\partial B} \vec{r} \vec{n}_0 \, dS.$$



Slika 5.38: Tangencijalne ravnine na kugli

Neka se rub tijela B sastoji od m komada, $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$. Onda je

$$T = \oint \oint_{\partial B} \vec{r} \vec{n}_0 dS = \sum_{i=1}^m \int \int_{\Sigma_i} \vec{r} \vec{n}_0 dS = R \sum_{i=1}^m \int \int_{\Sigma_i} dS = RO,$$

gdje je O oplošje tijela B . Na primjer, tok polja \vec{r} kroz kocku stranice 3 je 81, jer je $O = 6 \cdot 3 \cdot 3$, $R = 1.5$. Primjenom teorema o divergenciji dobijemo

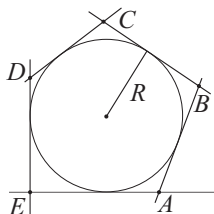
$$RO = \int \int \int_B \operatorname{div} \vec{r} dx dy dz = 3V,$$

pa imamo da je omjer volumena i oplošja takvog tijela jednak $\frac{R}{3}$,

$$\frac{V}{O} = \frac{R}{3}.$$

Na primjeru gornje kocke imamo $V = 27$, $O = 54$, $\frac{V}{O} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}$.

Vrijedi li nešto slično za tangencijalne mnogokute u ravnini? Zašto? (Mnogokut je **tangencijalan** ako mu se može upisati kružnica. Ako mu se može opisati kružnica, onda je **tetivni**.)

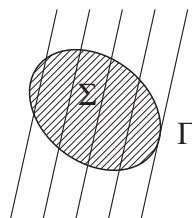


Slika 5.39: Tangencijalan mnogokut

5.7.1 Svojstva solenoidalnih polja

Prisjetimo se da je vektorsko polje \vec{a} solenoidalno ako i samo ako je $\operatorname{div} \vec{a} = 0$.

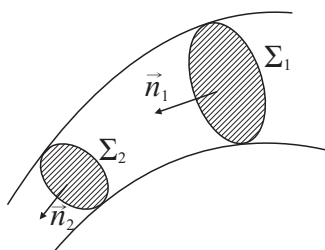
Pogledajmo ravninsko područje Σ u području kojim teče fluid sa solenoidalnim poljem brzina \vec{a} . Rub područja Σ je zatvorena glatka krivulja Γ . Skup svih vektorskih krivulja koje prolaze kroz Γ zove se **vektorska cijev**. Područje Σ je presjek vektorske cijevi.



Slika 5.40:

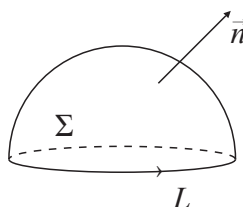
Teorem 5.6. Tok solenoidalnog vektorskog polja \vec{a} kroz bilo koji presjek vektorske cijevi je isti.

$$\int \int_{\Sigma_1} \vec{a} \vec{n}_1 dS = \int \int_{\Sigma_2} \vec{a} \vec{n}_2 dS$$



Slika 5.41:

Teorem 5.7. *Neka je L zatvorena glatka krivulja. Tok solenoidalnog vektorskog polja \vec{a} kroz bilo koju plohu Σ čija je granica L je isti.*



Slika 5.42:

Teorem 5.8. *Vektorske krivulje solenoidalnog vektorskog polja \vec{a} su ili zatvorene ili su im krajevi na rubovima područja u kojem je polje definirano.*

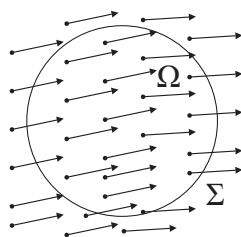
5.7.2 Jednadžba kontinuiteta

Promatramo gibanje fluida gustoće $\rho(x, y, z, t) \in C^1(\Omega_1)$ u području Ω_1 bez izvora i ponora. Neka je polje brzina fluida označeno s \vec{v} . Neka je $\vec{v} \in C^1(\Omega_1)$. Promatramo područje Ω čiji je rub ploha Σ . Masa fluida u Ω u trenutku t je

$$m = \int \int \int_V \rho \, dx \, dy \, dz.$$

Masa koja u jedinici vremena izađe iz Ω je

$$\oint \int_{\Sigma} \rho \vec{v} \vec{n}_0 \, dS.$$



Slika 5.43:

Ta masa mora biti jednaka promjeni mase u Ω , a to je

$$-\frac{dm}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \int \int_{\Omega} \rho(x, y, z, t) dx dy dz = - \int \int \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, y, z, t) dx dy dz.$$

Izjednačavanjem tih veličina dobijemo jednadžbu

$$- \int \int \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = \oint \oint_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n}_0 dS, \quad \text{tj.}$$

$$\int \int \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz + \oint \oint_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n}_0 dS = 0.$$

Po teoremu o divergenciji slijedi

$$\int \int \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz + \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dx dy dz = 0, \quad \text{odnosno}$$

$$\int \int \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] dx dy dz = 0.$$

Kako to mora biti istina za svako područje Ω , i kako je podintegralna funkcija neprekidna, mora vrijediti

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

Gornju jednadžbu nazivamo **jednadžbom kontinuiteta**.

Za nestlačiv (inkompresibilni) fluid (npr. voda) imamo $\rho = \text{const}$, pa je onda

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \operatorname{div} \vec{v}.$$

Konačno, jednadžba kontinuiteta postaje

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

To znači da je polje brzina nestlačivog fluida solenoidalno (u području bez izvora i ponora), pa ima sva svojstva iz prijašnjeg odjeljka.

5.8 Stokesov teorem i primjene

Prisjetimo se da je **cirkulacija** vektorskog polja $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ po zatvorenoj orijentiranoj krivulji L definirana kao

$$\oint_{\vec{L}} \vec{a} \, d\vec{l} = \oint_L (P \, dx + Q \, dy + R \, dz).$$

Primjer 5.20. Odredimo cirkulaciju vektorskog polja \vec{r} po (pozitivno orijentiranoj) jediničnoj kružnici, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Vrijedi

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi], \quad dx = -\sin t \, dt, \quad dy = \cos t \, dt,$$

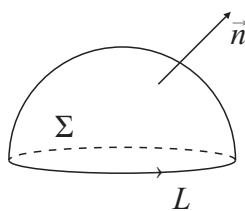
pa iz toga slijedi

$$\oint_{\vec{L}} \vec{r} \, d\vec{l} = \int_0^{2\pi} (\cos t(-\sin t) + \sin t \cos t) \, dt = 0.$$

Primjer 5.21. Odredimo cirkulaciju vektorskog polja $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ po (pozitivno orijentiranoj) jediničnoj kružnici \vec{L} .

$$\oint_{\vec{L}} \vec{a} \, d\vec{l} = \int_0^{2\pi} (-\sin t(-\sin t) + \cos t \cos t) \, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Promatramo glatku plohu Σ čiji je rub glatka zatvorena krivulja L . Kažemo da su ploha Σ i njen rub L **koherentno orijentirane** ako je L pozitivno orijentirana kad se gleda s vrha vanjske normale \vec{n} na plohu Σ .



Slika 5.44:

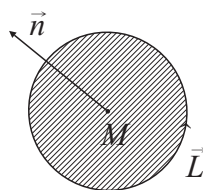
Teorem 5.9 (Stokes). Cirkulacija vektorskog polja \vec{a} klase C^2 po orijentiranoj zatvorenoj krivulji \vec{L} jednaka je toku rotacije od \vec{a} po bilo kojoj plohi $\vec{\Sigma}$ čiji je \vec{L} rub. (Ploha $\vec{\Sigma}$ i njen rub su koherentno orijentirane.)

$$\oint_{\vec{L}} \vec{a} \, d\vec{l} = \int \int_{\vec{\Sigma}} \text{rot } \vec{a} \, d\vec{S}.$$

Polje $\text{rot } \vec{a}$ je solenoidalno, pa po teoremu 5.7 iz odjeljka 5.7 njegov tok ne ovisi o $\vec{\Sigma}$.

Pomoću gornjeg teorema možemo dati **invarijantnu** definiciju rotacije, tj. definiciju neovisnu o koordinatnom sustavu.

$$\text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = \lim_{(\Sigma) \rightarrow M} \frac{1}{S} \oint_{\vec{L}} \vec{a} \cdot d\vec{l}, \quad \text{projekcija na } \vec{n}_0.$$



Slika 5.45:

Ovdje je S površina plohe $\vec{\Sigma}$ okomita na \vec{n}_0 u točki M , a limes se gleda kad se ploha Σ omeđena i koherentno orijentirana s rubom \vec{L} sažima u točku M .

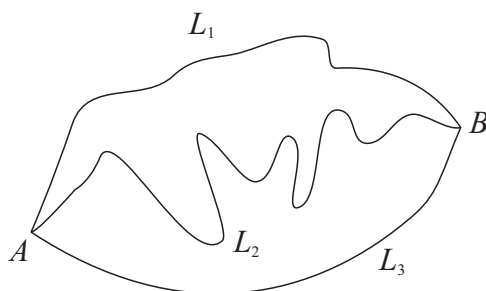
Rotacija vektorskog polja \vec{a} u točki M je vektor čiji je modul jednak najvećoj (površinskoj) gustoći cirkulacije u točki M , a smjer mu je okomit na plohu na kojoj se ta najveća gustoća cirkulacije postiže.

Prisjetimo se da je fizikalno značenje rotacije brzine (dvostruka) kutna brzina, $\text{rot } \vec{v} = 2\vec{\omega}$.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j}.$$

Teorem 5.10. *Krivuljni integral 2. vrste vektorskog polja \vec{a} definiranog na jednostruko povezanom području Ω po krivulji \overrightarrow{AB} ovisi samo o krajnjim točkama te krivulje ako i samo ako je cirkulacija od \vec{a} po svakoj zatvorenoj krivulji \vec{L} u Ω jednaka nuli.*

Integral polja \vec{a} ne ovisi o putu nego samo o početnoj i krajnjoj točki ako i samo ako je za svaku zatvorenu krivulju integral od \vec{a} po njoj jednak nuli. Taj uvjet nije lako provjeriti. Stokesov teorem nam daje efikasan način provjere.



Slika 5.46:

Teorem 5.11. *Krivuljni integral 2. vrste vektorskog polja \vec{a} ne ovisi o putu integracije ako i samo ako je polje \vec{a} bezvrtložno.*

(Ovdje smatramo da je polje \vec{a} glatko koliko treba i da je područje u kojem tvrdnja vrijedi jednostruko povezano.)

Teorem 5.12. *Krivuljni integral 2. vrste vektorskog polja \vec{a} ne ovisi o putu integracije ako i samo ako je polje \vec{a} potencijalno. Vrijednost krivuljnog integrala po krivulji \overrightarrow{AB} jednaka je razlici potencijala polja \vec{a} u krajnjoj i početnoj točki puta,*

$$\int_{\overrightarrow{AB}} \vec{a} \, d\vec{l} = u(B) - u(A).$$

Ovdje je $u(M)$ potencijal polja $\vec{a}(M)$.

Primjer 5.22.

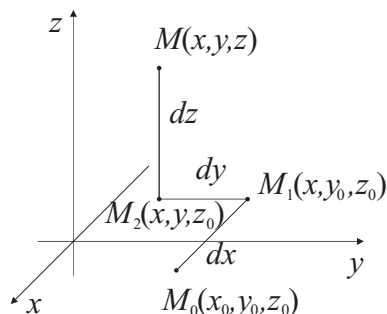
$$\int_{\overrightarrow{AB}} \vec{r} \, d\vec{l} = \frac{1}{2}(r^2(B) - r^2(A)),$$

jer je $\vec{r} = -\text{grad } \frac{r^2}{2}$.

Računanje potencijala u Kartezijevim koordinatama

Neka nam je zadano potencijalno vektorsko polje \vec{a} . Njegov potencijal $u(x, y, z)$ u nekoj točki $M(x, y, z)$ računamo po formuli

$$u(M) = \int_{M_0}^M \vec{a} \, d\vec{l} = \int_{M_0}^M (P \, dx + Q \, dy + R \, dz).$$



Slika 5.47:

Kako gornji integral ne ovisi o krivulji, izaberemo si put koji se sastoji od tri segmenta na kojima se mijenja samo po jedna koordinata:

$$\begin{aligned} u(M) &= \int_{M_0}^M \vec{a} \, d\vec{l} = \int_{M_0}^{M_1} \vec{a} \, d\vec{l} + \int_{M_1}^{M_2} \vec{a} \, d\vec{l} + \int_{M_2}^M \vec{a} \, d\vec{l} \\ &= \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) \, dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) \, dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) \, dz. \end{aligned}$$

Izbor početne točke M_0 nije bitan, promjena M_0 rezultira samo promjenom konstante.

Primjer 5.23. Pokažimo da je polje $\vec{a} = (y + z)\vec{i} + (z + x)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$ potencijalno i nađimo njegov potencijal $u(x, y, z)$.

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + z & z + x & x + y \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

Odaberemo $M_0 = (0, 0, 0)$. Tada je

$$u(x, y, z) = \int_0^x 0 \, dx + \int_0^y (x + 0) \, dy + \int_0^z (x + y) \, dz = xy + xz + yz + C.$$

5.9 Formule Newton - Leibnizovog tipa

Osnovni teorem integralnog računa je

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

gdje je $F(x)$ primitivna funkcija od $f(x)$, tj. $F' = f$.

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

Ova formula ima istu strukturu kao i formule iz Green - Gauss - Ostrogradski teorema, Stokesovog teorema i Greenove formule. S jedne strane je integral po području, s druge strane integral po rubu. U integralu po području funkcija (polje) se nalazi pod djelovanjem diferencijalnog operatora. U Newton - Leibnizovoj formuli taj operator je obična derivacija. U integralima po rubu pojavljuje se normala. U Newton - Leibnizovoj formuli rub se sastoji od dviju točaka, $(a, 0)$ i $(b, 0)$, a "normala" je predznak, u lijevom rubu negativan, a u desnom pozitivan. "Integral po rubu" se svodi na zbroj dviju vrijednosti primitivne funkcije.

Postoje i druge formule istog tipa:

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\Omega} \text{grad } \varphi dx dy dz &= \oint \oint_{\Sigma} \varphi \vec{n}_0 d\vec{S}; \\ \int \int \int_{\Omega} \text{rot } \vec{a} dx dy dz &= \oint \oint_{\Sigma} \vec{n}_0 \times \vec{a} dS; \\ \int \int \int_{\Omega} \Delta \varphi dx dy dz &= \oint \oint_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}_0} dS; \\ \int \int \int_{\Omega} \Delta f \cdot g dx dy dz &= \oint \oint_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} g dS - \int \int \int_{\Omega} \nabla f \nabla g dx dy dz. \end{aligned}$$