MATEMATIKA 2, 2.7.2014.

1. Riješite diferencijalne jednadžbe:

   (a) (5 bodova) $y' = y^2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x$,

   (b) (7 bodova) $y'' + 9y = 3\cos(3x)$.

2. Zadana je funkcija
$$f(x,y) = \varphi\left(x^2 - y^2\right),$$
gdje je $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka nepoznata glatka funkcija.

   (a) (6 bodova) Izračunajte
$$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

   (b) (6 bodova) Ukoliko je $\varphi(t) = t + \cos(t)$, odredite tangencijalnu ravninu na graf funkcije f u točki $\left(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}, ?\right)$.

3. Zadana je funkcija
$$f(x,y) = \frac{\sqrt[7]{\sin y - \frac{1}{2}}}{\sqrt[8]{x - y^2 + 2}} + \log_{10}(7 - x).$$

   (a) (8 bodova) Skicirajte prirodnu domenu funkcije f.

   (b) (4 boda) Izračunajte površinu prirodne domene funkcije f.

4. (12 bodova) Pronađite točke na elipsi $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$ kojima je zbroj koordinata najveći mogući.

5. (12 bodova) Izračunajte moment inercije u odnosu na os-z tijela gustoće
$$g(x,y,z) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
omeđenog plohama $x^2 + y^2 = 2y$, $z = 1$ i $z = 3$. Skicirajte tijelo.

6. Zadano je vektorsko polje
$$\vec{v} = e^x \sin y \vec{i} + e^x \cos y \vec{j} + \vec{k}.$$

   (a) (7 bodova) Pokažite da je $\vec{v}$ potencijalno i solenoidalno, te mu izračunajte potencijal.

   (b) (2 bodova) Izračunajte $\int_{\vec{\Gamma}} \vec{v}\, d\vec{s}$, gdje je $\vec{\Gamma}$ presjek cilindra $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$ i ravnine $x + 4y + 2z = 3$.

   (c) (7 bodova) Izračunajte masu dijela parabole $y = x^2$, $x \in [-1, 0]$, s linijskom gustoćom $g(x,y) = 2\sqrt{y}$.

7. (12 bodova) Izračunajte površinu dijela polusfere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$, koju isijeca cilindar $x^2 + y^2 = 3x$. Skicirajte plohu.

8. (12 bodova) Izračunajte tok vektorskog polja
$$\vec{w} = 2xy^3\vec{i} - \frac{y^4}{2}\vec{j} + 2z\vec{k}$$
kroz zatvorenu plohu koja se sastoji od dijelova ploha $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 6$ i $z = -x^2 - y^2$. Skicirajte plohu.

Najčešće pogreške studenata, prouzrokovane nedostatkom predznanja ili nerazumijevanjem. Pogreške sličnog tipa javljaju se i u svim ostalim rokovima iz Matematike 2.

1. (a) Integral $\int \frac{1}{y^2-1}\,dy$ **nije jednak** $\ln(y^2-1)$. Nazivnik treba faktorizirati, a zatim razlomak rastaviti na parcijalne razlomke.

   (b) Partikularno rješenje treba tražiti u obliku

   $$y_P = x \cdot (A\cos(3x) + B\sin(3x)).$$

   Najčešći krivi pokušaji bili su $y_P = A\cos(3x) + B\sin(3x)$ i $y_P = x \cdot A\cos(3x)$.

2. (a) Izraz $f(x,y) = \varphi(x^2-y^2)$ predstavlja kompoziciju funkcija, a ne produkt. Dakle, treba derivirati koristeći pravilo za deriviranje kompozicije, a ne produkta. Nikako se ne smije pisati $\varphi(x^2-y^2) = \varphi(x^2) - \varphi(y^2)$.

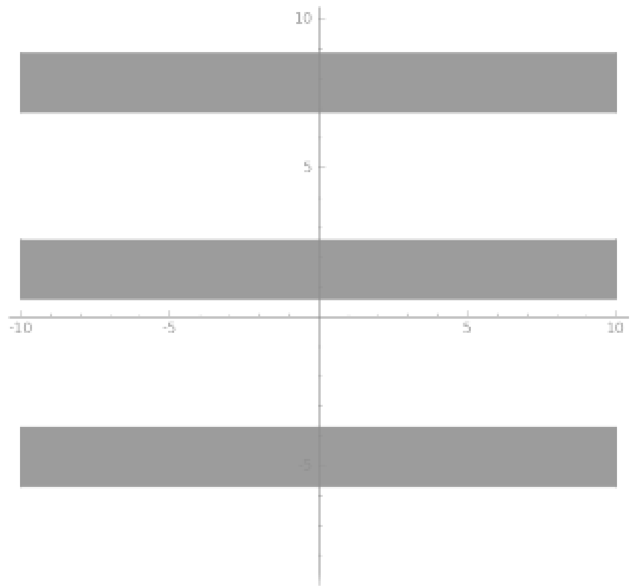
   (b) Treba izračunati kompoziciju:

   $$\varphi(\underbrace{x^2-y^2}_{=t}) = \underbrace{x^2-y^2}_{=t} + \cos(\underbrace{x^2-y^2}_{=t}).$$

   Dakle, traži se tangencijalna ravnina na graf funkcije $f(x,y) = x^2-y^2+\cos(x^2-y^2)$.

3. (a) Prirodna domena funkcije $\sqrt[7]{\ }$ (kao i bilo kojeg **neparnog** korijena) je cijeli $\mathbb{R}$, tj. nemamo nikakve uvjete na argument neparnog korijena. Drugim riječima, **nije potrebno** rješavati nejednadžbu $\sin y - \frac{1}{2} \geq 0$.

   Međutim, ta nejednadžba često nije bila uspješno riješena. Iako ne treba za ovaj zadatak, spomenut ću da se rješenje može iščitati iz trigonometrijske kružnice, i glasi $y \in \left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$. To bismo u koordinatnom sustavu skicirali kao uniju beskonačno mnogo horizontalnih pruga:

   (b)

4. Treba uočiti da se zapravo traži uvjetni ekstrem funkcije $f(x,y) = x + y$, uz uvjet $g(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 1 = 0$.

5.

6. (a) Ovaj primjer pokazuje da vektorsko polje može biti istovremeno potencijalno i solenoidalno. Dakle, ako znamo da neko vektorsko polje ima jedno od ta dva svojstva, ne možemo iz toga zaključiti da nema drugo svojstvo.

   (b) U (a) dijelu zadatka pronašli smo potencijal polja $\vec{v}$. Postoji formula za krivuljni integral 2. vrste potencijalnog polja:

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{v}\, d\vec{s} = \text{potencijal(krajnja točka)} - \text{potencijal(početka točka)} = 0,$$

   jer se lako vidi da je krivulja $\vec{\Gamma}$ zatvorena, pa se početna i krajnja točka podudaraju. Drugi način, po definiciji krivuljnog integrala, je duži. Treba prvo parametrizirati $\vec{\Gamma}$, a to možemo tako da joj prvo parametriziramo projekciju na xy-ravninu; dobijemo $x = 1 + \sqrt{3}\cos t$, $y = 2 + \sqrt{3}\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$). Zatim iz jednadžbe zadane ravnine izvučemo z i dobijemo

$$z = \frac{3}{2} - \frac{x}{2} - 2y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - 2\sqrt{3}\sin t - 3.$$

   (c) Parametriziramo parabolu: $x = t$, $y = t^2$, $t \in [-1, 0]$, i računamo:

$$\int_{\Gamma} g\, ds = \int_{-1}^{0} 2\sqrt{\mathbf{t^2}}\,\sqrt{1+4t^2}\, dt = \int_{-1}^{0} 2|\mathbf{t}|\,\sqrt{1+4t^2}\, dt = \int_{-1}^{0} 2(-\mathbf{t})\,\sqrt{1+4t^2}\, dt = \ldots$$

   Dakle, u ovom slučaju se ne "pokrati" $\sqrt{t^2} = t$, nego vrijedi $\sqrt{t^2} = -t$, jer je t negativan. Zbog te greške je većini studenata ispalo da je masa negativan broj.

7.

8.